
Application de la MEF à la modélisation dynamique des robots souples

Naoufel Azouz * — Madeleine Pascal * — Alain Combescure **

* *Centre d'Etudes de Mécanique d'Ile-de-France, Laboratoire mixte Université d'Evry, CEA
40 rue du Pelvoux, F-91020 Evry Courcouronnes cedex
{azouz, pascal}@cemif.univ-evry.fr*

** *Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique de Cachan
61, avenue du Président Wilson
F-94235 Cachan cedex*

RÉSUMÉ. Cet article est consacré à l'analyse dynamique non linéaire de robots flexibles. Après sous-structuration du robot et au moyen d'un schéma incrémental, le mouvement de chaque sous-structure est défini par rapport à une configuration de référence mobile. Une décomposition modale est alors appliquée à l'incrément de mouvement de corps rigide et à la déformation. Ceci a permis de tenir compte du couplage inertiel entre le mouvement d'ensemble et le mouvement de déformation. Un procédé original est mis en œuvre pour l'assemblage des différentes sous-structures. Il utilise les notions de repères locaux de liaison et de matrices de liaison. Les résultats numériques prouvent que ce formalisme est en accord avec des solutions connues.

ABSTRACT. This paper is devoted to the non-linear dynamic analysis of the flexible robots. After substructuring, and by mean of an incremental scheme, the motion of each substructure is defined relatively to a mobile reference configuration. A modal synthesis is thus applied on the increment of rigid motion and of the deformation. This permit to take into account the inertial coupling between the rigid motion and the deformation. An original process is built to link the different substructures. It uses the notions of local connexion reference frame and connexion matrix. The numerical results demonstrate that this formalism is in good agreement with known solutions.

MOTS-CLÉS : synthèse modale, schéma incrémental, matrice de liaison, repères locaux de liaisons.

KEY WORDS: modal synthesis, incremental scheme, connexion matrix, local connexion reference frame.

1. Introduction

Dans le passé, la modélisation des robots s'appuyait souvent sur l'hypothèse de rigidité des composants. Ceux-ci étaient généralement massifs. Mais la tendance actuelle, notamment dans le domaine spatial, est la construction de robots légers avec des bras élancés et se déplaçant à grandes vitesses. L'effet de la flexibilité des composants ne peut plus être négligé dans ces cas. Il est donc nécessaire d'adopter un modèle adéquat pour tenir compte des vibrations élastiques.

Depuis les travaux de Winfrey [WIN 71], une abondante littérature a été publiée sur ces problèmes de flexibilité. Les premières approches [NAT 80], [SUN 81] s'étaient orientées vers l'amélioration des algorithmes de résolution du mouvement de corps rigides qui existaient déjà. Dans ces approches, le mouvement de corps rigide est supposé connu, la déformation est introduite dans le calcul comme une perturbation de l'état de référence et n'a aucune influence sur le mouvement de corps rigide. Ces méthodes ont l'avantage de n'introduire que de petites modifications sur des codes de calcul des corps rigides, mais ne peuvent traiter de manière précise le mouvement des corps souples tournant à grande vitesse car on ne peut plus négliger dans ces cas le couplage inertiel entre le mouvement d'ensemble et la déformation.

Simo a développé une autre approche d'étude des corps articulés flexibles. Cette approche analytique a permis d'une part l'étude des structures pouvant être modélisées par des poutres [SIM 85] en se basant notamment sur les théories de Reissner [REI 72], et d'autre part l'étude des plaques en se basant sur la théorie de Mindlin [MIN 51]. Mais pour une étude plus générale des structures pouvant avoir des formes complexes, il est indispensable d'utiliser des modèles discrétisés.

Des récents travaux, notamment ceux de Shabana [SHA 88], ont montré la faisabilité d'une telle approche. Après une discrétisation par éléments finis, le comportement de la structure est alors déduit d'une analyse par synthèse modale, ce qui permet de traiter les phénomènes physiques à basses fréquences qu'on rencontre souvent en robotique avec un nombre minimal de degrés de liberté sans altérer pour autant la précision du résultat.

En effet, et grâce à l'utilisation d'une synthèse modale adaptée à la dynamique des structures en grands mouvements, il est possible de construire des algorithmes de simulation des robots présentant un bon compromis précision sur temps de calcul.

Dans cette optique, nous avons orienté nos recherches afin d'aboutir à un formalisme souple *d'analyse des structures en grands déplacements et petites déformations*, qui se concrétise par un outil de calcul présentant le plus large niveau de généralité (traitant les corps aux formes les plus complexes, les chaînes ouvertes ou multiples bouclées), tout en minimisant les temps de calcul. Les développements informatiques de ce formalisme ont été intégrés au code de calcul PLEXUS du centre d'Etudes Nucléaires de Saclay.

2. Analyse dynamique d'un corps isolé

Dans le but de traiter des structures polyarticulées de topologies et de formes quelconques, on a été amené à utiliser la technique de sous-structuration. On étudiera ainsi dans ce paragraphe le comportement d'un composant (ou sous-structure) isolé, et on traitera au paragraphe suivant les connexions entre les diverses sous-structures.

2.1. Description du mouvement

Pour décrire le mouvement d'un corps isolé, on a choisi la description Lagrangienne actualisée [BAT 82]. Ceci se ramène à l'étude du mouvement du corps non pas par rapport à une configuration fixe mais par rapport à une configuration mobile qui suit le mouvement du corps sans pour autant être confondue avec celui-ci. La configuration de référence choisie est une configuration non déformée, elle proviendra d'un mouvement de corps rigide de la configuration initiale.

2.1.1. Schéma incrémental

Pour définir le mouvement de la configuration de référence ainsi que celui de la sous-structure, on a utilisé un schéma incrémental (figure 1). L'étude des structures souples en grands mouvements étant très complexe et conduisant généralement à des équations hautement non linéaires, il paraît donc indispensable d'utiliser un schéma incrémental, ce qui est de nature à simplifier considérablement la résolution du problème.

Sur chaque pas de temps, on définit un repère local (\mathcal{R}_i) par rapport auquel on étudie le mouvement au pas suivant. Ce repère suivra ainsi la configuration de référence. La position de ce repère dans la sous-structure est régie par des règles expertes en fonction du problème à étudier [AZO 94].

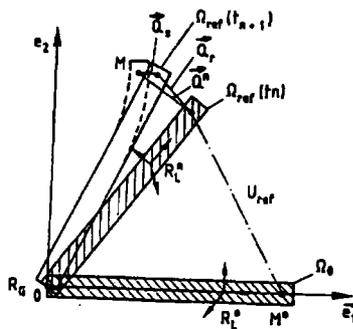


Figure 1. Description du mouvement sur un pas

2.1.2. Décomposition du mouvement sur un pas

Afin de tenir compte du couplage inertiel entre le mouvement d'ensemble et la déformation, on décompose le mouvement total d'un point en un mouvement rigide correspondant au mouvement de la configuration de référence, plus un incrément de mouvement de corps rigide sur le pas auquel on ajoute toute la déformation.

$$\vec{U}(M) = \vec{U}_{ref}(M) + \underbrace{\Delta\vec{U}_{ref}(M) + \vec{U}_s(M)}_{\vec{Q}} \tag{1}$$

\vec{U}_s étant le déplacement élastique

$\Delta\vec{U}_{ref}$ l'incrément de mouvement de corps rigide

A partir de l'équation [1], on peut obtenir l'expression de l'accélération projetée sur le repère local qui sera :

$$\ddot{U}^\ell = R^T \ddot{U} = R^T \ddot{U}_{ref} + R^T (R\ddot{Q} + 2\dot{R}\dot{Q} + \ddot{R}Q) \tag{2}$$

avec $\ddot{Q} = R^T \ddot{Q}$. On peut définir \ddot{Q}, \dot{Q}, Q comme les déplacements, vitesses et accélérations relatifs au repère local, et R est la matrice de rotation faisant passer du repère local (\mathcal{R}) au repère inertiel R_G , Elle est définie au début du pas et sera supposée constante sur tout le pas.

