
Etude du comportement mécanique pour la conception des structures textiles

Application aux bandes transporteuses

Hassan Chaffoui * — Daniel Play **

* *Département de physique, Laboratoire de Mécanique
Faculté des Sciences et Techniques, BP 146, Mohammedia, Maroc*

** *Laboratoire de Conception et Analyse des Systèmes Mécaniques, INSA
Bât. 113, 20 avenue Albert Einstein, F-69621 Villeurbanne cedex*

RÉSUMÉ. *Les bandes de tapis roulants qui transportent des matériaux bruts, doivent résister à des efforts de traction élevés et assez variés. L'accroissement des caractéristiques de résistance passe par une bonne compréhension du rôle des constituants de base. Une structure textile 3D complexe (Solid Woven) est imprégnée d'une résine. La théorie d'homogénéisation a été utilisée pour définir des modèles de complexité croissante permettant de traiter différents problèmes. Ainsi, un modèle de type plaque symétrique travaille par sous-domaines assemblés, un modèle de plaque non symétrique considère les effet d'ondulation des fils constitutifs d'une cellule de base. Enfin, un modèle d'homogénéisation tridimensionnel permet de situer les différents niveaux d'étude. Ces modèles ont été regroupés dans un logiciel d'éléments finis. Dans cet article, seul le modèle de plaque non symétrique est présenté en détail.*

ABSTRACT. *The conveyor belts that transport raw materials, must support a high and sufficiently varying tensile constraints. Increase in strength characteristics implies a good knowledge of the role of constituents. A solid woven is impregnated by resin. The homogenization theory has been used to define more and more complex models has allowed the analysis of different kind of industrial problems. This, a symmetric plate model is derived using sub domain assembling, an asymmetric plate model to consider the continuity and undulation of fibers in fabric composite. Finally, a three-dimensional homogenization model enables us to locate different level of models under study. Element based on different models are assembled in a finite element computer program. In this paper, only, the asymmetric plate model is presented in detail.*

MOTS-CLÉS : *plaque, homogénéisation, développement asymptotique, éléments finis.*

KEY WORDS : *plate, homogenization, asymptotic development, finite element.*

1. Introduction

La conception des composites renforcés par des textiles consiste à évaluer l'effet mécanique du renfort. Il est donc nécessaire d'avoir des modèles qui relient le comportement mécanique de la structure et la géométrie du textile. Le calcul des matériaux composites renforcés par des textiles soulève de grandes difficultés, liées à leurs fortes hétérogénéités et à la diversité de leurs formes géométriques internes. Les renforts se présentent sous forme soit de fibres, soit de textiles plus élaborés. Dans la littérature, l'étude du comportement des structures textiles est généralement faite à partir de deux classes de modèles. Les premiers modèles sont purement géométriques [PEI 37, HAM 64]. Ils décrivent l'arrangement des fils. En revanche, les deuxièmes modèles sont basés sur le comportement mécanique. Ils prennent en considération le comportement élastique de la structure textile, notamment dans le cas des problèmes à deux dimensions [CHO 80, CHO 89]. Dans ce dernier cas, les calculs reposent sur une discrétisation suggérée par la géométrie globale de la structure textile. Toutefois, ces modèles se limitent à des modélisations globales, et ne considèrent pas les liens qui existent entre les macro et microstructures. L'étude du comportement mécanique des composites doit naturellement comprendre ces deux aspects complémentaires. D'une part, la modélisation de la structure géométrique du renfort est nécessaire pour définir les paramètres géométriques qui influencent le tissage et pour comprendre les phénomènes associés. On fait ainsi apparaître des variables de conception. D'autre part, les propriétés mécaniques des composites, qui sont principalement liées à la nature et à la forme des dispositions géométriques des renforts, ne peuvent pas être dérivées simplement de celles issues du tissage. Ainsi une modélisation propre au produit fini qui est constitué de deux éléments ayant chacun un apport mécanique spécifique, est nécessaire.

