
Intégration numérique de lois de comportement élastoviscoplastique endommageable et applications

Jean-Michel Bergheau * — Gérard Mottet *
Olivier Débordes **

* Systus International, Le Discover
84, boulevard Merle, F-69485 Lyon cedex 03
jm.bergheau@systus.com

** ESM2 et LMA, IMT, Technopôle de Château-Gombert
F-13451 Marseille cedex 20
debordes@imtumn.imt-mrs.fr

RÉSUMÉ. La simulation numérique de la rupture par fluage d'une cuve de réacteur nucléaire en cas d'accident grave hypothétique nécessite de parfaitement prendre en compte les interactions entre les phénomènes de fluage et l'endommagement de la matière. Cet article présente une méthode numérique associée à la résolution d'un modèle de comportement couplant élastoviscoplasticité et endommagement par le concept de la contrainte effective. La technique proposée repose sur une intégration en temps semi-implicite des équations de comportement. La méthode est validée sur des cas simples unidirectionnels pour lesquels on dispose de solutions numériques ou analytiques de comparaison et sur un exemple de référence axisymétrique (essai RUPATHER 4) sous sollicitations thermomécaniques. L'efficacité de différents opérateurs de comportement tangent est analysée.

ABSTRACT. Numerical simulation of creep rupture of a reactor pressure vessel in a severe hypothetical accident needs to perfectly take account of interactions between creep phenomena and damage. This paper presents a numerical method for solving constitutive equations of a material behaviour model coupling elastoviscoplasticity and creep damage through the effective stress concept. The numerical technique rests upon a semi-implicit time integration of the constitutive equations. The method is validated on both simple 1D cases the results of which can be compared to other numerical or analytical solutions and in the case of an axisymmetric reference problem (RUPATHER 4 test) under thermal and mechanical loading. The efficiency of different tangent stiffness matrices is analysed.

MOTS-CLÉS : élastoviscoplasticité, endommagement, rupture par fluage, modélisation, élément finis, algorithme semi-implicite, opérateur tangent.

KEY WORDS : elastoviscoplasticity, damage, creep rupture, modelling, finite element, semi-implicit algorithm, tangent stiffness matrix.

1. Introduction

La rupture par fluage d'une cuve de réacteur nucléaire en cas d'accident grave hypothétique, survient sous des sollicitations thermomécaniques complexes faisant interagir les déformations de fluage, la relaxation des contraintes et l'endommagement de la matière. Les concepts d'endommagement continu, introduits par [KAC 58] et [RAB 69] dans le cadre de la rupture par fluage des métaux, ont permis de formuler des modèles de comportement couplant étroitement élastoviscoplasticité et endommagement. La complexité de ces modèles nécessite une mise en œuvre numérique soignée afin d'obtenir des prévisions fiables sur le temps avant ruine des structures.

Au cours des années 80, de nombreuses contributions (voir par exemple [RIS 94]) ont permis de dégager une méthodologie numérique fiable pour intégrer des lois de comportement élastoplastique (en petites ou grandes transformations), et ont fait émerger le concept d'opérateur de comportement tangent consistant, non symétrique. Le cas de l'élastoviscoplasticité a suivi peu après.

Ce n'est que plus récemment que le couplage de l'élastoplasticité ou de l'élastoviscoplasticité avec l'endommagement a fait l'objet d'études aussi poussées ([MAS 94], [NES 96]). Nous proposons ici une mise en œuvre numérique basée sur une intégration semi-implicite de la loi de comportement élastoviscoplasticité endommageable avec calcul de l'opérateur de comportement tangent consistant, qui comme en élastoplasticité est non symétrique. L'implantation dans un code de calcul par éléments finis nous a permis d'abord de valider notre approche dans un cas simple pour lequel nous disposions d'éléments de comparaison ([MAS 94] et [SCH 97]), puis nous a permis de résoudre un problème concret [SAI 97] qui pourrait devenir une référence dans ce domaine.

Après la formulation (§ 2) du problème physique, sous l'hypothèse des petites transformations pour en simplifier la présentation, le paragraphe 3 expose notre mise en œuvre numérique d'intégration de la loi de comportement et de calcul de l'opérateur de comportement tangent consistant, dont on donne une expression faisant clairement apparaître une partie élastoviscoplasticité endommagée, contenant elle-même une partie élastique endommagée. Les applications sont traitées au paragraphe 4, d'abord sur des cas unidimensionnels simples (dont un pour lequel on a une expression analytique du temps de ruine), puis sur une structure de révolution en grandes transformations sous chargement thermomécanique. Dans la conclusion (§ 5), nous analysons nos résultats en termes de précision et d'efficacité numérique, puis nous proposons une approche complémentaire susceptible d'améliorer la convergence avec la matrice tangente consistante. Un résumé des principales notations utilisées est donné au paragraphe 6.

2. Evolution élastoviscoplastique endommageable en petites perturbations

Ce paragraphe définit le problème d'évolution élastoviscoplastique avec endommagement dont la résolution constitue l'objet de l'article. On rappelle d'abord les équations classiques d'un milieu continu en petites perturbations [GER 86] puis on détaille la loi de comportement considérée, élastoviscoplastique de type Norton-Hoff à seuil, couplée à une loi de type Kachanov-Rabotnov pour l'endommagement [LEM 85]. L'évolution de la température, notée T , sera supposée donnée à partir de l'instant initial.

2.1. Equations du milieu continu en petites perturbations

Nous considérons un milieu continu occupant à l'instant initial $t = 0$ une partie $\overline{\Omega}$ (*a priori* dans \mathbf{R}^3 mais les problèmes plans seront posés dans \mathbf{R}^2) d'intérieur Ω et de bord Γ partitionné en Γ_U et Γ_F . On fait l'hypothèse des petites perturbations (petits déplacements, petites rotations et petites déformations).

En notant $\mathbf{R}^3 \otimes_S \mathbf{R}^3$ l'ensemble des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur \mathbf{R}^3 , le problème consiste à trouver les évolutions, pour $t \geq 0$, du champ de déplacements $u(t): \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^3$, du champ de déformations $\varepsilon(t): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3 \otimes_S \mathbf{R}^3$ et du champ de contraintes $\sigma(t): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3 \otimes_S \mathbf{R}^3$, solutions, pour $t \geq 0$, des équations cinématiques

$$\begin{aligned} u(t, x) &= U(t, x) & \forall x \in \Gamma_U \\ \varepsilon(t, x) &= \text{grad}_S u(t, x) & \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad [1]$$

des équations d'équilibre (on néglige les quantités d'accélération)

$$\begin{aligned} \text{div } \sigma(t, x) + f(t, x) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \sigma(t, x) n(t, x) &= F(t, x) & \forall x \in \Gamma_F \end{aligned} \quad [2]$$

de la loi de comportement écrite symboliquement sous la forme

$$\dot{\sigma}(t, x) = \Xi(t, \varepsilon(t, x), \sigma(t, x)) \quad \forall x \in \Omega \quad [3]$$

et satisfaisant des conditions initiales données que nous ne précisons pas ici.

Dans les relations précédentes, les données sont les histoires du déplacement imposé $U(t): \Gamma_U \rightarrow \mathbf{R}^3$, de la densité volumique de forces $f(t): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ et de la densité surfacique de forces $F(t): \Gamma_F \rightarrow \mathbf{R}^3$. En outre, et même si nous ne l'avons pas fait apparaître explicitement dans l'équation [3], une inconnue essentielle du problème est constituée par la fonction endommagement $D(t): \Omega \rightarrow [0, 1]$.

2.2. Comportement élastoviscoplastique endommageable

On détaille la loi de comportement [3] et, pour simplifier les notations, on omet ici les arguments t et x . Le tenseur de déformation totale ϵ est décomposé en tenseurs de déformation élastique ϵ^e , viscoplastique ϵ^p (incompressible) et thermique ϵ^{th}

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^{th} \tag{4}$$

En introduisant la contrainte effective

$$S = \frac{\sigma}{1 - D} \tag{5}$$

la partie élastique de la loi de comportement est donnée par

$$S = E(T) : \epsilon^e \tag{6}$$

où $E(T)$ est le tenseur d'élasticité du matériau. Celui-ci étant supposé isotrope et la déformation viscoplastique étant incompressible, [6] s'écrit aussi, grâce à [4],

$$\begin{aligned} S^m &= 3K(T) \epsilon^{em} = 3K(T) (\epsilon^m - \epsilon^{thm}) \\ S^d &= 2\mu(T) \epsilon^{ed} = 2\mu(T) (\epsilon^d - \epsilon^{thd} - \epsilon^p) \end{aligned} \tag{7}$$

$K(T)$ et $\mu(T)$ désignant les modules de compressibilité et de cisaillement du matériau (voir aussi le § notations).

La partie viscoplastique de la loi de comportement est donnée par

$$\epsilon^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma^d}{J_2(\sigma)} \quad \text{avec} \quad \dot{p} = \frac{\dot{r}}{1 - D} \tag{8}$$

expression dans laquelle l'évolution du paramètre r est gouvernée par l'équation

$$\dot{r} = \left(\left(\frac{J_2(S) - k(T)}{B(T) r^{1/m(T)}} \right)^+ \right)^{n(T)} \tag{9}$$

où $k(T)$, $B(T)$, $n(T)$ et $m(T)$ sont des paramètres (strictement positifs) du matériau. Cette formule [9] définit un écrouissage isotrope, dont le domaine de validité exclut des chargements cycliques.

