

---

# Comportement élastoplastique anisotrope pour l'analyse numérique des coques minces en grandes transformations

M. Lamine Boubakar \* — Philippe Boisse \*\*

\* LMARC-UMR CNRS n° 6604

Université de Franche-Comté

24, chemin de l'Epitaphe, F-25030 Besançon cedex

\*\* ESEM Orléans, LM2S-URA CNRS n° 776

Université Paris 6/ENSAM Paris

151, boulevard de l'Hôpital, F-75013 Paris

---

*RÉSUMÉ. De par leur mode d'élaboration, les tôles minces présentent une orthotropie du comportement plastique que l'on doit prendre en compte dans la simulation numérique de l'emboutissage. A cet effet, un modèle de comportement basé sur une formulation en référentiel tournant par la rotation du repère principal d'anisotropie est présenté. Un algorithme de calcul des contraintes et des variables internes est également proposé. Cet algorithme consiste en une méthode de prédiction-corrrection intégrant une cinématique de coques spatiales associée à une interpolation mixte des déformations de cisaillement transverse. Les résultats obtenus pour plusieurs exemples d'emboutissage montrent l'efficacité de l'approche proposée.*

*ABSTRACT. Due to rolling and cristallographic texture development, thin sheets metal for stamping exhibit an initial orthotropic plastic behaviour that have to be incorporated in numerical modelling of sheet forming processes. A mechanical modelling of the behaviour is presented. It is based on a formulation in a rotating frame updated using the proper rotation tensor. The stress calculation algoritlim associated is based on the prediction-corrrection method in the rotating frame and explicitly takes into account shell kinematics with mixed transverse shear interpolation. Numerical results on deep drawing problems show the accuracy and the efficiency of the proposed approach.*

*MOTS-CLÉS : élastoplasticité anisotrope, grandes transformations, lois incrémentales, élément fini de coque, verrouillage en cisaillement transverse, repère d'anisotropie, analyse de précision, emboutissage.*

*KEY WORDS : anisotropic elastoplasticity, finite transformations, incremental laws, shell finite element, transverse shear locking, anisotropic frame, accuracy analysis, deep drawing.*

---

## 1. Introduction

Du fait de leur fabrication par laminage, les tôles présentent un comportement anisotrope dû au caractère orienté de leur structure interne. Les directions principales de cette anisotropie initiale sont liées aux directions de laminage, transverse et normale au plan de la tôle. Lorsque le matériau subit des déformations irréversibles, la structure interne est modifiée. Les particules qui la composent sont réorientées. Il peut apparaître ainsi une anisotropie de structure induite évoluant avec la déformation irréversible et se superposant à l'anisotropie de la structure initiale. Cette superposition de l'anisotropie initiale et de l'anisotropie induite évolutive peut résulter en une anisotropie très générale lorsque les directions principales des deux types d'anisotropies ne coïncident pas.

Pour décrire tout type d'anisotropie en présence de grandes transformations élastoplastiques, Mandel [MAN 73] a établi un cadre constitutif fondé sur la notion de repère directeur non matériel. Ce qui permet de prendre en compte l'évolution de la structure interne dans la description du comportement. La définition précise d'un tel repère pour l'étude d'un polycristal dépend du type d'anisotropie à modéliser. Dans le cas d'une orthotropie non évolutive, les directions principales d'orthotropie permettent de définir un repère privilégié pour l'étude du polycristal. Son évolution au cours de la transformation définit le mouvement du milieu matériel par rapport à sa structure interne. La description du comportement est alors subordonnée à la connaissance de ce mouvement que l'on peut avoir à partir d'une approche microstructurale. Ce type d'approche semble être d'ailleurs le cadre naturel de la théorie de Mandel. Pour inscrire cette théorie dans le cadre d'une approche phénoménologique, la principale difficulté est la caractérisation de la rotation des directions d'orthotropie. Parmi les choix possibles pour cette rotation et en l'absence de données expérimentales complémentaires, on utilise dans ce travail une actualisation déduite de la cinématique [LAD 80][DOG 89].

Outre une description correcte du comportement, la simulation numérique de l'emboutissage par la méthode des éléments finis nécessite l'utilisation d'éléments capables de prendre en compte efficacement les différentes non-linéarités. A cet effet, un nouvel élément fini de coque à trois nœuds à interpolation linéaire a été développé [BOI 93][BOI 94]. Cet élément est basé sur une cinématique de Ahmad [AHM 71] associée à une interpolation mixte des composantes de cisaillement transverse afin de pallier le problème de verrouillage. Dans ce contexte d'élément fini de coque, une modélisation numérique du comportement élastoplastique anisotrope est proposée. Construite à partir d'un cadre constitutif formulé dans une configuration relâchée particulière, elle consiste, comme dans le cas des petites déformations, en un schéma prédicteur-correcteur. Au cours de la prédiction, le comportement du matériau est supposé élastique et un chemin d'interpolation linéaire est utilisé, ce qui permet de prendre en compte la spécificité de l'élément. Pour la correction plastique, une famille d'algorithmes inconditionnellement stables est présentée, elle résulte de l'intégration des lois d'évolutions plastiques suivant la méthode du mi-point généralisée. Une analyse de précision est réalisée en présence de grandes rotations et de grandes déformations. Pour finir, un opérateur tangent cohérent avec l'algorithme de calcul des contraintes et des variables internes est défini dans l'espace des contraintes planes afin de conserver la convergence du schéma de Newton pour la résolution de l'équilibre. Pour valider le modèle proposé, une série d'essais a été réalisée. Les résultats obtenus sont satisfaisants.

## 2. Description du comportement matériel

### 2.1. Définitions géométriques et cinématiques

En suivant l'approche des milieux à directeurs de Mandel [MAN 71][MAN 73][MAN 81][MAN 83], on peut introduire la décomposition suivante du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^e \mathbf{a} \hat{\mathbf{F}}^p \quad [1]$$

Le tenseur  $\hat{\mathbf{F}}^p$  représente le gradient de la transformation plastique entre la configuration de référence  $C_0$  et une configuration relâchée particulière  $C_a$  dite "isocline". Dans cette configuration, un trièdre lié à la structure interne du matériau conserve son orientation initiale. Au cours de la transformation, ce trièdre "directeur" évolue par une rotation  $\mathbf{a}$  qui fait passer de la configuration relâchée  $C_a$  à une nouvelle configuration relâchée  $C_L$  [LEE 69]. Une déformation élastique pure  $\mathbf{V}^e$  est alors appliquée pour compléter le mouvement.

Si l'on admet que les déformations élastiques restent faibles ( $\mathbf{V}^e = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^e$ ;  $\|\boldsymbol{\varepsilon}^e\| \ll 1$ ), le gradient des vitesses de transformation  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  conduit aux décompositions suivantes du taux de déformation  $\mathbf{D}$  et du taux de rotation  $\mathbf{W}$  :

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^S = D_a \boldsymbol{\varepsilon}^e + \mathbf{a} (\hat{\mathbf{F}}^p \dot{\mathbf{F}}^p \hat{\mathbf{F}}^{p-1})^S \mathbf{a}^T \quad [2]$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^A = \dot{\mathbf{a}}\mathbf{a}^T + \mathbf{a} (\hat{\mathbf{F}}^p \dot{\mathbf{F}}^p \hat{\mathbf{F}}^{p-1})^A \mathbf{a}^T$$

$D_a \boldsymbol{\varepsilon}^e$  désigne la dérivée du tenseur des déformations élastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  dans le mouvement par la rotation  $\mathbf{a}$  :

$$D_a \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{a} \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{a}) \mathbf{a}^T = \mathbf{a} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a^e \mathbf{a}^T \quad [3]$$

La première relation [2.a] traduit l'extension au cas des grandes transformations de la décomposition additive des vitesses de déformation. Son écriture dans la configuration  $C_a$  donne :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a^e = \dot{\mathbf{d}}_a - (\hat{\mathbf{F}}^p \dot{\mathbf{F}}^p \hat{\mathbf{F}}^{p-1})^S ; \quad \dot{\mathbf{d}}_a = \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a} = \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^T \mathbf{d} \mathbf{a}) \quad [4]$$

$\mathbf{d}$  est une mesure de déformation associée à  $\mathbf{D}$  dans le mouvement par la rotation  $\mathbf{a}$ . Quant à la seconde [2.b], très spécifique aux transformations finies, elle permet de relier la vitesse  $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{a}^T$  du trièdre directeur au taux de rotation  $\mathbf{W}^p = \mathbf{a} (\hat{\mathbf{F}}^p \dot{\mathbf{F}}^p \hat{\mathbf{F}}^{p-1})^A \mathbf{a}^T$  du milieu par

rapport à ce trièdre. Cette relation est particulièrement utile pour l'étude des matériaux anisotropes. Dans le cas d'un matériau orthotrope, par exemple, les directions d'orthotropie forment un trièdre privilégié [MAN 83] et la connaissance de  $\mathbf{W}^p$  nous permet d'en donner l'évolution :

$$\dot{\mathbf{a}} = (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p) \mathbf{a} \quad \mathbf{a}^t|_{t=0} = \mathbf{I} \quad [5]$$

## 2.2. Comportement élastoplastique

On suppose que l'état du matériau est complètement défini dans la configuration isocline  $C_a$  par le tenseur des déformations élastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}_a^e = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{a}$  et par un ensemble  $\mathbf{k}_{ai}$  ( $i \in N$ ) de variables d'érouissage scalaires ou tensorielles. L'inégalité de Clausius-Duhem

$$\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a^e - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}_{ai}} : \dot{\mathbf{k}}_{ai} \geq 0 \quad [6]$$

conduit alors, dans cette configuration, à la loi d'état

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_a = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a^e, \quad \mathbf{C}^e = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e} \quad [7]$$

et à la dissipation intrinsèque  $d$  :

$$d = \boldsymbol{\sigma}_a : \left( \dot{\hat{\mathbf{F}}}^p \hat{\mathbf{F}}^{p-1} \right)^S - \mathbf{X}_{ai} : \dot{\mathbf{k}}_{ai}, \quad \mathbf{X}_{ai} = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}_{ai}} \quad [8]$$

$w$  représente l'énergie libre spécifique et  $\rho_0$  la masse volumique initiale.  $\boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}$  est l'homologue du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  dans la configuration  $C_a$ .

