

---

# Optimisation topologique de plaques par algorithme génétique

**Tanguy Messenger \*** — **Mariusz Pyrz \*\*** — **Jérôme Coloos \*\*\***

*\* Laboratoire Mécanique et Matériaux, EA 940  
Université de Bretagne Occidentale  
6 avenue Le Gorgeu, BP 809, F-29285 Brest cedex  
Tanguy.Messenger@univ-brest.fr*

*\*\* Laboratoire de Mécanique de Lille, URA CNRS 1441  
Boulevard Paul Langevin, F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex  
Mariusz.Pyrz@eudil.fr*

*\*\*\* Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux, IUP Lorient  
2 rue Coat St Haouen, F-56325 Lorient cedex  
Jerome.Coloos@univ-ubs.fr*

---

*RÉSUMÉ. Ce travail concerne l'élaboration d'outils d'aide à la conception optimale. Un code éléments finis couplé à un algorithme génétique permet l'optimisation topologique de plaques. L'étude des performances est réalisée à l'aide de problèmes classiques. La qualité des résultats et les possibilités d'amélioration de la méthode sont discutées.*

*ABSTRACT. This work deals with the development of optimum design tool. A finite element program is coupled with genetic algorithm to carry out the shape optimization of plates. The evaluation of performances is based on classical optimization problems. Quality of results and possible enhancement of the method are discussed.*

*MOTS-CLÉS : optimisation topologique, algorithme génétique, MEF, plaques.*

*KEY WORDS : shape optimization, genetic algorithm, FEM, plates.*

---

## 1. Introduction

Le concepteur est souvent confronté à une multitude de possibilités quant au choix de la topologie de structures. Aussi, de nombreux travaux actuels concernent l'élaboration d'outils d'aide à la conception, permettant de guider rapidement la décision à une solution optimale ou, tout du moins, proche de l'optimum.

Le couplage de méthodes classiques d'optimisation, basées sur le calcul des sensibilités, avec la méthode des éléments finis (MEF) s'avère généralement fort complexe et délicat. En effet, l'obtention de la convergence vers l'optimum global requiert des propriétés mathématiques telles que la continuité, la dérivabilité et la convexité des fonctions objectifs et des contraintes. Aussi, le champ d'application de ces méthodes, très efficaces pour certaines classes standard de problèmes, peut s'avérer trop restreint pour certains cas abordés en sciences de l'ingénieur. De plus, la complexité de leurs mises en œuvre pour, par exemple, des problèmes à variables discrètes et mixtes, ou à fonctions objectif non dérivables, constitue une difficulté majeure pour le concepteur, notamment dans un contexte industriel. Il existe cependant une classe de méthodes d'optimisation d'application générale, appelées *weak-methods*, robustes et souples. Les algorithmes génétiques (AG) font partie de cette catégorie.

Les AG sont des procédures de recherche stochastique inspirées de la biologie, et simulant les processus de l'évolution naturelle, de l'héritage et de la survie des individus les plus adaptés. Cette méthode ne nécessite pas le calcul des gradients de la fonction objectif et des contraintes. L'exploration de l'espace de solutions est réalisée par une population de points ce qui réduit la probabilité de concentrer la recherche sur un extremum local. Les travaux de Hajela [HAJ 90], Jenkins [JEN 91] et Rajeev [RAJ 92] figurent parmi les premières études en sciences de l'ingénieur. De nombreuses applications de cette méthode originale concernent l'optimisation de treillis [YAN 97]. On peut citer aussi des applications concernant l'optimisation de l'amortissement de poutres composites [MAR 95a] ou des conditions aux frontières pour la prise de pièces [MAR 95b]. [KOG 94] a utilisé les AG pour optimiser des composites stratifiés. [TOS 95] présente aussi des résultats d'optimisation du tissage de composites 3D. [SCH 96] a expérimenté diverses stratégies de codages bidimensionnels et d'opérateurs originaux pour optimiser la constitution de structures bi-matériaux. [GIR 98] présente trois applications concernant la conception optimale d'ensembles mécaniques. De nombreuses autres applications des AG confirment l'intérêt croissant d'utilisation de telles procédures stochastiques pour l'optimisation en sciences de l'ingénieur.

Cette étude présente une méthodologie viable pour l'optimisation de formes de structures plaques par application d'un AG canonique. Des techniques simples et explicites de codage des topologies sont proposées. Les performances ainsi que les améliorations possibles de la méthode sont discutées dans l'optique de la création

d'outils d'aide à la décision par une algorithmique d'évolution simulée. L'étude est illustrée par des exemples classiques concernant des structures plaques modélisées par la MEF. Il s'agit d'optimiser :

- la répartition d'épaisseur, à volume constant, pour minimiser des déplacements verticaux,

- la répartition de « vides », de cavités, pour uniformiser la répartition de contrainte équivalente de Von Mises à une valeur objectif.

On s'attachera, dans chaque cas, à préciser le couplage AG-MEF.

## 2. Stratégie d'optimisation

### 2.1. Principe

Issus des travaux de Holland [HOL 75], les AG sont des processus exploratoires d'optimisation fondés sur une analogie des mécanismes de sélection et d'adaptation naturels. Le principe est fortement apparenté à la théorie évolutionnaire : dans une population de dimension donnée, les individus les mieux adaptés à leur environnement bénéficient d'une probabilité importante de survivre et de transmettre leurs patrimoines génétiques à une descendance. De plus, des mutations génétiques peuvent apparaître et, parfois, s'avérer bénéfiques en conférant des caractéristiques accroissant la robustesse d'individus. De fait, au fil des générations, les individus sont de mieux en mieux adaptés à leur biotope, la population s'homogénéise et « converge » vers un type optimal. Cette métaphore « naturelle » ou « biologique » a conduit à la popularisation des AG dans le milieu scientifique.