Généralement, les structures textiles se composent de deux familles de fils entrecroisés (chaîne-trame) suivant des trajectoires ondulées, ces ondulations sont plus ou moins régulières. Ainsi, les différents types de tissages sont identifiés par des séquences périodiques dites armures qui sont des représentations schématiques de l'entrecroisement. Dans le cas de notre étude, les textiles considérés présentaient des armures tridimensionnelles. En effet, les composites considérés étaient des bandes transporteuses de tapis roulant utilisant ce type de renfort textile. Plus particulièrement, ces bandes se composent de trois couches principales (figure 1) :

- une couche centrale constituée d'un tissage textile 3D standard à base de fibres naturelles, principalement du coton et du polyamide. La structure textile est imprégnée de chlorure de polyvinyle souple,
- deux couches élastomériques de faible épaisseur disposées de chaque côté de la couche centrale pour la protection contre les agressions extérieures telles que la flamme ou l'abrasion. Dans la suite de cette présentation, on ne considérera que la partie centrale de la bande transporteuse.

La première étape de ce travail est une approche basée sur la technique d'homogénéisation périodique [DUV 76, CIA 79, HAS 80, SUQ 82, CAI 82, BES 88] pour prévoir le comportement mécanique des matériaux composites à renforts textiles. L'idée de base, autour de laquelle s'articule cette technique, est de pouvoir

remplacer un milieu fortement hétérogène à une échelle locale par un milieu homogène équivalent à une échelle globale. Cette technique permet de calculer, non seulement la loi du comportement mécanique global, mais aussi l'apport mécanique des constituants d'une cellule de base déduite de l'armure 3D. De plus, l'estimation de la résistance est faite à partir d'une modélisation par les microcontraintes.

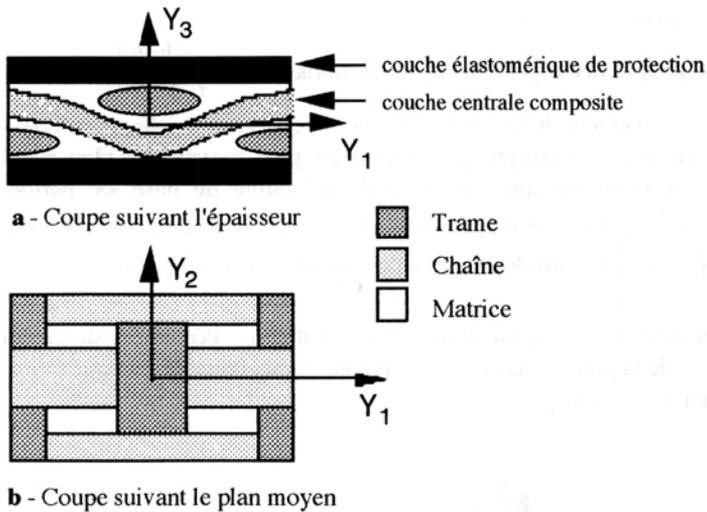


Figure 1. Structure de la bande transporteuse

La seconde étape du travail présenté ici consiste à simplifier les calculs du comportement global de la bande transporteuse afin d'établir un lien plus direct et plus rapide entre le comportement du produit technologique final et les caractéristiques mécaniques des constituants de base. Du point de vue géométrique, on peut constater que le composite étudié se présente sous forme de bande épaisse. Mais l'épaisseur reste très inférieure aux autres dimensions. Ainsi, le comportement global du composite peut être traité comme un problème de plaque. Ceci revient à réduire la dimension du problème de trois à deux dimensions, le calcul s'effectue alors dans le plan moyen de la bande transporteuse. On peut distinguer deux modèles de plaques pour décrire le comportement de la cellule de base :

- le modèle des plaques symétriques par rapport au plan moyen [CHA 91, 92]. Ce modèle est basé sur une technique de discrétisation de la cellule de base en neuf sous-domaines dans le plan de la section. Chaque sous-domaine est homogénéisé, indépendamment des autres, puis tous les sous-domaines sont reliés entre eux par des conditions de continuité de déplacements, pour aboutir au comportement de la cellule de base. Ce modèle ne sera pas rappelé dans ce travail,

- le modèle des plaques non symétriques, par rapport au plan moyen, que nous présentons en détail dans cette étude. Dans ce modèle, on considère seulement trois zones de géométries différentes dans le plan moyen de la section et par conséquent

d'hétérogénéités différentes, mais toujours avec un seul sous-domaine. L'homogénéisation concerne alors la totalité de la cellule de base.