Dans le cadre des matériaux standard généralisés [HAL 75], la fonction seuil  $f$  qui définit le domaine plastique dépendra des forces thermodynamiques  $\boldsymbol{\sigma}_a$  et  $\mathbf{X}_{ai}$  :  $f(\boldsymbol{\sigma}_a, \mathbf{X}_{ai}) \leq 0$ . En suivant la règle de normalité associée, on en déduit les lois complémentaires suivantes, où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique instantané :

$$\left( \dot{\hat{\mathbf{F}}}^p \hat{\mathbf{F}}^{p-1} \right)^S = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_a} \quad \dot{\mathbf{k}}_{ai} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_{ai}} \quad [9]$$

Ces équations constitutives sont d'une forme voisine de celles bien connues en petites perturbations et leur utilisation est subordonnée à la connaissance à tout instant de la

configuration isocline  $C_a$ . Dans le cas d'un matériau orthotrope, connaître  $C_a$  revient à connaître la loi d'évolution des directions principales d'orthotropie.

### 2.3. Actualisation des directions d'anisotropie

Comme il a été introduit plus haut, une loi d'évolution pour les directions principales d'anisotropie est donnée par la relation [5]. Dans le cas d'une modélisation macroscopique, la principale difficulté est la détermination du taux de rotation  $\mathbf{W}^P$  et pour y pallier, une première approche consiste à utiliser les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles isotropes [LOR 83][DAF 85][DAF 89]. Cette approche qui semble assez naturelle dans le cadre de la théorie des milieux à directeurs de Mandel, amène de nouvelles constantes matérielles dont l'identification expérimentale reste difficile. Ainsi, et en l'absence de données physiques supplémentaires, une alternative simple serait de postuler "à priori" la forme de  $\mathbf{W}^P$  à partir de la cinématique de la transformation [LAD 80][DOG 84][DOG 89]. Cette nouvelle approche qui reste un cas particulier de la précédente, doit conduire néanmoins à des résultats "raisonnables". On pourra trouver dans [DOG 89] et [BOU 94] plusieurs choix possibles pour  $\mathbf{W}^P$ , où  $\mathbf{W}^P = 0$  et  $\mathbf{W}^P = \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1})^A \mathbf{R}^T$  représentent deux cas limites ( $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{U}$  proviennent de la décomposition polaire du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$ ). En passant d'un cas à l'autre, on augmente ou on diminue la vitesse du repère principal d'anisotropie. Dans le premier cas, cette vitesse correspond à celle du référentiel corotationnel ( $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \mathbf{W}$ ;  $\mathbf{a} = \mathbf{Q}$ ) alors que dans le second, elle correspond à celle du référentiel tournant en rotation propre ( $\dot{\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T$ ;  $\mathbf{a} = \mathbf{R}$ ).

Afin d'étudier l'influence de ces deux choix significatifs sur la réponse d'un matériau orthotrope, une cinématique de glissement simple a été utilisée dans [DOG 84][DOG 89]. Les auteurs ont pu constater que l'utilisation du référentiel corotationnel ( $\mathbf{a} = \mathbf{Q}$ ) entraîne des oscillations périodiques indésirables de la contrainte de cisaillement au cours du glissement. Ces oscillations disparaissent avec l'utilisation du référentiel tournant en rotation propre ( $\mathbf{a} = \mathbf{R}$ ). Cela peut être un critère de choix de la loi d'évolution des directions d'anisotropie. Les résultats restent proches, toutefois, jusqu'à des glissements de l'ordre de l'unité.

L'analyse des contraintes normales pour ce même essai [BOU 94], met encore en évidence un comportement oscillatoire pour le choix de la rotation  $\mathbf{Q}$ . Avec  $\mathbf{R}$ , on observe un changement de signe pour chacune de ces contraintes qui fait passer d'un état de compression à un état de traction et vice-versa. Cette caractéristique du comportement est particulièrement intéressante puisqu'elle a été observée expérimentalement sur un essai de torsion à extrémités fixes [MON 84][MON 85]. Elle est la contrepartie du phénomène d'allongement ou de raccourcissement en torsion libre. On retrouve les mêmes caractéristiques dans [DAF 89] où les théorèmes de représentation ont été utilisés. Le choix de  $\mathbf{R}$  semble donc intéressant à plus d'un titre. De plus, il est très commode dans une démarche numérique puisqu'il peut être déterminé à partir de la seule description géométrique de la transformation.

### 3. Algorithme de calcul des contraintes et des variables internes

Dans le cadre d'une méthode incrémentale associée au schéma itératif de Newton, l'état du matériau est déterminé sur chaque incrément à partir de son état à l'incrément convergent précédent et du déplacement incrémental  $\Delta \mathbf{u}$ . Si l'état du matériau est défini par le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  et un ensemble de variables d'érouissage scalaires et tensorielles  $\mathbf{k}_i$  ( $i \in N$ ), on a donc à résoudre sur chaque intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$  et à chaque itération le problème à déplacement imposé suivant :

$$\sigma_n; (\mathbf{k}_i)_n + \Delta \mathbf{u} \Rightarrow \sigma_{n+1}; (\mathbf{k}_i)_{n+1} \quad [10]$$

Pour établir le lien qui existe, à priori, entre les quantités  $(\cdot)_n$  en début d'incrément et le déplacement incrémental  $\Delta \mathbf{u}$  d'une part et les quantités  $(\cdot)_{n+1}$  en fin d'incrément d'autre part, on définit à partir des lois constitutives du matériau un ensemble de lois incrémentales qui, pour prétendre modéliser le comportement, doivent répondre à certaines exigences [HUG 80][HUG 84][PIN 83][RUB 83][ORT 85]. Elles doivent redonner les lois constitutives dont elles sont issues lorsque  $\Delta \mathbf{u} \rightarrow 0$ , elles doivent conduire à des solutions stables et suffisamment précises, et enfin être objectives, c'est-à-dire permettre des rotations de corps rigide sans générer de contraintes fictives.

En intégrant les relations [7] et [9] entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , on obtient, compte tenu de [4] (on adopte une écriture matricielle) :

$$\begin{aligned} (\sigma_a)_{n+1} &= (\sigma_a)_n + C^e \left( \Delta \mathbf{d}_a - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_a} dt \right) \\ (\mathbf{k}_{ai})_{n+1} &= (\mathbf{k}_{ai})_n - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_{ai}} dt \end{aligned} \quad [11]$$

La définition des lois incrémentales dans la configuration isocline, présente un formalisme voisin de celui des petites perturbations [DEB 90]. On peut donc envisager, tout naturellement, la construction d'un schéma numérique en deux étapes pour le calcul des contraintes et des variables internes ; une première étape de prédiction élastique suivie d'une éventuelle correction plastique.

#### 3.1. Schéma prédicteur-correcteur

Lors de la prédiction, le comportement est supposé élastique. L'état du matériau est alors entièrement défini par les relations suivantes,  $(\sigma_a)^*_{n+1}$  désigne la contrainte d'essai :

$$\begin{aligned} (\sigma_a)^*_{n+1} &= (\sigma_a)_n + C^e \Delta \mathbf{d}_a \\ (\mathbf{k}_{ai})_{n+1} &= (\mathbf{k}_{ai})_n \end{aligned} \quad [12]$$

Dans le cas de grandes transformations, la principale difficulté est d'évaluer l'incrément de déformation  $\Delta \mathbf{d}_a$  en intégrant  $\dot{\mathbf{d}}_a = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}$  ( $\mathbf{a} = \mathbf{R}$ ) entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . La règle du mi-point généralisée, inconditionnellement stable pour  $\beta \geq 1/2$  [PIN 83], nous donne

$$\Delta \mathbf{d}_a = \mathbf{R}_{n+\beta}^T (\Delta t \mathbf{D}_{n+\beta}) \mathbf{R}_{n+\beta}; \quad \beta \in [0,1], \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n \quad [13]$$

Les quantités indicées  $n+\beta$  sont relatives à une configuration intermédiaire  $C_{n+\beta}$ . Pour les évaluer, on doit se donner un chemin d'interpolation pour la transformation géométrique sur l'incrément. Le plus simple étant le chemin linéaire où la position d'un point matériel est  $\mathbf{x}_{n+\beta} = (1-\beta)\mathbf{x}_n + \beta\mathbf{x}_{n+1}$  ( $\mathbf{x}_n$  et  $\mathbf{x}_{n+1}$  représentent les positions de ce point en début et en fin d'incrément). Dans ce cas, le choix de la configuration "centrale"  $\mathbf{x}_{n+1/2}$  permet d'assurer une précision à l'ordre deux.

En posant  $\mathbf{F}_\Delta = \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1$ , où  $\mathbf{F}_1 d\mathbf{x}_n = d\mathbf{x}_{n+1/2}$  et  $\mathbf{F}_2 d\mathbf{x}_{n+1/2} = d\mathbf{x}_{n+1}$ , la différence de longueur d'un segment matériel peut être caractériser sur un incrément par le tenseur  $\mathbf{M} = 1/2 (\mathbf{F}_2^T \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1^{-T} \mathbf{F}_1^{-1})$  dans la configuration  $C_{n+1/2}$ . Les composantes de  $\mathbf{M}$  dans la base matérielle contravariante  $\mathbf{g}_{n+1/2}^i \otimes \mathbf{g}_{n+1/2}^j$  ( $\mathbf{g}_{(n+1/2)i} = \partial \mathbf{x}_{n+1/2} / \partial \theta_i = 1/2 (\mathbf{g}_{ni} + \mathbf{g}_{(n+1)i})$  étant les vecteurs covariants associés ;  $\theta_i$  est un système de coordonnées curvilignes) sont :

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \theta_i} \mathbf{g}_{(n+1/2)j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \theta_j} \mathbf{g}_{(n+1/2)i} \right) \quad [14]$$

Ce sont ces composantes qui nous permettront d'approximer  $\Delta t \mathbf{D}_{n+1/2}$ . Dans ce qui suit, elles seront interpolées de façon à éviter le verrouillage en cisaillement transverse dans le cas d'un élément de coque à trois nœuds.