Ce processus d'évolution simulée doit satisfaire à deux objectifs antagonistes [GOL 94], [MIC 95], [SEB 96]. Les opérateurs génétiques (sélection, croisement et mutation) doivent en effet permettre :

- l'exploitation de l'information, et donc des zones prometteuses découvertes,
- l'exploration de zones de l'espace de recherche encore inconnues.

La prédominance de l'exploration ou de l'exploitation aboutit généralement à une convergence prématurée (perte de la diversité génétique et ainsi obtention d'optima locaux) ou à une marche aléatoire, respectivement.

L'approche adoptée pour cette étude consiste en un AG canonique dont l'algorithmique d'évolution simulée est détaillée notamment en [GOL 94], [MIC 95].

### 2.2. Opérateurs et paramètres de l'AG

A l'instar de la plupart des applications en sciences de l'ingénieur, l'AG créé utilise un codage du problème sous forme de chaînes (ou *chromosomes*) de caractères (ou *gènes*) binaires. Chacun de ces individus représente une « carte » topologique, constituant une solution potentielle de topologie de la structure.

La sélection est une étape cruciale d'exploitation [SEB 96]. La *pression sélective*, caractérisant la probabilité de sélection du meilleur individu de la population, est un indicateur de son effet [MIC 95], [SEB 96], [YAN 97] : elle représente le rapport de la performance maximale et de la performance moyenne dans la population courante. Cette quantité exprime l'espérance du nombre de copies de meilleur individu lors de l'étape de sélection. Une pression trop élevée aboutit à une perte de la diversité génétique dans la population et donc à un risque de convergence prématurée ; une pression tendant vers 1 annule tout effet sélectif. L'AG créé propose l'utilisation de deux types d'opérateurs stochastiques :

- sélection par *roue de loterie* (ou *sélection proportionnelle*) dont chaque individu occupe une portion proportionnelle à son adaptation. Des tirages aléatoires déterminent des positions angulaires, et donc la sélection d'individus;

- sélection par *tournois* (ou *duels*), où des tirages aléatoires déterminent des couples d'adversaires dans la population, les individus possédant les plus grandes valeurs d'adaptation étant alors sélectionnés. Contrairement à la sélection proportionnelle, cette technique induit une *pression sélective* constante, égale à 2, valeur recommandée par la littérature [SEB 96].

Par ailleurs, l'AG créé utilise un mode d'*élitisme* : le premier chromosome parent sélectionné est, d'emblée, celui possédant la meilleure adaptation. Notons qu'une autre approche, expérimentée par de nombreux auteurs, consiste en une *reproduction élitiste*, le meilleur individu devenant immédiatement enfant sans subir de croisement ou de mutation.

Compte tenu du mode de codage (chaînes binaires), le choix des opérateurs de croisement et de mutation a porté sur des procédés classiques [GOL 94], [MIC 95] :

- Le croisement est une étape orientée vers l'exploitation. L'AG utilise une procédure à *deux points de coupures* (2X) : les enfants sont issus de l'échange des segments de chromosomes parents situés entre deux positions déterminées aléatoirement. De nombreux auteurs ont souligné l'efficacité de cette procédure par rapport au croisement à un point de coupure [MIC 95], [GIR 98].

- La mutation, opérateur primordial de l'exploration, est réalisée en modifiant aléatoirement des gènes. A l'instar du croisement, cette procédure est assujettie à un taux probabiliste.

L'utilisateur définit les nombres d'individus et de générations. Pour l'ensemble des tests, nous avons utilisé les valeurs classiques [GOL 94] de paramètres probabilistes suivantes :

- probabilité de croisement = 80 %,
- probabilité de mutation (par gène) = 0,8 %.

De par la nature stochastique de la méthode, chaque cas étudié a donné lieu à de multiples lancements successifs du calcul, permettant une analyse réaliste et statistique des performances.

La résolution des problèmes d'optimisation par un AG constitue un processus aléatoire complexe, pour lequel il est délicat de séparer et de comparer les effets des

différents opérateurs [GOL 94], [MIC 95], [SEB 96]. Aussi, les résultats présentés restent indicatifs pour les natures de problèmes traités, les paramétrages correspondants et les types d'opérateurs adoptés.

### 2.3. Couplage avec un code de calcul par la MEF

L'AG créé a été couplé à un code de calcul par la méthode des éléments finis permettant une analyse élastostatique de plaques minces isotropes sollicitées en membrane et en flexion.

Pour chaque problème traité, une procédure d'interfaçage (cf. figure 1) réalise l'encodage d'une topologie potentielle sous forme d'un chromosome. Après décodage de ces données physiques, leur introduction au lancement d'un calcul MEF permet de récupérer la valeur d'adaptation correspondante. Les paragraphes suivants précisent les représentations topologiques adoptées.

Les exemples numériques ont été réalisés sur stations de travail DEC Alpha. L'AG ainsi que les modules du calcul MEF ont été codés en Fortran 77.

