

---

# Un modèle de gauchissement des coques

**Hedi Hassis**

*Laboratoire de Modélisation et Calcul des Structures  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis  
B.P 37 Le Belvédère 1002 Tunis Tunisie.*

---

*RÉSUMÉ. Le modèle de gauchissement des plaques développé dans [HAS 98] est étendu aux coques. Une théorie tenant compte de la déformation transverse de la fibre normale et considérant une distribution non uniforme des déplacements, des déformations et des contraintes a été construite. Cette théorie utilise les modes propres de la fibre normale (considérée comme une poutre géométrique) comme une base de fonctions. En utilisant seulement les modes de corps rigide, on retrouve les théories classiques. En utilisant les modes de déformations, une théorie d'ordre supérieur est construite. Cette théorie sera comparée aux théories classiques, aux théories d'ordre supérieur et aux solutions exactes à travers des problèmes de coques.*

*ABSTRACT. The warping high-order theory of plate deformation developed in [HAS 98] is extended here to shells. A theory of shell deformation is derived which accounts for the effects of transverse shear deformation and a non linear distribution of the in-surface displacements with respect to the thickness coordinate. This theory uses the normal modes associated to the normal fibre (considered such as a geometrical beam) as basis functions. Using only the rigid body modes, we find the classical theory and using the deformation normal modes, a high order theory is constructed. Our theory is compared with other theory and the exact solution through application to a particular problem of shells.*

*MOTS CLÉS : gauchissement, modes propres de la fibre normale, modes de déformation.*

*KEY WORDS : warping, normal modes of normal fibre, deformation modes.*

---

## 1. Introduction

Les plaques et les coques sont des milieux continus caractérisés par une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions de la surface moyenne. Cette caractéristique géométrique a été utilisée pour « simplifier » les modèles tridimensionnels et proposer des modèles qui exploitent les propriétés physiques induites par cette propriété géométrique. Des modèles ont été proposés pour décrire une cinématique de la fibre normale des plaques et des coques. Les cinématiques les plus connues sont celles de Kirchhoff-Love [KIR 1850, LOV 34] et de Reissner-Mindlin [REI 47, RES 85, MIN 51]. La cinématique de Kirchhoff stipule que la normale matérielle à la surface moyenne ne subit pas de dilatation et reste, en tant que normale matérielle, orthogonale à la surface moyenne déformée. Cette théorie induit des déformations et des contraintes de cisaillement transverse nulles. Les contraintes de cisaillement transverse ne peuvent plus être reliées aux déformations de cisaillement. Elles sont estimées à partir des équations d'équilibre.

Pour mieux estimer les cisaillements transverses, Reissner-Mindlin (aussi Bollé [BOL 47]) ont proposé deux rotations de la fibre normale et ont conservé la nullité de la déformation longitudinale de la fibre normale. Ce modèle prédit une distribution uniforme des contraintes de cisaillement selon la normale. Comme pour le cas des poutres, un facteur de correction (inspiré de la théorie des poutres) a été introduit sans pour autant résoudre le problème de violation des conditions aux limites aux niveaux de la face inférieure et supérieure de la plaque ou de la coque.

Des modèles d'ordre supérieur (dans le sens de développement selon la normale) ont été proposés. Le plus intéressant et le plus « complexe » est celui de Lo *et al.* [LO 77]. La complexité et les limites d'utilisation du modèle ont été signalées et discutées par les auteurs.

Nous proposons un modèle d'ordre supérieur qui exploite les propriétés physiques et mathématiques des modes propres de la fibre normale, considérée comme une poutre géométrique attachée à la surface moyenne. En utilisant seulement les modes de corps rigide, on retrouve les théories classiques de Reissner-Mindlin [REI 44, 45, MIN 51]. En utilisant les modes de déformations (qui gauchissent la fibre normale), une théorie d'ordre supérieur sera construite [HAS 98] : c'est le modèle de gauchissement des plaques et des coques. Cette théorie sera comparée aux théories classiques, à d'autres théories d'ordre supérieur et à la solution élastique à travers quelques exemples.

## 2. Nouvelle proposition

Avant de décrire cette théorie, il est nécessaire de rappeler et commenter les développements « récents » dans la modélisation des structures minces. Dans les

développements de Reissner [REI 44, 45], généralisant les théories classiques, l'effet des contraintes de cisaillement a été introduit. La théorie de Reissner utilise le champ de déplacement suivant :

$$\vec{U}(M) = \begin{cases} U_1(x^1, x^2, x^3) = u_1(x^1, x^2) + x^3 \beta_1(x^1, x^2) \\ U_2(x^1, x^2, x^3) = u_2(x^1, x^2) + x^3 \beta_2(x^1, x^2) \\ U_3(x^1, x^2, x^3) = u_3(x^1, x^2) \end{cases} \quad [ 1 ]$$

où M est un point de la coque. Les paramètres définissant la surface moyenne sont  $(x^1, x^2)$ . La coordonnée normale de la surface moyenne est  $x^3$ .  $(u_1, u_2, u_3)$  sont les composantes du champ de déplacement de la surface moyenne,  $(U_1, U_2, U_3)$  sont les composantes du champ de déplacement d'un point M de la coque et  $(\beta_1, \beta_2)$  sont les rotations de la fibre normale.

La relation [ 1 ] prédit une distribution, selon  $x^3$ , uniforme des contraintes de cisaillement: un facteur de correction a été introduit.

La seconde théorie utilise un champ de déplacement de la forme :

$$\vec{U}(M) = \begin{cases} U_1(x^1, x^2, x^3) = u_1(x^1, x^2) + x^3 \beta_1(x^1, x^2) \\ U_2(x^1, x^2, x^3) = u_2(x^1, x^2) + x^3 \beta_2(x^1, x^2) \\ U_3(x^1, x^2, x^3) = u_3(x^1, x^2) + x^3 \beta_3(x^1, x^2) + (x^3)^2 \zeta_3(x^1, x^2) \end{cases} \quad [ 2 ]$$

Cette théorie tient compte des déformations transverses. Le champ de déplacement [ 2 ] a été utilisé par Naghdi [NAG 57] pour construire une théorie générale des coques et par Essenberg [ESS 75] pour obtenir la théorie correspondante pour les plaques. Dans cette théorie, un facteur de correction a été utilisé ; utilisation non appropriée pour un champ de type [ 2 ] .

Pour les plaques, Nelson et Lorch [NEL 74], Reissner [REI 75 et 85] et Lo *et al.* [LO 77 a] ont présenté des théories d'ordre supérieur.

Dans la théorie de gauchissement proposée aux plaques dans [HAS 98], la distribution non uniforme du déplacement est assurée par un déplacement pris comme combinaison des modes propres de la fibre normale, considérée comme une poutre géométrique. Les six premiers modes de corps rigide aboutissent au modèle de Reissner-Mindlin. Le modèle de gauchissement des plaques est associé au champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} U_1(x^1, x^2, x^3) = u_1(x^1, x^2) + x^3 \beta_1(x^1, x^2) + W_1^n(x^1, x^2) \phi_n(x^3) \\ U_2(x^1, x^2, x^3) = u_2(x^1, x^2) + x^3 \beta_2(x^1, x^2) + W_2^n(x^1, x^2) \phi_n(x^3) \\ U_3(x^1, x^2, x^3) = u_3(x^1, x^2) + W_3^k(x^1, x^2) \Phi_k(x^3) \end{cases} \quad [ 3 ]$$

où  $\{\phi_n\}$  et  $\{\Phi_k\}$  sont respectivement le  $n$ -ième et le  $k$ -ème mode transverse et longitudinal (annexe 1) induisant des déformations de la fibre normale, considérée comme une poutre géométrique. Les fonctions  $(W_1^n, W_2^n, W_3^k)$  représentent la participation des modes de déformation dans le gauchissement de la fibre normale. Les fonctions  $\phi_n$  et  $\Phi_k$  sont appelées les coordonnées de gauchissement.