Si à l'issue de la phase de prédiction on vérifie  $f((\sigma_a)_{n+1}^*, (\mathbf{k}_{ai})_n) < 0$ , l'état des contraintes et des variables internes est alors définitif. Sinon, on le corrige en utilisant les relations suivantes :

$$(\sigma_a)_{n+1} = (\sigma_a)_{n+1}^* - \mathbf{C}^e \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_a} dt, \quad \left( (\mathbf{k}_{ai})_{n+1} = (\mathbf{k}_{ai})_n - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_{ai}} dt \right) \quad [15]$$

Pour le critère de Hill [HIL 50] associé à un écrouissage isotrope (variable  $k$ ) et à un écrouissage cinématique (variable  $\mathbf{k}$  et force thermodynamique  $\mathbf{X}$  telle que  $\dot{\mathbf{X}} = b(\dot{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^{p-1})$ ), les lois de comportement deviennent :

$$f(\sigma_a, \mathbf{X}, \sigma_0) = \frac{1}{2} \sigma_x^T \mathbf{H} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_0^2(k) \leq 0; \quad \sigma_x = \sigma_a - \mathbf{X} \quad [16]$$

$$\dot{\sigma}_a = \mathbf{C}^e (\dot{\mathbf{d}}_a - \dot{\lambda} \mathbf{H} \sigma_x) \quad \dot{\mathbf{k}} = \dot{\lambda} \mathbf{H} \sigma_x \quad \dot{k} = \dot{\lambda} \sqrt{\sigma_x^T \mathbf{H} \sigma_x}$$

avec  $\mathbf{H}$ , matrice d'anisotropie de Hill et  $\sigma_0$ , loi d'écrouissage isotrope.

Dans ce cas, les contraintes et les variables internes en fin d'incrément peuvent être calculées par l'un des schémas suivants ( $\delta \in [0,1]$ ) :

$$\begin{aligned}(\sigma_a)_{n+1} &= \mathbf{G}^{-1} \{ (\sigma_a)^*_{n+1} + \Delta\lambda (1 - \delta) \mathbf{C}^e \mathbf{H} (\sigma_x)_n + \Delta\lambda \delta \mathbf{C}^e \mathbf{H} \mathbf{X}_{n+1} \} \\ \mathbf{X}_{n+1} &= \mathbf{L}^{-1} \{ \mathbf{X}_n + b \Delta\lambda (1 - \delta) \mathbf{H} (\sigma_x)_n \} \\ \mathbf{k}_{n+1} &= \mathbf{k}_n + \Delta\lambda \mathbf{H} (\sigma_x)_{n+\delta} \\ k_{n+1} &= k_n + \Delta\lambda \sqrt{(\sigma_x)_{n+\delta}^T \mathbf{H} (\sigma_x)_{n+\delta}}\end{aligned} \quad [17]$$

où  $\mathbf{G} = \mathbf{I}_4 + \Delta\lambda \delta \mathbf{C}^e \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{I}_4 + b \Delta\lambda \delta \mathbf{H}$  ( $\mathbf{I}_4$  tenseur identité d'ordre 4) et  $(\sigma_x)_{n+\delta} = (1 - \delta) (\sigma_x)_n + \delta (\sigma_x)_{n+1}$ . L'accroissement incrémental  $\Delta\lambda$  du multiplicateur plastique est calculé en forçant la condition de chargement  $f((\sigma_a)_{n+1}, (\mathbf{k}_{ai})_{n+1}) = f(\Delta\lambda) = 0$  en fin d'incrément. Cette condition fournit une équation non-linéaire que l'on résout par une méthode de Newton locale [BOU 94]. A l'itération  $j+1$  :

$$\Delta\lambda_{j+1} = \Delta\lambda_j - f(\Delta\lambda_j) \left( \frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda} \right)_j^{-1} \quad [18]$$

Le plus intéressant des schémas [17] sera, comme nous le verrons plus loin, celui qui permettra le meilleur compromis entre précision et simplicité de mise en œuvre.

#### 4. Intégration dans un contexte de coques spatiales

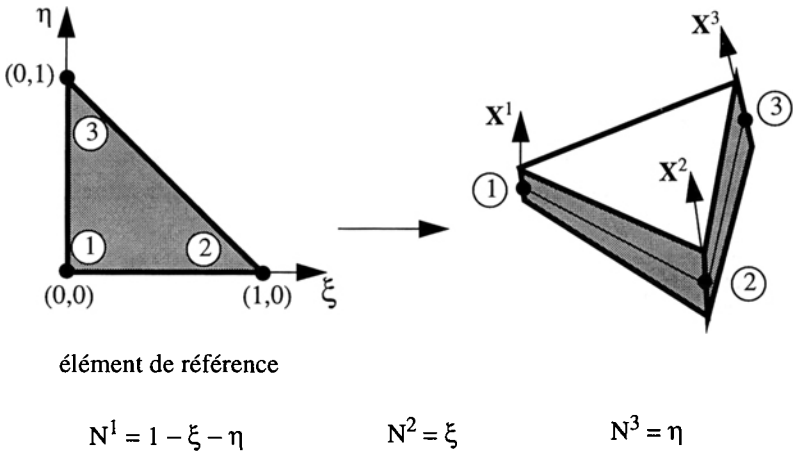
##### 4.1. Éléments finis de coque $C^0$

Les algorithmes proposés prennent en compte la formulation d'un élément fini de coque intégrant une interpolation mixte pour pallier le problème de verrouillage en cisaillement transverse [BOI 92][BOI 93][BOI 94]. Cet élément est basé sur une cinématique de Ahmad [AHM 71]. La position  $\mathbf{x}(M)$  d'un point de la coque est défini à partir de la position du point correspondant sur la surface moyenne et de sa position sur une pseudo-normale  $\mathbf{X}$ . Des pseudo-normales  $\mathbf{X}^i$  sont définies en chaque nœud (fig. 1) afin d'assurer la continuité de la description sur les côtés de l'élément.  $\mathbf{x}(M)$  est interpolé par :

$$\mathbf{x}(M) = \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \bar{\mathbf{x}}^i + \zeta \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} \mathbf{X}^i; \quad \zeta \in [-1, 1] \quad [19]$$

$\bar{\mathbf{x}}^i$  représentent la position des nœuds et  $h^i$ , l'épaisseur au nœud  $i$ .  $N^i$  sont les fonctions d'interpolation linéaires classiques.





**Figure 1.** Transformation géométrique d'un élément de coque à trois nœuds

Une base covariante (  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  ) au point M est donnée par :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \qquad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \qquad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \qquad [20]$$

Le déplacement  $\mathbf{u}$  de M est la différence entre ses positions courante et initiale [19]. Si les rotations restent faibles sur chaque incrément de chargement,  $\mathbf{u}(M)$  est interpolé par :

$$\mathbf{u}(M) = \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \bar{\mathbf{u}}^i + \zeta \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} \theta^i \wedge \mathbf{X}_0^i \qquad [21]$$

$\bar{\mathbf{u}}^i$  représentent les déplacements des nœuds,  $\mathbf{X}_0^i$ , la pseudo-normale initiale au nœud i et  $\theta^i$ , le vecteur rotation au nœud i. Un repère orthonormé (  $\mathbf{V}_{01}^i, \mathbf{V}_{02}^i, \mathbf{V}_{03}^i$  ) est défini en chaque nœud (  $\mathbf{V}_{03}^i = \mathbf{X}_0^i$  ) de sorte que  $\theta^i = \theta_1^i \mathbf{V}_{01}^i + \theta_2^i \mathbf{V}_{02}^i$ . Le mouvement de l'élément est décrit à l'aide de cinq degrés de liberté par nœud. Trois déplacements et deux rotations.

Dans le cadre d'une approche en déplacements, un élément fini  $\mathbf{C}^0$  construit directement à partir des interpolations géométrique [19] et cinématique [21], présente de très mauvaises performances en raison d'un phénomène connu sous le nom de verrouillage. On peut distinguer, pour les éléments de coques, le verrouillage en membrane et le verrouillage en cisaillement transverse. Le premier apparaît lorsque le plan moyen est courbe. Le verrouillage en cisaillement transverse est d'autant plus marqué que l'interpolation est de

faible degré. Pour un élément à trois nœuds à interpolation linéaire, il est très important et conduit au fait que l'élément ne fonctionne pas quelle que soit l'épaisseur de la coque.

Pour interpoler efficacement les déformations [14] ( $\theta_1 = \xi$ ,  $\theta_2 = \eta$  et  $\theta_3 = \zeta$ ), les composantes dans le plan sont interpolées classiquement à partir de [21]. Pour les composantes de cisaillement, une interpolation mixte à partir de leurs valeurs aux nœuds est utilisée :

$$M_{k3} = \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) M_{k3}^i \quad (k = 1 \text{ ou } 2) \quad [22]$$

On impose que le cisaillement reste constant le long des côtés de l'élément. On en déduit une matrice d'interpolation modifiée des déformations telle que  $M_{ij} = (\bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}_n^e)_{ij}$  [BOU 94],  $\Delta \mathbf{u}_n^e$  est le vecteur des déplacements nodaux élémentaire. Les composantes de  $\Delta \mathbf{d}_a$  [12] dans le repère d'anisotropie initial  $\mathbf{A}_{0i}$  sont identiques à celles de  $\mathbf{M}$  dans  $\mathbf{A}_{(n+1/2)i} = \mathbf{R}_{n+1/2} \mathbf{A}_{0i}$ .