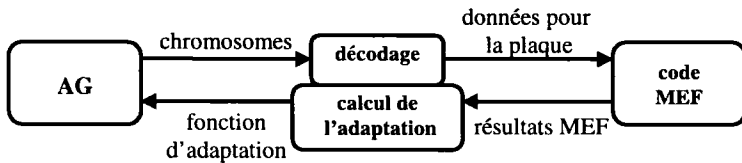


Figure 1. Interface de liaison AG-MEF

## 3. Répartitions optimales d'épaisseurs de plaques en flexion

### 3.1. Formulation du problème

Il s'agit d'un problème classique d'optimisation de forme : à volume  $V_0$  de matière imposé, on cherche à réduire, en modifiant la répartition d'épaisseur, le déplacement vertical  $W_A$  du centre d'une plaque carrée isotrope homogène soumise à une charge ponctuelle (cf. figure 2). On considère deux types de conditions aux limites cinématiques :

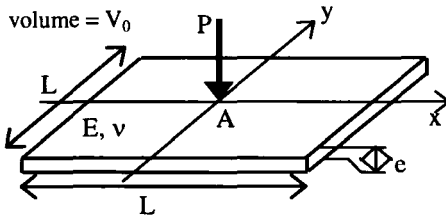
- plaque encastrée sur tout le contour,
- plaque appuyée sur tout le contour.

Ce problème de répartitions optimales d'épaisseur est souvent rencontré dans la littérature. [HAF 81] en propose une revue détaillée. L'approche sous forme discrète est donnée par [HAU 82], le problème continu est traité dans [BAN 81].

La modélisation EF adoptée porte sur  $\frac{1}{4}$  de la plaque (de par les symétries du problème) et utilise l'élément rectangulaire isoparamétrique à 4 nœuds ACM. Il

s'agit d'un élément de plaque mince (modèle de Kirchhoff, 3 ddl par nœud) dont [ZIE91] présente une forme explicite de la matrice de rigidité élémentaire.

La fonction d'adaptation utilisée est :  $F = 1 / W_A$ .



Application numérique :

$L = 200 \text{ mm}$

$E = 200\,000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$

$P = 10\,000 \text{ N}$

$V_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$  d'où, pour une plaque d'épaisseur continue,  $e = 5 \text{ mm}$

**Figure 2.** *Plaque carrée soumise à une charge ponctuelle centrale*

### 3.2. Codage

Le problème d'optimisation considéré consiste à déterminer l'épaisseur de chaque élément fini parmi 2 valeurs différentes,  $e_0$  (épaisseur « faible ») ou  $e_1$  (épaisseur « forte »). Le rapport  $e_1/e_0$  est défini par l'utilisateur. La condition de volume imposé permet alors de déterminer les valeurs d'épaisseurs d'après la relation suivante :

$$\sum_j e_0 \cdot S_j + \sum_k e_1 \cdot S_k = V_0$$

avec :  $S_i$  = surface de l'élément  $i$   
 $e_i$  = épaisseur de l'élément  $i$   
 $j = n^o$  des éléments d'épaisseur  $e_0$   
 $k = n^o$  des éléments d'épaisseur  $e_1$

Pour les exemples numériques exposés, on prendra :  $e_1/e_0 = 1,5$ .

Notons que le maillage reste identique pour toutes les solutions lors d'une même analyse. Une procédure de remaillage pourrait en effet entraîner un bruitage numérique pouvant être néfaste pour comparer les adaptations de différents individus [SCH 96].

Le codage des variables d'optimisation, correspondant à la répartition d'épaisseurs sur la structure discrétisée, utilise une technique simple et explicite : chaque gène d'un chromosome binaire représente l'épaisseur  $e_0$  ou  $e_1$  d'un élément du maillage et contient le caractère 0 ou 1, respectivement.

Notons cependant que ce codage et surtout l'ordre de numérotation des éléments peuvent avoir une influence sur la convergence de la procédure. Les éléments étant numérotés successivement ligne par ligne, la procédure de croisement, privilégiant la partie centrale du chromosome, consiste de fait à échanger des bandes horizontales de matière de deux parents. Cependant, à l'instar de nombreuses applications en sciences de l'ingénieur, cette étude concerne l'évaluation des performances d'un AG

canonique utilisant une représentation simple et relativement « aveugle » du problème d'optimisation topologique. Certains auteurs ont testé des approches plus générales consistant à créer des codages et croisements spécialement conçus pour le problème. [SCH 96], par exemple, détaille une confrontation de différents modes de codage (matrices binaires, diagrammes de Voronoï, « H-représentation ») appliqués à un problème d'identification d'inclusions.

### 3.3. Exemples numériques

Pour les tests présentés ici, les paramètres de population de l'AG sont fixés aux valeurs suivantes :

- nombre d'individus de la population = 50,
- nombre de générations = 300.

Nous présentons les résultats pour 2 types de maillages.

#### 3.3.1. Maillage 5x5

Les premiers tests ont été effectués en modélisant  $\frac{1}{4}$  de la plaque par un maillage incrémental de 5x5 éléments. Ce problème de répartition optimale de 2 épaisseurs différentes pour 25 éléments induit un espace de recherche comprenant  $2^{25}$  solutions. Cependant, de par la double symétrie des conditions aux limites cinématiques, les solutions optimales sont de fait symétriques par rapport à la diagonale du maillage. Ainsi, on peut réduire la cardinalité du problème à  $2^{15}$ . Une exploration exhaustive de cet espace de solutions a permis, moyennant environ 20 minutes de calcul, de déduire les solutions optimales dont les allures qualitatives (tout à fait conformes aux résultats de [HAU 82], [BAN 81]) pour les plaques complètes sont présentées en figure 3.