Pour des chargements particuliers de plaques ou bien pour une analyse dynamique à haute fréquence, les théories, à l'exception de celle de Lo [LO 77a] ou de gauchissement [HAS 98], ne donnent pas satisfaction concernant la non-uniformité de distribution des contraintes normales, des contraintes de cisaillement et du déplacement. Aussi dans le cas des plaques laminées, une théorie d'ordre supérieur doit être utilisée pour décrire la distribution non uniforme des contraintes et des déplacements [LO 77b].

Ce travail est l'extension aux coques de la théorie de gauchissement des plaques [HAS 98]. On y propose et évalue une théorie particulière de gauchissement des coques.

### 3. Champ de déplacement

Soit  $\{\phi_n\}$  le  $n$ -ième mode transverse (voir annexe 1) induisant des déformations de la fibre normale, considérée comme une poutre géométrique. Pour chaque fréquence propre, correspond deux modes : un selon la « première » direction du plan tangent et l'autre selon la « deuxième » direction du plan tangent.

La coque est caractérisée par une surface moyenne et une fibre normale. La surface moyenne est définie par la fonction vectorielle  $\vec{om}(x^1, x^2)$ . Les deux paramètres qui caractérisent la surface moyenne sont  $x^1$  et  $x^2$ . La coordonnée normale de la surface est  $x^3$ . La surface est aussi caractérisée par la base naturelle locale suivante  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n})$  définie par :

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{om}}{x^1} ; \vec{a}_2 = \frac{\vec{om}}{x^2} ; \vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|}$$

La base naturelle locale suivante  $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{n})$  est aussi utilisée:

$$\vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta ; \vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta \quad \text{avec } a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta ; a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta$$

$a_{..}$  et  $a^{..}$  sont respectivement le tenseur métrique deux fois covariant et deux fois contravariants ;  $\alpha, \beta, \lambda$ , etc. varient de 1 à 2 (la convention de sommation sur les indices répétés sera utilisée).

Dans ce travail, on présente deux champs de déplacement qui combinent la théorie de gauchissement et la théorie de Kirchhoff (pour la rotation de la fibre normale) ou la théorie de gauchissement et la théorie de Mindlin (pour la rotation de la fibre normale). Cette théorie sera appropriée aux champs de déplacement suivants :

- pour la théorie de gauchissement-Kirchhoff :

$$\vec{U}(M) = \left\{ \begin{array}{l} U_\lambda(x^1, x^2, x^3) = u_\lambda - x^3 (u_{3\lambda} + C_\lambda^\gamma u_\gamma) + \sum_n W_\lambda^n \phi_n(x^3) \\ U_3(x^1, x^2, x^3) = u_3 \end{array} \right\}_{(\vec{a}, \vec{n})} \quad [4a]$$

- pour la théorie de gauchissement-Mindlin:

$$\vec{U}(M) = \left\{ \begin{array}{l} U_\lambda(x^1, x^2, x^3) = u_\lambda + x^3 \beta_\lambda + \sum_n W_\lambda^n \phi_n(x^3) \\ U_3(x^1, x^2, x^3) = u_3 \end{array} \right\}_{(\vec{a}, \vec{n})} \quad [4b]$$

avec :  $(u_\lambda, u_3)$  sont les composantes du champ de déplacement de la surface moyenne écrites dans la base locale,  $(U_\lambda, U_3)$  sont les composantes du champ de déplacement d'un point de la coque écrites dans la base locale de la surface,  $C_{..}$  est le tenseur de courbure mixte,  $\beta_1$  est la rotation de la fibre normale.

La notation suivante sera utilisée :

$$\sum_n W_1^n \phi_n \equiv W_1^n \phi_n ; \vec{u}_\omega = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} ; \pi(\vec{u}_\omega) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ; \vec{W}^n = \begin{pmatrix} W_1^n \\ W_2^n \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les champs de déplacement définis par (4) contiennent les déformations hors plan et dans le plan. Le vecteur  $\vec{W}^n$  représente l'intensité de participation du mode n dans le gauchissement de la fibre normale. La figure 1 montre l'évolution des deux premiers modes transverses en fonction de  $\frac{x^3}{h}$  (h étant l'épaisseur de la coque). Le nombre de modes utilisés dépend de l'ordre de la théorie nécessaire.

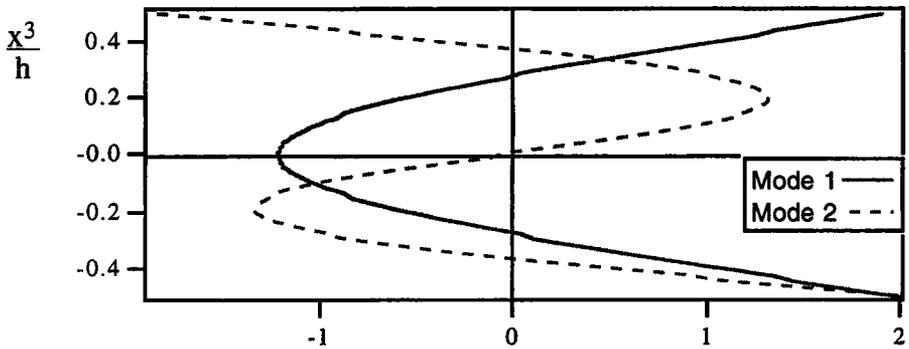


Figure 1. Les deux premiers modes transverses

#### 4. Equations d'équilibre

Les tenseurs de déformations et de contraintes sont définis en annexe 2. Les efforts généralisés utilisés sont :

$$\begin{aligned}
 [N] &= \begin{bmatrix} N^{11} & N^{12} \\ N^{21} & N^{22} \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{21} & M^{22} \end{bmatrix}; [P_n] = \begin{bmatrix} P_n^{11} & P_n^{12} \\ P_n^{21} & P_n^{22} \end{bmatrix} \\
 \vec{T} &= \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \end{pmatrix}; \vec{L}_n = \begin{pmatrix} L_n^1 \\ L_n^2 \end{pmatrix}; \vec{Q}_n = \begin{pmatrix} Q_n^1 \\ Q_n^2 \end{pmatrix} \quad [5]
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{bmatrix} N^{11} & N^{12} & N^{22} \\ M^{11} & M^{12} & M^{22} \\ P_n^{11} & P_n^{12} & P_n^{22} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ \phi_n \end{bmatrix} [\sigma^{11} \sigma^{12} \sigma^{22}] dx_3$$

$$\begin{bmatrix} T^1 & T^2 \\ L_n^1 & L_n^2 \\ Q_n^1 & Q_n^2 \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_n \\ \phi_{n,3} \end{bmatrix} [\sigma^{13} \sigma^{23}] dx_3$$

Les lois de comportement généralisées sont données par :

- pour la théorie de gauchissement-Kirchhoff :

$$\bar{\bar{N}} = D_2 [(1-\nu) \bar{\bar{\gamma}}(\vec{u}_\omega) + \nu \text{Tr}\{\bar{\bar{\gamma}}(\vec{u}_\omega)\} \cdot \bar{\bar{1}}] \quad [6a]$$

$$\bar{\bar{M}} = -D_1 [(1-\nu) \bar{\bar{K}}(\vec{u}_\omega) + \nu \text{Tr}\{\bar{\bar{K}}(\vec{u}_\omega)\} \cdot \bar{\bar{1}}] \quad [7a]$$

$$\bar{\bar{P}}_n = D_2 \left[ (1-\nu) \bar{\bar{\gamma}} \left( \Sigma_n \vec{W}^n \right) + \nu \text{Tr} \left( \bar{\bar{\gamma}} \left( \Sigma_n \vec{W}^n \right) \right) \cdot \bar{\bar{1}} \right] \quad [8a]$$

$$\vec{T} = D_3 \vec{W} \Theta_n \quad [9a]$$

$$\vec{L}_n = D_3 \left[ \Sigma_n \bar{\bar{C}} \cdot \vec{W}^n \right] \quad [10a]$$

$$\vec{Q}_n = D_3 \left[ \Xi_n \vec{W}^n \right] \quad [11a]$$

• pour la théorie de gauchissement-Mindlin :

$$\bar{\bar{N}} = D_2 \left[ (1-\nu) \bar{\bar{\gamma}}(\vec{u}_\omega) + \nu \text{Tr} \left\{ \bar{\bar{\gamma}}(\vec{u}_\omega) \right\} \cdot \bar{\bar{1}} \right] \quad [6b]$$