Enfin, la partie endommagement du comportement est donnée par

$$\dot{D} = \left(\left(\frac{\chi(\sigma)}{A(T)} \right)^+ \right)^{\alpha(T)} (1-D)^{-\beta(\chi(\sigma), T)} \quad [10]$$

où $A(T)$, $\alpha(T)$ et $\beta(\bullet, T)$ sont des paramètres (strictement positifs) du matériau et où le critère d'endommagement χ est donné par

$$\chi(\sigma) = J_2(\sigma) \left((1-b) + b \frac{J_1(\sigma)}{J_2(\sigma)} \right) \quad [11]$$

expression dans laquelle $b \in [0, 1]$ est un paramètre de sensibilité du critère au taux de triaxialité des contraintes.

2.3. Ruine locale du matériau

Les relations [5], [8] et [10] n'ont pas de sens lorsque l'endommagement D atteint la valeur 1, qui correspond à la ruine du matériau. Pour éviter cette difficulté technique, on introduit une valeur critique de l'endommagement $D_c \in]0, 1[$, et la loi de comportement [3] est complétée par

$$\sigma = 0 \quad \text{si } D \geq D_c$$

En pratique, on prend $D_c = 0,99$.

2.4. Remarques

Nous avons retenu l'expression [11] pour le critère d'endommagement, de préférence à l'expression plus classique (et généralement plus en accord avec les observations expérimentales)

$$\chi(\sigma) = a J_0(\sigma) + b J_1(\sigma) + (1-a-b) J_2(\sigma)$$

qui se prête moins bien aux développements numériques car $J_0(\sigma)$ n'est pas dérivable. L'objectif premier de ce travail étant l'étude de l'intérêt de méthodes consistantes, la présence de $J_0(\sigma)$ aurait fortement diminué l'intérêt de l'étude.

L'extension aux grandes perturbations des équations précédentes ne pose pas *a priori* de difficulté théorique ; il suffit, en suivant par exemple [SID 82], de dériver la relation [4] par rapport au temps, d'y remplacer les vitesses de déformation par les taux de déformation pour obtenir

$$d = d^e + d^p + d^{th}$$

puis de remplacer la relation [6] par (σ^{obj} désigne une dérivée objective de σ)

$$\sigma^{obj} = (1 - D)E(T) : d^e - \dot{D}S + (1 - D)\dot{T}E'(T) : E^{-1}(T) : S$$

Certaines des applications présentées au § 4 ont été traitées selon cette démarche.

3. Résolution numérique

3.1. Discrétisation du problème de structure

Il s'agit du problème constitué par les équations [1] et [2] ; classiquement, on procède d'abord à une discrétisation spatiale du milieu continu au moyen de la méthode des éléments finis 'en déplacement', voir par exemple [DHA 84] dont nous utilisons ici les principales notations. Cela conduit à prendre pour inconnue principale le vecteur $\{u(t)\}$ des déplacements aux nœuds du maillage éléments finis, vecteur dont l'évolution est gouvernée par l'équation [2] discrétisée que nous écrivons formellement (nullité des résidus d'équilibre)

$$\{R(\{u(t)\}, \{\dot{u}(t)\})\} = 0 \tag{12}$$

On notera que le calcul effectif du résidu $\{R\}$ pour des valeurs données de ses arguments nécessite l'utilisation de la loi de comportement détaillée au § 2.2.

L'intégration sur le temps du système différentiel [12] suit un schéma d'Euler. Donc, pour chaque pas de temps $[t, t + \Delta t]$, on suppose connues toutes les grandeurs à l'instant t (on les notera avec un indice t) et on recherche le vecteur $\{u_{t+\Delta t}\}$ pour que l'approximation de la vitesse sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$

$$\{\dot{u}\} \cong \frac{1}{\Delta t} \{u_{t+\Delta t} - u_t\} \tag{13}$$

soit solution de l'équation [12] écrite à l'instant $t + \Delta t$ (schéma d'Euler implicite)

$$\{Q(\{u_{t+\Delta t}\})\} \equiv \left\{ R\left(\{u_{t+\Delta t}\}, \frac{1}{\Delta t} \{u_{t+\Delta t} - u_t\}\right) \right\} = 0 \tag{14}$$

La résolution de cette équation, fortement non linéaire dans notre cas, se fait selon une méthode de Newton-Raphson ; partant d'une estimation $\{u_{t+\Delta t}^0\}$, on construit la suite définie par

$$\left[\frac{\partial \{Q\}}{\partial \{u_{t+\Delta t}\}} (\{u_{t+\Delta t}^i\}) \right] (\{u_{t+\Delta t}^{i+1}\} - \{u_{t+\Delta t}^i\}) = -\{Q(\{u_{t+\Delta t}^i\})\} \tag{15}$$

La qualité de la convergence, *a priori* quadratique au voisinage de toute solution de [14], de cette méthode est fortement liée à la qualité du calcul (souvent plus ou moins approché) de la matrice au premier membre de [15] ; ce point critique sera détaillé au § 3.3. Par ailleurs, le calcul du second membre de [15] nécessite celui de la fonction $\{R\}$, définie par [12], pour les valeurs $\{u_{t+\Delta t}^i\}$ et, par [13], $\{u_{t+\Delta t}^i - u_t\} / \Delta t$ de ses arguments. Cela nécessite la résolution, sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, du système différentiel [3], ce qui est l'objet du § 3.2.

Enfin, la taille du système linéaire [15] conduit à limiter le nombre de pas de temps, donc à retenir des pas de temps Δt les plus grands possibles mais néanmoins compatibles avec une convergence rapide de la méthode de Newton-Raphson et une précision suffisante du schéma d'Euler implicite ; la gestion de la taille de ces pas de temps peut, par exemple, suivre la méthode proposée dans [BAT 82] et qui est implantée dans SYSTUS+® [SYS 97].

3.2. Intégration locale de la loi de comportement

3.2.1. Hypothèses, notations

On appelle « intégration locale de la loi de comportement » le problème consistant à chercher une approximation $\sigma_{t+\Delta t}$ de la solution $\sigma(t + \Delta t, x)$ du système différentiel [3] sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ correspondant à la condition initiale $\sigma(t, x) = \sigma_t$ et à l'histoire de déformation donnée par [1] et [13] avec $\{\dot{u}\} = \{u_{t+\Delta t}^i - u_t\} / \Delta t$, c'est-à-dire

$$\varepsilon(\tau, x) = \varepsilon_t + \frac{\tau - t}{\Delta t} \text{grad}_S (u_{t+\Delta t}^i(x) - u_t(x)) \quad \tau \in]t, t + \Delta t[\quad [16]$$

expression dans laquelle $u_{t+\Delta t}^i(x)$ et $u_t(x)$ désignent le déplacement en x obtenu par interpolation éléments finis [DHA 84] à partir respectivement de $\{u_{t+\Delta t}^i\}$ et $\{u_t\}$. Par ailleurs, les techniques d'intégration numérique dans les éléments finis, nécessaires pour évaluer la fonction $\{R\}$ à partir de la fonction $x \rightarrow \sigma(t + \Delta t, x)$, font qu'on se limite à un nombre fini de points x . Dans la suite, on omettra l'argument x .

La taille des pas de temps Δt retenus pour le problème de structure peut être trop importante pour intégrer le système différentiel [3] avec une précision suffisante, ce qui amène à utiliser des pas de temps de longueur $\delta\tau \leq \Delta t$. Pour chaque pas de temps courant $[\tau, \tau + \delta\tau] \subset [t, t + \Delta t]$, on notera G_τ la valeur d'une fonction quelconque du temps (directement ou par l'intermédiaire d'une autre grandeur, T par exemple) G à l'instant τ , $G_{\tau+\delta\tau}$ sa valeur à l'instant $\tau + \delta\tau$, δG son incrément sur le pas et G_0 l'approximation

$$G_\theta = (1 - \theta) G_\tau + \theta G_{\tau + \delta\tau} = G_\tau + \theta \delta G \tag{17}$$

de G en $\tau + \theta \delta\tau$, avec $\theta \in]0, 1[$. Avec ces notations et en supposant connues toutes les grandeurs à l'instant τ , on est en mesure d'utiliser le schéma d'Euler semi-implicite (aussi appelé 'des différences centrales généralisées', et qui prend le nom de méthode de Crank-Nicholson pour $\theta = 0,5$) pour calculer les mêmes grandeurs à l'instant $\tau + \delta\tau$. Dans ce schéma, la vitesse \dot{G} est approchée par $\delta G / \delta\tau$. Notre approche suit celle déjà mise en œuvre dans le cas de l'élastoviscoplasticité seule [BER 88].