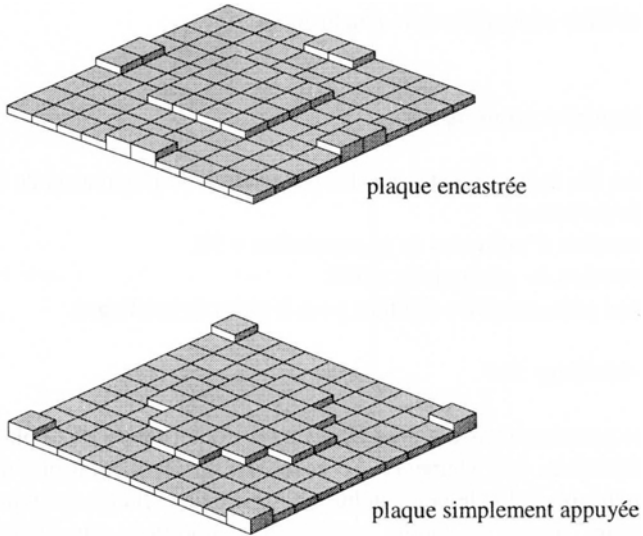
Par comparaison avec les déplacements  $W_{A0}$  (obtenus par une modélisation identique) des plaques d'épaisseurs continues uniformes, on peut apprécier les réductions des flèches au centre (exprimées en mm) :

Plaque :	$e_0$	$e_1$	$W_A$	$W_{A0}$
encastrée	4,46	6,69	0,609	1,004
simplement appuyée	4,39	6,58	1,362	2,054

soit des réductions de  $W_A$  de 40 % et 34 % par rapport à  $W_{A0}$  pour la plaque encastrée et la plaque simplement appuyée respectivement.

Pour les calculs d'optimisation par AG, la symétrie des répartitions d'épaisseurs n'a par contre pas été imposée afin d'en tester les performances sur des problèmes comportant  $2^{25}$  solutions différentes. Les temps de calcul CPU observés sont faibles, environ 50 secondes. Afin d'évaluer la reproductibilité des résultats, nous avons

réalisé 50 calculs successifs par AG pour chaque type d'opérateur de sélection (roue de loterie ou tournois) pour les plaques encastrée et appuyée. Chacun de ces tests a conduit invariablement à l'obtention des solutions optimales présentées en figure 3.

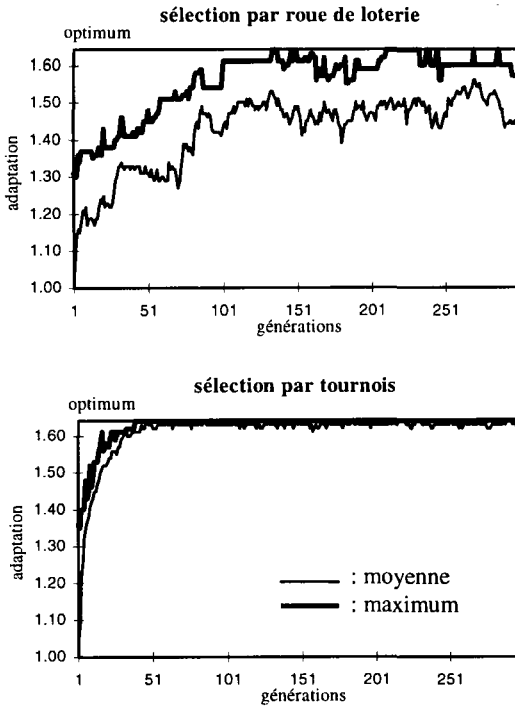


**Figure 3.** Solutions optimales

Ces solutions optimales sont obtenues rapidement, au terme des quelque 30 premières générations en utilisant la sélection par tournois soit donc, chaque génération comportant 50 chromosomes, une exploration d'uniquement  $50 \cdot 30 / 2^{25} \approx 5 \cdot 10^{-3} \%$  de l'espace de recherche. La sélection par roue de loterie conduit, elle, à une convergence effective de l'AG après moins de 150 générations, soit une exploration d'environ  $50 \cdot 150 / 2^{25} \approx 22 \cdot 10^{-3} \%$  de l'espace des solutions.

La figure 4 présente les allures caractéristiques des évolutions des valeurs d'adaptation moyenne et maximale de la population à chaque génération. La convergence de l'AG utilisant une sélection par roue de loterie apparaît irrégulière, perturbée, de par les variations importantes de la pression sélective au cours du processus. Cette remarque illustre le problème majeur induit par la sélection proportionnelle : la découverte d'un « bon » individu conduit à une hausse brusque de la pression, donc à une perte de diversité génétique (cf. § 2.2). Les générations suivantes risquent ensuite de subir un affaissement de la pression, au risque de convergence sur un optimum local. Aussi, de nombreux auteurs préconisent l'utilisation d'une heuristique de mise à l'échelle [MIC 95], [SEB 96], permettant l'ajustement et le contrôle de la pression sélective.





**Figure 4.** Evolutions caractéristiques des populations

Par contre, l'évolution de l'AG utilisant une sélection par tournois s'avère régulière, quasi monotone. Les solutions optimales sont obtenues plus rapidement. A l'instar de [YAN 97], nous avons observé des propriétés similaires pour tous les exemples numériques présentés dans cet article. Cette supériorité de la sélection à pression constante, bien connue par la communauté des chercheurs du domaine des stratégies évolutionnistes et soulignée lors de nombreux travaux [MIC 95], [SEB 96], est pourtant peu utilisée dans les applications en optimisation de structures.

### 3.3.2. Maillage $10 \times 10$

Dans ce cas, les tests utilisent une modélisation de  $10 \times 10$  du  $\frac{1}{4}$  des plaques. Notons que, même en imposant ces symétries des répartitions, les solutions optimales n'ont pu être déduites d'explorations exhaustives. En effet, on peut estimer le temps de calcul nécessaire à de telles recherches à plus de  $10^{19}$  siècles (!).

Là encore, les symétries des solutions par rapport à la diagonale du maillage n'ont pas été imposées pour les calculs par AG. Les espaces de recherche ici étudiés comportent  $2^{100}$  solutions. De par la modélisation adoptée ici, les temps de calcul CPU observés sont d'environ 12 minutes pour 300 générations de 50 chromosomes.