$$\bar{\bar{M}} = D_1 \left[ (1-\nu) \left( \bar{\bar{\gamma}}(\vec{\beta}) - \rho(\vec{u}_\omega) \right) + \nu \text{Tr} \left( \bar{\bar{\gamma}}(\vec{\beta}) - \rho(\vec{u}_\omega) \right) \cdot \bar{\bar{1}} \right] \quad [7b]$$

$$\bar{\bar{P}}_n = D_2 \left[ (1-\nu) \bar{\bar{\gamma}} \left( \Sigma_n \vec{W}^n \right) + \nu \text{Tr} \left( \bar{\bar{\gamma}} \left( \Sigma_n \vec{W}^n \right) \right) \cdot \bar{\bar{1}} \right] \quad [8b]$$

$$\vec{T} = D_3 \left[ \vec{\beta} + \vec{\nabla} u_3 + \bar{\bar{C}} \cdot \vec{u}_\omega + \vec{W} \Theta_n \right] \quad [9b]$$

$$\vec{L}_n = D_3 \left[ \Sigma_n \bar{\bar{C}} \cdot \vec{W}^n \right] \quad [10b]$$

$$\vec{Q}_n = D_3 \left[ \Theta_n \left( \vec{\beta} + \bar{\bar{C}} \cdot \vec{u}_\omega + \vec{\nabla} u_3 \right) + \vec{W} \Xi_n \right] \quad [11b]$$

où  $\bar{\bar{1}}$  est le tenseur unité.  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont les rigidités classiques définies par :

$$D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ; D_2 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} ; D_3 = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \quad [12]$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Les constantes utilisées dans les équations (6 à 11) sont définies par :

$$\Theta_n = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\phi_n)_{,3} dx_3 ; \Sigma_n = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\phi_n)^2 dx_3 ; \Xi_n = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\phi_n)_{,3} \cdot (\phi_n)_{,3} dx_3 \quad [13]$$

En considérant les déformations, les contraintes (définis en annexe 2) et les efforts généralisés (définis par (6)), l'utilisation du principe des travaux virtuels conduit aux équations d'équilibre suivantes (voir a annexes 3 et 4) :

• pour la théorie de gauchissement-Kirchhoff :

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta}{}_{\perp\beta} - 2M^{\lambda\beta}{}_{\perp\beta} C_\lambda^\alpha - M^{\lambda\beta} C_{\lambda\perp\beta}^\alpha + F^\alpha &= \rho h \ddot{u}^\alpha \\
 N^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} + (M^{\alpha\beta})_{\perp\alpha} - M^{\alpha\beta} C_\alpha^\lambda C_{\lambda\beta} + F^3 + m^\alpha{}_{\perp\alpha} &= \rho h \ddot{u}_3 \\
 (P_n^{\alpha\beta})_{\perp\beta} - Q_n^\alpha - C_\lambda^\alpha L_n^\lambda + F_n^\alpha &= \rho h \Sigma_n (\ddot{W}^\alpha)^n
 \end{aligned} \tag{14a}$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
 \text{div } \overline{\overline{N}} - 2\overline{\overline{C}} \cdot \text{div } \overline{\overline{M}} - \overline{\overline{V}} C : \overline{\overline{M}} + \overline{\overline{F}}_\omega &= \rho h \pi(\overline{\overline{u}}_\omega) \\
 \overline{\overline{N}} : \overline{\overline{C}} + \text{div}(\text{div} \overline{\overline{M}}) - (\overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{M}}) : \overline{\overline{C}} + F^3 + \text{div } \overline{\overline{m}}_\omega &= \rho h \ddot{u}_3 \\
 \text{div } \overline{\overline{P}}_n - \overline{\overline{Q}}_n - \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{L}}_n + \overline{\overline{F}}_n &= \rho h \Sigma_n \overline{\overline{W}}^n
 \end{aligned} \tag{15a}$$

• pour la théorie de gauchissement-Mindlin :

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta}{}_{\perp\beta} - (M^{\lambda\beta} C_\lambda^\alpha)_{\perp\beta} - C_\lambda^\alpha T^\lambda + F^\alpha &= \rho h \ddot{u}^\alpha \\
 M^{\alpha\beta}{}_{\perp\beta} - T^\alpha + m^\alpha &= \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}^\alpha \\
 N^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} + T^\alpha{}_{\perp\alpha} - M^{\alpha\beta} C_\alpha^\lambda C_{\lambda\beta} + F^3 &= \rho h \ddot{u}_3 \\
 (P_n^{\alpha\beta})_{\perp\beta} - Q_n^\alpha - C_\lambda^\alpha L_n^\lambda + F_n^\alpha &= \rho h \Sigma_n (\ddot{W}^\alpha)^n
 \end{aligned} \tag{14b}$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
 \text{div } \overline{\overline{N}} - \text{div}(\overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{M}}) - \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{T}} + \overline{\overline{F}}_\omega &= \rho h \pi(\overline{\overline{u}}_\omega) \\
 \text{div } \overline{\overline{M}} - \overline{\overline{T}} + \overline{\overline{m}}_\omega &= \frac{\rho h^3}{12} \overline{\overline{\beta}} \\
 \overline{\overline{N}} : \overline{\overline{C}} + \text{div}(\overline{\overline{T}}) - (\overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{M}}) : \overline{\overline{C}} + F^3 &= \rho h \ddot{u}_3 \\
 \text{div } \overline{\overline{P}}_n - \overline{\overline{Q}}_n - \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{L}}_n + \overline{\overline{F}}_n &= \rho h \Sigma_n \overline{\overline{W}}^n
 \end{aligned} \tag{15b}$$

avec :  $\pi(\overline{\overline{u}}_\omega)$  est la projection sur la surface du déplacement  $\overline{\overline{u}}_\omega$ ,  $\overline{\overline{F}}_\omega$  est la projection de la densité surfacique de forces sur le plan tangent de la surface,  $\overline{\overline{m}}_\omega$  est la projection de la densité surfacique de moments sur le plan tangent de la surface,  $\overline{\overline{F}}^n$  est l'intégrale sur l'épaisseur du produit entre les composantes planes de la densité volumique de forces et le  $n$ -ième mode transverse.

Pour une coque soumise à une densité surfacique de forces appliquée sur la surface définie par  $\partial\omega_X$ - $h/2$ ,  $h/2$  ( $\omega$  est le contour de la surface moyenne  $\omega$ ), les conditions aux limites sont :

• pour la théorie de gauchissement-Kirchhoff :

$$\begin{aligned} & - N^{\alpha\beta} v_\beta + 2M^{\lambda\beta} C_\lambda^\alpha v_\beta + F_S^\alpha = 0 \\ & - \left( M^{\alpha\beta} \right)_{\perp\beta} v_\alpha - \left( M^{\alpha\beta} v_\beta \right)_{\perp\alpha} + F_S^3 = 0 \\ & - P_n^{\alpha\beta} v_\beta + \left( F_S^g \right)_n = 0 \end{aligned} \quad [ 16a ]$$

ou bien :

$$\begin{aligned} & \bullet - \overline{\overline{N}} \cdot \vec{v} + 2\overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \vec{v} + \left( \vec{F}_\omega \right)_s = 0 \\ & \bullet - \left( \text{div } \overline{\overline{M}} \right) \cdot \vec{v} - \text{div} \left( \overline{\overline{M}} \cdot \vec{v} \right) + F_S^3 = 0 \\ & \bullet - \left( \overline{\overline{P}} \right)_n \cdot \vec{v} + \left( \vec{F}_s \right)_n = 0 \end{aligned} \quad [ 17a ]$$

• pour la théorie de gauchissement-Mindlin :

$$\begin{aligned} & - N^{\alpha\beta} v_\beta + M^{\lambda\beta} v_\lambda C_\beta^\alpha + F_S^\alpha = 0 \\ & - M^{\alpha\beta} v_\beta + m_s^\alpha = 0 \\ & - T^\alpha v_\alpha + F_S^3 = 0 \\ & - P_n^{\alpha\beta} v_\beta + \left( F_S^g \right)_n = 0 \end{aligned} \quad [ 16b ]$$

ou bien :

$$\begin{aligned} & \bullet - \overline{\overline{N}} \cdot \vec{v} + \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \vec{v} + \left( \vec{F}_\omega \right)_s = 0 \\ & \bullet - \overline{\overline{M}} \cdot \vec{v} + \left( \vec{m}_\omega \right)_s = \vec{0} \\ & \bullet - \overline{\overline{T}} \cdot \vec{v} + F_S^3 = 0 \\ & \bullet - \left( \overline{\overline{P}} \right)_n \cdot \vec{v} + \left( \vec{F}_s \right)_n = 0 \end{aligned} \quad [ 17b ]$$

avec :  $\left( \vec{F}_\omega \right)_s$  est la projection de la densité linéique de forces de bord sur le plan tangent de la surface,  $\left( \vec{m}_\omega \right)_s$  est la projection de la densité linéique de moments de bord sur le plan tangent de la surface,  $\left( F_S^g \right)_n$  est l'intégrale sur l'épaisseur du produit entre les composantes planes de la densité surfacique de forces de bord et le  $n$ -ième mode transverse.