2. Modèle de calcul

2.1. Position du problème

Soit une plaque hétérogène occupant le domaine $\Omega^* \left[\frac{-h}{2}, \frac{h}{2} \right]$ (Ω est le plan moyen, h est l'épaisseur de la plaque). Dans son épaisseur la plaque intègre une forte hétérogénéité, non symétrique par rapport au plan moyen. Le plan moyen de la plaque est recouvert par une répétition d'une cellule de base << période >> de dimension $\varepsilon \cdot Y$ petite par rapport aux dimensions du plan moyen (figure 2). Soit $Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2]$ la période agrandie par homothétie de rapport ε (figure 1).

Deux paramètres interviennent dans notre problème : l'épaisseur de la plaque et la dimension ε de la période dans le plan moyen. Nous considérons que l'épaisseur est petite devant ε [CAI 87].

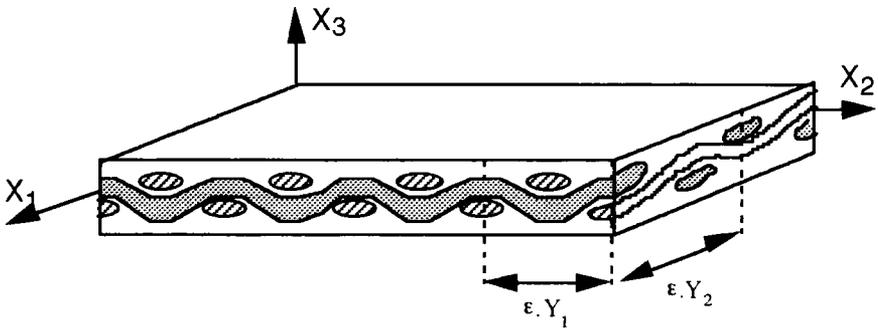


Figure 2. Hétérogénéité de la plaque

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la plaque sont des fonctions périodiques, définies sur une période Y est prolongées par périodicité à tout l'espace. Pour marquer leur dépendance du paramètre ε elles seront des fonctions du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} g^\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in L^\infty(Y) \text{ avec } y = \frac{x}{\varepsilon} \end{array} \right. \quad [1]$$

2.2. Modèle des plaques épaisses

On se place dans le cadre des hypothèses des plaques épaisses en élasticité linéaire, appelé théorie naturelle ou modèle de *Naghdi-Reissner*. Le champ de déplacement se met sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = v_i^\varepsilon(x_1, x_2) + x_3 l_i^\varepsilon(x_1, x_2) \quad , \quad i = 1, 2 \\ u_3^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = w^\varepsilon(x_1, x_2) \\ (x_1, x_2) \in \Omega, \quad x_3 \in I_h = \left[\frac{-h}{2}, \frac{h}{2} \right] \end{array} \right. \quad [2]$$

v_i^ε , l_i^ε et w^ε désignent respectivement les déplacements de membrane, de rotation et la flèche. Ω est le plan moyen de la plaque.