Chaque calcul d'optimisation concernant la plaque encastrée a été renouvelé 20 fois. Une analyse statistique succincte de la distribution des valeurs d'adaptation F conduit aux résultats suivants :

Sélection par :	F maxi	F mini	F moyen	écart-type
roue de loterie	1,5701	1,4471	1,5200	0,0364
tournois	1,6870	1,6795	1,6852	0,0212

Les faibles valeurs d'écart-types indiquent une bonne reproductibilité. Ainsi, pour chaque type de sélection, toutes les répartitions d'épaisseurs obtenues ont des adaptations et des allures quasi identiques. De plus, conformément aux observations précédentes, la sélection par tournois, nettement plus performante, conduit à des solutions possédant des adaptations F supérieures à celles obtenues par roue de loterie.

La meilleure solution déduite (cf. figure 5), obtenue en utilisant une sélection par tournois, permet une réduction de 40 % de  $W_A$  par rapport à  $W_{A0}$ . Cette répartition d'épaisseurs, symétrique par rapport à la diagonale, s'avère tout à fait semblable aux résultats de [HAU 82] et [BAN 81]. La sélection par roue de loterie permet l'obtention de résultats fortement similaires.

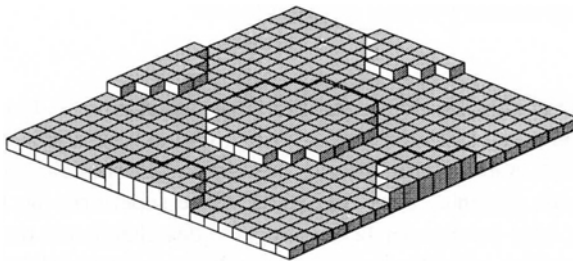
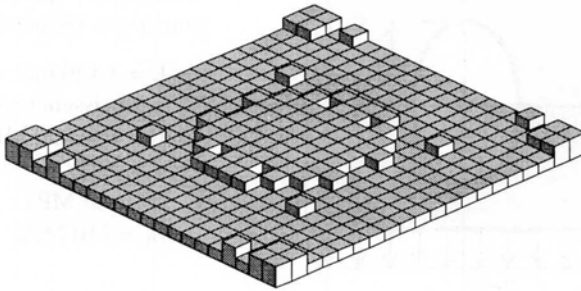


Figure 5. Solution obtenue pour la plaque encastrée

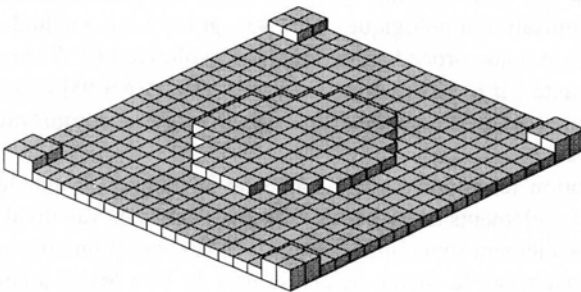
La nature stochastique de la méthode et le mode de codage adopté mènent dans certains cas à des solutions nécessitant l'interprétation du concepteur. Les 20 calculs successifs réalisés pour la plaque simplement appuyée ont ainsi conduit à des résultats « bruts » correspondant à des allures de plaques légèrement perturbées.

Cependant, considérant l'AG comme une aide à la décision, le concepteur peut aisément en déduire une solution régulière (cf. figure 6) conforme à [HAU 82], [BAN 81], induisant une réduction de plus de 30 % de  $W_A$  par rapport à  $W_{A0}$ .

Le paragraphe précédent amène à évoquer les limitations du mode de codage adopté, où le nombre d'éléments finis conditionne les tailles de chromosomes. En effet, des maillages très denses risquent de conduire à des problèmes d'optimisation de cardinalités trop élevées pour être résolus par l'AG avec des tailles de population et un nombre de générations raisonnables, bref en un temps de calcul exploitable. Aussi, des modèles MEF plus complexes induiraient l'utilisation d'autres modes de paramétrage du problème, à l'instar des travaux présentés en [SCH 96].



résultat « brut » d'optimisation



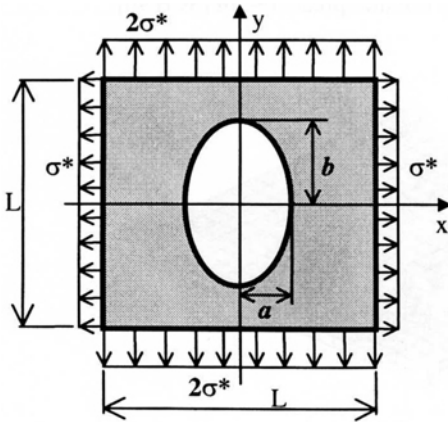
interprétation possible

**Figure 6.** Cas de la plaque simplement appuyée

### 4. Optimisation du perçage d'une plaque en traction biaxiale

#### 4.1. Formulation du problème

On considère une plaque carrée isotrope homogène en état plan de contraintes, présentée en figure 7, sollicitée en traction biaxiale par des charges surfaciques uniformes. Le problème consiste à déterminer les dimensions  $a$  et  $b$  optimales d'un perçage central elliptique conduisant à un état de contrainte équivalente de Von Mises  $\sigma_{VM}$  constant et égal à une valeur objectif  $\sigma_0$ .