## 5. Evaluation de la théorie de gauchissement pour les coques

### 5.1. Exemple 1

Soit une coque cylindrique dont le rayon intérieur et extérieur sont respectivement  $R_1$  et  $R_2$  (voir figure 2).

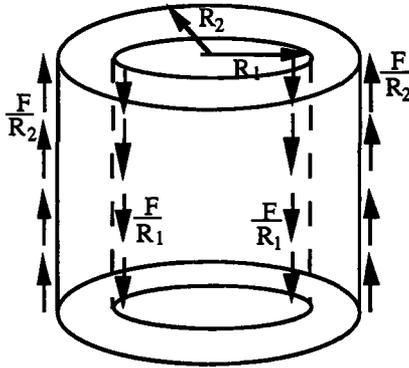


Figure 2. Coque cylindrique

La coque cylindrique est soumise à une distribution de forces  $\frac{F}{R_1}$  appliquée sur la face interne et une distribution de forces  $\frac{F}{R_2}$  appliquée sur la face externe.

La contrainte de cisaillement donnée par la solution analytique élastique est :

$$\sigma_{rz} = \frac{F}{r} \tag{18}$$

La contrainte de cisaillement par la théorie de gauchissement est :

$$\sigma_{rz} = \frac{D_3}{h} \left[ \beta_1 + \frac{\varphi_n}{x^3} W_1^n \right] \tag{19}$$

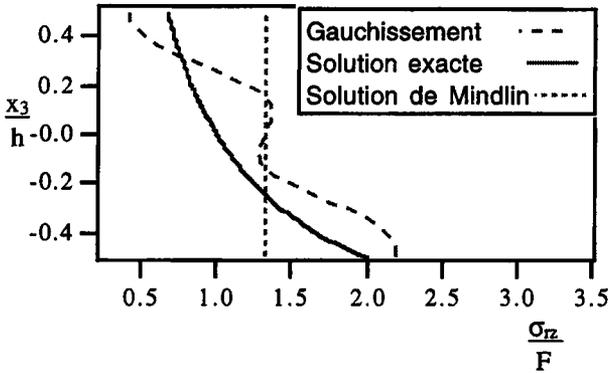
avec :

$$\begin{cases} W_1^n = \frac{F}{D_3(\Xi_n - \Theta_n^2)} \left[ \frac{\varphi_n\left(-\frac{h}{2}\right)}{R_2} - \frac{\varphi_n\left(\frac{h}{2}\right)}{R_1} - \frac{\Theta_n h}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \\ \beta_1 = -\Theta_n W_1^n - \frac{Fh}{2D_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{cases}$$

En utilisant le modèle de Reissner-Mindlin, la contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\sigma_{rz} = -\frac{F}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{20}$$

La contrainte de cisaillement calculée par la théorie de gauchissement (équation 19) et par celle de Reissner-Mindlin (équation 20) sont comparées (voir figure 3) avec la solution élastique exacte (équation 18).



**Figure 3.** Distribution de la contrainte de cisaillement pour une coque cylindrique ( $R_1 = 4 \text{ m}$ ;  $R_2 = 5 \text{ m}$ ;  $h = 1 \text{ m}$ )

En utilisant seulement le mode 2 (mode antisymétrique), la non uniformité de distribution de la contrainte de cisaillement est assurée. L'erreur maximum de la théorie de gauchissement est de 5.19 % et celle de la théorie de Reissner-Mindlin est de 12.27%.

## 5.2. Exemple 2

Soit une coque cylindrique (de rayon  $R$ , de hauteur  $H$  et d'épaisseur  $h$ ) soumise à une densité linéique sur les deux bords ( $x^1 = -H/2$  et  $x^1 = H/2$ ).

Les deux cas de charges considérés sont définis par (voir aussi la figure 4) :

Cas 1:

$$\vec{f}_s = q\delta(x^3) \vec{a}_1 \text{ sur le bord } x^1 = -\frac{H}{2}$$

$$\vec{f}_s = -q\delta(x^3) \vec{a}_1 \text{ sur le bord } x^1 = \frac{H}{2}$$

Cas 2:

$$\vec{f}_s = \frac{q}{2} \delta(x^3 - h/4) \vec{a}_1 \text{ sur le bord } x^1 = -\frac{H}{2}$$

$$\vec{f}_s = \frac{q}{2} \delta(x^3 + h/4) \vec{a}_1 \text{ sur le bord } x^1 = -\frac{H}{2}$$

$$\vec{f}_s = -\frac{q}{2} \delta(x^3 - h/4) \vec{a}_1 \text{ sur le bord } x^1 = \frac{H}{2}$$

$$\vec{f}_s = -\frac{q}{2} \delta(x^3 + h/4) \vec{a}_1 \text{ sur le bord } x^1 = \frac{H}{2}$$

$\vec{a}_1$  est le premier vecteur tangent de la surface (associé au paramètre  $x^1$ ),  $\delta$  est la fonction de Dirac et  $q$  est une constante.

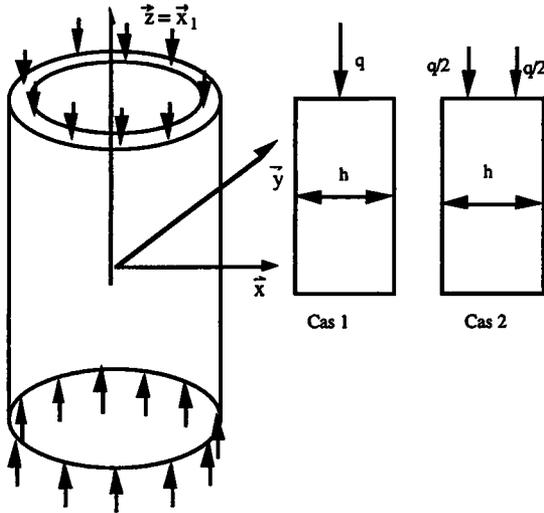


Figure 4. Coque cylindrique soumise à deux cas de charge dans son plan

5.2.1. Théorie de Reissner Mindlin

La solution de Reissner-Mindlin est :

$$N_{11} = -q ; N_{12} = 0 ; N_{22} = -\nu R^2 N_{11} ; u_1 = -\frac{q}{D_2} x^1$$

5.2.2. Théorie de Lo

Le champ de déplacement considéré est :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_1(x^1) + W_1(x^1)(x^3)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{n})$$

Les efforts généralisés s'écrivent sous la forme suivante :

$$N = D_2 \left[ (1-\nu) \gamma(\vec{u}_\omega) + \nu \text{Tr} \{ \gamma(\vec{u}_\omega) \} \cdot \vec{1} \right] + D_1 \left[ (1-\nu) \gamma(\vec{W}) + \nu \text{Tr} \{ \gamma(\vec{W}) \} \cdot \vec{1} \right]$$

$$P^1 = D_1 \left[ (1-\nu) \gamma(\vec{u}_\omega) + \nu \text{Tr}(\gamma(\vec{u}_\omega)) \cdot \vec{1} \right] + D_4 \left[ (1-\nu) \gamma(\vec{W}) + \nu \text{Tr}(\gamma(\vec{W})) \cdot \vec{1} \right]$$

$$\vec{Q}^1 = 2 D_1 \vec{W}$$

avec :  $\vec{u}_\omega = \begin{vmatrix} u_1 \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{a}^1, \vec{a}^2)}$  ;  $\vec{W} = \begin{vmatrix} W_1 \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{a}^1, \vec{a}^2)}$