#### 4.2. Actualisation des directions d'anisotropie ( $\mathbf{A}_{0i}, \mathbf{A}_i$ )

La cinématique de Ahmad fait intervenir une pseudo-normale et donc une pseudo-courbure bien que la surface moyenne de l'élément soit plane. Cette approche tient compte du cisaillement transverse. Si l'on construit un repère orthonormé  $(\mathbf{e}_{0i}, \mathbf{e}_{ti})$  ( $i = 1, 2$  et  $3$ ) en un point quelconque de l'épaisseur à partir d'une direction matérielle que l'on suit dans son mouvement (fig. 2), on obtient pour le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  la forme générale suivante si  $(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1)$  est cette direction :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ 0 & F_{22} & F_{23} \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad [23]$$

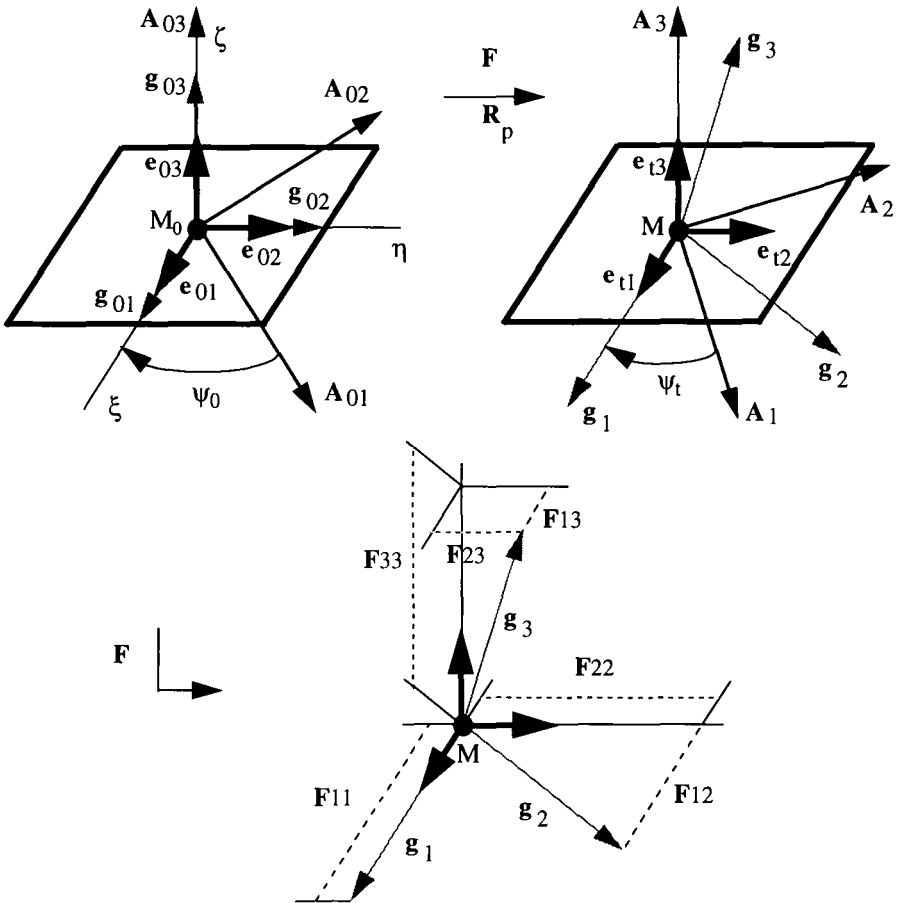
Les vecteurs  $\mathbf{e}_{ti}$  (resp.  $\mathbf{e}_{0i}$ ) sont tels que

$$\mathbf{e}_{t1} = \frac{\mathbf{g}_1}{\|\mathbf{g}_1\|} \quad \mathbf{e}_{t3} = \frac{\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2\|} \quad \mathbf{e}_{t2} = \mathbf{e}_{t3} \wedge \mathbf{e}_{t1} \quad [24]$$

Si l'on s'en tient à [23], des grandeurs comme la rotation propre  $\mathbf{R}$  ne s'explicitent pas simplement. D'autre part, l'actualisation des directions d'anisotropie par  $\mathbf{R}$  ne permet pas une prise en compte directe des caractéristiques du comportement dans l'épaisseur de la coque (contrainte normale nulle) puisque, en général, la direction  $\mathbf{A}_3$  ne reste pas perpendiculaire au plan  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ . Pour ce faire, on peut considérer la restriction

$\mathbf{F}_p = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_0^1 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_0^2$  de  $\mathbf{F}$  à ce plan. Un vecteur  $d\mathbf{x}_0$  du plan  $(\mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{02})$  se transforme en un vecteur  $d\mathbf{x}$  du plan  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{F}_p d\mathbf{x}_0 = (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_0^1 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_0^2) \cdot (dx_0^1 \mathbf{g}_{01} + dx_0^2 \mathbf{g}_{02}) \\ &= dx_0^1 \mathbf{g}_1 + dx_0^2 \mathbf{g}_2 \end{aligned} \quad [25]$$



**Figure 2.** Travailler dans des repères liés à une direction matérielle, permet d'assurer l'objectivité des différents schémas numériques

Ainsi, en effectuant la décomposition polaire sur  $\mathbf{F}_p$ , on obtient une forme plane pour  $\mathbf{R}_p$  qui conserve toujours  $A_3$  perpendiculaire à  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ . L'orientation courante  $\psi_t$  des

directions d'anisotropie par rapport à  $\mathbf{e}_{ti}$  est alors liée à l'orientation initiale  $\psi_0$  et à un angle  $\alpha$  unique:  $\psi_t = \psi_0 - \alpha$ . On peut trouver dans [DOG 88] une forme intrinsèque pour  $\alpha$  :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{F_{p12}}{F_{p11} + F_{p22}} \right) \quad [26]$$

avec

$$\begin{aligned} F_{p11} &= (\mathbf{g}_1 \mathbf{e}_{t1}) (\mathbf{g}_0^1 \mathbf{e}_{01}) & F_{p22} &= (\mathbf{g}_2 \mathbf{e}_{t2}) (\mathbf{g}_0^2 \mathbf{e}_{02}) \\ F_{p12} &= (\mathbf{g}_1 \mathbf{e}_{t1}) (\mathbf{g}_0^1 \mathbf{e}_{02}) + (\mathbf{g}_2 \mathbf{e}_{t1}) (\mathbf{g}_0^2 \mathbf{e}_{02}) \end{aligned} \quad [27]$$

Par cette démarche, on suppose que le cisaillement dans l'épaisseur de la coque n'a pas d'effet sur l'orientation du repère d'anisotropie. On vérifie que lorsque l'épaisseur est très faible devant les dimensions transverses,  $F_{13}$  et  $F_{23}$  restent négligeables devant les autres composantes non nulles de  $\mathbf{F}$ . C'est en particulier le cas pour les applications envisagées dans cette étude.

## 5. Analyse de précision

Afin d'analyser la précision des algorithmes [17] en grandes transformations, on considère un essai de glissement simple [BOU 94]. L'évolution des contraintes dans le repère d'orthotropie est présentée figure 3 pour une orientation initiale de  $0^\circ$  du repère d'orthotropie (les résultats suivants se généralisent à d'autres orientations initiales et à d'autres lois d'écroutissage).

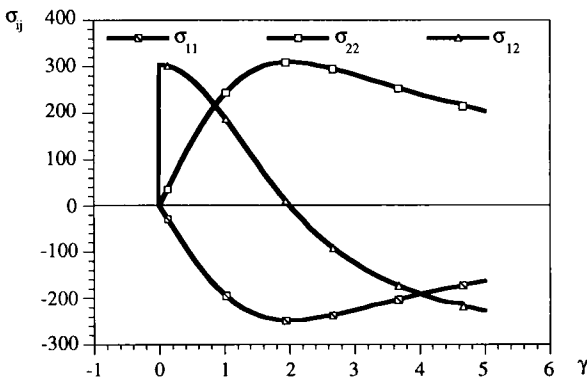


Figure 3. Evolution des contraintes dans le repère d'orthotropie

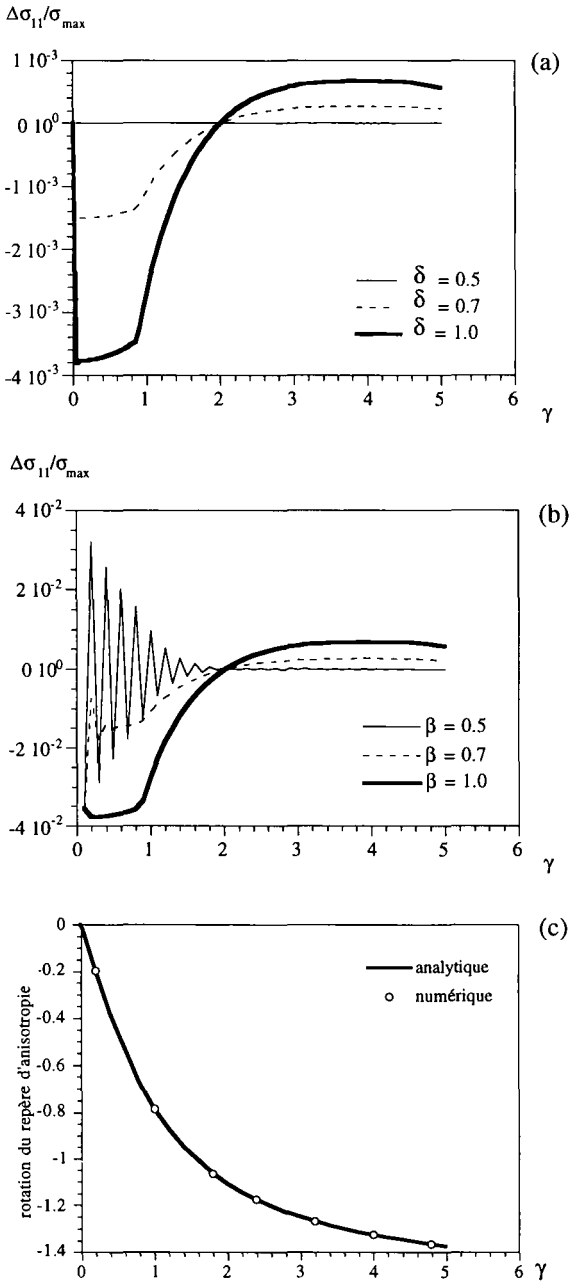


Figure 4. Précision du schéma numérique et évolution du repère d'orthotropie

On constate, pour un glissement allant jusqu'à 200 %, une forte variation des contraintes associée principalement à la rotation des directions d'orthotropie par rapport au glissement (fig. 4.c). En particulier, à 200 % ces contraintes se réduisent aux seules contraintes normales. Au-delà de cette valeur l'orientation du repère d'orthotropie change de façon beaucoup moins importante et tend à se stabiliser. La variation des contraintes est alors plus le fait des déformations.

On s'intéresse à l'influence du paramètre d'intégration  $\delta \geq 1/2$  et à celle du glissement incrémental  $\Delta\gamma = \gamma/N$ ,  $N$  étant le nombre d'incrément. En particulier, on considère les valeurs  $\delta = 0,5, 0,7$  et  $1$  et  $\Delta\gamma = 0,01$  et  $0,1$ . L'erreur absolue  $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{exact}} - \sigma_{ij}^{\text{numé}}$  est rapportée à la contrainte  $\sigma_{\max} = \text{Max}(|\sigma_{11}^{\text{exact}}|, |\sigma_{22}^{\text{exact}}|, |\sigma_{33}^{\text{exact}}|)$ .