Valeurs de l'application numérique (issues de [GUT 95]) :

- $L = 3\ 120\text{ mm}$
- $h$  (épaisseur) = 40 mm
- $E = 200\ 000\text{ MPa}$
- $\nu = 0,25$
- $\sigma^* = 63\text{ MPa}$
- $\sigma_0 = 210\text{ MPa}$

Figure 7. Plaque percée d'une ellipse en traction biaxiale

Ce problème est souvent employé pour tester les performances de différentes stratégies d'optimisation topologique. [GUT 95], grâce à une méthode d'optimisation continue combinée à une procédure de maillage évolutive (*FE Remeshing*), présente la solution suivante :  $a \approx 550\text{ mm}$  et  $b \approx 1\ 100\text{ mm}$ . [VAN 95] expose des résultats continus similaires issus d'un même type de stratégie d'optimisation (*Multi-point Approximation Method*).

La modélisation ici adoptée porte sur  $1/4$  de la plaque (de par les symétries du problème) par des éléments de membrane Q4 [BAT 90]. Les valeurs de contraintes au centre de chaque élément sont considérées représentatives pour son ensemble.

Afin d'homogénéiser le champ de contraintes de Von Mises à une valeur proche de  $\sigma_0$ , nous avons utilisé la fonction objectif suivante :

$$F = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{j=1}^N |\sigma_{VMj} - \sigma_0|}{N}}$$

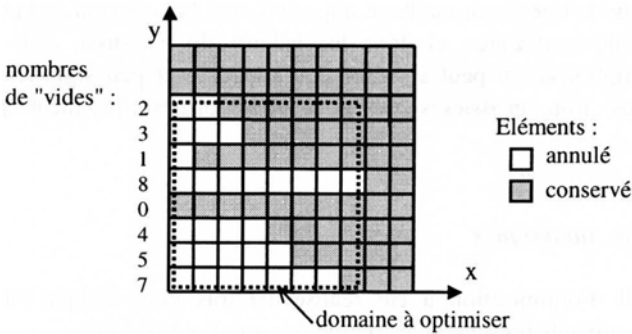
avec:  $\sigma_{VMj}$  = contrainte équivalente de Von Mises pour l'élément n°j  
 $j = 1, 2, \dots, N$  = numéros des éléments conservés

Le terme 1 au dénominateur permet d'éviter toute singularité qui correspondrait d'ailleurs à une solution idéale. On a ainsi, pour toute solution :  $0 < F \leq 1$ .

Notons qu'une plaque continue, non percée, identique à celle de la figure 7 est soumise à un champ de contrainte équivalente de Von Mises uniforme, noté  $\sigma_{VM0}$ , égal à  $\sqrt{3} \cdot \sigma^* \approx 109$  MPa. On en déduit une valeur d'adaptation  $F_0 = 9,82 \cdot 10^{-3}$ .

#### 4.2. Codage

Le mode de codage adopté utilise le principe suivant : sur un maillage incrémental modélisant  $\frac{1}{4}$  de plaque, on définit un domaine rectangulaire à optimiser. On code sous forme de chaîne binaire les nombres de « vides », d'éléments « annulés », pour chaque ligne de ce domaine. La figure 8 en donne un exemple. Ainsi, pour un domaine comportant  $K$  lignes, chaque chromosome comprend  $K$  suites de bits contenant chacune la valeur binaire du nombre d'éléments annulés pour la ligne correspondante.



**Figure 8.** Exemple d'annulations d'éléments sur  $\frac{1}{4}$  de plaque discrétisé

Ce type de codage original permet de s'affranchir de tout problème de conditions aux limites, les frontières de la structure étant inchangées au cours du processus d'optimisation. De plus, ce codage autorise, là encore, d'utiliser de manière naturelle les opérateurs « classiques » de croisement et mutation présentés en § 2.2. En outre, l'interfaçage avec le code MEF s'avère simple. Notons que, à l'instar de l'application précédente, le croisement 2X privilégie des échanges de bandes horizontales de « vide » de par le mode de codage adopté.

Il est primordial de noter que, contrairement aux calculs d'optimisation continue réalisés en [GUT 95] et [VAN 95], ce mode de codage bénéficie d'un caractère très général, n'induisant aucune contrainte sur le type de perçage. Ainsi, l'AG pourrait tout à fait conduire à des solutions comportant plusieurs cavités, à l'instar de l'exemple en figure 8, la forme elliptique centrale n'étant pas imposée.

La création de « vides » par « annulations » d'éléments nécessite l'utilisation de techniques spécifiques afin d'éviter toute singularité lors du calcul par la MEF. Une solution consiste à générer pour chaque cas un nouveau maillage spécifique ne comportant que les éléments conservés. Cependant, ce remaillage pourrait engendrer des temps de calculs conséquents ainsi qu'un bruitage numérique pouvant s'avérer néfaste (cf. remarque en § 3.2). Un autre procédé consiste à annuler les termes des matrices de rigidité élémentaires des éléments supprimés. Afin d'éviter toute singularité, on introduit des conditions aux limites cinématiques supplémentaires : les nœuds uniquement entourés d'éléments annulés sont alors bloqués. Cependant, cette technique nécessite là encore un nombre d'opérations important, pénalisant le temps de calcul.

La méthode adoptée consiste à multiplier les termes des matrices de rigidité élémentaires des éléments annulés par une valeur numérique très faible. De fait, lors de la résolution, les éléments supprimés sont « perçus » comme étant très semblables à des vides.

Notons que la finesse du maillage impose de fait la précision de la représentation des champs de contraintes, et donc les valeurs de  $F$ . Aussi, cette approche du problème d'optimisation peut s'avérer peu adéquate et peu significative pour des discrétisations trop grossières ou pour des formes fortement perturbées et discontinues.

### **4.3. Exemples numériques**

Le calcul d'optimisation a été réalisé 10 fois pour chaque cas étudié. Les paragraphes suivants présentent les meilleures solutions déduites.