( $D_1, D_2, D_3$ ) sont définis par l'équation (12) et  $D_4$  est la rigidité définie par :

$$D_4 = \frac{Eh^5}{80(1-\nu^2)}$$

La solution en déplacement de Lo est donnée par :

$$u_1 = - \frac{\lambda_1 \left( F_s^1 + \frac{D_1}{D_2} q \right) \sinh(\lambda_1 x^1)}{2D_2 \cosh\left(\lambda_1 \frac{H}{2}\right)} - \frac{q}{D_2} x^1 ; \quad W_1 = \frac{\lambda_1 \left( F_s^1 + \frac{D_1}{D_2} q \right) \sinh(\lambda_1 x^1)}{2D_1 \cosh\left(\lambda_1 \frac{H}{2}\right)}$$

$$\text{avec } (\lambda_1)^2 = \frac{2D_1}{D_4 - \frac{(D_1)^2}{D_2}}$$

avec : cas1:  $F_s^1 = 0$  ; cas2:  $F_s^1 = \frac{h^2}{8} q$

Les efforts généralisés sont :

$$N_{11} = - \frac{q}{D_2} ; \quad N_{12} = 0 ; \quad N_{22} = \nu R^2 N_{11}$$

$$P_{11}^1 = \frac{\left( F_s^1 + \frac{D_1}{D_2} q \right) \cosh(\lambda_1 x^1)}{\cosh\left(\lambda_1 \frac{H}{2}\right)} - \frac{D_1}{D_2} q ; \quad P_{12}^1 = 0 ; \quad P_{22}^1 = \nu R^2 P_{11}^1$$

### 5.2.3. Théorie de gauchissement

Le champ de déplacement considéré est :

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} u_1(x^1) + W_1^n(x^1) \phi_n(x^3) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{n})}$$

La solution en déplacement de la théorie de gauchissement est donnée par :

$$u_1 = -\frac{q}{D_2} x^1 ; W_1^n = \frac{\sinh(\lambda^n x^1)}{\Sigma_n D_2 \lambda_2^n \cosh\left(\lambda^n \frac{H}{2}\right)} F_s^n \text{ avec } (\lambda^n)^2 = \frac{D_3}{D_2} \Xi_n$$

$\Sigma_n$  et  $\Xi_n$  sont définis par l'équation 13.

Les lois de comportement généralisées sont :

$$\begin{aligned} N &= D_2 \left[ (1-\nu) \gamma(\vec{v}_\omega) + \nu \text{Tr}\{\gamma(\vec{v}_\omega)\} \cdot \vec{1} \right] \\ P^1 &= D_2 \Sigma_1 \left[ (1-\nu) \gamma(\vec{W}) + \nu \text{Tr}(\gamma(\vec{W})) \cdot \vec{1} \right] \\ \vec{Q}^1 &= D_3 \Xi_1 \vec{W} \end{aligned}$$

Les efforts généralisés sont :

$$\begin{aligned} N_{11} &= -\frac{q}{D_2} ; N_{12} = 0 ; N_{22} = \nu R^2 N_{11} \\ P_{11}^1 &= \frac{\cosh(\lambda^n x^1)}{\cosh\left(\lambda^n \frac{H}{2}\right)} (F_s^n) ; P_{12}^1 = 0 ; P_{22}^1 = \nu R^2 P_{11}^1 \\ \text{cas1: } (F_s^n) &= -q \phi_n(0) ; \text{cas2: } (F_s^n) = -\frac{q}{2} \left[ \phi_n\left(\frac{h}{4}\right) + \phi_n\left(-\frac{h}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

L'évolution du déplacement dans le plan de la coque en fonction de la coordonnée normale est donnée par la figure 5.

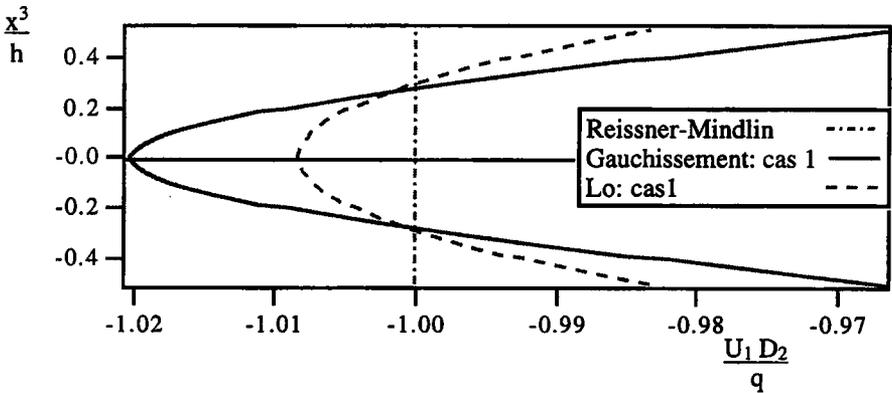
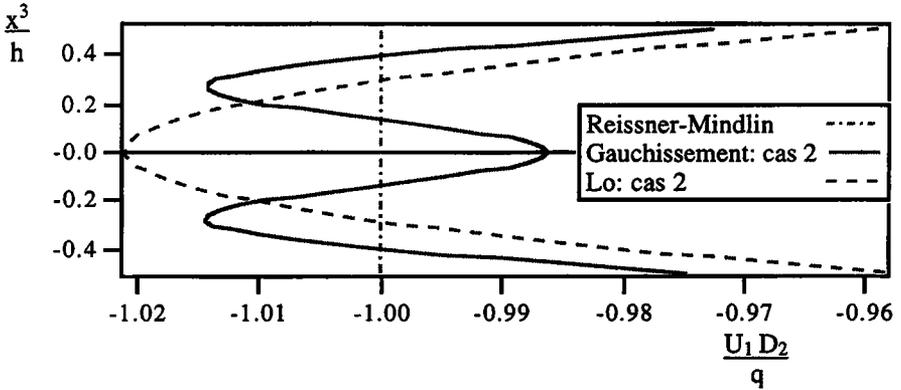


Figure 5a. Evolution du déplacement dans le plan en fonction de la coordonnée normale  $x^3$  pour le cas de charge 1



**Figure 5b.** Evolution du déplacement dans le plan en fonction de la coordonnée normale  $x^3$  pour le cas de charge 2

La théorie de Lo ne dispose pas suffisamment de fonctions pour distinguer les deux cas de charges. Pour la théorie de gauchissement, le mode 1 a été utilisé pour le cas 1 et les deux premiers modes ont été utilisés pour le cas 2.

## 6. Discussion – Conclusion

Le modèle de gauchissement proposé aux plaques [HAS 98] a été étendu aux coques. Pour la rotation de la fibre normale, deux modèles ont été retenus : le modèle de Kirchhoff et celui de Reissner-Mindlin.

Les déformations, les contraintes et les efforts généralisés ont été définis. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites, relatives au modèle de gauchissement, ont été déterminées.

Des exemples d'application ont été proposés. Notons que la limite du domaine d'application de toute théorie d'ordre supérieur a été signalé depuis 1977 par Lo *et al.* ([LO 77a]).

Pour les problèmes de coque présentés ici (et les exemples présentés dans [HAS 98]), le modèle de Reissner-Mindlin ne donne pas satisfaction. La théorie de gauchissement peut reproduire une distribution non uniforme des contraintes et du déplacement.

Cette théorie est utile pour les problèmes faisant intervenir des variations spatiales rapides (problème de fluctuation de pression de fluide sur une plaque : les longueurs d'onde peuvent être petites), les vibrations à haute fréquences (mode de longueur d'onde voisine de l'épaisseur), les multicouches...