2.2. Equations du mouvement

2.2.1. Equations de base

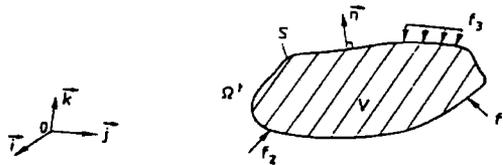


Figure 2. Description des forces en présence

Considérons un corps déformable Ω soumis à des champs de forces extérieures. L'équation locale d'équilibre dynamique écrite dans le repère inertiel est :

$$\text{div} \vec{\sigma} + \vec{f}_V = \rho \ddot{U} \tag{3}$$

où \tilde{f}_v représente la densité volumique des forces appliquées sur Ω , ρ est la masse volumique du corps Ω . Le tenseur gradient de la déformation peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{F} = R(\bar{I}_d + \bar{J}) \tag{4}$$

Avec \bar{I}_d tenseur unité et $\bar{J} = \nabla \cdot \tilde{Q}$. D'où le tenseur des déformations

$\lambda = \frac{1}{2} [{}^T \bar{F} \cdot \bar{F} - \bar{I}_d] = \frac{1}{2} [\bar{J} + {}^T \bar{J} + {}^T \bar{J} \cdot \bar{J}]$ que l'on peut linéariser dans le cas des petites déformations :

$$\lambda \approx \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\bar{J}^T + \bar{J}] \tag{5}$$

La description des contraintes est faite à partir du tenseur de Piola-Kirchhoff P_K exprimé par rapport à la configuration de référence. On suppose que le matériau est élastique linéaire et homogène. Dans le cas de petites déformations, on peut confondre la configuration réelle avec la configuration de référence :

$$V^t \approx V^{ref} \quad \text{et} \quad S^t \approx S^{ref}$$

Les domaines intérieurs de V^{ref} et S^{ref} sont identiques à ceux de V^o et S^o calculés à l'instant initial. On peut assimiler ainsi le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff à celui de Cauchy σ [BAR 83]. ($P_K \approx \sigma$). D'après les équations [2] et [3], on peut alors écrire l'équation dynamique projetée sur le repère local comme suit :

$$\rho(\tilde{Q} + 2R^T \dot{R} \tilde{Q} + R^T \ddot{R} \tilde{Q}) + \mathcal{N}_1[\tilde{Q}] = \tilde{f} - \rho R^T \ddot{U}_{ref} \tag{6}$$

où \tilde{f} caractérise la projection dans le repère local des forces appliquées sur le corps, et \mathcal{N}_1 un opérateur différentiel linéaire [CHA 90].

En utilisant le principe des puissances virtuelles pour décrire l'équilibre dynamique du corps sujet à un déplacement virtuel $\delta \tilde{Q}$ on obtient :

$$\int_{V^{ref}} \rho \cdot {}^T \delta \tilde{Q} \cdot (\tilde{Q} + 2R^T \dot{R} \tilde{Q} + R^T \ddot{R} \tilde{Q}) dV + \int_{V^{ref}} {}^T \delta \tilde{Q} \cdot \mathcal{N}_1[\tilde{Q}] dV = \int_{V^{ref}} {}^T \delta \tilde{Q} \cdot \tilde{f} dV - \int_{V^{ref}} {}^T \delta \tilde{Q} \cdot R^T \ddot{U}_{ref} dV \tag{7}$$

2.2.2. *Discrétisation du corps*

On discrétise le corps Ω en éléments finis. On a ainsi $\tilde{Q} = N.\tilde{q}$ [TOU 84] où N est la fonction matricielle d'interpolation et \tilde{q} est la matrice colonne des incréments de déplacements dans le repère local (\mathcal{R}) de tous les nœuds de la sous-structure.

On obtient alors pour le déplacement virtuel $\delta\tilde{Q} = N.\delta\tilde{q}$ une équation dynamique de la forme :

$$K\tilde{q} + C.\dot{\tilde{q}} + M.\ddot{\tilde{q}} = \tilde{F}_e - \tilde{F}_R \tag{8}$$

avec $M = \int_{V^{ref}} \rho N^t N dV$ est la matrice de masse (constante),

$C = \int_{V^{ref}} \rho N^t IR^t IR N dV$ est la matrice des termes gyroscopiques,

$K = K_s + K_d$ est une matrice de raideur formée de deux termes :

$K_s = \int_{V^{ref}} N^t \mathfrak{K}_l [N] dV$ est la raideur structurelle, et

$K_d = \int_{V^{ref}} \rho N^t IR^t IR N dV$ est une raideur dynamique due aux forces de Coriolis.

$F_e = \int_{V^{ref}} \rho N^t \tilde{f} dV$ représente le champ des forces extérieures.

$F_R = \int_{V^{ref}} \rho N^t IR^t \ddot{U}_{ref} dV$ désigne les forces d'inertie résiduelles.

IR est ici une matrice diagonale en blocs, composée d'autant de blocs qu'il y a de nœuds.

$$IR = \begin{bmatrix} [R] & & & \\ & [R] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [R] \end{bmatrix}$$

2.3. Analyse modale

L'équation dynamique du corps discrétisé [8] comporte un très grand nombre de degrés de liberté. Afin de réduire le système, on a opté pour la synthèse modale. Comme on le sait, les phénomènes rencontrés en robotique sont souvent à basses fréquences, leur représentation peut se faire avec un nombre réduit de modes.

2.3.1. Décomposition modale

On décompose l'incrément \tilde{Q} en un incrément de déplacement de corps rigide \tilde{q}_r et un déplacement élastique \tilde{q}_s (de façon analogue à la décomposition [1]). On

peut alors écrire :
$$\tilde{q}_r = \sum_{i=1}^6 Y_{ri} \cdot X_{ri}$$

Y_{ri} étant l'amplitude modale du mode rigide i . Pour un mouvement à trois dimensions par exemple, on aura 6 variables ($Y_{traX}, Y_{traY}, Y_{traZ}, Y_{rotX}, Y_{rotY}, Y_{rotZ}$).

X_{ri} est la matrice colonne de la déformée du mode rigide i .

Pour ce qui est de la déformation, on a : $\tilde{q}_s = \sum_{i=1}^{nd} Y_{di} \cdot X_{di}$ avec nd le nombre de modes déformables retenus, Y_{di} sont les amplitudes modales de déformation et X_{di} les matrices colonnes des déformées modales. Ces dernières sont solution de l'équation caractéristique de la structure non amortie : $(K_L - \omega^2 M) \cdot X_d = 0$.

Comme pour la majorité des codes de Dynamique des Systèmes Articulés existants (DAMS [SHA 85], MECANO [GER 91]), on a évité de manipuler les modes complexes qui découlent de l'équation caractéristique de la structure amortie. En effet, les fréquences issues de la structure équivalente non amortie représentent une bonne approximation de la solution surtout pour les corps faiblement amortis sans dissipateurs d'énergie localisés.

2.3.2. Projection des équations sur la base modale

On notera par \mathbb{X} la base modale formée par les modes rigides X_r et les modes de déformation X_d , et par Y l'ensemble de toutes les amplitudes modales.

$$Y = \left. \begin{Bmatrix} Y_r \\ Y_d \end{Bmatrix} \right\} 6 + nd \quad \text{et} \quad \mathbb{X} = \left. \begin{Bmatrix} \vdots \\ X_r \\ \vdots \\ X_d \\ \vdots \end{Bmatrix} \right\} \text{nb de ddl}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_6 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{nd}$

La projection de l'équation [8] sur la base modale \mathbb{X} donne :

$$\mathcal{K} \cdot Y + \mathbb{X}^T \cdot M \cdot IR^T \cdot IR \cdot \mathbb{X} \cdot \dot{Y} + \mathcal{M} \cdot \ddot{Y} = \mathcal{F}_e - \mathcal{F}_r \tag{9}$$

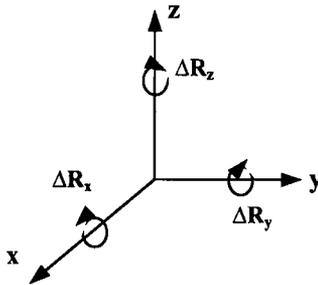
avec $\mathcal{F}_e = (\mathbb{X}^T, \tilde{F}_e)$, $\mathcal{F}_r = (\mathbb{X}^T, \tilde{F}_r)$ les forces extérieures et d'inertie projetées, $\mathcal{K} = (\mathbb{X}^T \cdot K \cdot \mathbb{X})$ la matrice de raideur généralisée, et $\mathcal{M} = (\mathbb{X}^T \cdot M \cdot \mathbb{X})$ la matrice de masse généralisée. Cette dernière est dans ce cas constante dans le temps ce qui représente un grand avantage dans la résolution de l'équation dynamique.