#### **4.3.1. Maillage $10 \times 10$**

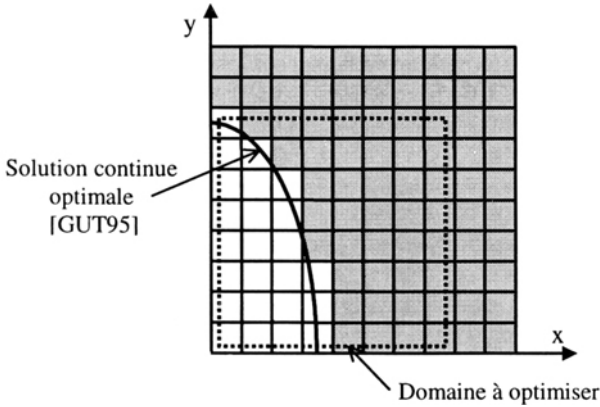
Pour une modélisation du  $\frac{1}{4}$  de plaque par un maillage  $10 \times 10$ , on choisit de prendre :

- nombre d'individus de la population = 60,
- nombre de générations = 200,

induisant de fait environ 7 minutes CPU. Le domaine à optimiser est constitué de  $8 \times 8$  éléments : sur la modélisation du  $\frac{1}{4}$  de plaque. Ainsi, on peut éliminer de 0 à 8 éléments sur chacune des 8 lignes de ce domaine, soit  $8^8$  solutions différentes.

L'allure du meilleur résultat discret (obtenu en utilisant une sélection par tournois), présentée en figure 9, s'avère très semblable à la solution optimale continue. La valeur d'adaptation correspondante est supérieure à  $F_0$  de plus de 95 %.

La sélection par tournois conduit aux meilleures solutions, alors obtenues à moins de 40 générations soit une exploration d'environ  $60 \cdot 40 / 8^8 \approx 14 \cdot 10^{-5} \%$  de l'espace de recherche.



**Figure 9.** Solution obtenue par AG pour  $\frac{1}{4}$  de la plaque (maillage  $10 \times 10$ )

#### 4.3.2. Maillage $20 \times 20$

Dans ce cas, le domaine à optimiser comporte  $15 \times 15$  éléments sur  $\frac{1}{4}$  de plaque modélisé par un maillage  $20 \times 20$ . L'espace de recherche comprend alors  $15^{15}$  solutions. Les paramètres de population de l'AG sont fixés à :

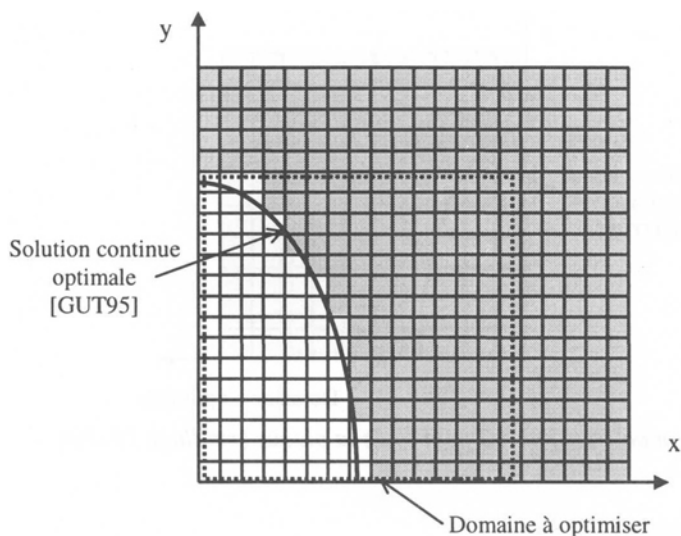
- nombre d'individus de la population = 100,
- nombre de générations = 300.

Les temps de calcul correspondants s'avèrent substantiels, environ 70 minutes.

L'allure de la meilleure solution obtenue, présentée en figure 10, est très proche du résultat d'optimisation continue. Cette solution permet, à l'instar de celle présentée en figure 9, un gain matière d'environ 20 % par rapport à une plaque non percée. La valeur d'adaptation correspondante est supérieure de 114 % à  $F_0$ . Il est primordial de rappeler que les résultats de l'optimisation par AG sont d'autant plus remarquables que la forme elliptique de perçage central n'est pas imposée par le mode de codage.

A l'instar des études précédentes, les performances observées sont fortement tributaires du type de sélection. Là encore, la sélection par tournois s'avère performante, conduisant aux meilleures solutions, obtenues au terme de moins de 170 générations soit une exploration d'environ  $100 \cdot 170 / 15^{15} \approx 4 \cdot 10^{-14} \%$  de l'espace de recherche. Les résultats de l'AG utilisant une sélection par roue de loterie sont, pour les 2 types de maillages étudiés, de qualités inférieures mais néanmoins très proches des allures présentées en figures 9 et 10.

Par ailleurs, notons que, à l'instar de l'application précédente (cf. § 3.3.2), un maillage de forte densité imposerait de modifier le mode de paramétrage du problème d'optimisation pour en limiter la cardinalité.



**Figure 10.** Solution obtenue par AG pour le  $\frac{1}{4}$  de plaque (maillage  $20 \times 20$ )

## 5. Conclusion

Cette étude a permis d'apprécier les possibilités de mise en œuvre et les performances d'un AG canonique pour l'optimisation topologique de plaques modélisées par la MEF. Deux problèmes distincts ont été abordés. Les tests de reproductibilité des résultats témoignent de la robustesse de la procédure, assurant de guider le choix du concepteur à des solutions procurant une nette amélioration en explorant une faible proportion des espaces de recherche. Par ailleurs, cette étude confirme l'intérêt d'une sélection à pression sélective constante, pourtant peu utilisée dans les applications des AG en sciences de l'ingénieur.