La loi de comportement définissant les relations contraintes-déformations est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^\varepsilon = c_{ijkh}^\varepsilon(x) \cdot \varepsilon_{kh}(u^\varepsilon) \\ \sigma_{i3}^\varepsilon = \mu_{ij}^\varepsilon(x) \cdot (l_j^\varepsilon + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j}) \\ i = j = 1, 2 \end{array} \right. \quad [3]$$

En notant $a_{ijkh}^{\varepsilon n} = \int_{I_h} x_3^n \cdot c_{ijkh}^\varepsilon \cdot dx_3$ et $\mu_{ij}^{\varepsilon 0} = \int_{I_h} \mu_{ij}^\varepsilon \cdot dx_3$, les efforts internes de membrane, de rotation et de cisaillement se mettent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^{\varepsilon 0} \cdot e_{kh}(v^\varepsilon) + a_{ijkh}^{\varepsilon 1} \cdot \chi_{kh}(l^\varepsilon) \\ M_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^{\varepsilon 1} \cdot e_{kh}(v^\varepsilon) + a_{ijkh}^{\varepsilon 2} \cdot \chi_{kh}(l^\varepsilon) \\ Q_i^\varepsilon = \mu_{ij}^{\varepsilon 0} \cdot \gamma_j(l^\varepsilon, w^\varepsilon) \end{array} \right. \quad [4]$$

$$e_{ij}(v^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right), \quad \chi_{ij}(l^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial l_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \gamma_i(l^\varepsilon, v^\varepsilon) = \left(l_i^\varepsilon + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} \right)$$

$a_{ijkh}^{\varepsilon 0}$ représente les coefficients d'élasticité régissant les effets de membrane, $a_{ijkh}^{\varepsilon 1}$ ceux de couplage membrane-rotation, $a_{ijkh}^{\varepsilon 2}$ les coefficients des effets de rotation et $\mu_{ij}^{\varepsilon 0}$ le module de rigidité du cisaillement.

2.3. Homogénéisation des plaques non symétriques

2.3.1. Description du modèle

On suppose que la structure du matériau à étudier est définie à partir d'une cellule de base (période), petite par rapport à l'échelle globale du milieu. Les coefficients d'élasticité $a_{ijkh}^{\epsilon 0}$, $a_{ijkh}^{\epsilon 1}$, $a_{ijkh}^{\epsilon 2}$ et $\mu_{ij}^{\epsilon 0}$ dépendent macroscopiquement des coordonnées (x_1, x_2, x_3) . Par ailleurs, du fait que ces coefficients intègrent des hétérogénéités dans la période, ce sont des fonctions périodiques rapidement oscillantes et dépendant microscopiquement de la géométrie interne de la cellule de base liée au système d'axe (O, Y_i) . Ils sont prolongés par périodicité à tout l'espace (O, X_i) . Le système d'équations d'équilibre s'écrit donc :

$$\left. \begin{aligned}
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ijkh}^{\epsilon 0}(y) \frac{\partial}{\partial x_h} (v_k^\epsilon) + a_{ijkh}^{\epsilon 1}(y) \frac{\partial}{\partial x_h} (l_k^\epsilon) \right] = f_i \quad \text{dans } \Omega \\
 & \mu_{ij}^{\epsilon 0} \left[l_j^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} (w^\epsilon) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ijkh}^{\epsilon 1}(y) \frac{\partial}{\partial x_h} (v_k^\epsilon) \right] \\
 & \qquad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ijkh}^{\epsilon 2}(y) \frac{\partial}{\partial x_h} (l_k^\epsilon) \right] = m_i \quad \text{dans } \Omega \\
 & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{ij}^{\epsilon 0}(y) \delta_{ik} \left[l_k^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} (w^\epsilon) \right] \right] = f_3 \quad \text{dans } \Omega \\
 & l_i^\epsilon = 0, \quad w^\epsilon = v_i^\epsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\
 & \left[a_{ijkh}^{\epsilon 2}(y) \frac{\partial}{\partial x_h} (l_k^\epsilon) \right] \cdot n_j = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\
 & \left[a_{ijkh}^{\epsilon 0}(y) \frac{\partial}{\partial x_h} (v_k^\epsilon) \right] \cdot n_j = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\
 & \mu_{ij}^{\epsilon 0}(y) \delta_{ik} \left[l_k^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} (w^\epsilon) \right] \cdot n_j = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\
 & \Gamma_0 \text{ Frontière encastrée de } \Omega \\
 & \Gamma_1 \text{ Frontière libre de } \Omega
 \end{aligned} \right\} [5]$$

f_i et m_i sont les charges et les moments.