Le choix  $\delta = 0,5$  conduit aux résultats les plus précis pour  $\Delta\gamma = 0,01$  (fig. 4.a). Par contre pour  $\Delta\gamma = 0,1$  (fig. 4.b) la précision est beaucoup moins bonne et présente des fluctuations qui disparaissent lorsque le glissement devient important. En particulier, l'erreur tend vers zéro au-delà de 200 %. Ce qui laisse à penser que le choix  $\delta = 0,5$  devient sensible à la rotation du repère d'orthotropie lorsque le glissement incrémental  $\Delta\gamma$  augmente. Le choix  $\delta = 1$  (méthode implicite d'Euler arrière) est celui qui conduit aux résultats les moins précis. Toutefois, l'erreur est dans ce cas du même ordre de grandeur que pour la valeur intermédiaire  $\delta = 0,7$ . Ce qui est intéressant compte tenu de la forme simple que prennent dans ce cas les relations [17]. L'erreur sur la contrainte normale  $\sigma_{11}$  (il en est de même pour  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ ) est maximale au début du glissement et va en diminuant jusqu'à s'annuler pour un glissement de 200 %. Pour cette valeur particulière, l'état des contraintes se simplifie en se réduisant aux seules contraintes normales. Au-delà, l'erreur augmente mais se stabilise assez vite. En fait la précision est d'autant plus grande que la rotation du repère d'orthotropie tend à simplifier l'état des contraintes.

Parmi les différents schémas proposés, la méthode implicite d'Euler arrière semble la plus intéressante pour une application à la simulation des procédés de mise en forme. Elle permet de simplifier sensiblement l'algorithme de calcul des contraintes et des variables internes et sa précision reste satisfaisante (même par rapport à la méthode semi-implicite), surtout lorsque l'on sait que la taille des incréments est limitée pour la gestion des différentes non-linéarités de contact et de comportement. Dans le cas d'un écrouissage isotrope uniquement, les équations [17] deviennent :

$$\begin{aligned} (\sigma_a)_{n+1} &= \mathbf{G}^{-1} (\sigma_a)_{n+1}^* \quad \mathbf{G} = \mathbf{I}_4 + \Delta\lambda \mathbf{C}^e \mathbf{H} \\ k_{n+1} &= k_n + \Delta\lambda \sqrt{(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H} (\sigma_a)_{n+1}} \end{aligned} \quad [28]$$

L'accroissement du multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$  est obtenu par le schéma itératif [18] avec ( $\sigma'_0 = \partial\sigma_0/\partial k_{n+1}$ )

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda} = - [\mathbf{G}^{-1} (\mathbf{C}^e \mathbf{H}) \mathbf{G}^{-1} (\sigma_a)_{n+1}^*]^T \mathbf{H} [\mathbf{G}^{-1} (\sigma_a)_{n+1}^*] - \frac{\sigma_0^2 \sigma'_0}{1 - \Delta\lambda \sigma'_0} \quad [29]$$

Ces relations sont identiques à celles proposées dans [DEB 90] en petites perturbations. Le schéma implicite y est d'ailleurs recommandé pour sa précision.

Pour conserver la convergence de la méthode de Newton dans le cadre d'une approche quasi-statique du problème d'équilibre, il est préconisé d'utiliser un opérateur tangent cohérent avec l'algorithme de calcul des contraintes [SIM 85][SIM 86]. En différenciant les lois incrémentales, on obtient pour le critère orthotrope de Hill

$$d(\sigma_a)_{n+1} = \mathbf{G}^{-1} \{ \mathbf{C}^e d(\mathbf{d}_a)_{n+1} - d(\Delta\lambda) \mathbf{C}^e \mathbf{H}(\sigma_a)_{n+1} \}$$

$$dk_{n+1} = d(\Delta\lambda) \sqrt{(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H}(\sigma_a)_{n+1}} + \Delta\lambda \frac{(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H} d(\sigma_a)_{n+1}}{\sqrt{(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H}(\sigma_a)_{n+1}}} \quad [30]$$

Pour déterminer  $d(\Delta\lambda)$  on utilise la condition de consistance suivante :

$$df = (\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H} d(\sigma_a)_{n+1} - \sigma_0(k_{n+1}) \sigma'_0 dk_{n+1} = 0 \quad [31]$$

On en déduit

$$d(\Delta\lambda) = \frac{(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^e d(\mathbf{d}_a)_{n+1}}{(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^e \mathbf{H}(\sigma_a)_{n+1} + \frac{\sigma_0^2(k_{n+1}) \sigma'_0}{1 - \Delta\lambda \sigma'_0}} \quad [32]$$

L'opérateur tangent cohérent  $\mathbf{C}^{ep}$  tel que

$$d(\sigma_a)_{n+1} = \mathbf{C}^{ep} d(\mathbf{d}_a)_{n+1} \quad [33]$$

est alors

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^e \mathbf{H}(\sigma_a)_{n+1} [(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^e]^T}{(\sigma_a)_{n+1}^T \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^e \mathbf{H}(\sigma_a)_{n+1} + \frac{\sigma_0^2(k_{n+1}) \sigma'_0}{1 - \Delta\lambda \sigma'_0}} \quad [34]$$

Dans le cas d'une approche lagrangienne réactualisée du problème d'équilibre, on trouvera dans [BOU 94] le transport de cet opérateur dans la configuration de référence en début d'incrément.

## 6. Applications

Pour valider les modèles mécanique et numérique proposés, plusieurs exemples concernant les grandes transformations des coques minces sont présentés. En particulier des exemples d'emboutissage guidé et non guidé sont traités dans cette partie. Le comportement de la tôle y est supposé isotrope, isotrope transverse ou orthotrope. Dans tous les cas, les

résultats obtenus sont comparés à des résultats obtenus avec d'autres codes de calcul ou à des résultats expérimentaux. Le plus souvent le comportement est validé avec prise en compte des conditions de contact et de frottement. Pour finir, l'emboutissage guidé d'une pièce cylindrique de révolution est traité afin de mettre en évidence l'influence de l'anisotropie dans le plan de la tôle.

La modélisation proposée a été utilisée pour des approches quasi-statique implicite et dynamique implicite-explicite [BOU 96] des problèmes d'emboutissage. Les exemples d'emboutissage guidé ont été réalisés en utilisant l'approche dynamique.

### 6.1. Emboutissage d'un flan circulaire par un poinçon carré

Cet exemple a été proposé dans [PER 92], un flan circulaire encastré sur sa périphérie est mis en forme à l'aide d'un poinçon carré (fig. 5). Le quart du flan est discrétisé en 448 éléments triangulaires (1 064 éléments ont été utilisés dans [PER 92]). Les résultats en effort sur le poinçon et en déformations sont présentés figures 7 et 8.

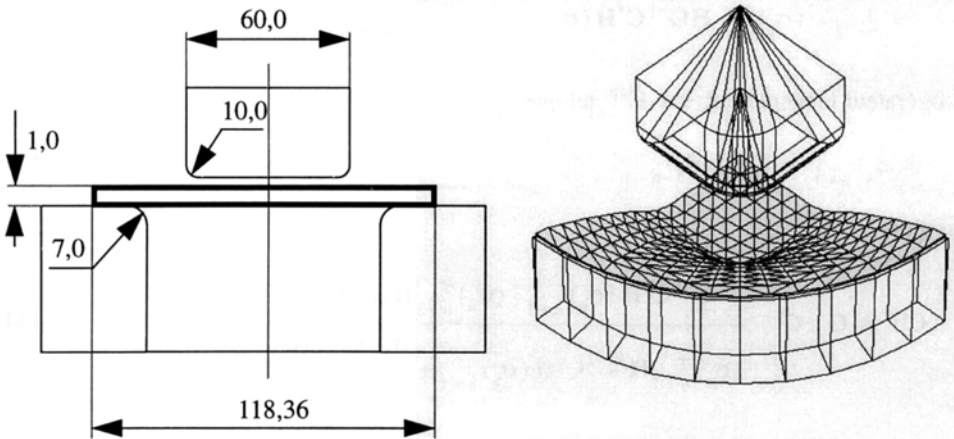


Figure 5. Emboutissage non guidé d'un flan circulaire par un poinçon carré

Le comportement est isotrope ou isotrope transverse avec deux degrés d'anisotropie ( $A_1$  et  $A_2$ ), les caractéristiques matérielles sont données figure 6. La variation de l'épaisseur dans les "coins de valise" dépend du degré d'anisotropie du matériau. Les courbes de charge (fig. 7) peuvent alors atteindre des niveaux très différents selon que l'on utilise un comportement isotrope ou anisotrope. Le coefficient de frottement entre la tôle et l'outillage est égal à 0,05.