Des codages simples et explicites des topologies de plaques ont été utilisés, utilisant des « cartes » de répartitions d'épaisseurs ou de « vides ». Ce type de représentation, destiné à un AG canonique, s'est avéré fiable et de mise en œuvre simple. Aussi, la stratégie d'optimisation proposée peut être facilement adaptée à d'autres problèmes similaires d'optimisation de plaques analysées par la MEF.



Cependant, ce mode de codage a ses limites, la cardinalité des problèmes d'optimisation étant liée au nombre d'éléments finis utilisé. De fait, ce type de représentation peut s'avérer inadapté pour des maillages très denses. Par ailleurs, soulignons qu'un AG canonique tel que celui utilisé manipule les individus de façon « aveugle », sans tenir compte de la nature du problème et de sa représentation.

Aussi, une voie intéressante consiste à aborder des problèmes d'optimisation similaires par le biais de codages plus représentatifs, à l'instar de la référence [SCH 96]. Il s'agit de concevoir des paramétrages permettant l'introduction de « connaissances a priori » dans la procédure d'optimisation. Les opérateurs génétiques correspondants doivent eux aussi être alors conçus pour permettre un meilleur contrôle de leurs effets sur les individus au cours du processus.

## 6. Bibliographie

- [BAN 81] BANICHUK N.V., *Problems and Methods of Optimal Structural Design - Mathematical concepts and methods in science and engineering*, Plenum Press Edition, New-York & London, p. 109-134, 1981.
- [BAT 90] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol. 2, Editions Hermès, Paris, 1990.
- [DAV 91] DAVIS L., *Handbook of genetic algorithm*, Van Nostrand Reinhold Edition, New-York, 1991.
- [GIR 98] GIRAUD L., LAFON P., « Optimization of mechanical design problems with genetic algorithms », *Proceeding of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME' 98)*, Compiègne, France, may 27-29, 1998, Vol. 1, p. 83-90.
- [GOL 94] GOLDBERG D.E., *AG, exploration, optimisation et apprentissage automatique*, Addison-Wesley France, 1994.
- [GUT 95] GUTKOWSKI W., ZAWIDZKA J., « Shape optimization of 2D elastic structures using adaptative grid », *Engineering transactions*, Vol. 43, issue 1-2, p. 137-150, Polish Scientific Publishers, 1995.
- [HAF 81] HAFTKA R.T., PRASAD B., « Optimum structural design with plates bending elements - a survey », *AIAA J.*, Vol. 19, n° 4, p. 517-522, 1981.
- [HAJ 90] HAJELA P., « Genetic search - an approach to the nonconvex optimization problem », *AIAA J.*, Vol. 26, p. 1205-1210, 1990.
- [HAU 82] HAUG E.J., « A numerical method for optimization of distributed parameter structures with displacement constraints », *Opt. Control Applic. & Methds*, Vol. 3, 1982.
- [HOL 75] HOLLAND J.H., *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, 1975 (and MIT Press, Cambridge, 1992).

- [JEN 91] JENKINS W.M., « Towards structural optimization via genetic algorithm », *Computer Structures*, Vol. 40, n° 5, p. 1321-1327, 1991.
- [KOG 94] KOGISO N., WATSON L.T., GURDAL Z., HAFTKA R.T., « Genetic algorithm with local improvement for composite laminate design », *Structural Optimization*, Vol. 7, p. 207-218, 1994.
- [MAR 95a] MARCELIN J.L., TROMPETTE P., « Optimization of composite beam structures using a genetic algorithm », *Structural Optimization*, Vol. 9, p. 236-244, 1995.
- [MAR 95b] MARCELIN J.L., « Optimisation des conditions aux frontières par algorithmes génétiques », *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 4, n° 3, p. 361-373, Editions Hermès, Paris, 1995.
- [MIC 95] MICHALEWICZ Z., *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*, third, revised and extended edition, Springer Verlag Edition, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [RAJ 92] RAJEEV S., KRISHNAMOORTHY C.S., « Discrete optimization of structures using genetic algorithms », *J. Structural. Engineering*, Vol. 118, n° 5, p. 1233-1250, 1992.
- [SCH 96] SCHOENAUER M., KALLEL L., JOUVE F., « Mechanical inclusions identification by evolutionary computation », *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 5, n° 5-6, p. 619-648, Editions Hermès, Paris, 1996.
- [SEB 96] SEBAG M., SCHOENAUER M., « Contrôle d'un algorithme génétique », *Revue d'Intelligence Artificielle*, Vol. 10, n° 2-3, p. 389-428, Editions Hermès, Paris, 1996.
- [TOS 95] TOSHIHIKO O., ATSUSHI Y., KANEHIRO N., ZENICHIRO M., « Optimum design of weaving structure of 3-D woven fabric composites by using genetic algorithms », *Composite Structures*, Vol. 32, p. 417-426, 1995.
- [VAN 95] VAN KEULEN F., POLYNKINE A., TOROPOV V., « Shape optimization strategies using the multi-point approximation method and adaptive mesh refinement », Olhoff N. & Rozvany G.I.N. (eds), *Proceeding of the 1<sup>st</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1995, Elsevier Edition, p. 67-74.
- [YAN 97] YANG J., KIONG SOH C., « Structural optimization by genetic algorithm with tournament selection », *J. of Computing in Civil Engineering*, p. 195-200, July 1997.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The finite element method (fourth edition)*, Vol. 2, p. 3-23, Mc Graw-Hill Edition, London, 1991.

Article reçu le 20 avril 1997.

Version révisée le 10 décembre 1998.