3.2.2. L'équation « élastoviscoplasticité »

Les relations [4], [6], [7] et [17] donnent

$$S_\theta = (1 - \theta) S_\tau + \theta E_{\tau + \delta\tau} : \left(\varepsilon_{\tau + \delta\tau} - \varepsilon_{\tau + \delta\tau}^{th} - \varepsilon_\tau^p \right) - 2\mu_{\tau + \delta\tau} \theta \delta\varepsilon^p \tag{18}$$

qu'on peut aussi écrire

$$S_\theta = S_\theta^e - 2\mu_{\tau + \delta\tau} \theta \delta\varepsilon^p \tag{19}$$

en introduisant la « réponse purement élastique »

$$S_\theta^e = (1 - \theta) S_\tau + \theta E_{\tau + \delta\tau} : \left(\varepsilon_{\tau + \delta\tau} - \varepsilon_{\tau + \delta\tau}^{th} - \varepsilon_\tau^p \right) \tag{20}$$

Comme les relations [5] et [8], écrites à l'instant $\tau + \theta \delta\tau$, donnent

$$\delta\varepsilon^p = \frac{3 \delta p}{2} \frac{S_\theta^d}{J_2(S_\theta^d)} \tag{21}$$

la formule [19] implique, en prenant les parties déviatoriques de ses deux membres,

$$\left(1 + \frac{3 \mu_{\tau + \delta\tau} \theta \delta p}{J_2(S_\theta^d)} \right) S_\theta^d = S_\theta^{ed} \tag{22}$$

d'où, en appliquant J_2 aux deux membres de cette relation,

$$J_2(S_\theta^d) = J_2(S_\theta^{ed}) - 3 \mu_{\tau + \delta\tau} \theta \delta p \tag{23}$$

En écrivant la deuxième relation [8] et la relation [9] à l'instant $\tau + \theta \delta\tau$, en y portant [23] et en utilisant [17] pour faire apparaître δD , on obtient une première

équation entre δp , δD (inconnus), S_θ^{ed} donné par [20] (donc connu grâce à [16]) et diverses grandeurs à l'instant τ (donc connues) ou à l'instant $\tau + \theta \delta \tau$ mais elles aussi connues car l'évolution de la température est donnée (on raccourcira $B(T_\theta)$ en B_θ).

$$V(\delta p, \delta D, S_\theta^{ed}) \equiv (1 - D_\tau - \theta \delta D) \delta p - \delta \tau \left(\left(\frac{J_2(S_\theta^{ed}) - 3 \mu_{\tau+\delta\tau} \theta \delta p - k_\theta}{B_\theta (r_\tau + \theta(1 - D_\tau - \theta \delta D) \delta p)^{1/m_\theta}} \right)^+ \right)^{n_\theta} = 0 \quad [24]$$

Une fois δp et δD connus, les relations [19], [21] et [22] donnent

$$S_\theta = S_\theta^e - 3 \mu_{\tau+\delta\tau} \theta \delta p \frac{S_\theta^{ed}}{J_2(S_\theta^{ed})} \quad [25]$$

et on note que les relations [19], [21] et [23] impliquent

$$\delta \varepsilon^p = \frac{3}{2} \delta p \frac{S_\theta^{ed}}{J_2(S_\theta^{ed})} \quad [26]$$

qui n'est autre qu'un retour radial.

3.2.3. L'équation « endommagement »

En tenant compte de [5] et de l'expression [11] du critère d'endommagement qui implique $\chi(\sigma) = (1 - D) \chi(S)$, l'équation [10], écrite à $\tau + \theta \delta \tau$, donne la deuxième équation liant δp et δD à S_θ^{ed}

$$W(\delta p, \delta D, S_\theta^{ed}) \equiv \delta D - \delta \tau \left(\left(\frac{\chi(S_\theta)}{A_\theta} \right)^+ \right)^{\alpha_\theta} (1 - D_\theta)^{\alpha_\theta - \beta((1 - D_\theta) \chi(S_\theta), T_\theta)} = 0 \quad [27]$$

expression dans laquelle il faut encore tenir compte de [25] et de $D_\theta = D_\tau + \theta \delta D$ pour bien faire apparaître δp , δD et S_θ^{ed} .

Une variante consiste à supposer qu'au second membre de [10] toutes les grandeurs, sauf D , sont constantes sur $[\tau, \tau + \delta \tau]$ et égales à leur valeur à $\tau + \theta \delta \tau$, d'où l'équation différentielle

$$\dot{D} = \left(\left(\frac{\chi(\sigma_\theta)}{A_\theta} \right)^+ \right)^{\alpha_\theta} (1-D)^{-\beta(\chi(\sigma_\theta), T_\theta)} \tag{28}$$

dont l'intégration sur $[\tau, \tau + \delta\tau]$ est triviale et donne une variante de [27]

$$W(\delta p, \delta D, S_\theta^{ed}) \equiv \delta D - (1 - D_\tau) + \left((1 - D_\tau)^{1+\beta_\theta} - (1 + \beta_\theta) \delta\tau \left(\frac{\chi(\sigma_\theta)}{A_\theta} \right)^+ \right)^{\frac{1}{1+\beta_\theta}} = 0 \tag{29}$$

expression dans laquelle il faut encore tenir compte de [5], de [25], $\beta_\theta = \beta(\chi(\sigma_\theta), T_\theta)$ et de $D_\theta = D_\tau + \theta \delta D$ pour bien faire apparaître δp , δD et S_θ^{ed} .

3.2.4. Résumé, résolution, choix des pas de temps $\delta\tau$

Connaissant, par [16], l'accroissement de déformation totale sur le pas $[\tau, \tau + \delta\tau]$, la relation [20] donne la « réponse purement élastique » à $\tau + \theta \delta\tau$. Dans le cas $J_2(S_\theta^{ed}) \leq k_\theta$, l'unique solution de [24] et ([27] ou [29]) est constituée par $S_\theta^d = S_\theta^{ed}$, $\delta p = 0$ et $\delta D = 0$ et ce quelle que soit la valeur $D_\theta \leq D_c$ de l'endommagement. Dans le cas $J_2(S_\theta^{ed}) > k_\theta$, on cherche alors les accroissements δp et δD solutions du système constitué par les équations [24] et ([27] ou [29]). Une fois ces accroissements calculés, on peut déterminer par [25] la contrainte déviatorique à $\tau + \theta \delta\tau$, dont on déduit toutes les grandeurs à $\tau + \delta\tau$ en utilisant [17]. On peut aussi déterminer l'instant $\tau_{ruine} \in [\tau, \tau + \delta\tau]$ de ruine éventuelle par

$$\tau_{ruine} = \tau + \frac{(1 - D_\tau)^{1+\beta((1-D_\theta)\chi(S_\theta), T_\theta)} - (1 - D_c)^{1+\beta((1-D_\theta)\chi(S_\theta), T_\theta)}}{(1 + \beta((1 - D_\theta)\chi(S_\theta), T_\theta)) \left(\left(\frac{(1 - D_\theta)\chi(S_\theta)}{A_\theta} \right)^+ \right)^{\alpha_\theta}} \tag{30}$$

La résolution du système constitué par les équations [24] et ([27] ou [29]) utilise une méthode de Newton-Raphson, ce qui nécessite le calcul de la matrice tangente

$$[k^{tg}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial(\delta p)} & \frac{\partial V}{\partial(\delta D)} \\ \frac{\partial W}{\partial(\delta p)} & \frac{\partial W}{\partial(\delta D)} \end{bmatrix} \tag{31}$$

dont l'expression est donnée en annexe.

Enfin, le nombre L de pas de temps $[\tau, \tau + \delta\tau]$ pour l'intégration locale de la loi de comportement est calculé par la formule empirique

$$L = 1 + Ent \left(\frac{\left(J_2(S_{\theta'}^{gd}) - k_{\theta'} - B_{\theta'} r_t^{1/m_{\theta'}} \dot{r}_t^{1/n_{\theta'}} \right)}{k_{\theta'} + B_{\theta'} r_t^{1/m_{\theta'}} \dot{r}_t^{1/n_{\theta'}}} \right) \quad [32]$$

dans laquelle l'indice θ' représente des grandeurs évaluées à l'instant $t + \theta \Delta t$. Cette formule généralise à l'élastoviscoplasticité celle déjà utilisée en élastoplasticité dans SYSTUS+[®], et qui revient à prendre une longueur de pas de temps $\delta\tau$ telle que, dans un cas de chargement proportionnel, les incréments de déformation $\delta\varepsilon$ soient de longueur donnée par l'équation $J_2(E(T) : \delta\varepsilon) = k$. Par contre, dans le cas d'un chargement fortement non proportionnel, l'expression [32] peut conduire à une discrétisation insuffisante.

3.3. Opérateur de comportement tangent

La seule difficulté dans le calcul de la matrice au premier membre de [15] réside dans le calcul de l'opérateur de comportement tangent

$$D^{tang} = \nabla \sigma_{t+\Delta t} \quad \text{avec} \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{t+\Delta t}} \quad [34]$$

Dans le cas de l'élastoplasticité, la complexité et le coût de ce calcul ont conduit à de nombreuses publications (voir par exemple [RIS 94]) proposant des approches allant d'approximations très grossières jusqu'à la notion d'opérateur tangent consistant, c'est-à-dire « gradient » du calcul de $\sigma_{t+\Delta t}$ en fonction de $\varepsilon_{t+\Delta t}$. La présence d'endommagement accroît encore la complexité du calcul de D^{tang} .

3.3.1. Brève revue de méthodes de calcul de l'opérateur de comportement tangent

La méthode la plus simple, fort utilisée au début des modélisations numériques en élastoplasticité [NGU 77], consiste à prendre pour D^{tang} l'opérateur d'élasticité, évalué à un instant particulier (par exemple t); elle s'écrirait dans notre cas

$$D^{tang} = (I - D_t) E(T_t) \quad [35]$$

mais peut conduire à un nombre prohibitif d'itérations [15]. Une méthode presque aussi simple (donc très utilisée) consiste à expliciter analytiquement, lorsque cela est possible, le système différentiel [3] pour l'écrire sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Xi_{\sigma\sigma}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \sigma, D) & \Xi_{\sigma D}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \sigma, D) \\ \Xi_{D\sigma}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \sigma, D) & \Xi_{DD}(t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \sigma, D) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [36]$$

et prendre pour D^{tang} le terme $\Xi_{\sigma\sigma}$ évalué à un instant particulier (souvent t). Cette méthode présente l'avantage de fournir une matrice symétrique, mais dont le conditionnement peut fortement se dégrader au point de donner une matrice singulière au voisinage de la ruine de la structure.