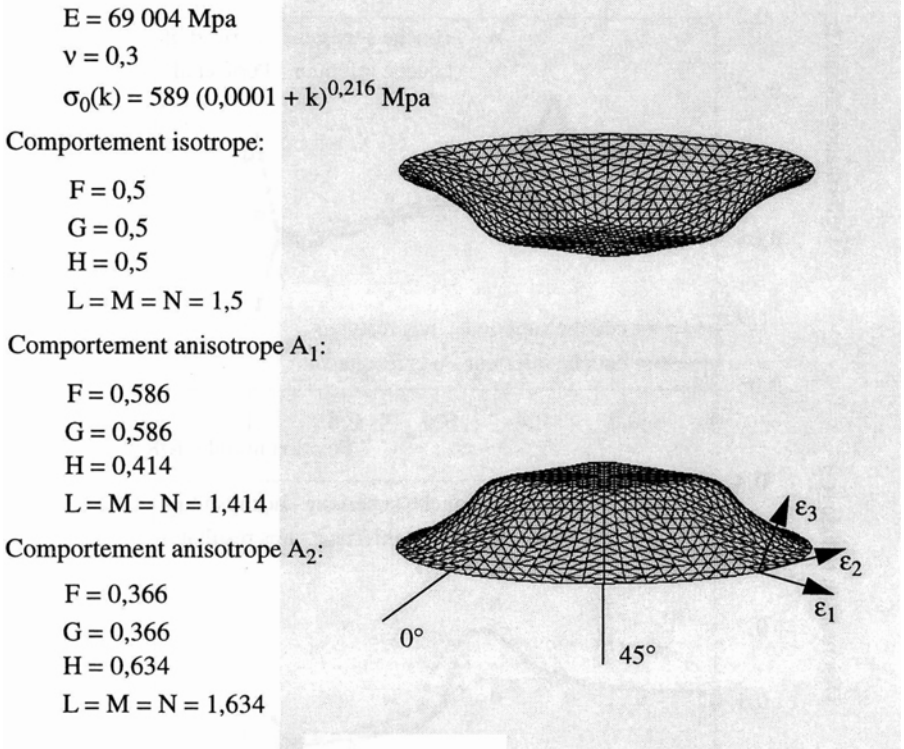


Figure 6. Maillage déformé pour une descente du poinçon de 22,5 mm

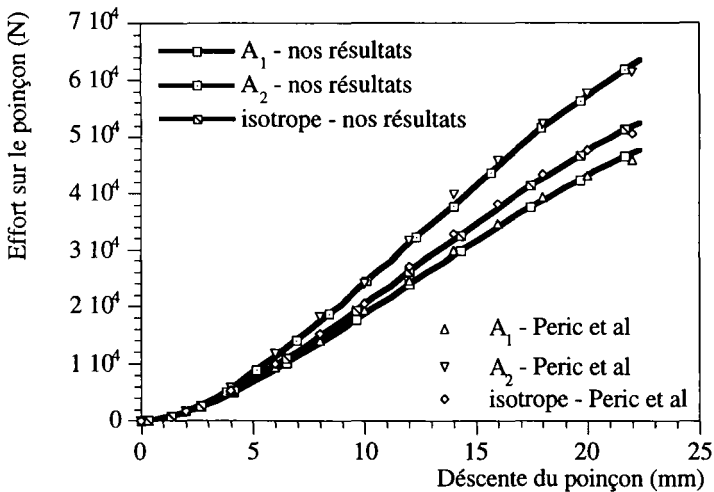


Figure 7. Effort sur le poinçon pour les différents comportements

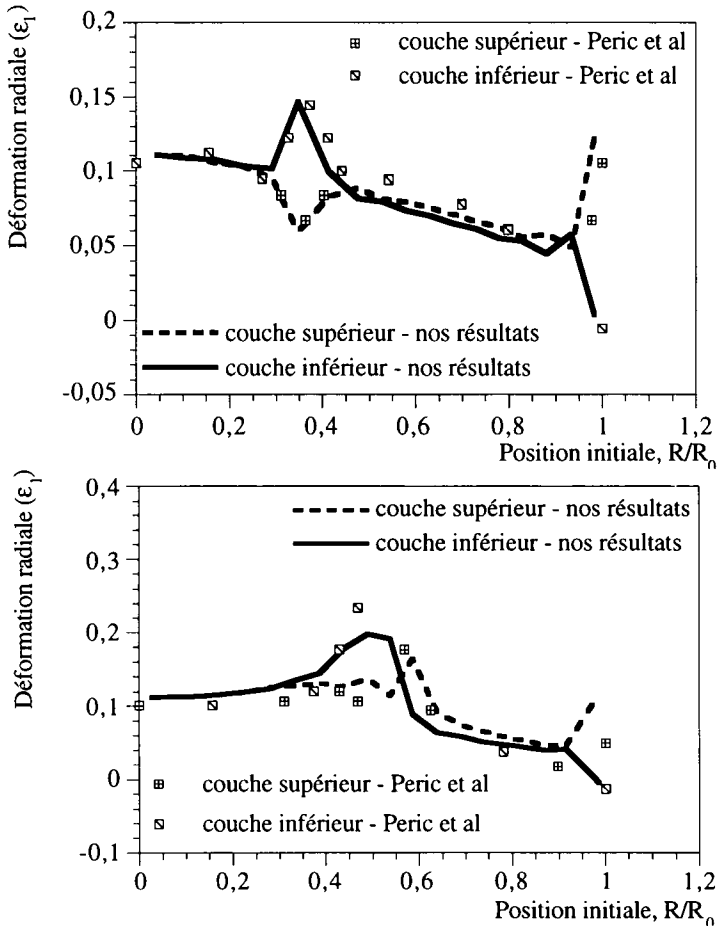


Figure 8. Déformations radiales dans les directions  $0^\circ$  et  $45^\circ$  pour Al

### 6.2. Emboutissage d'un flan circulaire par un poinçon hémisphérique

Cet essai a été réalisé par la Société Sollac pour les constructeurs automobiles Renault et PSA dans le but de valider l'implémentation du comportement des tôles d'emboutissage. Un flan circulaire encastré sur son contour est mis en forme à l'aide d'un poinçon hémisphérique (fig. 9). Le quart du flan est discrétisé en 600 éléments triangulaires. Les résultats en effort sur le poinçon sont comparés aux résultats expérimentaux donnés dans [PSA 87-89]. Le matériau est une nuance d'acier XES, ses caractéristiques sont reportées sur la figure 10. Le coefficient de frottement entre la tôle et l'outillage est égal à 0,15, ce qui correspond à une lubrification standard.

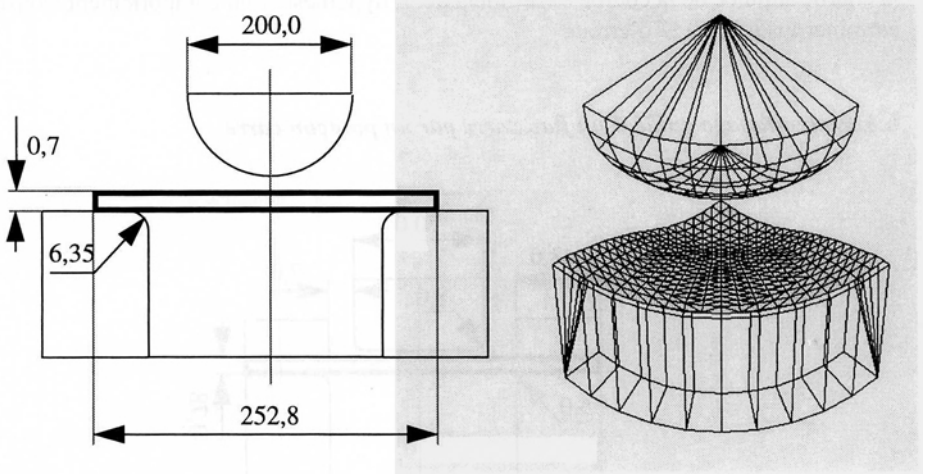


Figure 9. Emboutissage d'un flan circulaire orthotrope

$$E = 208\,000 \text{ Mpa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\sigma_0(k) = 545 (0,003 + k)^{0,209} \text{ MPa}$$

$$F = 0,287 \quad H = 0,643$$

$$G = 0,357 \quad L = M = N = 1,360$$

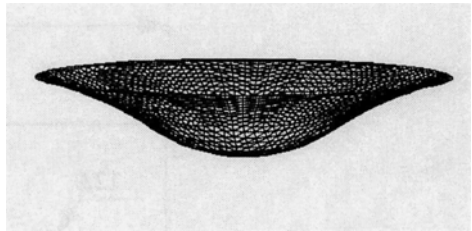


Figure 10. Maillage déformé pour 50 mm de descente du poinçon

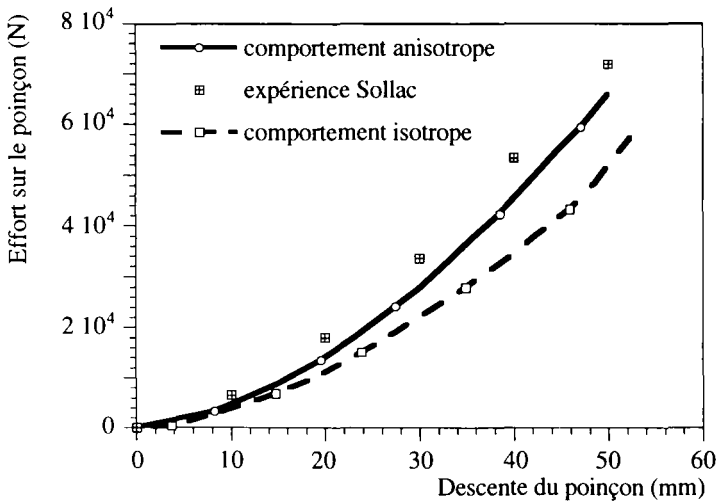
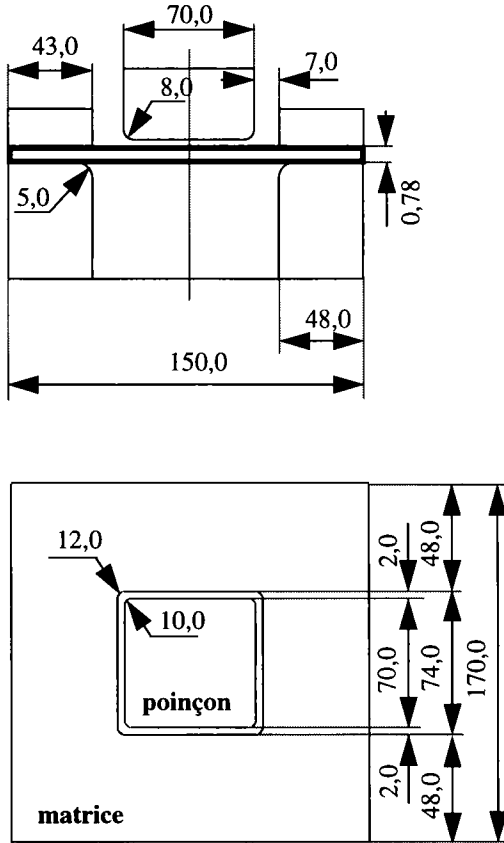


Figure 11. Evolution de l'effort sur le poinçon

La prise en compte de l'anisotropie du comportement permet de rapprocher sensiblement la courbe simulée de la courbe expérimentale. L'hypothèse d'un comportement isotrope peut entraîner jusqu'à 20 % d'erreur.