L'équation [9] établie pour une sous-structure isolée sera résolue simultanément avec celles des autres sous-structures en tenant compte des interactions entre celles-ci.

2.4. Réactualisation de la configuration de référence

2.4.1. Calcul de la nouvelle matrice de rotation

L'obtention de la matrice colonne Y_r au pas de temps t^n nous permet d'avoir les incréments de rotation ΔR ainsi que l'incrément de translation ΔT définissant l'incrément de mouvement de corps rigide. Les trois premières composantes de Y_r correspondent à l'incrément de translation, les trois autres composantes représentent les incréments d'angle de rotation suivant les trois axes du repère local.



La matrice incrément de rotation ΔR est alors exprimée en fonction des rotations autour des trois axes du repère local comme suit :

$$\Delta R = \Delta R_x \cdot \Delta R_y \cdot \Delta R_z$$

Les incréments de rotation étant très petits, l'ordre des multiplications matricielles est indifférent.

Pour avoir la matrice de rotation R au pas n , on procède par une multiplication à gauche :

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-1} \cdot \Delta\mathbf{R}$$

$$\text{de même } \begin{cases} \dot{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^{n-1} \cdot \Delta\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}^{n-1} \cdot \Delta\mathbf{R} \\ \ddot{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^{n-1} \cdot \Delta\ddot{\mathbf{R}} + 2 \dot{\mathbf{R}}^{n-1} \cdot \Delta\dot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{R}}^{n-1} \cdot \Delta\mathbf{R} \end{cases}$$

2.4.2. Nouvelle configuration de référence

La configuration de référence (non déformée) $\Omega_{\text{ref}}(t_n)$ est définie en appliquant l'incrément de rotation $\Delta\mathbf{R}$ ainsi que l'incrément de translation $\Delta\mathbf{T}$ à la configuration de référence $\Omega_{\text{ref}}(t_{n-1})$. Cette nouvelle configuration servira de base de calcul pour le nouvel incrément de mouvement rigide ainsi que pour la déformation. On notera que la nouvelle configuration correspondra à un déplacement « rigide » $\mathbf{U}_{\text{ref}}^n$ de la configuration initiale. Par conséquent, et relativement à une base locale solidement attachée à la configuration de référence, les matrices de masse et de raideur ainsi que les modes propres restent constants.

3. Connexion des sous-structures

Dans ce paragraphe, on présente une méthodologie pour le traitement des connexions entre les diverses sous-structures du robot. La méthode adoptée a pour point de départ les travaux en dynamique des structures [CLO 80], [GIB 88]. En utilisant des techniques pratiques de la méthode des éléments finis [IMB 84], [TOU 84], [NOR 84] et en s'appuyant sur certains travaux en robotique [DOM 88], [CUN 91], [PAU 81], on a développé un procédé qui permet d'exploiter au maximum le paramétrage modal des sous-structures en gardant le plus large niveau de généralité.

Les liaisons traitées dans ce travail sont supposées « rigides » ou parfaites.

3.1. Résolution des équations de liaisons

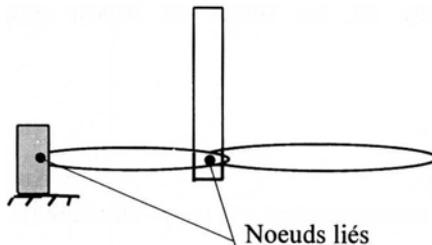


Figure 3. Schéma d'une liaison d'un robot

Les liaisons traitées ici sont du type holonome. Elles vérifient la relation :

$$f(U) = 0 \tag{10}$$

où f est une fonction reliant les champs de déplacement de toutes les sous-structures.

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{nt} \end{bmatrix} \text{ la matrice colonne des déplacements des nœuds, } nt \text{ étant le nombre}$$

total des nœuds du système

Considérons un déplacement virtuel du système articulé résultant d'un changement infinitésimal des déplacements aux nœuds (U_i). L'équation de compatibilité des déplacements virtuels avec la liaison [10] est :

$$\frac{\partial f}{\partial U_1} \delta U_1 + \frac{\partial f}{\partial U_2} \delta U_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial U_{nt}} \delta U_{nt} = 0 \tag{11}$$

L'équation [11] peut aussi s'écrire sous une forme compacte :

$$C \cdot \delta U = 0 \tag{12}$$

C est la matrice Jacobienne de f , qu'on appellera matrice de liaison.

Reprenons l'équation [9], pour le cas d'une sous-structure connectée, cette relation s'écrira ainsi :

$$\mathcal{K} \cdot Y + \mathcal{X}^T \cdot M \cdot IR^T \cdot IR \cdot \mathcal{X} \cdot \dot{Y} + \mathcal{M} \cdot \ddot{Y} = \mathcal{F}_e - \mathcal{F}_r + F_L \tag{13}$$

F_L étant les forces de liaison. Le calcul de ces forces passe par la détermination des multiplicateurs de Lagrange λ dont le nombre est égal au nombre d'équations de liaison (n_L).

Pour une sous-structure (i), les forces de liaison seront [AZO 94] :

$$F_{l(i)} = IR_{(i)}^T \cdot [C^T \lambda]_{(i)}$$

$$C^T \lambda = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ d. d. l correspondant à la sous-structure (i)}$$

Pour l'élimination des multiplicateurs de Lagrange, certains auteurs proposent des méthodes directes (*Singular Value Decomposition* [SIN 85] ou l'utilisation des transformations successives de Householder [AMI 88]). Une étude de Huston [HUS 89] démontre l'équivalence mathématique de ces méthodes avec la méthode classique de détermination des multiplicateurs de Lagrange, tout en mettant l'accent sur la relative difficulté d'implémentation numérique de ces méthodes directes.

Pour notre part, on s'est inspiré de la méthode classique que l'on a adapté à notre formalisme pour tirer au maximum profit du paramétrage modal de la structure.

L'équation dynamique globale du système articulé s'écrit sur un pas n comme suit :

$$\bar{K}^n \cdot \bar{Y}^n + \bar{X}^T \cdot \bar{M} \cdot (\bar{I}\bar{R}^n)^T \cdot \bar{I}\bar{R} \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y}^n + \bar{M} \cdot \bar{Y}^n = \bar{F}_e^n - \bar{F}_r^{n-1} + \Pi_n^T \cdot \lambda^n \quad [14]$$

avec \bar{K} , \bar{M} , $\bar{I}\bar{R}$, \bar{X} , des matrices diagonales en blocs, chaque sous-bloc correspondant à une sous-structure. Par exemple :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} [K_1] & & & \\ & [K_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [K_{ns}] \end{bmatrix} \quad \text{ns étant le nombre de sous-structures}$$

\bar{F}_e et \bar{F}_r sont des matrices colonnes représentant les forces extérieures et d'inertie de toutes les sous-structures. $\Pi = C \cdot \bar{I}\bar{R} \cdot \bar{X}$ la matrice de liaison généralisée.

Le paramétrage géométrique absolu est nécessaire pour exprimer les équations mécaniques traduisant les relations entre les paramètres cinématiques relatifs. Cependant pour pouvoir tirer profit des relations développées précédemment, on a été amené à exprimer les équations de liaisons en fonction de paramètres modaux définis dans les repères locaux liés aux sous-structures en mouvement.