Une méthode plus rigoureuse consiste à dériver [36] par rapport à $\varepsilon_{t+\Delta t}$ (qui intervient, à cause de [16], dans ε et $\dot{\varepsilon}$) pour en déduire un « système différentiel tangent » linéaire de la forme

$$\begin{Bmatrix} \nabla \dot{\sigma} \\ \nabla \dot{D} \end{Bmatrix} = [\Psi(\tau, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \sigma, D)] \begin{Bmatrix} \nabla \sigma \\ \nabla D \end{Bmatrix} \quad [37]$$

dont la solution théorique fournit l'opérateur tangent D^{tang} lorsque $\sigma_{t+\Delta t}$ est la solution théorique de [3]. En pratique, le système [37] est intégré numériquement en utilisant les mêmes pas de temps que pour le calcul effectif de $\sigma_{t+\Delta t}$; deux exemples d'application de cette approche sont donnés dans [BON 93] pour un cas de viscohyperélasticité, et dans [FLE 95] pour un cas d'élastoviscoplasticité en grandes perturbations. Cette approche conduit à une matrice non symétrique pouvant devenir elle aussi singulière au voisinage de la ruine.

Enfin, la méthode *a priori* la plus rigoureuse consiste à dériver par rapport à $\varepsilon_{t+\Delta t}$ l'algorithme de calcul de $\sigma_{t+\Delta t}$ présenté au § 3.2, et donne donc un opérateur tangent consistant mais conduit à une matrice elle aussi non symétrique pouvant devenir singulière au voisinage de la ruine. La complexité de cette méthode est parfois réduite grâce à des approximations purement calculatoires ou suggérées par la physique du problème. C'est cette méthode qui va être exposée dans un cas particulier.

Pour clore cette brève revue, notons le paradoxe qui consiste à calculer l'opérateur de comportement tangent [34] alors que les parties positives dans [9] et [10] font que la loi de comportement n'est pas partout dérivable.

3.3.2. Opérateur de comportement tangent consistant

Tenter de dériver, par rapport à $\varepsilon_{t+\Delta t}$, l'algorithme de calcul de $\sigma_{t+\Delta t}$ présenté au § 3.2 renforce le paradoxe énoncé à la fin du § 3.3.1 puisque le nombre L de sous-pas, et donc aussi la longueur $\delta\tau$ des sous-pas, n'est pas dérivable. En conséquence, nous nous limiterons ici au cas d'un seul sous-pas, et supposons donc $\tau = t$ et $\delta\tau = \Delta t$; par chance, dans la plupart des applications présentées au § 4, l'expression [32] déterminant L conduit effectivement à $L = I \dots$

En tenant compte de [5], la relation [34] donne

$$D^{tang} = (I - D_{t+\Delta t}) \nabla S_{t+\Delta t} - S_{t+\Delta t} \otimes \nabla D_{t+\Delta t} \quad [38]$$

Comme la relation [17] implique

$$\nabla S_{t+\Delta t} = \frac{1}{\theta} \nabla S_{\theta} \quad [39]$$

et comme l'application de l'opérateur ∇ à [25] et [20] donne

$$\begin{aligned} \nabla S_{t+\Delta t} = & \frac{\nabla S_{\theta}^e}{\theta} - \frac{3\mu_{t+\Delta t} S_{\theta}^{ed}}{J_2(S_{\theta}^{ed})} \otimes \nabla(\delta p) \\ & - 3\mu_{t+\Delta t} \delta p \left(\frac{\nabla S_{\theta}^{ed}}{J_2(S_{\theta}^{ed})} - \frac{3S_{\theta}^{ed} \otimes (S_{\theta}^{ed} : \nabla S_{\theta}^{ed})}{2J_2(S_{\theta}^{ed})^3} \right) \end{aligned} \quad [40]$$

$$\nabla S_{\theta}^e = \theta E_{t+\Delta t} \quad \nabla S_{\theta}^{ed} = 2\mu_{t+\Delta t} \theta (I_4 - \frac{1}{3} I_2 \otimes I_2) \quad [41]$$

il suffit de reporter [41] dans [40], en usant de [26], pour obtenir

$$\begin{aligned} \nabla S_{t+\Delta t} = & E_{t+\Delta t} - \frac{2\mu_{t+\Delta t}}{\delta p} \delta \varepsilon^p \otimes \nabla(\delta p) \\ & - \frac{2\mu_{t+\Delta t}^2 \theta \delta p}{J_2(S_{\theta}^{ed})} \left(3I_4 - I_2 \otimes I_2 + 2 \frac{\delta \varepsilon^p}{\delta p} \otimes \frac{\delta \varepsilon^p}{\delta p} \right) \end{aligned} \quad [42]$$

Comme la relation [17] implique

$$\nabla D_{t+\Delta t} = \nabla(\delta D) \quad [43]$$

il suffit de reporter les relations [42] et [43] dans [38] pour obtenir une expression de D^{tang} dépendant soit de grandeurs déterminées lors de l'intégration locale de la loi de comportement, soit des deux seules grandeurs encore inconnues $\nabla(\delta p)$ et $\nabla(\delta D)$. Celles-ci s'obtiennent comme solutions du système linéaire construit (voir annexe) en différentiant par rapport à $\varepsilon_{t+\Delta t}$ les équations [24] et ([27] ou [29]), système linéaire dont la matrice est précisément la matrice $[k^{tg}]$ définie par [31].

Tous calculs effectués, on trouve

$$\begin{aligned}
 D^{tang} = & D_{evp}^{tang} + (1 - D_{t+\Delta t}) \frac{3\mu_{t+\Delta t} S_{\theta}^{ed}}{J_2(S_{\theta}^{ed})} \otimes \left([k^{tg} J^{-1}] \right)_{12} \frac{\partial W}{\partial S_{\theta}^{ed}} : \nabla(S_{\theta}^{ed}) \\
 & + S_{t+\Delta t} \otimes \left(\left([k^{tg} J^{-1}] \right)_{21} \frac{\partial V}{\partial S_{\theta}^{ed}} : \nabla(S_{\theta}^{ed}) + \left([k^{tg} J^{-1}] \right)_{22} \frac{\partial W}{\partial S_{\theta}^{ed}} : \nabla(S_{\theta}^{ed}) \right) \quad [44]
 \end{aligned}$$

avec (C est une expression scalaire donnée en annexe)

$$\begin{aligned}
 D_e^{tang} &= (1 - D_{t+\Delta t}) E_{t+\Delta t} \\
 D_{evp}^{tang} = & D_e^{tang} - 4\mu_{t+\Delta t}^2 C(1 - D_{t+\Delta t}) \left([k^{tg} J^{-1}] \right)_{11} \frac{\delta \epsilon^p}{\delta p} \otimes \frac{\delta \epsilon^p}{\delta p} \\
 & - (1 - D_{t+\Delta t}) \frac{2\mu_{t+\Delta t}^2 \theta \delta p}{J_2(S_{\theta}^{ed})} \left(3 I_4 - I_2 \otimes I_2 + 2 \frac{\delta \epsilon^p}{\delta p} \otimes \frac{\delta \epsilon^p}{\delta p} \right) \quad [45]
 \end{aligned}$$

Il est évident que l'opérateur tangent D^{tang} possède les propriétés de symétrie $D_{ijkl}^{tang} = D_{jikl}^{tang} = D_{ijlk}^{tang}$ mais *a priori* il ne possède pas la propriété $D_{ijkl}^{tang} = D_{klij}^{tang}$. En conséquence la matrice tangente (au sens des éléments finis) ne sera pas *a priori* symétrique. Par contre, on a les propriétés de symétrie $(D_e^{tang})_{ijkl} = (D_e^{tang})_{klij}$ et $(D_{evp}^{tang})_{ijkl} = (D_{evp}^{tang})_{klij}$; cette remarque peut conduire à substituer à D^{tang} l'un des opérateurs D_e^{tang} ou D_{evp}^{tang} .

4. Applications

L'objet de ce paragraphe est, d'une part de valider la mise en œuvre numérique exposée § 3 avec $\theta = 0,5$ (méthode de Crank-Nicholson) et son intégration dans SYSTUS+® et, d'autre part d'analyser le comportement des différents algorithmes pour aboutir à des recommandations d'utilisation.

4.1. Validation sur des cas unidimensionnels élémentaires

4.1.1. Définition des tests

Les tests élémentaires (figure 1) concernent des essais de relaxation et de fluage isothermes et anisothermes en traction pure (éprouvette de révolution modélisée, en tenant compte des symétries, par un élément quadrilatéral à 8 nœuds) et sont, à l'exception du deuxième test de fluage anisotherme, extraits de [MAS 94]. Les propriétés du matériau sont données dans le tableau 1, et celles qui dépendent de la

température sont supposées linéaires par morceau. Dans tous les cas, la déformation d'origine thermique n'est pas prise en compte.