Vu l'ordre supérieur de cette théorie, il n'est pas pratique de l'utiliser pour les problèmes « classiques ». Les exemples de la plaque infinie et la plaque circulaire présentés dans Hassis 1998 et ces exemples (voir aussi [LO 77a et 77b]) peuvent guider sur l'intérêt de l'utilisation ou non de cette théorie.

La théorie de gauchissement peut être étendue aux plaques multicouches. Il est bien connu que pour les plaques multicouches, la distribution du déplacement est fortement non linéaire en fonction de l'épaisseur de la plaque ([Lo, 1977b]).

## 11. Bibliographie

- [BOL 47] BOLLE E., Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique, Bulletin Technique de la Suisse romande, Vol. 73 p. 281-285 et p. 293-298, 1947.
- [DES 86] DESTUYNDER PH., *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*, Masson, 1986.
- [DES 90] DESTUYNDER PH., *Modélisation des coques minces élastiques*, Masson, 1990.
- [ESS 75] ESSENBERG F., « On the significance of the Inclusion of the Effects of Transverse Normal Strain in Problems Involving Beams With Surface Constraints », *J. Applied Mechanics*, Vol. 42 N° 1, p. 127-132, 1975.
- [GIB 88] GIBERT R. J., *Vibration des structures*, Eyrolles, 1988.
- [HAS 98] HASSIS H., « A warping Theory of Plate Deformation », *European Journal of Mechanics*, Vol. 17 N°5 p. 843-853, 1998.
- [KIR 1850] KIRCHHOFF G., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *J. Reine Angew Math* 40, p. 51-58, 1850.
- [LO 77a] LO K. H., CHRISTENSEN R. M, and WU E. M., « A High Order Theory of Plate Deformation », Part 1 : Homogeneous Plates, *J. Applied Mechanics*, Vol. n° 44, p. 663-676, 1977.
- [LO 77 b] LO K. H., CHRISTENSEN R. M, and WU E. M., « A High Order Theory of Plate Deformation », Part 2 : Laminated Plates, *J. Applied Mechanics*, Vol. n° 44, p. 663-676, 1977.
- [LOV 47] LOVE AEH., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1934.
- [MIN 51] MINDLIN R. D., « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates », *J. Appl. Mech.* 18, p. 31-38, 1951.
- [NAG 57] NAGHDI P.M., « On the theory of thin Elastic shells Quarterly of Applied Mathematics », Vol. 14 p. 369-380. *J. Applied Mechanics*, Vol. 44, p. 663-676, 1957.

- [NEL 74] NELSON R. B. and LORCH D. R., « A Refined Theory of Laminated Orthotropic Plates », *J. Applied Mechanics* Vol. 41 N°1 Trans. ASME Vol. 96 Series E, March 1974, p. 177-183, 1974.
- [REI 44] REISSNER E., « On the Theory of Bending of Elastic Plates », *J. of Mathematics and Physics*, Vol. 23, p. 184-191, 1944.
- [REI 45] REISSNER E., « The effects of transverse shear deformation on Bending of Elastic Plates », *J. of Applied Mechanics*, Vol. 12, N° 2 p 69-77, 1945.
- [REI 75] REISSNER E., « On Transverse Bending of Plates including the Effects of Transverse shear deformation », *International J. of Solids and Structures*, Vol. 11, p. 569-573, 1975.
- [REI 85] REISSNER E., « Reflections on the Theory of Elastic Plates », *Applied Mechanics Rev.*, Vol. 38, N° 11 p. 1453-1464, 1985.

## 7. Annexe 1

Les modes de flexion d'une poutre libre-libre sont donnés par [GIB 88] :

$$\phi_n = \cos\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) - R_n \left[ \sin\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) \right]$$

Les coefficients  $\alpha_n$  et  $R_n$  prennent les valeurs suivantes :

$$R_1 = 0.9825; R_2 = 1.0008; R_3 = 1.0000; R_4 = 1.0000.$$

$$\alpha_1 = 4.730; \alpha_2 = 7.853; \alpha_3 = 10.996; \alpha_4 = 14.137.$$

Les modes de traction-compression d'une poutre libre-libre sont donnés par :

$$\Phi_k = \cos\left(k\pi\left(\frac{x_3}{h} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

## 8. Annexe 2

### *Tenseur des déformations*

La coque non déformée et la coque déformée sont caractérisées par :

Coque non déformée	Coque déformée
<ul style="list-style-type: none"> <li>• surface: <math>\vec{0m}(x^1, x^2) ; (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n})</math></li> <li>• Coque : <math>\vec{0M} = \vec{0m} + x^3 \vec{n}</math></li> <li>• base naturelle de la coque: <math>(\vec{A}_\alpha, \vec{n})</math></li> </ul> $\vec{A}_\alpha = \frac{\vec{0M}}{x^\alpha} = \vec{a}_\alpha + x^3 \frac{\vec{n}}{x^\alpha} = \vec{a}_\alpha - x^3 C_{\alpha\lambda}^{\lambda} \vec{a}_\lambda$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• surface: <math>\vec{0m}' = \vec{0m} + \vec{u}_\omega ; (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{n}')</math></li> <li>• Coque : <math>\vec{0M}' = \vec{0m} + x^3 \vec{n}' + \vec{U}</math></li> <li>• base naturelle de la coque: <math>(\vec{A}'_\alpha, \vec{A}'_3)</math></li> </ul> $\vec{A}'_\alpha = \frac{\vec{0M}'}{x^\alpha} = \vec{A}_\alpha + \frac{\vec{U}}{x^\alpha}$ $\vec{A}'_3 = \frac{\vec{0M}'}{x^3} = \vec{n} + \frac{\vec{U}}{x^3}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• tenseur métrique : <math>\begin{bmatrix} A_{\alpha\beta} &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• tenseur métrique : <math>\begin{bmatrix} A'_{\alpha\beta} &amp; A'_{\alpha 3} \\ A'_{3\alpha} &amp; 1 \end{bmatrix}</math></li> </ul> $A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + A_{\alpha\gamma} \frac{\vec{U}}{x^\beta} + A_{\gamma\beta} \frac{\vec{U}}{x^\alpha}$ $A'_{\alpha 3} = \left( \vec{n} + \frac{\vec{U}}{x^3} \right) \cdot \left( \vec{A}_\alpha + \frac{\vec{U}}{x^\alpha} \right)$

avec :

$$\frac{\vec{U}}{x^\alpha} = [U_{\lambda\perp\alpha} - U^3 C_{\lambda\alpha}^{\lambda}] \vec{a}^\lambda + [U^3_{,\alpha} + U_\lambda C_{\alpha}^{\lambda}] \vec{n} ; U_{\lambda\perp\alpha} = \frac{U_\lambda}{x^\alpha} - U_\gamma \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma \text{ et } U^3_{,\alpha} = \frac{U^3}{x^\alpha}.$$

$U_{\alpha\perp\beta}$  est la dérivée covariante ;  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  sont les coefficients de Cristoffel.