Reprenons l'équation [10] $f(U) = 0$. Cette relation est définie à chaque pas de temps. Sur un pas donné on peut écrire que :

$$f(U_{n+1}) = \underbrace{f(U_n)}_0 + \left[\frac{\partial f}{\partial U} \right]_n \cdot \Delta U_{n+1}$$

ce qui donne $C_n \Delta U_{n+1} = 0 \quad [15]$

Il faudrait donc que les contraintes cinématiques soient respectées sur tout le pas $[t_n, t_{n+1}]$. Le schéma numérique adopté étant un schéma de Newmark explicite, il s'agit donc d'obtenir des grandeurs au début du pas $U^n, \dot{U}^n, \ddot{U}^n$ qui satisferont la relation [15] à la fin du pas.

Rappelons les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{n+1} = U_{ref}^n + q^{n+1} \\ \text{et} \\ U^n = U_{ref}^n + U_s^n \end{array} \right.$$

ce qui donne $\Delta U_{n+1} = U^{n+1} - U^n = q^{n+1} - U_s^n$ [16]

L'équation [15] devient : $C_n q^{n+1} = C_n U_s^n$ [17]

On crée alors le vecteur hybride \tilde{q} représenté par une matrice colonne formée de sous-ensemble \tilde{q}_i . Les composantes de chaque sous-ensemble \tilde{q}_i sont exprimées par rapport au repère local R_{Li} rattaché à la sous-structure (i) et sont définies dans § 2.3.1.

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} [\tilde{q}_1] \\ [\tilde{q}_2] \\ \vdots \\ [\tilde{q}_{ns}] \end{bmatrix}$$

L'équation [17] devient alors : $C_n \overline{IR}_n \tilde{q}^{n+1} = C_n U_s^n$ ou encore :

$$\Pi_n \overline{Y}^{n+1} = \Pi_n \overline{Y}_d^n \tag{18}$$

Le schéma numérique de résolution des équations est un schéma semi-explicite de Newmark. L'amplitude modale au pas n+1 est définie en fonction des paramètres au pas n comme suit :

$$\overline{Y}^{n+1} = \overline{Y}^n + \Delta t \cdot \overline{Y}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \overline{Y}^n$$

\overline{Y}^n est calculée directement en fonction des paramètres au pas n-1. Cependant, et pour garder le caractère explicite de la résolution, la vitesse modale \overline{Y}^n est estimée au demi-pas comme suit :

$$\overline{Y}_{est}^n = \overline{Y}^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \overline{Y}^{n-1}$$

L'équation [18] devient :

$$\Pi_n \overline{Y}^n = \frac{1}{\Delta t^2} \left[\Pi_n \overline{Y}_d^n - \Pi_n \left(\overline{Y}^n + \Delta t \cdot \overline{Y}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \overline{Y}^{n-1} \right) \right]$$

La substitution de cette équation avec l'équation [14] permet d'éliminer les multiplicateurs de Lagrange λ^n et de définir les accélérations modales :

$$\ddot{\bar{Y}}^n = W^n - H^n W^n + \frac{1}{\Delta t^2} H^n \cdot \left(\bar{Y}_d^n - \bar{Y}^n - \Delta t \cdot \bar{Y}^{n-1} - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\bar{Y}}^{n-1} \right) \quad [19]$$

avec

$$W^n = \bar{M}^{-1} \cdot \left[\bar{F}_e^n - \bar{F}_r^{n-1} - \bar{K} \bar{Y}^n - \bar{\mathbb{X}}^T \bar{M} \cdot \bar{I} \bar{R}^T \cdot \bar{I} \bar{R} \cdot \bar{\mathbb{X}} \cdot \ddot{\bar{Y}}^n \right]$$

$$\text{et } H^n = \bar{M}^{-1} \cdot \underbrace{\Pi_n^T \cdot \bar{M}^{-1} \cdot \Pi_n^T}_{Z}^{-1} \cdot \Pi_n$$

La vitesse modale est réactualisée à la fin du pas par :

$$\bar{Y}^n = \bar{Y}^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \left[\ddot{\bar{Y}}^n + \ddot{\bar{Y}}^{n-1} \right] = \bar{Y}_{\text{est}} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\bar{Y}}^n$$

Après avoir défini les variables modales, on repasse ensuite aux grandeurs réelles de déplacements, vitesses et accélérations à l'aide d'une recombinaison modale, soit $Q^n = \bar{\mathbb{X}} \cdot \bar{Y}^n$ et deux relations analogues pour les incréments de vitesse et d'accélération.

3.2. Réactualisation de la matrice principale de liaison (H)

Le calcul de la matrice H passe par l'inversion de la matrice Z à chaque pas de temps. Cette façon de faire pourrait alourdir la méthode et s'avère coûteuse en temps de calcul pour un robot à liaisons multiples. Pour simplifier le calcul, on a adopté une approximation qui restreint l'inversion de la matrice Z. En effet, sur un pas de temps, la variation de Z est faible, on peut écrire :

$$Z^{n+1} = Z^n (I_d + \varepsilon) \quad \text{ou encore} \quad [Z^{n+1}]^{-1} \approx (I_d - \varepsilon) \cdot [Z^n]^{-1} \quad [20]$$

ε étant une matrice composée de termes infiniment petits. L'équation [20] peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$[Z^{n+1}]^{-1} \approx (2 \cdot I_d - [Z^n]^{-1} \cdot Z^{n+1}) \cdot [Z^n]^{-1}$$

En fixant une fréquence d'inversion de Z (f_{inv}), l'inversion se fera pour tout $n = k \cdot f_{\text{inv}}$, et quelque soit $i < f_{\text{inv}}$ on admet que :

$$[Z^{n+i}]^{-1} \approx (2 \cdot I_d - [Z^n]^{-1} \cdot Z^{n+i}) \cdot [Z^n]^{-1} \quad [21]$$

3.3. Construction automatique de la matrice de liaison

On présente ici une méthode originale de mise en équation des liaisons et la construction de matrices blocs pour divers types d'articulations. L'utilisation de matrices blocs permet de construire automatiquement les matrices caractéristiques des systèmes d'équations par une méthode d'assemblage analogue à celle utilisée par la Méthode des Eléments Finis.

3.3.1. Construction des matrices élémentaires de liaison

On suppose dans tout ce qui suit que le voisinage direct de l'articulation est indéformable ; ainsi les axes associés au repère de l'articulation ne seront pas déformés. Ce repère sera solidaire d'une des sous-structures contiguës.

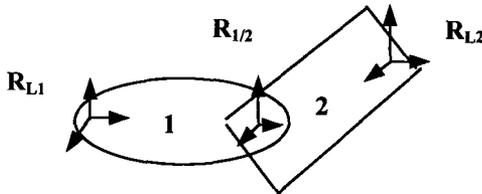


Figure 4. Schéma de deux corps articulés

La matrice de liaison dans le repère de l'articulation $R_{1/2}$ se présente ainsi :

$$C_{12}^a = \begin{bmatrix} \vdots & & \\ C_{1/2}^a & \vdots & C_{2/1}^a \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

avec $C_{12}^a U_{12}^a = 0$ dans le cas des liaisons parfaites. [22]

$C_{1/2}^a$ et $C_{2/1}^a$ sont deux blocs constants dans le temps.

U_{12}^a le déplacement des corps ① et ② dans le repère de l'articulation.

$$U_{12}^a = \begin{bmatrix} U_1^a \\ U_2^a \end{bmatrix}$$

Pour pouvoir combiner l'équation [22] avec les équations dynamiques des corps ① et ②, il faudrait l'exprimer en fonction des variables tildées définies précédemment et relatives aux repères dynamiques \mathbf{R}_{L1} et \mathbf{R}_{L2} (Figure 4).

Les relations liant les deux types de variables sont :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{P}_{12} \mathbf{U}_1^a \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{P}_{21} \mathbf{U}_2^a = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_{12} \mathbf{U}_2^a \end{cases}$$

\mathbf{P}_{12} est la matrice faisant passer du repère local \mathbf{R}_{L1} au repère lié à l'articulation 1-2 ($\mathbf{R}_{1/2}$). \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 les matrices de rotation permettant le passage du repère local \mathbf{R}_{L1} et du repère local \mathbf{R}_{L2} vers le repère local \mathbf{R}_G .