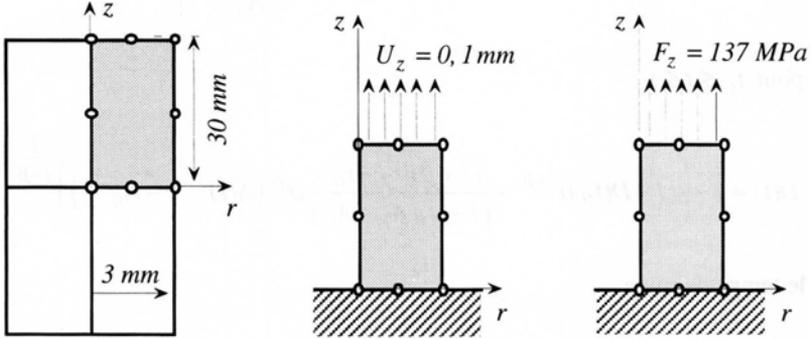


Figure 1. Géométrie et maillage (gauche) pour les tests de relaxation (centre) et de fluage (droite)

T (°C)	E (Mpa)	ν	k	N	M	B	A (Mpa)	α	β	b
900	150000	0.3	0	12.2	10.5	2110	3191.62	6.3	15	0
1000	150000	0.3	0	10.8	9.8	1450	2511.35	5.2	15	0
1025	150000	0.3	0	10.45	9.625	1285	2341.3	4.925	15	0

Tableau 1. Caractéristiques matérielles

Les tests de relaxation et de fluage isothermes sont menés à la température de 1000 °C. Pour le test de relaxation anisotherme, la température suit l'évolution

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 200000 & \quad T = 1000 \\ 200000 \leq t \leq 2000000 & \quad T(t) = 1000 + (t - 200000) / 72000 \end{aligned}$$

et pour les tests de fluage anisothermes

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq t_0 = 25000 & \quad T = T_0 = 1000 \\ t_0 \leq t \leq t_1 = 200000 & \quad T(t) = 1000 + (t - 25000) / 7000 \end{aligned}$$

Pour le deuxième test de fluage anisotherme, on suppose $\alpha = 5$ (donc indépendant de T) ce qui permet de construire la solution (on pose $A_i = A(T(t_i))$ pour $i = 0, 1$)

$$0 \leq t \leq t_0 \quad D(t) = 1 - \left(1 - t(1 + \beta) \left(\frac{\sigma_{zz}}{A_0} \right)^\alpha \right)^{1/(1+\beta)} \quad [46]$$

puis, pour $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$D(t) = 1 - \left((1 - D(t_0))^{1+\beta} - \frac{(1+\beta)(t_1 - t_0)}{(1-\alpha)(A_1 - A_0)} \sigma_{zz}^\alpha (A(t)^{1-\alpha} - A_0^{1-\alpha}) \right)^{\frac{1}{1+\beta}} \quad [47]$$

d'où le temps de ruine

$$t_{ruine} = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{A_1 - A_0} \left(\left(\frac{(1-\alpha)(A_1 - A_0)(1 - D(t_0))^{1+\beta}}{(1+\beta)(t_1 - t_0) \sigma_{zz}^\alpha} + A_0^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - A_0 \right) \quad [48]$$

4.1.2. Résultats

Le tableau 2 donne les résultats obtenus, en petites perturbations et pour le temps de ruine, par les logiciels Castem 2000® [MAS 94], ASTER® [SCH 97] et nous-mêmes ; nous avons utilisé les deux expressions [27] et [29] pour l'équation « endommagement » avec les mêmes pas de temps, sans constater de différence significative. Ce tableau montre la bonne précision obtenue avec notre approche. Les figures 2 et 3 donnent l'évolution de quelques grandeurs significatives calculées lors de ces tests ; on note en particulier la capacité du modèle et de sa mise en œuvre numérique à bien reproduire les phases de fluage primaire, secondaire et tertiaire.

Temps de ruine	Solution théorique	CEA [MAS 94]	EDF [SCH 97]	SYSTUS+®	
				[27]	[29]
Relaxation isotherme	2 468 980 s [SCH 97]	2 455 687 s	2 460 740 s	[27]	2 468 790 s
				[29]	2 469 805 s
Relaxation anisotherme	1 643 380 s [SCH 97]	1 723 529 s	1 640 680 s	[27]	1 653 458 s
				[29]	1 653 790 s
Fluage isotherme	231 425 s [SCH 97]	232 500 s	231 600 s	[27]	231 420 s
				[29]	231 560 s
Fluage anisotherme Test 1	165 882 s [MAS 94]	152 941 s		[27]	155 500 s
				[29]	155 540 s
Fluage anisotherme Test 2	119 957 s [48]			[27]	119 996 s
				[29]	119 954 s

Tableau 2. Temps de ruine pour les divers tests

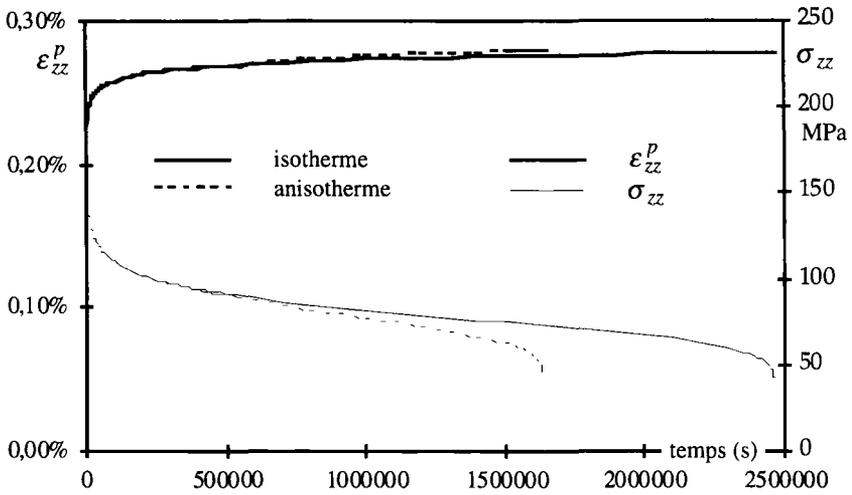


Figure 2. Évolution de la déformation plastique et de la contrainte axiales lors des tests de relaxation

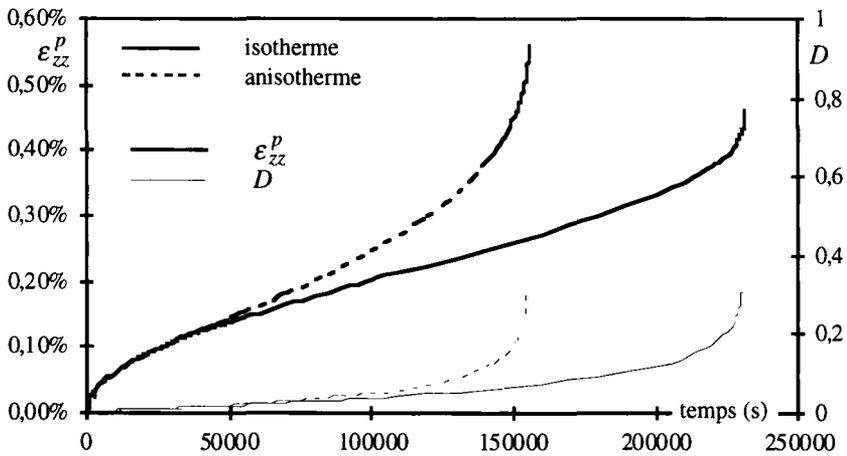


Figure 3. Évolution de la déformation plastique axiale et de l'endommagement lors des tests de fluage

4.2. Essai RUPATHER 4

Nous avons retenu cet essai pour étudier l'intérêt de notre mise en œuvre numérique car il s'agit d'un cas de référence, bien documenté du point de vue

expérimental, qui permettra, au delà des tests d'efficacité numérique, de vérifier ultérieurement la qualité du modèle physique.

4.2.1. Description de l'essai

Cet essai, défini dans [SAI 97], porte sur un tube dont la géométrie et le chargement thermomécanique (pour $t \geq 4032$) sont définis sur la figure 4; la distribution de la température (symétrique par rapport au plan $z = 0$) est linéaire par morceau sur le temps, et donnée par (pour $t \geq 4032$)

$$T(z) = 698,81 - 0,771z - 0,08214z^2 + 0,0006306z^3 - 0,1172 \cdot 10^{-5}z^4$$

Enfin, la densité surfacique de forces axiale en $z = 135$ modélise l'effet de fond.

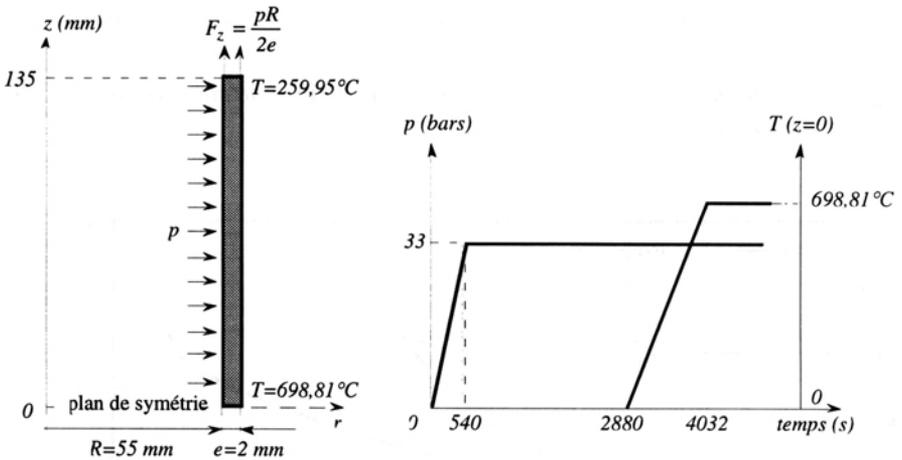


Figure 4. Géométrie et chargement thermomécanique pour l'essai RUPATHER 4

Les modèles couplant comportement et endommagement sont bien connus pour donner des résultats très sensibles à la finesse du maillage dans les zones endommagées. Trois maillages en éléments finis (quadrilatères à 8 nœuds et 4 points de Gauss) ont donc été utilisés pour cerner cette sensibilité dans le cas de l'essai RUPATHER 4 (figure 5). Ils comportent tous 2 éléments dans l'épaisseur et 41 selon la longueur du tube ($0 \leq z \leq 135$), mais diffèrent par la progression du découpage selon z ; celle-ci est choisie de manière à ce que les éléments adjacents à $z = 0$ aient pour longueur axiale

$$\text{Mail}_1 = 3,33 \text{ mm} \quad \text{Mail}_2 = 1,75 \text{ mm} \quad \text{Mail}_3 = 0,69 \text{ mm}$$