En utilisant les développements précédents, les composantes du tenseur des déformations associé à (4) s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{A}'_\alpha \cdot \frac{\vec{U}}{x^\beta} + \vec{A}'_\beta \cdot \frac{\vec{U}}{x^\alpha} \right\} \\ 2\epsilon_{\alpha 3} &= \left\{ \vec{n} \cdot \frac{\vec{U}}{x^\alpha} + \frac{\vec{U}}{x^3} \cdot (\vec{a}_\alpha - x^3 C_{\alpha\lambda}^{\lambda}) \right\} \end{aligned} \quad [A.2.1a]$$

En utilisant les composantes du déplacement dans la base naturelle locale, l'équation A.2.1a devient :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{a}_{\alpha} \cdot \frac{\vec{U}}{x^{\beta}} + \vec{a}_{\beta} \cdot \frac{\vec{U}}{x^{\alpha}} - x^3 C_{\alpha}^{\lambda} \vec{a}_{\lambda} \cdot \frac{\vec{U}}{x^{\beta}} - x^3 C_{\beta}^{\lambda} \vec{a}_{\lambda} \cdot \frac{\vec{U}}{x^{\alpha}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & (U_{\alpha\perp\beta} + U_{\beta\perp\alpha} - 2 U_3 C_{\alpha\beta}) \\ & - x^3 (U_{\lambda\perp\alpha} C_{\beta}^{\lambda} + U_{\lambda\perp\beta} C_{\alpha}^{\lambda} - 2 U_3 C_{\alpha}^{\lambda} C_{\lambda\beta}) \end{aligned} \right\} \\
 2\varepsilon_{\alpha 3} &= (U_{3\alpha} + U_{\alpha,3}) + U_{\lambda} C_{\alpha}^{\lambda} - x^3 U_{\lambda,3} C_{\alpha}^{\lambda}
 \end{aligned} \quad [A.2.1b]$$

En petits déplacements, le tenseur des déformations devient :

- pour la théorie de gauchissement-Kirchhoff :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) - x^3 K_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) + \varphi_n \gamma_{\alpha\beta}(\vec{W}^n) \\
 2\varepsilon_{\alpha 3} &= \varphi_{n,3} W_{\alpha}^n + \varphi_n W_{\lambda}^n C_{\alpha}^{\lambda}
 \end{aligned} \quad [A.2.2a]$$

- pour la théorie de gauchissement-Mindlin :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) + x^3 \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\beta}) - x^3 \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) + \varphi_n \gamma_{\alpha\beta}(\vec{W}^n) \\
 2\varepsilon_{\alpha 3} &= (\beta_{\alpha} + u_{\lambda} C_{\alpha}^{\lambda} + u_{3\alpha}) + (\varphi_{n,3} W_{\alpha}^n + \varphi_n W_{\lambda}^n C_{\alpha}^{\lambda})
 \end{aligned} \quad [A.2.2b]$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{V}) = \frac{1}{2} (V_{\beta\perp\alpha} + V_{\alpha\perp\beta}) - V^3 C_{\alpha\beta} \\ K_{\alpha\beta}(\vec{V}) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & [V^3, \alpha]_{\perp\beta} + [V^3, \beta]_{\perp\alpha} + [V_{\lambda} C_{\alpha}^{\lambda}]_{\perp\beta} + [V_{\lambda} C_{\beta}^{\lambda}]_{\perp\alpha} \\ & + V_{\lambda\perp\alpha} C_{\beta}^{\lambda} + V_{\lambda\perp\beta} C_{\alpha}^{\lambda} - 2V^3 C_{\alpha}^{\lambda} C_{\lambda\beta} \end{aligned} \right\} \\ \rho_{\alpha\beta}(\vec{V}) = \frac{1}{2} (V_{\lambda\perp\alpha} C_{\beta}^{\lambda} + V_{\lambda\perp\beta} C_{\alpha}^{\lambda}) - V^3 C_{\alpha}^{\lambda} C_{\lambda\beta} \end{cases}$$

$\gamma$  et  $K$  sont respectivement le tenseur de déformation membranaire et de variation de courbure. Pour les coques très minces, les composantes du tenseur  $\rho_{\alpha\beta}$  peuvent être négligées ; la théorie sera celle de Novozhilov-Donnell [DES 86, DES 90].

### Tenseur des contraintes

En élasticité linéaire isotrope, les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent :

- pour la théorie de gauchissement-Kirchhoff :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \begin{aligned} & (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega} + \varphi_n \vec{W}^n) + \nu \text{Tr} \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega} + \varphi_n \vec{W}^n) \right\} \\ & - (1-\nu) x^3 K_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) - \nu \text{Tr} \left\{ x^3 K_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) \right\} \end{aligned} \right] \\
 \sigma_{\alpha 3} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \varphi_{n,3} W_{\alpha}^n + \varphi_n W_{\lambda}^n C_{\alpha}^{\lambda} \right]
 \end{aligned} \quad [A.2.3a]$$

• pour la théorie de gauchissement-Mindlin :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1-\nu) \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega + x^3 \vec{\beta} + \varphi_n \vec{W}^n) - x^3 \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \nu \text{Tr} \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega + x^3 \vec{\beta} + \varphi_n \vec{W}^n) - x^3 \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega) \right\} \right] \quad [ A 2.3b ] \\ \sigma_{\alpha 3} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ (\beta_\alpha + u_\lambda C_\alpha^\lambda + u_{3,\alpha}) + (\varphi_{n,3} W_\alpha^n + \varphi_n W_\lambda^n C_\alpha^\lambda) \right] \end{aligned}$$

où E est le module de Young et n le coefficient de Poisson, a et b varient de 1 à 2.

### 9. Annexe 3

Pour le modèle de gauchissement-Kirchhoff, le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit (pour la densité volumique  $\vec{f}_v$  et la densité surfacique  $\vec{f}_s$ ) :

$$\begin{aligned} W_e &= \int_\omega \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [f_v^\alpha u_\alpha - f_v^3 (u_{3,\alpha} + C_\alpha^\lambda u_\lambda) + f_v^\alpha \varphi_n W_\alpha^n + f_v^3 u_3] dx^3 d\omega + \\ &\quad \int_{\partial\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [f_s^\alpha u_\alpha - f_s^3 (u_{3,\alpha} + C_\alpha^\lambda u_\lambda) + f_s^\alpha \varphi_n W_\alpha^n + f_s^3 u_3] dx^3 d\Gamma \\ W_e &= \int_\omega [F^\alpha u_\alpha - m^\alpha (u_{3,\alpha} + C_\alpha^\lambda u_\lambda) + F_n^\alpha W_\alpha^n + F^3 u_3] d\omega + \\ &\quad \int_{\partial\omega} [F_s^\alpha u_\alpha - m_s^\alpha (u_{3,\alpha} + C_\alpha^\lambda u_\lambda) + (F_s^\alpha)^n W_\alpha^n + F_s^3 u_3] d\Gamma \\ &= \int_\omega [F^\alpha u_\alpha + m_{\perp\alpha}^\alpha u_3 - m^\alpha C_\alpha^\lambda u_\lambda + F_n^\alpha W_\alpha^n + F^3 u_3] d\omega + \\ &\quad \int_{\partial\omega} [F_s^\alpha u_\alpha + m_{s\perp\alpha}^\alpha u_3 - m_s^\alpha C_\alpha^\lambda u_\lambda + (F_s^\alpha)^n W_\alpha^n + F_s^3 u_3] d\Gamma \end{aligned}$$

$$\text{avec : } F^{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_v^{\alpha} dx^3 ; m^{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 f_v^{\alpha} dx^3 ; F_n^{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \phi_n f_v^{\alpha} dx^3$$

$$F_s^{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_s^{\alpha} dx^3 ; m_s^{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 f_s^{\alpha} dx^3 ; (F_s^{\alpha})^n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \phi_n f_s^{\alpha} dx^3$$

Pour le modèle de gauchissement-Kirchhoff, le travail virtuel des efforts intérieurs s'écrit :

$$W_i = - \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\alpha\beta} [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) - x^3 K_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) + \varphi_n \gamma_{\alpha\beta}(\vec{W}^n)] dx^3 d\omega$$

$$- \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\alpha\lambda} [\varphi_{n,3} W_{\alpha}^n + \varphi_n C_{\alpha}^{\lambda} W_{\lambda}^n] dx^3 d\omega$$

En utilisant les efforts généralisés définis par (8), le travail virtuel des efforts intérieurs devient :

$$W_i = - \int_{\omega} [N^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_{\omega}) - M^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}(\vec{\beta}) + P_n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{W}^n)] d\omega$$

$$- \int_{\omega} [Q_n^{\alpha} W_{\alpha}^n + L_n^{\alpha} C_{\alpha}^{\lambda} W_{\lambda}^n] d\omega$$