L'équation [22] peut alors s'écrire ainsi :

$$\mathbf{C}_{1/2}^a \mathbf{P}_{12}^T \tilde{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{C}_{2/1}^a \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2 \tilde{\mathbf{U}}_2 = 0$$

ou encore $\mathbf{C}'_{12} \tilde{\mathbf{U}}_{12} = 0$ et pour toute articulation entre deux corps (i) et (j) on a

$$\mathbf{C}'_{ij} \tilde{\mathbf{U}}_{ij} = 0 \quad [23]$$

$$\text{avec } \mathbf{C}'_{ij} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{i/j}^a] \cdot [\mathbf{P}_{ij}^T] & \vdots & [\mathbf{C}_{j/i}^a] \cdot [\mathbf{P}_{ij}^T] \cdot [\mathbf{R}_i^T] \cdot [\mathbf{R}_j] \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{P}_{ij} dépendra uniquement de la déformation du corps qui porte le repère de l'articulation.

La généralisation de l'équation [23] à l'ensemble de la structure donne :

$$\mathbf{C}' \tilde{\mathbf{U}} = 0 \quad [24]$$

Pour retrouver la matrice \mathbf{C} décrite dans les paragraphes précédents, il suffit d'appliquer la relation suivante :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}' \bar{\mathbf{R}}^T \quad [25]$$

3.3.2. Assemblage des matrices élémentaires

L'assemblage des blocs $[C'_{ij}]$ est guidé par la topologie du système. La matrice C' comporte autant de blocs qu'il y a de sous-structures (ns). Chaque bloc est composé d'un nombre de colonnes égal au nombre de degrés de liberté « liés » définis pour la sous-structure correspondante. Le nombre de ligne de C' est égal au nombre d'équations de liaisons. Prenons par exemple la structure articulée suivante :

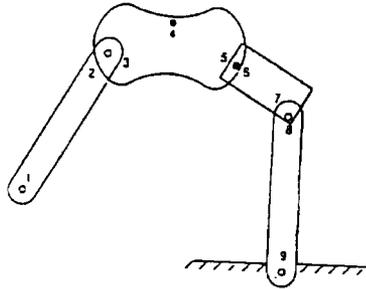


Figure 5.a. Exemple d'une structure articulée à quatre bras

La matrice de liaison C' correspondant à cette structure est définie ainsi :

$$C' = \begin{bmatrix} \text{1° sous-structure} & \text{2° sous-structure} & \text{3° sous-structure} & \text{4° sous-structure} \\ \hline \text{1° noeud} & \text{2° noeud} & \text{3° noeud} & \text{4° noeud} & \text{5° noeud} & \text{6° noeud} & \text{7° noeud} & \text{8° noeud} \\ \hline & [C'_{2/3}] & [C'_{3/2}] & & & & & \\ & & \vdots & [C'_{4/5}] & [C'_{5/4}] & & & \\ & & \vdots & & & [C'_{6/7}] & [C'_{7/6}] & \\ & & \vdots & & & & & [C'_{8/0}] \end{bmatrix}$$

La structure de la matrice de liaison telle que présentée, permet une prise en compte simultanée de toutes les liaisons, elle s'adapte aussi bien aux structures à chaînes fermées qu'aux systèmes arborescents.

3.3.3. Construction de la matrice de liaison généralisée (Π)

La résolution du mouvement du robot se fait entièrement à l'aide de variables modales, il faut donc projeter la matrice de liaison sur les bases modales adéquates. Cette procédure passe par la construction de la matrice des modes \bar{X} réduites aux noeuds liés.

$$\bar{X} = \left. \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} [1 X] \\ \vdots \\ [ns X] \end{array} \right] \\ \text{Nb total de modes retenus} \end{array} \right\} 6 \times \text{nb total de points liés.}$$

La matrice généralisée de liaison est donnée alors immédiatement par :

$$\Pi = C' \cdot \bar{X} \tag{26}$$

3.3.4. Exemple de construction

Prenons le cas de la liaison pivot qui est de loin la liaison la plus utilisée en robotique.

On considère deux sous-structures (S₁) et (S₂) liées par une articulation pivot, on présente ici la mise en oeuvre de cette connexion à partir de la méthodologie établie. Chaque sous-structure présente un point lié M₁ ≡ M₂

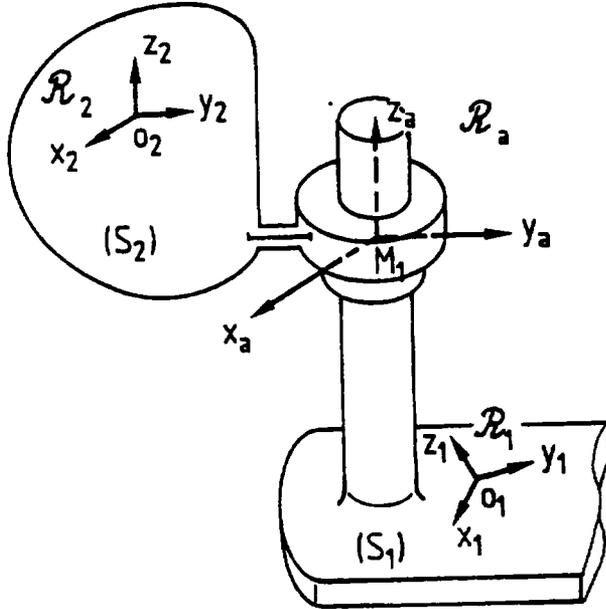


Figure 5.b. Exemple d'une articulation pivot

Les repères \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont les repères associés au mouvement d'ensemble des corps ① et ②. Le repère du pivot est quant à lui attaché à un des deux corps au niveau des points de connexion. On choisit d'habitude le corps portant le stator (ici le corps (S₁)). En général, des règles expertes permettent de déterminer le nombre minimal de calcul à effectuer en fonction du mouvement absolu de l'un ou l'autre des corps en relation. Il faudrait ainsi privilégier le corps devant effectuer le moins de rotation par rapport au repère inertiel.

Pour avoir des matrices élémentaires de liaison (C_{12}^a) assez simples, il faut confondre un axe du repère de liaison \mathcal{R}_a avec l'axe du pivot.

Dans cet exemple la matrice (C_{12}^a) décrite dans le repère \mathcal{R}_a sera :

$$C_{12}^a = \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & & \\ & 1 & & -1 & & 0 \\ & & 1 & 0 & & -1 \\ & & & 1 & & -1 \\ 0 & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$C_{1/2}^a \qquad \qquad \qquad C_{2/1}^a$

La matrice C'_{12} sera : $C'_{12} = \left[\begin{array}{cc} C_{1/2}^a \cdot P_{12}^T & : & C_{2/1}^a \cdot P_{12}^T \cdot R_1^T \cdot R_2 \end{array} \right]$

La matrice de liaison généralisée se présente donc ainsi :

$$\Pi_{12} = \left[\begin{array}{cc} C_{1/2}^a \cdot P_{12}^T \cdot X^1 & : & C_{2/1}^a \cdot P_{12}^T \cdot R_1^T \cdot R_2 \cdot X^2 \end{array} \right]$$

X^1 et X^2 sont respectivement les matrices des modes (rigides et déformables) des corps ① et ②.

La réactualisation de l'axe du pivot dépendra du mouvement du point qui le porte (ici M_1).

Pour les autres types de liaisons, des règles analogues permettent de définir le repère de l'articulation dans lequel les matrices élémentaires de liaison auront la forme la plus simple.

4. Tests et validation

Pour valider le formalisme établi, on l'a testé sur des problèmes de systèmes multi-corps composés d'éléments flexibles et rigides.

4.1. Bielle-manivelle flexible

Pour valider le test de la bielle-manivelle, on a repris le test proposé par Shabana [SHA 85] et qui se présente ainsi (figure 6) :

La manivelle OA est supposée rigide et de longueur $l_1 = 0,152$ m, la bielle a une longueur l_2 qui est le double de l_1 . Elle est flexible et, fixée à son extrémité, une masse glisse sans frottement sur l'axe OX. Cette masse est égale à la masse de la manivelle. Le diamètre de la bielle et de la manivelle est de 0,006 m et la vitesse de rotation à l'origine $\omega = 150$ rad /sec.