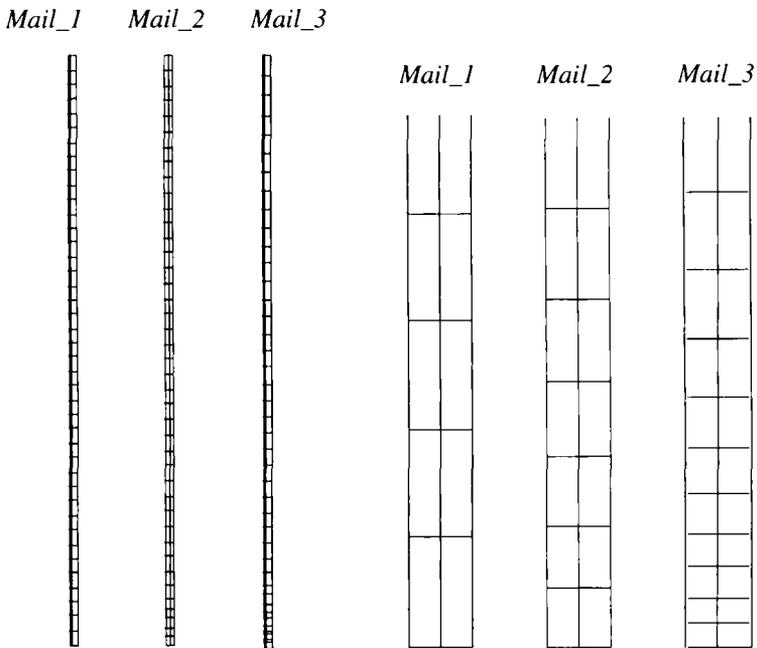


Figure 5. Maillages utilisés (gauche) et grossissements (droite) près du plan $z=0$

Le tableau 3 donne les propriétés matérielles (λ : coefficient de dilatation thermique).

T (°C)	E (Mpa)	ν	λ (°C ⁻¹)	k	N	M	B	A (Mpa)	α	β	b
400	163750	0,3	$13,7 \cdot 10^{-6}$	0	110	19,9	792,871	937,978	33,58	3	0
500	152500	0,3	$14,3 \cdot 10^{-6}$	0	32	34,04	742,811	956,305	15	3	0
600	110625	0,3	$14,8 \cdot 10^{-6}$	0	6,9	79,4	1337,325	1199,95	6,6	3	0
700	50000	0,3	$15,2 \cdot 10^{-6}$	0	3,5	46,5	2007,352	1098,157	3,96	3	0

Tableau 3. Caractéristiques matérielles pour l'essai RUPATHER 4

4.2.2. Analyse de convergences globale et locale

Notre objectif étant, ici, de comparer l'efficacité de quatre méthodes différentes d'approximation de la matrice tangente globale [15], nous nous limitons ici au cas des petites perturbations et au maillage *Mail_3*. Ces méthodes utilisent :

- la matrice d'élasticité endommagée [35], symétrique,

- ou la matrice d'élastoviscoplasticité endommagée [45], symétrique,
- ou la matrice tangente consistante [44], non symétrique,
- ou la méthode BFGS [BAT 82], qui préserve la symétrie.

L'étude est menée jusqu'à $t = 16\ 500\ s$, par pas $\Delta t = 60\ s$ (275 pas) et conduit à un endommagement de 0,348 et une déformation viscoplastique cumulée de 20,24 % (le résultat ne peut donc être interprété valablement compte tenu de l'hypothèse de petites perturbations) aux points de Gauss près du plan $z = 0$.

La figure 6 donne, pour chacune des quatre méthodes, le nombre total d'itérations cumulé [15] pour atteindre la convergence ; le critère de convergence est qu'en chaque nœud du maillage le résidu d'équilibre [12] soit inférieur à 10^{-3} fois la force maximale (donc pour $p = 33\ bars$) due à l'effet de fond. On constate que les quatre méthodes permettent la convergence, mais au prix d'un très grand nombre d'itérations pour la méthode [35], et des nombres plus raisonnables pour les trois autres. La méthode [45] est particulièrement efficace, la matrice tangente consistante est plutôt décevante autant en nombre d'itérations qu'en volume de calculs puisque c'est la seule méthode qui conduise à une matrice non symétrique.

Pour la convergence de l'algorithme d'intégration locale de la loi de comportement (§ 3.2), on note d'abord que la taille des pas de temps Δt fait que la formule [32] de détermination des pas de temps locaux $\delta\tau$ donne toujours $\delta\tau = \Delta t$. Avec la matrice tangente locale [31], la convergence est atteinte en au plus 2 ou 3 itérations de Newton-Raphson, ce qui montre l'efficacité de notre mise en œuvre numérique. Le critère de convergence était (l'indice i est le numéro d'itération de Newton-Raphson pour résoudre [24] et ([27] ou [29]))

$$\left| V(\delta p^i, \delta D^i, S_{\theta}^{ed}) \right| \leq 10^{-10} \quad \text{ou} \quad \left| \delta p^i - \delta p^{i-1} \right| \leq 10^{-3} \left| \delta p^{i-1} \right|$$

et

$$\left| W(\delta p^i, \delta D^i, S_{\theta}^{ed}) \right| \leq 10^{-15} \quad \text{ou} \quad \left| \delta D^i - \delta D^{i-1} \right| \leq 10^{-3} \left| \delta D^{i-1} \right|$$

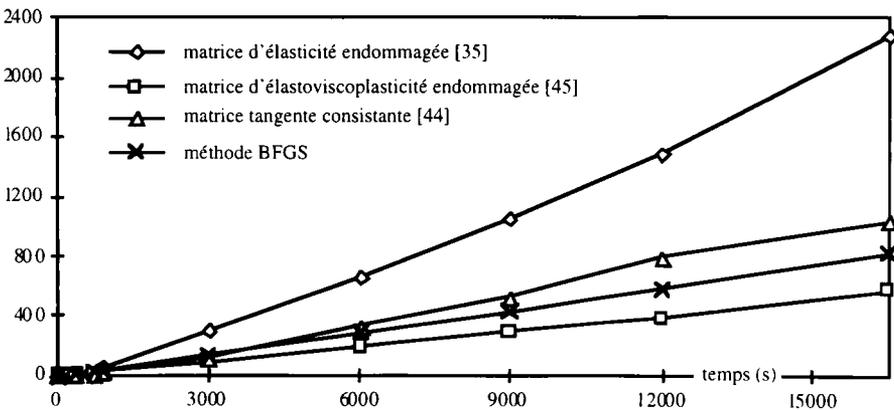


Figure 6. Nombre total cumulé d'itérations [15] pour atteindre la convergence

4.2.3. Influence du maillage et principaux résultats mécaniques

Compte tenu des niveaux de déformation et d'endommagement atteints en petites perturbations, l'analyse est maintenant menée en grandes transformations (§ 2.4) avec la dérivée objective de [FRE 83] jusqu'à rupture ($D \approx 0,9$), la gestion automatique des pas de temps Δt suivant [BON 93].

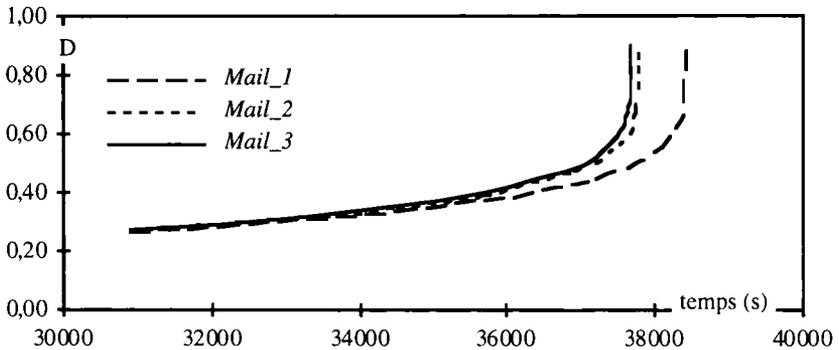


Figure 7. Évolution de l'endommagement au voisinage du plan $z = 0$

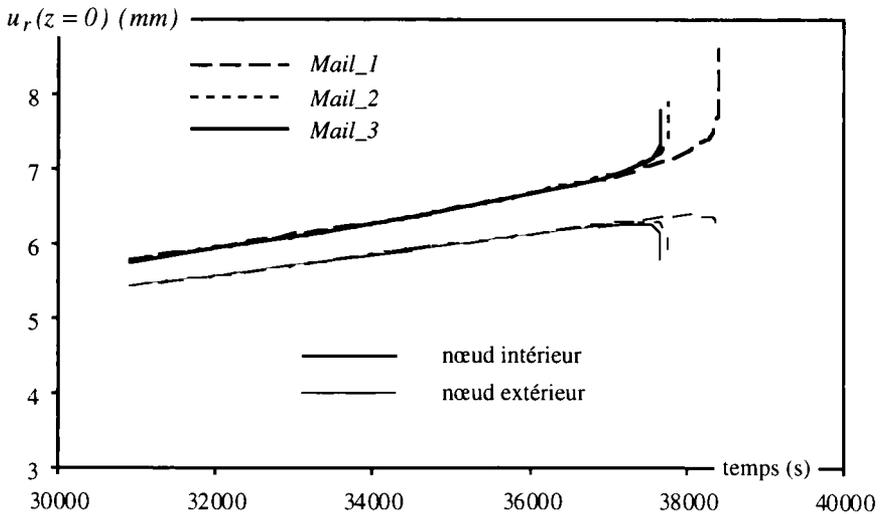


Figure 8. Évolution du déplacement radial sur le plan $z = 0$

Les figures 7 et 8 permettent d'étudier la sensibilité au maillage à partir des résultats en endommagement et en déplacement radial au voisinage immédiat ou sur le plan $z = 0$, et pour les instants où les écarts sont perceptibles. Le maillage *Mail_1*

donne des résultats (sur le temps de ruine) supérieurs d'environ 2 % à ceux donnés par les maillages *Mail_2* et *Mail_3*, les écarts entre ces deux derniers étant non significatifs.