Pour mettre en œuvre la technique d'homogénéisation, la méthode de développement asymptotique à double échelle a été utilisée. La première échelle est liée au milieu Ω et permet d'avoir des renseignements d'ordre global et la deuxième est liée à la période Y et permet de traduire les éventuels phénomènes qui peuvent

exister autour du point x . Pour avoir les détails de ces phénomènes, et vu la petitesse de la période par rapport à la taille de Ω , on fait subir à l'entourage du point $x \in \Omega$ un grossissement de $\frac{1}{\varepsilon}$. Mathématiquement, on effectue un changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Le problème d'homogénéisation consiste, donc, à étudier la limite lorsque ε tend vers zéro [LEN 84].

La première étape de calcul permet d'obtenir les coefficients d'élasticité équivalents et la deuxième étape consiste à faire, dans la cellule de base, une approximation de la répartition des contraintes internes, appelées microcontraintes.

2.3.2. Développement asymptotique

On associe aux équations d'équilibre, les tenseurs suivants :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{ij}^\varepsilon &= a_{ijkh}^{\varepsilon 0} v_{k,h}^\varepsilon, & C_{ij}^\varepsilon &= a_{ijkh}^{\varepsilon 1} v_{k,h}^\varepsilon \\ B_{ij}^\varepsilon &= a_{ijkh}^{\varepsilon 2} l_{k,h}^\varepsilon, & D_{ij}^\varepsilon &= a_{ijkh}^{\varepsilon 1} l_{k,h}^\varepsilon \\ E_{ij}^\varepsilon &= \mu_{ij}^\varepsilon (l_j^\varepsilon + w_{,j}^\varepsilon) \end{aligned} \right. \quad [6]$$

et on effectue un développement formel à double échelle de ces tenseurs, ainsi que le vecteur de déplacement $U^\varepsilon = (v^\varepsilon, l^\varepsilon, w^\varepsilon)$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{ij}^\varepsilon &= A_{ij}^0 + \varepsilon U_{ij}^1 + \varepsilon^2 \cdot A_{ij}^2 + \dots, \\ U^\varepsilon &= U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 \cdot U^2 + \dots, \end{aligned} \right. \quad [7]$$

De même, en tenant compte du changement du variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$ dans les dérivations partielles et en égalant les coefficients de puissance de ε^{-1} , ε^0 , ε^1 , dans chaque membre des équations du système [5], on obtient les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_j} (A_{ij}^0 + D_{ij}^0) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} (C_{ij}^0 + B_{ij}^0) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} (E_i^0) &= 0 \end{aligned} \right. \quad [8]$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij}^0 + D_{ij}^0) - \frac{\partial}{\partial y_j} (A_{ij}^1 + D_{ij}^1) &= f_i \\ E_i^0 - \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ij}^0 + B_{ij}^0) - \frac{\partial}{\partial y_j} (C_{ij}^1 + D_{ij}^1) &= m_i \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} (E_i^0) - \frac{\partial}{\partial y_i} (E_i^1) &= f_3 \end{aligned} \right. \quad [9]$$

On remarque que les quatre premières équations du premier système font intervenir le vecteur des déplacements de membrane et de rotation couplées $V^i = (v^i, l^i)$. Elles sont découplées de celles que vérifie la flèche w^i . Toutefois, nous avons adopté une notation matricielle des différents paramètres intervenant dans les deux systèmes d'équations couplées (membrane-rotation).