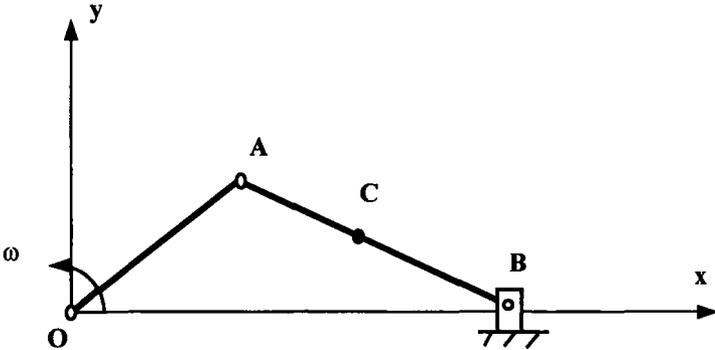


Figure 6. Schéma de la bielle-manivelle

Le matériau utilisé a une masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³, son module d'élasticité $E = 2.10^{10}$ et son coefficient de Poisson est de 0,35.

La structure a été discrétisée en éléments de poutres. Pour la manivelle OA supposée indéformable, on a utilisé un seul élément. Pour la bielle AB, on a utilisé quatre éléments de poutre pour définir convenablement les modes propres de cette sous-structure.

A chaque sous-structure (OA et AB), on associe un repère local (R_{L1} et R_{L2}). Dans chaque cas, on a choisi de confondre l'origine du repère local avec une extrémité de la sous-structure et de choisir un axe parallèle à la ligne moyenne de la poutre.

On a choisi les deux premiers modes propres rotulé-rotulé pour décrire la manivelle flexible, ce qui correspond à des fréquences de 41 et 180 Hz nécessitant un pas de stabilité fréquentiel de $1.7 \cdot 10^{-3}$ s.

Le pas de temps retenu pour cette simulation est de 1.10^{-3} s.

Les matrices élémentaires de liaison dans la configuration initiale se présentent ainsi :

4.2. Robot Hitachi à flèche souple

Dans le but de valider la modélisation établie dans le cas des structures spatiales, nous avons traité l'exemple du robot Hitachi (figure 9). Ce robot à trois rotations est fréquemment étudié dans les références. Il est toujours considéré comme un système rigide. Dans cette étude, on a remplacé la flèche originellement rigide par une flèche souple.

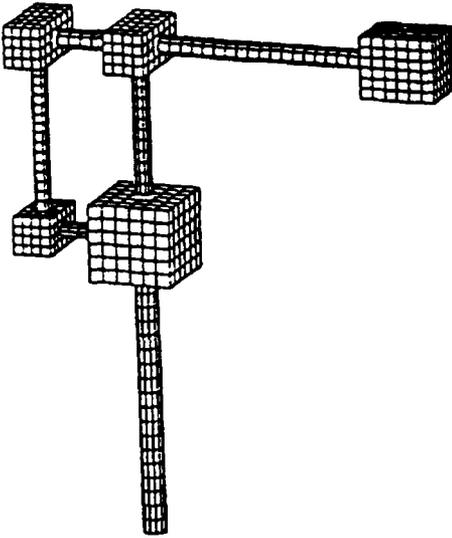


Figure 9. Discretisation par éléments finis du robot Hitachi

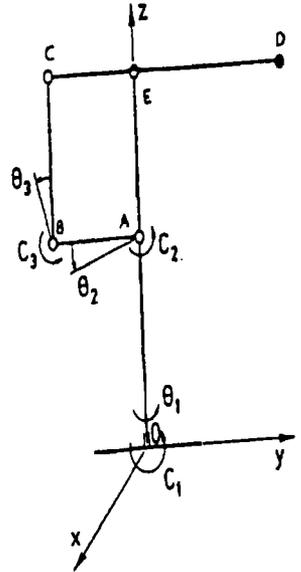


Figure 10. Schéma des sollicitations appliquées

Dans un premier temps, on procède à une discrétisation fine du robot. Cette discrétisation sert à définir d'une façon aussi précise que possible les formes modales des sous-structures. Les sollicitations appliquées à ce robot sont schématisées sur la figure 10 et sont données dans les tableaux 1.a, 1.b et 1.c.

A l'origine, le robot pivote autour de l'axe OZ. Il est soumis à un couple C_1 qui suit un asservissement en tension de type proportionnel-dérivé (dépendant du déplacement de consigne et de la vitesse de consigne).

Au point A, on applique un couple C_2 sur le pivot. Celui-ci est orienté selon l'axe OX. Au point B, un troisième couple C_3 commande le mouvement autour d'un pivot d'axe OX.

temps(s)	0		0,5	+∞
θ_{c1} (rad)	0	5,2	5,2	5,2
$\dot{\theta}_{c1}$ (rad/s)	1	1	0	0

Tableau 1.a. Caractéristiques de la consigne θ_1

temps (s)	0		0,3		0,5	+∞
θ_{c2} (rad)	0	0	0	0,4	0,4	0,4
$\dot{\theta}_{c2}$ (rad/s)	0	0	2	2	0	0

Tableau 1.b. Caractéristiques de la consigne θ_2

temps (s)	0		0,4		0,6	+∞
θ_{c3} (rad)	0	0	0	0,13	0,13	0,13
$\dot{\theta}_{c3}$ (rad/s)	0	0	0,6	0,6	0	0

Tableau 1.c. Caractéristiques de la consigne θ_3

Les couples C_1 , C_2 et C_3 sont assujettis à des asservissements similaires, ils sont définis ainsi :

$$C_i = N \left(\frac{h \cdot U_{mot}}{R} - \frac{h \cdot \dot{\theta}_i}{R} + F_{sv} \right)$$

La tension aux bornes du moteur U_{mot} est donnée par la relation :

$$U_{mot}^i(t) = -G_p(\theta_i - \theta_{ci}) - G_v(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{ci})$$

Les différentes caractéristiques du moteur et des asservissements sont consignées dans le tableau 2.

Masse du stator	0,9
Masse du rotor	2,5
Inertie du stator	$1,5 \cdot 10^{-4}$
Inertie du rotor	10^{-6}
Facteur de gain en position : G_p	150
Facteur de gain en vitesse : G_v	2
Résistance électrique : R	0,93
Coefficient de réduction : N	200
Constante du couple : h	$5,9 \cdot 10^{-2}$
Ensemble des frottements secs et visqueux : F_{sv}	0

Tableau 2. *Caractéristiques des moteurs et des asservissements*

Les caractéristiques des rotors et des stators sont additionnées aux caractéristiques des structures qui les portent. Ces dernières sont répertoriées dans le tableau 3.

Caractéristiques (U.S.I.)	OA	AB	BC	AE	Flèche
Diamètre	$5,48 \cdot 10^{-2}$	$4,04 \cdot 10^{-2}$	$3,64 \cdot 10^{-2}$	$3,64 \cdot 10^{-2}$	$4,49 \cdot 10^{-2}$
Module d'élasticité	-	-	-	-	$7,10^8$
Coefficient de Poisson	-	-	-	-	0,35
Masse volumique	2700	2700	2700	2700	2700
Longueur	0,7	0,25	0,45	0,45	0,92

Tableau 3. *Caractéristiques des sous-structures*

Aux points C et E, les sous-structures contiguës sont reliées par des liaisons passives de type pivot d'axe OX. Les caractéristiques des sous-structures sont les suivantes :

les conditions aux limites de la flèche souple ont été choisies ainsi : rotulé en C, appuyé en E et libre en D. On a retenu les trois modes ayant les plus basses fréquences, soit respectivement $f_1 = 2,0$ Hz ; $f_2 = 6,5$ Hz ; $f_3 = 13,5$ Hz . Le pas d'intégration choisi est $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ s.

La figure 11, donne la variation de l'angle θ_2 , comparée à la consigne et aux résultats obtenus par le module « Solides indéformables » du code Plexus. Ce dernier module faisait déjà partie de Plexus. Il considère les sous-structures comme étant toujours indéformables. Dans cette figure l'effet de la flexibilité est bien

visible. On remarque en effet que la valeur de cet angle oscille par rapport à la consigne et s'amortit moins vite que celle du robot rigide à cause des oscillations de la flèche.