La figure 9 permet de constater le phénomène de localisation de l'endommagement au voisinage immédiat du plan $z = 0$; c'est pour ce phénomène de localisation que la sensibilité au maillage est manifeste. Cette sensibilité reste elle-même très localisée puisqu'elle passe d'un écart de 50 % (entre les résultats obtenus avec *Mail_1* et *Mail_3*) sur l'endommagement à 5 mm (soit 2,5 fois l'épaisseur initiale) du plan de symétrie à un écart de 20 % à 10 mm de ce plan. Le raffinement, selon l'axe du tube, du maillage *Mail_3* nous paraît donc suffisant ; par contre, nous n'avons pas étudié la sensibilité au maillage selon l'épaisseur du tube.

Enfin, la figure 10 donne la déformée finale et les isovalues de $J_2(\sigma)$ correspondantes obtenues avec le maillage *Mail_3*; on constate bien le fort amincissement de la paroi du tube dans le plan $z = 0$.

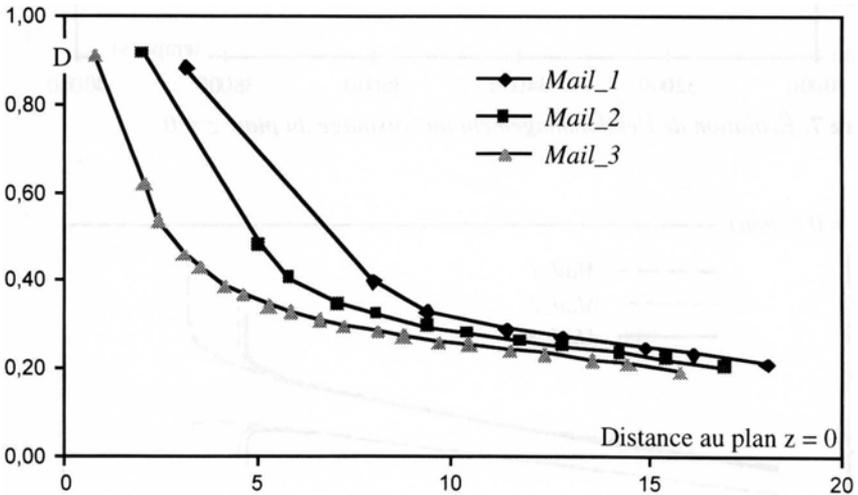


Figure 9. Évolution de l'endommagement (en peau externe) en fonction de la distance (calculée sur la géométrie déformée) au plan $z = 0$

5. Conclusions

Sur les cas unidimensionnels élémentaires (§ 4.1) où nous avons pu disposer d'éléments de comparaison, notre approche a permis d'obtenir, sur le calcul du temps de ruine, un gain de précision significatif en relaxation et fluage isothermes, un léger gain sur le test 1 de fluage anisotherme, mais n'a rien apporté en relaxation anisotherme. Sur le test 2 de fluage anisotherme, pour lequel nous disposons d'un résultat analytique, la précision est très bonne.

Sur l'essai RUPATHER 4 (§ 4.2), les résultats numériques paraissent raisonnables et, en particulier, on ne constate pas de sensibilité significative à l'élancement (que nous avons fait varier d'un rapport 3,33 à 0,69) des éléments finis dans la zone de fort endommagement ($D \approx 0,9$).

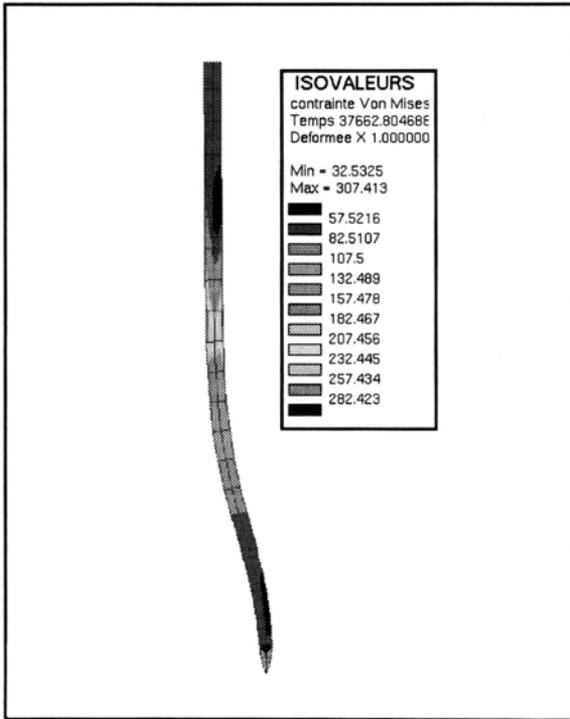


Figure 10. Déformée finale et isovaleurs de $J_2(\sigma)$ obtenues avec le maillage *Mail_3*

Notre étude a permis aussi de cerner l'efficacité numérique, en terme de nombre d'itérations de Newton-Raphson sur l'équation d'équilibre globale, de quatre approches différentes d'évaluation de l'opérateur de comportement tangent. La meilleure se révèle être celle qui utilise la matrice tangente élastoviscoplastique endommagée, et nous avons été plutôt déçus par les résultats plus médiocres fournis par la matrice tangente consistante (figure 6). Nous avons déjà souligné le paradoxe consistant à vouloir déterminer le gradient de grandeurs non partout dérivables, et dont l'algorithme de calcul introduit un caractère discret (le nombre de pas de temps $\delta\tau$) donc essentiellement non dérivable.

Des expériences passées ([CAR 95] en viscohyperélasticité et [FLE 95] en élastoviscoplasticité en grandes transformations) nous laissaient espérer mieux.

Faut-il mettre sur le compte de l'endommagement ce désappointement ? Il est certain que sa présence rend la matrice tangente consistante très mal conditionnée, et qu'il faudrait sans doute utiliser des méthodes numériques (continuation, Riks...) mieux adaptées au passage du maximum d'une courbe de chargement. Néanmoins, la supériorité de la matrice d'élastoviscoplasticité endommagée apparaît dès le début du chargement, donc pour de faibles endommagements.

Les résultats, particulièrement convaincants, de [SIM 85] sur l'utilisation de la matrice tangente consistante en élastoplasticité (associée au choix $\theta = 1$) peuvent conduire à remettre en cause le choix $\theta = 0,5$ que nous avons fait au tout début du § 4, et ce d'autant plus que les résultats de [ORT 85] montrent bien l'intérêt, pour la précision dans l'intégration numérique de la loi constitutive en élastoplasticité, de valeurs de θ proches de 1 lorsque les accroissements de déformation ne sont pas de l'ordre des déformations élastiques. N'ayant pas, dans la présente étude, étudié l'influence de θ , il nous est difficile de nous prononcer ; néanmoins,

- les expressions [44] et [45] des matrices D^{tang} et D_{evp}^{tang} dépendent de la valeur de θ de sorte que le caractère consistant de [44] est assuré quelle que soit la valeur de θ ,

- la qualité des résultats obtenus au § 4.1 nous a confortés dans notre choix $\theta = 0,5$,

- l'accroissement de déformation par pas de temps est, en moyenne, inférieur à 0,001 dans le cas exposé au § 4.2.2.

La question nous semble donc toujours ouverte, et il conviendrait peut-être de considérer des modèles de comportement plus simples pour mieux l'étudier.

Remerciements

Les auteurs remercient le Ministère de la Recherche (France) et la société FRAMATOME pour leur soutien technique et financier dans le cadre du programme de Saut Technologique « Nouveaux outils de conception et de modélisation en mécanique et disciplines associées ».