En utilisant la relation (6) et après intégrations par parties, l'expression du travail virtuel des efforts intérieurs devient :

$$\begin{aligned}
 W_i = & \int_{\omega} N_{\perp\beta}^{\alpha\beta} u_{\alpha} d\omega - \int_{\partial\omega} N^{\alpha\beta} u_{\alpha} v_{\beta} d\Gamma + \int_{\omega} N^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} u_3 d\omega + \int_{\omega} M_{\perp\alpha\beta}^{\alpha\beta} u_3 d\omega \\
 & - \int_{\partial\omega} M_{\perp\beta}^{\alpha\beta} v_{\alpha} u_3 d\Gamma - \int_{\partial\omega} (M^{\alpha\beta} v_{\beta})_{\perp\alpha} u_3 d\Gamma - \int_{\omega} M_{\perp\beta}^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} d\omega + \int_{\partial\omega} M^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\lambda} v_{\beta} u_{\lambda} d\Gamma \\
 & - \int_{\omega} (M^{\alpha\beta} C_{\beta}^{\lambda})_{\perp\alpha} u_{\lambda} d\omega + \int_{\partial\omega} M^{\alpha\beta} C_{\beta}^{\lambda} v_{\alpha} u_{\lambda} d\Gamma - \int_{\omega} M^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\lambda} C_{\lambda\beta} u_3 d\omega \\
 & + \int_{\omega} P_n^{\alpha\beta} v_{\perp\beta} W_{\alpha}^n d\omega - \int_{\partial\omega} P_n^{\alpha\beta} W_{\alpha}^n v_{\beta} d\Gamma - \int_{\omega} Q_n^{\alpha} W_{\alpha}^n d\omega - \int_{\omega} L_n^{\alpha} C_{\alpha}^{\lambda} W_{\lambda}^n d\omega
 \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
 W_i = & \int_{\omega} [N_{\perp\beta}^{\alpha\beta} - M_{\perp\beta}^{\lambda\beta} C_{\lambda}^{\alpha} - (M^{\lambda\beta} C_{\lambda}^{\alpha})_{\perp\beta}] u_{\alpha} d\omega \\
 & + \int_{\omega} [N^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} + M_{\perp\alpha\beta}^{\alpha\beta} - (M^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\lambda} C_{\lambda\beta})] u_3 d\omega + \int_{\omega} [P_n^{\alpha\beta} v_{\perp\beta} - Q_n^{\alpha} - L_n^{\lambda} C_{\lambda}^{\alpha}] W_{\alpha}^n d\omega \\
 & + \int_{\partial\omega} [-N^{\alpha\beta} v_{\beta} + 2M^{\lambda\beta} C_{\lambda}^{\alpha} v_{\beta}] u_{\alpha} d\Gamma - \int_{\partial\omega} [M_{\perp\beta}^{\alpha\beta} v_{\alpha} + (M^{\alpha\beta} v_{\beta})_{\perp\alpha}] u_3 d\Gamma - \int_{\partial\omega} P_n^{\alpha\beta} v_{\beta} W_{\alpha}^n d\Gamma
 \end{aligned}$$

L'application du principe des travaux virtuels conduit aux équations 17a ou 18a et 19a ou 20a.

### 10. Annexe 4

Pour le modèle de gauchissement-Mindlin, le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit (pour la densité volumique  $\vec{f}_v$  et la densité surfacique  $\vec{f}_s$ ) :

$$\begin{aligned}
 W_e = & \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [f_v^{\alpha} u_{\alpha} + f_v^{\alpha} x^3 \beta_{\alpha} + f_v^{\alpha} \phi_n W_{\alpha}^n + f_v^3 u_3] dx^3 d\omega + \\
 & \int_{\partial\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [f_s^{\alpha} u_{\alpha} + f_s^{\alpha} x^3 \beta_{\alpha} + f_s^{\alpha} \phi_n W_{\alpha}^n + f_s^3 u_3] dx^3 d\Gamma
 \end{aligned}$$

$$W_e = \int_{\omega} [F^\alpha u_\alpha + m^\alpha \beta_\alpha + F_n^\alpha W_\alpha^n + F^3 u_3] d\omega + \int_{\partial\omega} [F_s^\alpha u_\alpha + m_s^\alpha \beta_\alpha + (F_s^\alpha)^n W_\alpha^n + F_s^3 u_3] d\Gamma$$

Pour le modèle de gauchissement-Mindlin, le travail virtuel des efforts intérieurs s'écrit :

$$W_i = - \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\alpha\beta} [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega) + x^3 \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\beta}) - x^3 \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega) + \varphi_n \gamma_{\alpha\beta}(\vec{W}^n)] dx^3 d\omega - \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\alpha\lambda} [(\beta_\alpha + u_\lambda C_\alpha^\lambda + u_{3,\alpha}) + (\varphi_{n,3} W_\alpha^n + \varphi_n W_\lambda^n C_\alpha^\lambda)] dx^3 d\omega$$

En utilisant les efforts généralisés définis par (8), le travail virtuel des efforts intérieurs devient :

$$W_i = - \int_{\omega} [N^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega) + M^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\beta}) - M^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(\vec{u}_\omega) + P_n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{W}^n)] d\omega - \int_{\omega} [T^\alpha (\beta_\alpha + u_\lambda C_\alpha^\lambda + u_{3,\alpha}) + Q_n^\alpha W_\alpha^n + L_n^\alpha W_\lambda^n C_\alpha^\lambda] d\omega$$

En utilisant la relation (6) et après intégrations par parties, l'expression du travail virtuel des efforts intérieurs devient :

$$W_i = \int_{\omega} N_{\perp\beta}^{\alpha\beta} u_\alpha d\omega - \int_{\partial\omega} N^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta d\Gamma + \int_{\omega} N^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} u_3 d\omega + \int_{\omega} M_{\perp\beta}^{\alpha\beta} \beta_\alpha d\omega - \int_{\partial\omega} M^{\alpha\beta} \beta_\alpha v_\beta d\Gamma + \int_{\omega} P_{\perp\beta}^{\alpha\beta} W_\alpha^n d\omega - \int_{\partial\omega} P_n^{\alpha\beta} W_\alpha^n v_\beta d\Gamma - \int_{\omega} (M^{\alpha\beta} C_\beta^\lambda)_{\perp\alpha} u_\lambda d\omega + \int_{\partial\omega} (M^{\alpha\beta} C_\beta^\lambda) u_\lambda v_\alpha d\Gamma - \int_{\omega} (M^{\alpha\beta} C_\alpha^\lambda C_{\lambda\beta}) u_3 d\omega - \int_{\omega} T^\alpha \beta_\alpha d\omega - \int_{\omega} T^\alpha C_\alpha^\lambda u_\lambda d\omega + \int_{\omega} T_{\perp\alpha}^\alpha u_3 d\omega - \int_{\partial\omega} T^\alpha v_\alpha u_3 d\Gamma - \int_{\omega} Q_n^\alpha W_\alpha^n d\omega - \int_{\omega} L_n^\alpha C_\alpha^\lambda W_\lambda^n d\omega$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
 W_i = & \int_{\omega} \left[ N^{\alpha\beta}_{\perp\beta} - (M^{\lambda\beta} C_{\lambda}^{\alpha})_{\perp\beta} - T^{\lambda} C_{\lambda}^{\alpha} \right] u_{\alpha} d\omega + \int_{\omega} \left[ M^{\alpha\beta}_{\perp\beta} - T^{\alpha} \right] \beta_{\alpha} d\omega \\
 & + \int_{\omega} \left[ N^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} + T^{\alpha}_{\perp\alpha} - (M^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\lambda} C_{\lambda\beta}) \right] u_3 d\omega + \int_{\omega} \left[ P_n^{\alpha\beta}_{\perp\beta} - Q_n^{\alpha} - L_n^{\lambda} C_{\lambda}^{\alpha} \right] W_{\alpha}^n d\omega \\
 & + \int_{\partial\omega} \left[ - N^{\alpha\beta} \nu_{\beta} + M^{\lambda\beta} C_{\beta}^{\alpha} \nu_{\lambda} \right] u_{\alpha} d\Gamma - \int_{\partial\omega} M^{\alpha\beta} \nu_{\beta} \beta_{\alpha} d\Gamma - \int_{\partial\omega} T^{\alpha} \nu_{\alpha} u_3 d\Gamma - \int_{\partial\omega} P_n^{\alpha\beta} \nu_{\beta} W_{\alpha}^n d\Gamma
 \end{aligned}$$

L'application du principe des travaux virtuels conduit aux équations [ 17b] ou [ 18b] et [ 19b] ou [ 20b] .