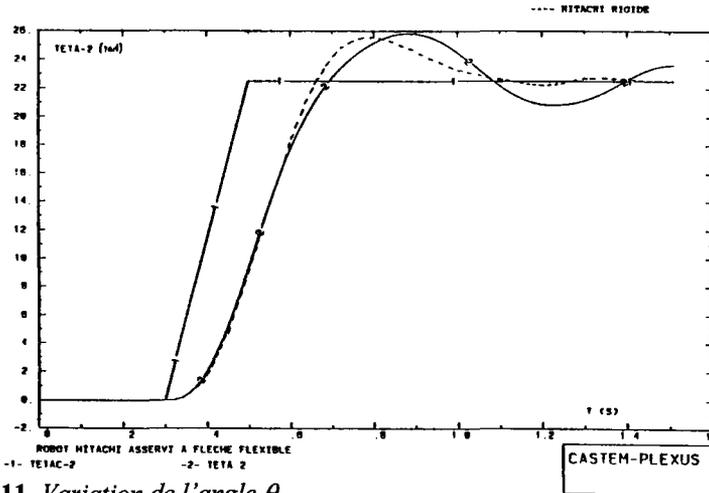


Figure 11. Variation de l'angle θ_2

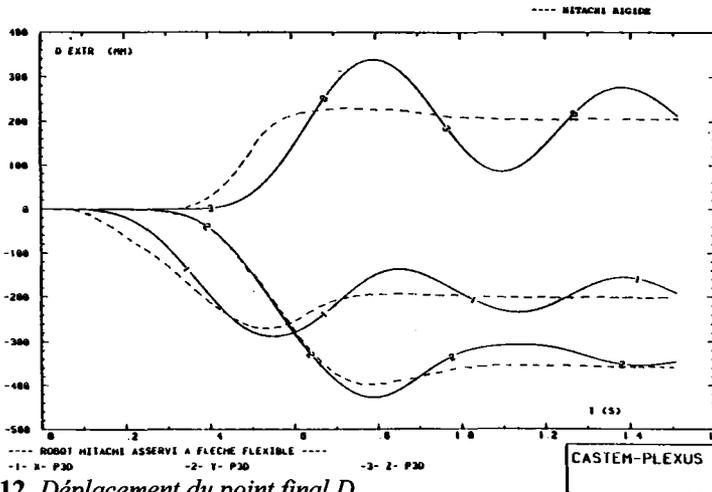


Figure 12. Déplacement du point final D

Dans la figure 12, on trace les déplacements du point D à l'extrémité de la flèche suivant les trois axes. On remarque bien l'oscillation de ce point final par rapport à sa trajectoire au sein du robot rigide. Cette oscillation est assez importante et ne peut être négligée. Pour que cette courbe se rapproche au maximum de la trajectoire du point final du robot rigide, il faudrait appliquer au niveau des moteurs C_2 et C_3 une commande adéquate (Par exemple une commande par découplage non linéaire [YAC 95]), ce qui est de nature à affiner le pilotage de ce robot.

4.3. Double pendule flexible

L'exemple présenté ci-dessous est repris des travaux de Ray et al. [RAY90], les résultats obtenus ont été validés avec d'autres références. Il s'agit d'un double pendule flexible et pesant (figure 13).

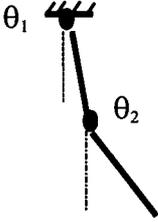


Figure 13. Schéma du double pendule

Les caractéristiques du test sont les suivantes :

conditions initiales $\theta_1(0) = 0^\circ$, $\theta_2(0) = 5^\circ$. Paramètres inertiels : $L_1 = L_2 = 1\text{m}$, $I_1 = I_2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$, $m_1 = m_2 = 5 \text{ kg/m}$ et $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Les figures indicées par (a) représentent les travaux de Ray, celles indicées par (b) représentent nos résultats. On utilise ici les deux premiers modes propres "rotulé-rotulé".

Dans la figure 14, on compare les angles de rotation θ_1 . On remarque une grande similitude entre les deux méthodes.

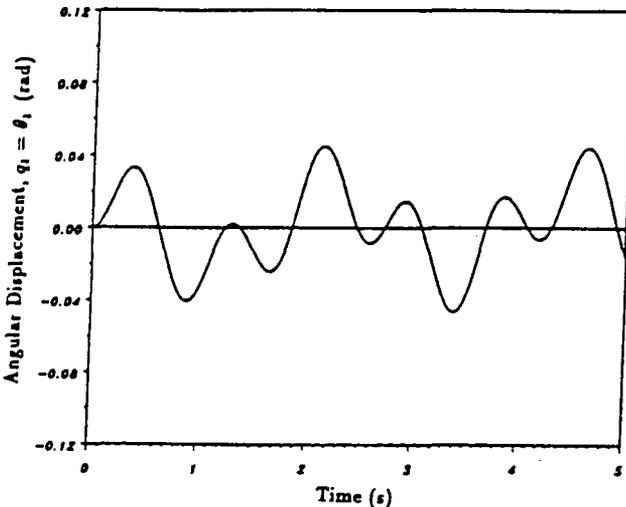


Figure 14.a. Variation de l'angle θ_1

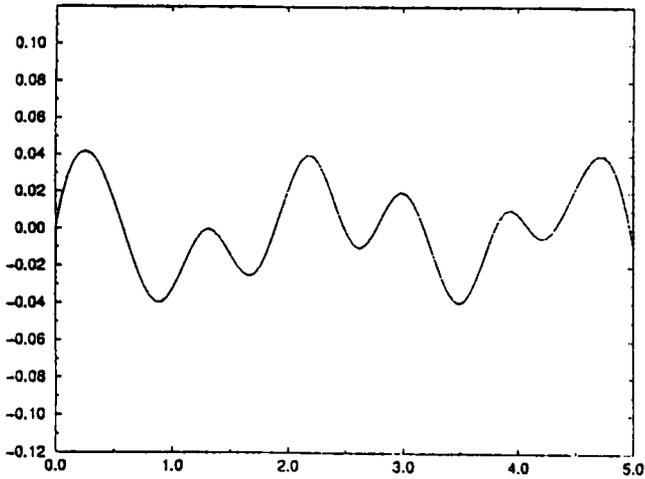


Figure 14.b. Variation de l'angle θ_1

Les figures 15 et 16 représentent les déformations au cours du temps des centres et des extrémités des deux barres flexibles. On remarque que nos résultats sont assez proches de ceux donnés par Ray, tant au niveau allure des déformées qu'au niveau amplitude.