Ainsi, on pose la matrice des coefficients d'élasticité et le vecteur déplacement sous la forme :

$$\left[A_{ijkh} \right] = \begin{bmatrix} a_{ijkh}^0 \\ a_{ijkh}^1 \\ a_{ijkh}^2 \end{bmatrix}, \quad \{ V_j^i \} = \begin{Bmatrix} v_j^i \\ l_j^i \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{ F_i \} = \begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \end{Bmatrix} \quad [10]$$

ce qui permet de mettre le système des quatre premières équations sous la forme matricielle :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\left[A_{ijkh} \right] \frac{\partial}{\partial y_h} \{ V_k^1 \} \right) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\left[A_{ijkh} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_h} \{ V_k^0 \} \right) + \begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \end{Bmatrix} \\ + \text{Conditions aux limites} & \end{aligned} \right. \quad [11]$$

Ce système admet une solution particulière qui se met sous la forme : $\{ V_i^1(x, y) \} = - \left[\Phi_i^{rs} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \{ V_r^0 \} \right)$, telle que la matrice des fonctions auxiliaires $\left[\Phi_i^{rs} \right]$ est solution du système défini sur la cellule de base Y et qui se met sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\left[A_{ijkh} \right] \frac{\partial}{\partial y_h} \left[\Phi_k^{rs} \right] \right) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[A_{ijrs} \right] \\ \text{avec} \quad \left[\Phi_k^{rs} \right] &= \begin{bmatrix} \varphi_k^{rs} & \xi_k^{rs} \\ \zeta_k^{rs} & \eta_k^{rs} \end{bmatrix}, \quad i, j, k, h, r, s = 1, 2 \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} [\Phi_k^{rs}] : - Y\text{-périodique} \\ - nulle aux quatre coins de Y \end{array} \right. \quad [12]$$

En utilisant les mêmes types de raisonnement, l'équation que vérifie la flèche admet une solution particulière $w^1(x, y)$ telle que :

$$\left| w^1(x, y) = -\Psi^m \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_m} W^0 + l_m^0 \right) \right. \quad [13]$$

Avec Ψ^m solution du problème cellulaire suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mu_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \Psi^m \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} (\mu_{im}) \\ \Psi^m : - Y\text{-périodique} \\ - nulle aux quatre coins de Y \end{array} \right. \quad [14]$$

2.3.3. Coefficients équivalents

La détermination des coefficients homogénéisés consiste à vérifier la condition d'existence des solutions uniques des systèmes [8] et [9] issus du développement asymptotique de tous les paramètres intervenant dans les équations d'équilibre équivalent. Le calcul de ces coefficients nécessite la résolution numérique par éléments finis des différents problèmes cellulaires que vérifient les matrices $[\Phi_i^{rs}]$ et les fonctions Ψ^m . Ils peuvent être interprétés comme résultants d'une loi de mélanges représentée par la moyenne, sur la cellule de base, des coefficients des constituants de base et des fonctions auxiliaires liées à la forme des distributions géométriques de la structure. Ainsi, les coefficients équivalents se mettent sous la forme :

$$\left| [A_{ijkh}^H] = \frac{1}{\|Y\|} \int_Y \left([A_{ijkh}] - [A_{jrts}] \frac{\partial}{\partial y_s} [\Phi_r^{kh}] \right) dy \right. \quad [15]$$

2.3.4. Approximation des microcontraintes

Les expressions des microcontraintes sont obtenues en effectuant des développements asymptotiques à double échelle des efforts internes, des champs de déformations et de contraintes. En tenant compte des résultats obtenus après la résolution de tous les problèmes d'équations cellulaires [12] et [14], ce sont ces

formules qui servent ensuite aux calculs numériques approximant la répartition des microcontraintes dans la cellule de base.