6. Notations

- $grad_S$ partie symétrique du gradient d'un champ vectoriel
- \bullet^+ partie positive de \bullet ($\bullet^+ = \bullet$ si $\bullet \geq 0$, $\bullet^+ = 0$ sinon)
- $:$ produit doublement contracté de deux tenseurs du second ordre comme dans $\epsilon : \sigma = \epsilon_{ij} \sigma_{ij}$, ou produit doublement contracté entre un tenseur du quatrième ordre et un tenseur du second ordre comme dans $(E : \epsilon)_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$
- I_2 tenseur unité d'ordre 2
- I_4 tenseur unité d'ordre 4

- ^m tenseur partie moyenne du tenseur du second ordre • : (•^m)_{ij} = •_{kk} δ_{ij}
- ^d tenseur partie déviatorique du tenseur du second ordre • : •^d = • - $\frac{1}{3}$ •^m
- J₀(•) plus grande valeur propre du tenseur du second ordre •
- J₁(•) trace du tenseur du second ordre • : J₁(•) = •_{kk}
- J₂(•) $\sqrt{\frac{3}{2} \bullet^d : \bullet^d}$
- {•} ou {•} vecteur colonne
- <•> ou <•> vecteur ligne
- [•] ou [•] matrice

7. Bibliographie

- [BAT 82] BATHE K.J., *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall Inc., 1982.
- [BER 88] BERGHEAU J.M., « Numérisation des équations constitutives des modèles plastiques et viscoplastiques de Chaboche dans Systus. », Rapport UDD.88049, Novatome, 1988.
- [BON 93] BONELLI S., GOLAY F., DEBORDES O., « Résolution autoadaptative par éléments finis de problèmes de diffusion fortement non-linéaires. », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 2, n° 4, 1993.
- [CAR 95] CARPENTIER-GABRIELI C., Modélisation théorique et numérique du comportement visco-élastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques, thèse de doctorat, université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 1995.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, 2e édition, Maloine, 1984.
- [FLE 95] FLESIA D., Modélisation de procédés complexes de mise en forme des métaux, thèse de doctorat, université de Méditerranée Aix-Marseille II, 1995.
- [FRE 83] FRESSENGEAS C., MOLINARI A., « Modèles d'érouissage cinématique en grandes déformations », C.R.A.S., 297 II, 93, 1983.
- [GER 86] GERMAIN P., *Mécanique*, tomes I et II, Ellipses, 1986.
- [KAC 58] KACHANOV L.M., « Time of the rupture process under creep conditions. », *Isv. Akad. Nauk. SSR, Otd Tekh. Nauk.*, 8, p. 26-31, 1958.
- [LEM 85] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985.
- [MAS 94] MASI H., « Viscoplasticité anisotherme et endommagement - Modélisation du comportement d'un matériau endommageable en régime viscoplastique anisotherme », Rapport CEA-DMT/94-406, 1994.
- [NES 96] NESNAS K., BENHATIRA F., BEZZINA S., SAANOUNI K., « Sur l'intégration numérique des solides élastoplastiques endommageables. », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 5, n° 4, 1996.
- [NGU 77] NGUYEN Q.S., « On the elastic-plastic initial/boundary value problem and its numerical integration. », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 11, p. 817-832, 1977.
- [ORT 85] ORTIZ M., POPOV E.P., « Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 21, p. 1561-1576, 1985.
- [RAB 69] RABOTNOV Y.N., *Creep problems in structural members*, North-Holland, 1969.

[RIS 94] RISTINMAA M., « Consistent stiffness matrix in FE calculations of elastic-plastic bodies. », *Computer & Structures*, vol. 53, n° 1, 1994.
 [SAI 97] SAINTE-CATHERINE C., MONGABURE P., COTONI V., NICOLAS L., DEVOS J., DUPAS P., BHANDARI S., « RUPATHER - An original experimental approach for creep failure study of RPV steel. », SMIRT 14, Lyon, 1997.
 [SCH 97] SCHNEITER J.R., DUPAS P., communication privée, EDF, 1997.
 [SID 82] SIDOROFF F., cours sur les 'Grandes déformations', Ecole d'été du GRECO Grandes déformations et endommagement, rapport GRECO n° 51/1982.
 [SIM 85] SIMO J.C., TAYLOR R.L., « Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity », *Comp. Meth. in Appl. Machanics and Engng*, 48, p. 101-118, 1985.
 [SYS 97] SYSTUS+, Version 1.1, Manuel d'utilisation, Systus International, 1997.

Article reçu le 20 mars 1998.
 Version révisée le 30 août 1998.

Annexe

En écrivant la relation [24] sous la forme

$$V = B - \delta\tau \left(\frac{u}{v} \right)^{n_\theta}$$

alors la dérivée de V par rapport à une grandeur • dont dépendent B, u et v est donnée par

$$\frac{\partial V}{\partial \bullet} = \frac{\partial B}{\partial \bullet} - n_\theta (B - V) \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \bullet} - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \bullet} \right)$$

De cette banalité, on déduit immédiatement

$$\frac{\partial V}{\partial(\delta p)} = 1 - D_\theta + \theta n_\theta ((1 - D_\theta) \delta p - F) \left(\frac{1 - D_\theta}{m_\theta r_\theta} + \frac{3\mu_{\tau+\delta\tau}}{J_2(S_\theta^{ed}) - 3\mu_{\tau+\delta\tau} \theta \delta p - k_\theta} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial(\delta D)} = -\theta \delta p \left(1 + \frac{\theta n_\theta}{m_\theta r_\theta} ((1 - D_\theta) \delta p - F) \right)$$

ce qui détermine la première ligne de la matrice [k^{lg}] définie par [31]. Le même raisonnement appliqué à la relation [27] donne, en négligeant la dérivée de β par rapport à χ, la deuxième ligne de [k^{lg}]

$$\frac{\partial W}{\partial(\delta p)} = -\alpha_\theta \frac{(\delta D - W)}{\chi(S_\theta)} \frac{\delta(\chi(S_\theta))}{\partial(\delta p)}$$

$$\frac{\partial W}{\partial(\delta D)} = 1 + \theta(\delta D - W) \frac{\alpha_\theta - \beta_\theta}{1 - D_\theta}$$

qu'il convient de compléter par, grâce à [11] et [23],

$$\frac{\delta(\chi(S_\theta))}{\partial(\delta p)} \equiv \frac{\delta(J_2(S_\theta))}{\partial(\delta p)} = -3\mu_{\tau+\delta\tau} \theta$$

Dans le cas où on utilise la relation [29], on obtient

$$\frac{\partial W}{\partial(\delta p)} = -\alpha_\theta(1 - D_\theta) \frac{\delta\tau}{A_\theta} \left(\frac{\chi(\sigma_\theta)}{A_\theta}\right)^{\alpha_\theta-1} (W + 1 - D_\tau - \delta D)^{-\beta_\theta} \frac{\delta(\chi(S_\theta))}{\partial(\delta p)}$$

$$\frac{\partial W}{\partial(\delta D)} = 1 + \theta \alpha_\theta(1 - D_\theta) \frac{\delta\tau}{A_\theta} \left(\frac{\chi(\sigma_\theta)}{A_\theta}\right)^{\alpha_\theta-1} (W + 1 - D_\tau - \delta D)^{-\beta_\theta} \chi(S_\theta)$$

ce qui termine la détermination de la matrice $[k^{tg}]$ définie par [31].

Pour le calcul de l'opérateur de comportement tangent consistant (§ 3.3.2), on a eu besoin des grandeurs $\nabla(\delta p)$ et $\nabla(\delta D)$, *confer* [34] pour la notation ∇ ; ces grandeurs s'obtiennent en prenant la différentielle totale de [24] et ([27] ou [29]) par rapport à $\varepsilon_{t+\delta t}$, ce qui donne le système linéaire

$$[k^{tg}] \begin{Bmatrix} \nabla(\delta p) \\ \nabla(\delta D) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \nabla V \\ \nabla W \end{Bmatrix}$$

qui comporte autant de vecteurs colonnes seconds membres et inconnues que $\varepsilon_{t+\delta t}$ a de composantes indépendantes. Comme, pour ce paragraphe 3.3.2, on a supposé $\tau = t$ et $\tau + \delta\tau = t + \Delta t$, la dérivation directe de [24] donne, en utilisant la deuxième relation [41] et la relation [26],

$$\nabla V = \frac{2n_\theta \mu_{t+\Delta t} \theta \Delta t}{B_\theta r_\theta^{1/m_\theta}} \left(\left(\frac{J_2(S_\theta^{ed}) - 3\mu_{\tau+\delta\tau} \theta \delta p - k_\theta}{B_\theta r_\theta^{1/m_\theta}} \right)^+ \right)^{n_\theta-1} \frac{\delta \varepsilon^p}{\delta p}$$

et, de même, la dérivation directe de [27] donne

$$\nabla W = -\frac{\theta \alpha_\theta \Delta t}{A_\theta} \left(\frac{\chi(S_\theta)}{A_\theta} \right)^{\alpha_\theta - 1} (1 - D_\theta)^{\alpha_\theta - \beta_\theta} \left(3b K_\theta I_2 + 2\mu_{t+\Delta t} (1-b) \frac{\delta \mathcal{E}^p}{\delta p} \right)$$

tandis que celle de [29] donne quant à elle

$$\begin{aligned} \nabla W = & -\alpha_\theta \theta (1 - D_\theta) \frac{\Delta t}{A_\theta} \left(\frac{\chi(\sigma_\theta)}{A_\theta} \right)^{\alpha_\theta - 1} (W + 1 - D_{t+\Delta t})^{-\beta_\theta} \\ & \times \left(3b K_\theta I_2 + 2\mu_{t+\Delta t} (1-b) \frac{\delta \mathcal{E}^p}{\delta p} \right) \end{aligned}$$

Enfin, il convient de déterminer l'expression C introduite dans la relation [45] ; elle découle des égalités

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial S_\theta^{ed}} : \nabla(S_\theta^{ed}) = & 3\mu_{t+\Delta t} \theta n_\theta \Delta t \left(\left(\frac{J_2(S_\theta^{ed}) - 3\mu_{\tau+\delta\tau} \theta \delta p - k_\theta}{B_\theta (r_\tau + \theta(1 - D_\tau - \theta \delta D)\delta p)^{1/m_\theta}} \right)^+ \right)^{n_\theta - 1} \frac{S_\theta^{ed}}{J_2(S_\theta^{ed})} \\ = & 2\mu_{t+\Delta t} \theta n_\theta \Delta t \left(\left(\frac{J_2(S_\theta^{ed}) - 3\mu_{\tau+\delta\tau} \theta \delta p - k_\theta}{B_\theta (r_\tau + \theta(1 - D_\tau - \theta \delta D)\delta p)^{1/m_\theta}} \right)^+ \right)^{n_\theta - 1} \frac{\delta \mathcal{E}^p}{\delta p} \\ \equiv & 2\mu_{t+\Delta t} C \frac{\delta \mathcal{E}^p}{\delta p} \end{aligned}$$