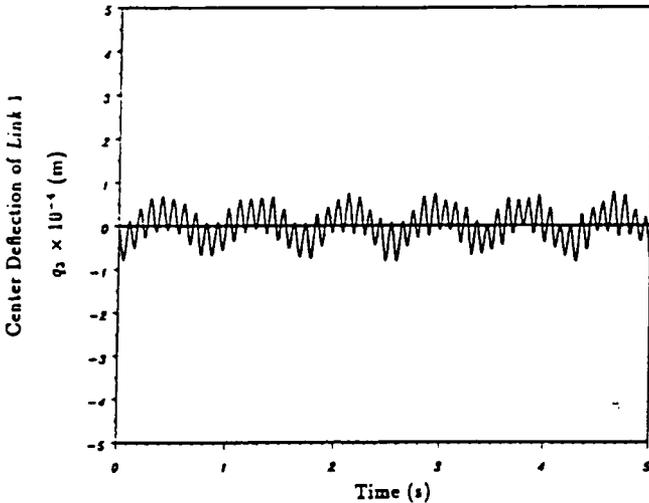


Figure 15.a. Déformation du centre de la barre 1

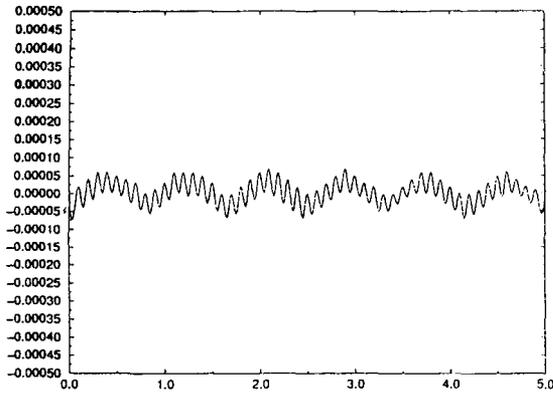


Figure 15.b. Déformation du centre de la barre 1

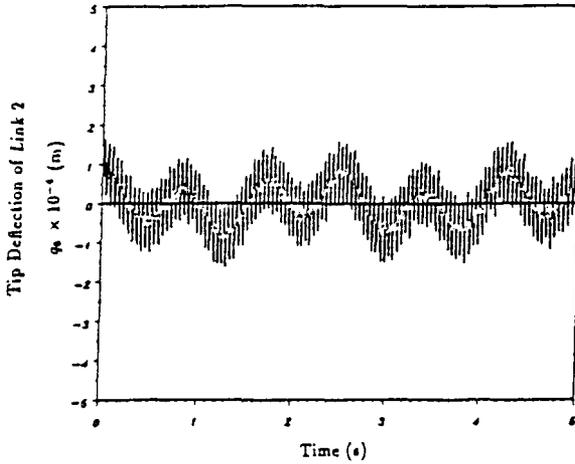


Figure 16.a. Déformation de l'extrémité de la barre 2

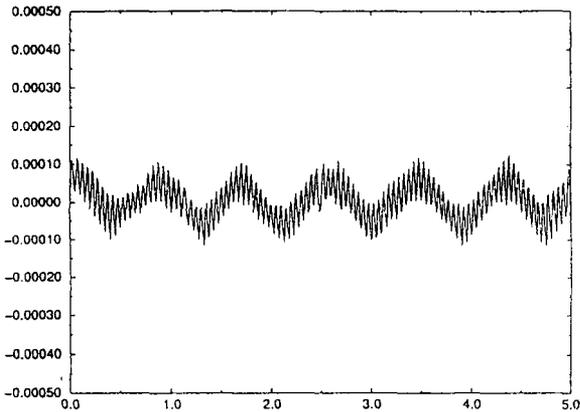


Figure 16.b. Déformation de l'extrémité de la barre 2

A titre indicatif, le temps de calcul nécessaire à la réalisation de ce test est de 13 secondes CPU sur un appareil IBM RISC 6000. Dans son article, Ray n'indique pas le temps CPU. En tout état de cause, la comparaison des temps de calcul ne peut être objective que si les supports informatiques sont identiques.

5. Conclusion

Un formalisme d'analyse des structures peu flexibles en grands mouvements a été développé. La méthode consiste à définir le mouvement de chaque sous-structure selon un schéma incrémental par rapport à un repère local qui lui est associé. L'incrément de mouvement de corps rigide et la déformation sont traités simultanément au travers d'une synthèse modale, ce qui a permis de tenir compte du couplage inertiel entre le mouvement d'ensemble et la déformation. De plus, dans cette analyse, la matrice de masse de chaque sous-structure reste constante durant la simulation. Ceci est de nature à minimiser les temps de calcul. D'autre part, une méthode originale a été présentée pour la connexion des divers composants de la structure articulée. Elle exploite au maximum le paramétrage modal des sous-structures pour une résolution aisée des multiplicateurs de Lagrange. Grâce à la construction automatique des matrices de liaison, selon une méthode analogue à celle des éléments finis, on a pu réaliser un outil de calcul performant. Cependant, les temps de calcul obtenus ne peuvent satisfaire complètement à nos exigences, l'objectif étant d'obtenir des temps CPU inférieurs aux durées des simulations pour pouvoir piloter en temps réel des robots industriels. Des travaux sont en cours pour coupler ce formalisme modal à la méthode Newton-Euler qui est généralement mieux adaptée à l'étude des robots manipulateurs.

6. Bibliographie

- [AMI 88] AMIROUCHE F.M.L., JIA T. « A Pseudo-Uptriangular Decomposition Method for constrained multibody systems using Kane's equations ». Jour. of Guid., Control, and Dynamics. Vol.10, N°7. (1988).
- [AZO 94] AZOUZ N. « *Modélisation des structures souples polyarticulées. Application à la simulation des robots* ». Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6 (1994).
- [BAR 83] BARRACO A. « *Dynamique des systèmes mécaniques déformables* ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 6 (1983).
- [BAT 82] BATHE K.J. « *Finite element procedures in engineering analysis* ». Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (1982).
- [CHA 90] CHARVET-QUEMIN F. « *Synthèse modale des systèmes articulés en grands déplacements* ». Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6 (1990).
- [CLO 80] CLOUGH R.W., PENZIEN J. « *Dynamique des structures* ». Tome 1. Editions Pluralis (1980).
- [CUN 91] CUNY B. « *Simulation des chaînes de transmissions mécaniques et d'asservissement* ». Cours IPSI (1991).

- [DOM 88] DOMBRE E., KHALIL W. « *Modélisation et commande des robots* ». Editions Hermès (1988).
- [GER 91] GERADIN M., CARDONNA A. « Modelling of superelements in mechanism analysis. ». Int. Jour. for Num. Meth. in Eng. . Vol. 32 - pp. 1565-1593 (1991).
- [GIB 88] GIBERT R.J. « *Vibrations des structures* ». Editions Eyrolles (1988).
- [HUS 89] HUSTON R.L. « Methods of analysis of constrained multibody systems ». Mech. Struct. and Mach. 17(2). pp. 135-143 (1989).
- [IMB 84] IMBERT J.F. " *Analyse des structures par éléments finis* ". Editions Cepadues (1984).
- [MIN51] MINDLIN R.D. « Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates ». ASME, Jour. of Applied Mech. 18, pp 31-38 (1951).
- [NAT 80] NATH P.K., GOSH A. « Kineto-elasto-dynamic analysis of mechanisms by finite element method ». Mech. Mach. Theory. Vol. 15 pp. 179-197 (1980).
- [NOR 84] NORRIE H., HAYRETTIN K. « *Finite element Handbook* ». Mac Graw-Hill (1987) USA.
- [PAU 81] PAUL R.P. « *Robot manipulators : mathematics programming and control* » MIT Press (1981).
- [RAY 90] RAY P.S.H., ZHI C.Z. « Dynamics of general flexible multibody systems ». Int. Jour. for Num. Meth. in Eng. Vol. 30, pp.77-97 (1990).
- [REI 72] REISSNER E. « On one dimensionnal finite strain beam theory. The plane problem ». Jour. of Appl. Math. Phys. 23, pp.795-804 (1972).
- [SHA 85] SHABANA A.A. « Substructure synthesis methods for dynamic analysis of multibody systems ». Comp. & Struct. Vol. 20 - n°4. pp. 737-744 (1985).
- [SHA 88] SHABANA A.A. « *Dynamics of multibody systems* ». Edition Springer-Verlag (1988).
- [SIM 85] SIMO J.C. « A finite strain beam formulation. The three dimensionnal dynamic problem ». Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 49, pp. 55-70 (1985).
- [SIM 87] SIMO J.C. « The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures ». Jour. of Sound and Vibr. 119, pp. 487-508 (1987).
- [SIN 85] SINGH R.P., LIKINS P.W. « Singular Value Decomposition for constrained Dynamical systems ». Jour. of Appl. Mech. Vol.52 pp. 943-948. (1985).
- [SUN 81] SUNADA W.H., DUBOWSKY S. « The application of finite element methods to the dynamic analysis of flexible spatial and coplanar linkage systems ». Jour. of Mech. design. Vol. 103 (1981).
- [TOU 84] TOUZOT G., DHATT G. « *Introduction à la méthode des éléments finis* ». Editions Dunod (1984).
- [YAC 95] YACHOU B, PASCAL M., AZOUZ N. « Commande non lineaire de robots souples ». 12^e Congrès Français de Mécanique. Strasbourg (1995).
- [WIN 71] WINFREY R.C. « Elastic link mechanism dynamics ». Trans. ASME Jour. of eng. for Indus. pp.268-272 (1971).

Article reçu le 10 octobre 1996.

Version révisée le 30 octobre 1998.