Ainsi, en développant les tenseurs de déformations et des efforts internes :

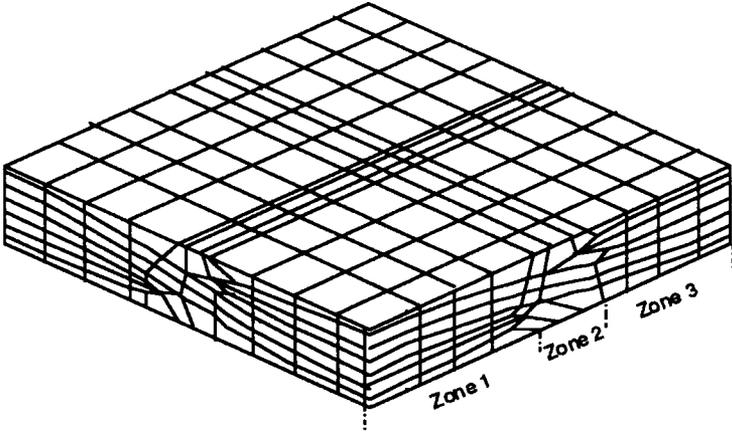
$$\left| \begin{aligned}
 e(v^\epsilon) &= (e_x(v^0) + e_y(v^1)) + \epsilon \cdot (e_x(v^1) + e_y(v^2)) + \dots, \\
 e(l^\epsilon) &= (e_x(l^0) + e_y(l^1)) + \epsilon \cdot (e_x(l^1) + e_y(l^2)) + \dots, \\
 \gamma(l^\epsilon, w^\epsilon) &= (l^0 + grad_x(v^0) + grad_y(v^1)) \\
 &\quad + \epsilon \cdot (l^1 + grad_x(v^1) + grad_y(v^2)) + \dots, \\
 N^\epsilon &= N^0 + \epsilon \cdot N^1 + \epsilon^2 \cdot N^2 + \dots, \\
 M^\epsilon &= M^0 + \epsilon \cdot M^1 + \epsilon^2 \cdot M^2 + \dots, \\
 Q^\epsilon &= Q^0 + \epsilon \cdot Q^1 + \epsilon^2 \cdot Q^2 + \dots,
 \end{aligned} \right. \tag{16}$$

et en identifiant les termes de même puissance de ϵ , on montre que les premiers termes des efforts internes N^0 , M^0 et Q^0 constituent une bonne approximation des champs correspondants [LEN 84]. Il vient par suite :

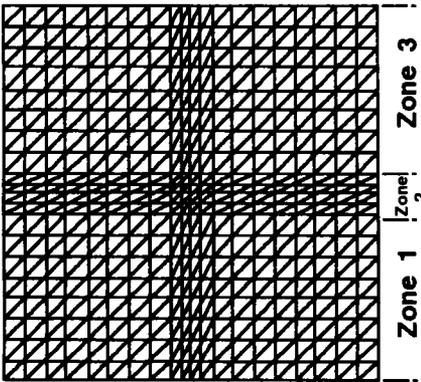
$$\left| \begin{aligned}
 N_{ij}^0 &= \left(a_{ijkh}^0 - a_{ijrs}^0 e_{rs}(\varphi^{kh}) - a_{ijrs}^1 e_{rs}(\zeta^{kh}) \right) \frac{\partial}{\partial x_h} (v_k^0) \\
 &\quad + \left(a_{ijkh}^1 - a_{ijrs}^1 e_{rs}(\eta^{kh}) - a_{ijrs}^0 e_{rs}(\xi^{kh}) \right) \frac{\partial}{\partial x_h} (l_k^0) \\
 M_{ij}^0 &= \left(a_{ijkh}^1 - a_{ijrs}^1 e_{rs}(\varphi^{kh}) - a_{ijrs}^2 e_{rs}(\zeta^{kh}) \right) \frac{\partial}{\partial x_h} (v_k^0) \\
 &\quad + \left(a_{ijkh}^2 - a_{ijrs}^2 e_{rs}(\eta^{kh}) - a_{ijrs}^1 e_{rs}(\xi^{kh}) \right) \frac{\partial}{\partial x_h} (l_k^0) \\
 Q_i^0 &= \left(\mu_{im} - \mu_{ij} \frac{\partial \Psi^m}{\partial y_j} \right) \left(l_m^0 + \frac{\partial w^0}{\partial x_m} \right) \\
 e_{rs}(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right)
 \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Les composantes des tenseurs N^0 , M^0 et Q^0 , représentent la répartition des efforts internes des microcontraintes, dans une cellule de base. Mais, pour plus de commodité, nous avons choisi de calculer les déformations et les microcontraintes moyennes, sur l'étendue de l'épaisseur de la plaque, que l'on peut reconstruire à partir des formules suivantes :