6.3. Emboutissage guidé d'un flan carré par un poinçon carré



$$E = 206\,000 \text{ Mpa} \quad \nu = 0,3$$

$$\sigma_0(k) = 567,29 (0,007127 + k)^{0,2637} \text{ Mpa}$$

$$F = 0,283 \quad G = 0,358 \quad H = 0,642$$

$$L = M = N = 1,288$$

Figure 12. Emboutissage d'une boîte carrée

Cet exemple a été proposé par les organisateurs de la conférence Numisheet'93 [NUM 93] dans le but de tester les performances des logiciels de simulation de l'emboutissage en comparaison avec des résultats expérimentaux. Un flan carré est embouti sous serre-flan à l'aide d'un poinçon carré (fig. 12). Seul le quart du flan est traité, le maillage est constitué de 1 250 éléments triangulaires. Les résultats en déformations suivant l'épaisseur et en avalement sont comparés, pour 40 mm de descente du poinçon, aux résultats expérimentaux obtenus par une dizaine de participants à la conférence.

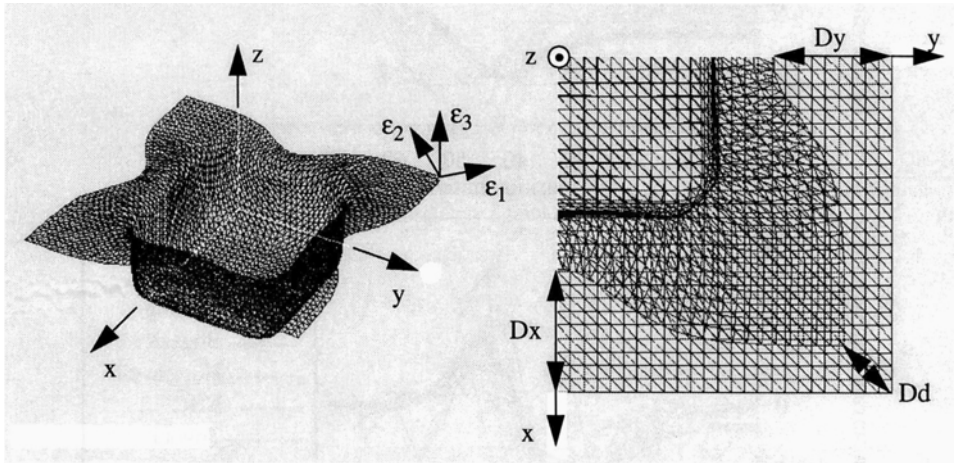
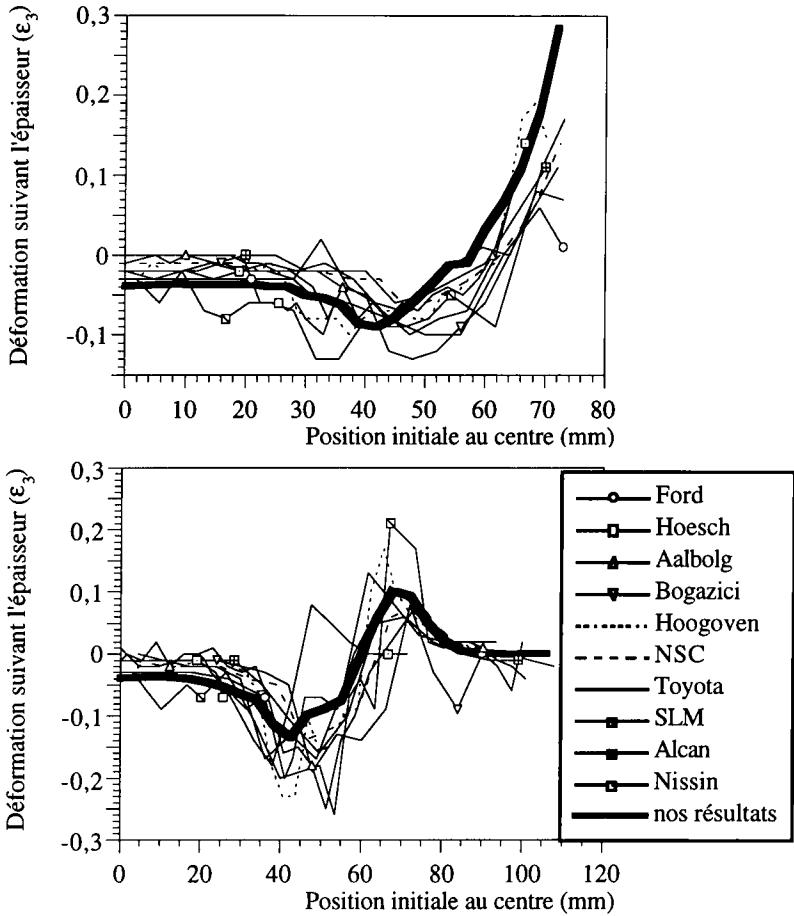


Figure 13. Maillage déformé pour une profondeur de pièce de 40 mm

	Dx (mm)	Dd (mm)	Dy (mm)		Dx (mm)	Dd (mm)	Dy (mm)
Ford	26,75	15,00	26,75	NSC	28,40	14,60	28,10
Hoesch	27,80	15,10	26,90	Toyota	27,50	14,80	27,90
Aalbolg	27,95	15,86	29,11	SLM	29,60	16,31	29,58
Bogazici	28,10	15,10	28,50	Alcan	27,89	15,90	27,58
Hoogoven	28,50	15,38	28,00	nos résultats	28,93	16,08	27,65

Tableau 1. Avalement sous le serre-flan

La tôle est orthotrope et ses caractéristiques sont données sur la figure 12, l'orientation initiale des directions d'orthotropie est à  $0^\circ$  (la direction de laminage est confondue avec l'axe Ox). Le coefficient de frottement entre la tôle et l'outillage est égal à 0,144, l'effort serre-flan à 19,6 kN et la masse volumique à  $7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ .



**Figure 14.** Déformation suivant l'épaisseur selon  $x$  et la diagonale

En conservant l'outillage de la figure 12, on considère à présent un flan carré de 150 mm de côtés et de 0,67 mm d'épaisseur. Ses caractéristiques matérielles sont  $E = 210\ 000$  MPa et  $\nu = 0,3$ ,  $F = 0,317$ ,  $G = 0,346$ ,  $H = 0,654$  et  $L = M = N = 1,227$ . L'écroutissage suit une loi de type Hollomon telle que  $\sigma_0(k) = 533(k)^{0,189}$  MPa, la limite élastique est égale à 224 MPa. L'orientation initiale des directions d'anisotropie est à  $0^\circ$  et le coefficient de frottement entre la pièce et l'outillage est de 0,144.

Les résultats en avalement (tab. 2), en déformations principales (tab. 3), en déformations suivant l'épaisseur (tab. 4) et en effort poinçon (tab. 5) sont comparés, pour une profondeur de pièce de 26 mm, à des résultats expérimentaux et aux résultats obtenus avec le logiciel OPRIS [BOU 95]. On utilise deux efforts serre-flan, le premier est égal à 17,6 kN, le second à 67,7 kN.

effort = 17.6 kN	Dx (mm)	Dd (mm)	Dy (mm)	effort = 67.7 kN	Dx (mm)	Dd (mm)	Dy (mm)
expérience	16,60	9,05	17,10	expérience	16,10	6,08	17,20
OPTRIS	15,00	9,47	14,80	OPTRIS	12,20	9,31	11,42
nos résultats	13,72	8,75	13,92	nos résultats	14,06	8,81	14,32

**Tableau 2.** *Avalement sous le serre-flan*

effort = 17.6 kN	$\epsilon_1$ min	$\epsilon_1$ max	$\epsilon_2$ min	$\epsilon_2$ max	effort = 67.7 kN	$\epsilon_1$ min	$\epsilon_1$ max	$\epsilon_2$ min	$\epsilon_2$ max
expérience	0,00	0,57	-0,47	0,03	expérience	0,00	0,72	-0,50	0,05
OPTRIS	0,00	0,48	-0,51	0,01	OPTRIS	0,00	0,47	-0,45	0,03
nos résultats	0,00	0,43	-0,45	0,07	nos résultats	0,00	0,44	-0,48	0,07

**Tableau 3.** *Déformations logarithmiques principales*

effort = 17.6 kN	$\epsilon_3$ min	$\epsilon_3$ max	épai min	épai max	effort = 67.7 kN	$\epsilon_3$ min	$\epsilon_3$ max	épai min	épai max
expérience	-0,21	-	0,54	-	expérience	-0,27	-	0,51	-
OPTRIS	-0,07	0,11	0,63	0,75	OPTRIS	-0,11	0,07	0,59	0,71
nos résultats	-0,17	0,08	0,57	0,73	nos résultats	-0,15	0,08	0,57	0,73

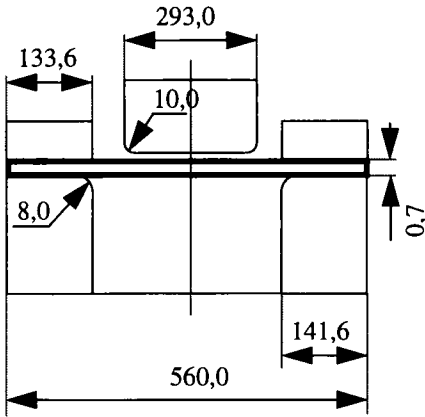
**Tableau 4.** *Déformations normales et épaisseurs sur la diagonale*

effort = 17.6 kN	effort poinçon (kN)	effort = 67.7 kN	effort poinçon (kN)
expérience	52,90	expérience	59,70
OPTRIS	49,40	OPTRIS	64,10
nos résultats	54,81	nos résultats	51,90

**Tableau 5.** *Effort poinçon maximal*

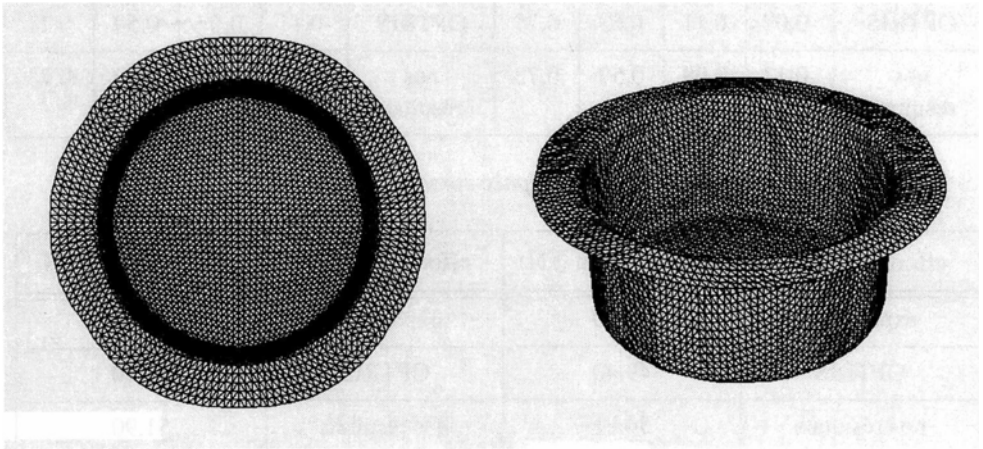
**6.4. Emboutissage guidé d'une pièce cylindrique de révolution**

L'apparition de "cornes" lors de l'emboutissage d'un flan circulaire par un poinçon cylindrique de révolution est une conséquence bien connue de l'anisotropie dans le plan de la tôle. Le but de cet essai est d'illustrer ce phénomène pour une nuance d'acier extra doux XES dont les caractéristiques sont données figure 15. Du fait de la symétrie de l'exemple, on ne traite que le quart du flan, le maillage est constitué de 2 400 éléments triangulaires. Le coefficient de frottement est égal 0,05, l'effort serre-flan à 210 kN et la masse volumique à  $7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ .



- E = 208 000 Mpa
- v = 0,3
- $\sigma_0(k) = 545 (0,003 + k)^{0,209} \text{ MPa}$
- F = 0,287
- G = 0,357
- H = 0,643
- L = M = N = 1,360

**Figure 15. Emboutissage d'une pièce cylindrique de révolution**



**Figure 16. Maillage déformé pour une profondeur de pièce de 145 mm**



## 7. Conclusion

La description correcte du comportement matériel est un point important pour les analyses numériques des structures minces en transformations finies. Dans le cas de l'emboutissage, la prise en compte du caractère anisotrope des tôles peut influencer sensiblement le résultat d'une simulation. Pour modéliser cette anisotropie dans le cadre d'une approche phénoménologique, plusieurs travaux ont été menés ces dix dernières années. Ils s'inspirent pour la plupart de la théorie des milieux à directeurs de Mandel et ont porté essentiellement sur la définition d'une loi d'évolution pour les directions d'anisotropie. Dans notre étude, un choix particulier a été fait pour actualiser ces directions. Ce choix, dont une interprétation a été donnée dans le cadre de la théorie de Mandel, permet une représentation qualitative satisfaisante du comportement en présence de grands déplacements. L'écriture des lois constitutives dans la configuration isocline associée, a conduit à un formalisme voisin de celui de la théorie linéaire. Ceci a permis la construction d'un schéma numérique basé sur les schémas développés en petites perturbations. Ce schéma est composé d'une prédiction élastique et d'une éventuelle correction plastique. Au cours de la première étape, la spécificité d'un nouvel élément fini de coque à trois nœuds, pour pallier le problème de verrouillage en cisaillement transverse, a été prise en compte. L'actualisation des directions d'anisotropie dans ce contexte a été faite de sorte que les caractéristiques mécaniques dans le plan moyen de la coque et suivant l'épaisseur soient directement distinguées. Pour effectuer la correction plastique, une famille d'algorithmes a été proposée. Une analyse de précision dans le cas de grandes déformations et de grandes rotations a mis en évidence l'intérêt du schéma implicite d'Euler-arrière dans le cas du critère orthotrope de Hill. Les exemples présentés montrent que le modèle proposé permet des prévisions satisfaisantes dans plusieurs situations. Dans le cas de l'emboutissage guidé d'un flan carré orthotrope par un poinçon carré, les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Cet essai a été effectué dans les conditions d'une opération d'emboutissage avec avalement. Dans le cas des exemples à flan bloqué, qui sont des exemples très contraints, nous avons voulu illustrer l'influence de l'anisotropie sur la répartition des épaisseurs et sur la prévision de l'effort sur le poinçon. Il apparaît clairement que ces résultats sont sensibles à l'hypothèse faite sur le comportement.

## Remerciements

Nous tenons à remercier le constructeur automobiles Renault pour avoir supporté financièrement cette étude qui a été réalisée au sein de l'équipe "Modélisation et Mise en Forme des Matériaux" que dirige le Professeur Jean-Claude Gelin.

## 8. Bibliographie

- [AHM 71] AHMAD S., IRONS B. M., ZIENCKIEWICZ O. C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 2, 1970, p. 419-451.
- [BOI 92] BOISSE Ph., DANIEL J. L., GELIN J. C., A simple isoparametric three-node shell finite element, *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 6, 1992, p. 1263-1273.

- [BOI 93] BOISSE Ph., DANIEL J. L., GELIN J. C., Élément fini de coque à trois nœuds pour le calcul des structures minces en grandes déformations, *Revue Européenne des Eléments finis*, Vol. 2, No. 2, 1993, p. 179-209, Editions Hermès, Paris.
- [BOI 94] BOISSE Ph., DANIEL J. L., GELIN J. C., A C0 three-node shell element for non linear structural analysis, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 37, 1994, p. 2339-2364.
- [BOU 94] BOUBAKAR M. L., Contribution à la simulation numérique de l'emboutissage des tôles. Prise en compte du comportement élastoplastique anisotrope, Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, Spécialité Sciences pour l'Ingénieur.
- [BOU 95] BOUBAKAR M. L., GELIN J. C., JOANNIC D., PAQUIER P., PERRIN S., Simulation du retour élastique, modélisation et simulation du comportement orthotrope des tôles minces et remaillage adaptatif en emboutissage, Rapport LMA/M2FM n° 05/95, 1995.
- [BOU 96] BOUBAKAR L., BOULMANE L., GELIN J. C., Finite element modelling of the stamping of anisotropic sheet metals, *Engineering Computations*, Vol. 13, N° 2/3/4, 1996, p.143-71.
- [DAF 85] DAFALIAS Y. F., The plastic spin, *J. Appl. Mech.*, Vol. 52, 1985, p. 865-871.
- [DAF 89] DAFALIAS Y. F., RASHID M. M., The effect of plastic spin on anisotropic material behavior, *Int. J. of plasticity*, Vol. 5, 1989, p. 227-246, 1989.
- [DEB 90] DE BORST R. - FEENSTRA P. H., Studies in anisotropic plasticity with reference to the Hill criterion, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 29, 1990, p. 315-336.
- [DOG 84] DOGUI A., SIDOROFF F., Quelques remarques sur la plasticité anisotrope en grandes déformations, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 299, Série II, N° 18, 1984.
- [DOG 88] DOGUI A., Cinématique bidimensionnelle en grandes déformations. Application à la traction hors axes et à la torsion, *J. Méca. Th. et Appl.*, Vol. 1, 1988.
- [DOG 89] DOGUI A., Plasticité anisotrope en grandes déformations, Thèse de Doctorat ès-Science, Université Claude Bernard - Lyon 1.
- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN Q. S., Sur les matériaux standards généralisés, *Journal de Mécanique*, Vol. 14, N° 1, 1975, p. 39-63.
- [HIL 50] HILL R., *The mathematical theory of plasticity*, The Oxford Engineering Science Series, 1950.
- [HUG 80] HUGHES T. J. R., WINGET J., Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 15, 1980, p. 1862-1867.
- [HUG 84] HUGHES T. J. R., Numerical implementation of constitutive models : rate independant deviatoric plasticity, *Theoretical foundation for large scale computation for non-linear material behavior*, Eds S. Nemat-Nasser, R. J. Asaro and G. A. Hgémier, 1984, p. 29-57.
- [LAD 80] LADEVEZE P., Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations, Rapport interne N°9, LMT-ENSET-Cachan, 1980.
- [LEE 69] LEE E. H., Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, 1969.
- [LOR 83] LORET B., On the effects of plastic rotations in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials, *Mechanics of Materials*, 2, 1983, p. 287-304.
- [MAN 71] MANDEL J., *Plasticité et viscoplasticité*, Cours C.I.S.M 97, Udine, Springer, New York.

- [MAN 73] MANDEL J., Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 9, 1973, p. 725-740.
- [MAN 81] MANDEL J., Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, 1981, p. 873-878.
- [MAN 83] MANDEL J., Sur la définition de la vitesse de déformation élastique en grande transformation élastoplastique, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, N° 7, 1983, p. 573-578.
- [MON 84] MONTEILLET F., COHEN M., JONAS J. J., Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu and  $\alpha$ -Fe, *Acta Metall.*, Vol. 32, N° 11, 1984, p. 2077-2089.
- [MON 85] MONTEILLET F., COHEN M., JONAS J. J., Relation between axial stresses and texture development during torsion testing : a simplified theory, *Acta Metall.*, Vol. 33, N° 4, 1985, p. 705-717.
- [NUM 93] NUMISHEET'93, *Numerical simulation of 3-D sheet metal forming processes - Verification of simulation with experiment -*, Edited by A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Onate and R. H. Wagoner, Japan, 1993.
- [ORT 85] ORTIZ M., POPOV E. P., Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 21, 1985, p. 1561-1576.
- [PER 92] PERIC D., DUTKO M., OWEN D. R. J., Universal anisotropic yield criterion based on superquadratic functional representation : computational issues with applications, *Proceedings of the Third International Conference on Computational Plasticity*, Part 1, 1992, p 77-102.
- [PIN 83] PINSKY P. M., ORTIZ M., PISTER K. S., Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 40, 1983, p. 137-158.
- [PSA 87-89] PSA - RENAULT - SOLLAC, Simulation numérique de l'emboutissage des tôles en acier extra doux, Contrat CECA n° F3.86-7210-KC/309, Rapports d'avancement n° 1, 4 et 5, 1987, 1988 et 1989.
- [RUB 83] RUBINSTEIN R., ATLURI S. N., Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analyses, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 36, 1983, p. 277-290.
- [SIM 85] SIMO J. C., TAYLOR R. L., Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 48, 1985, p. 101-118.
- [SIM 86] SIMO J. C., TAYLOR R. L., A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 22, 1986, p. 649-670.