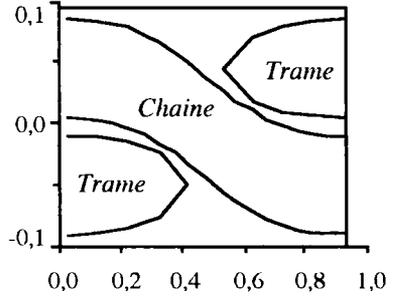
$$\left| \sigma_{ij} = \frac{12 \cdot M_{ij}}{h^3} \cdot x_3 + \frac{N_{ij}}{h} \right. \tag{18}$$



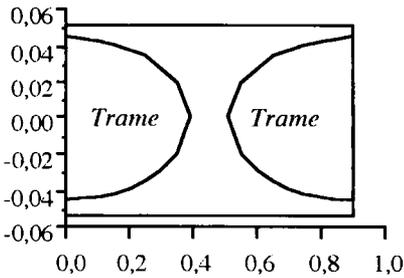
a. Modèle tridimensionnel



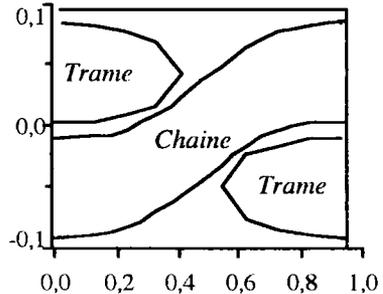
b.i



b.ii



b.iii



b.iv

b. Modèle des plaques non symétriques

Figure 3. Les différents modèles de calculs d'homogénéisation

2.4. Validation du modèle

La validation des calculs a été faite sur un tissu équilibré, traité par F. Léné [LEN 90]. En plus un modèle tridimensionnel, proposé par l'auteur, a été programmé (figure 3.a) pour s'assurer de la validation du modèle des plaques non symétriques et avoir des renseignements plus détaillés sur la répartition et la quantification des microcontraintes. On note, dans le modèle tridimensionnel, que les symétries de la cellule de base par rapport aux axes (OY_1) et (OY_2) ont permis de traiter le problème sur le quart de la cellule de base et de remplacer les conditions de périodicité par des conditions de nullités sur les faces opposées du quart de la période. Suivant la direction (OY_3) << Epaisseur >>, par manque de cette symétrie, seules les conditions de périodicité ont été prises en compte.

Dans le modèle tridimensionnel, nous avons utiliser un maillage de 780 éléments hexaédriques à huit noeuds. Le modèle des plaques non symétriques a nécessité 800 éléments triangulaires à trois noeuds dans le plan moyen (figure 3.b.i). Toutefois, tous les détails géométriques ont été pris en compte grâce à un module géométrique (GEOMET) qui définit la forme des structures de base et leur répartition dans la période. Les figures 3.b.ii , iii et iv représentent les formes d'hétérogénéités suivant l'épaisseur et sont relatives aux trois zones 1, 2 et 3 de la cellule de base, suivant la direction des fils de trame (OY_2) (figures 3.a et 3.b.i).

Les résultats numériques concernant les modules élastiques sont présentés dans le tableau 1.

	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
Exp.1 [LEN 90]	24900		14000	0,28	0,36		5900	4000	
Exp.2 [LEN 90]	27300		----	0,15	0,22		7800	5000	
Num. [LEN 90]	25200		11000	0,14	0,31		5230	3260	
COMP3D	24700	24700	10675	0,14	0,31	0,31	5212	3178	3178
CPLAQ2D	25197	25197	----	0,14	---	----	5212	3414	3414

Tableau 1. Comparaison des modules élastiques (en MPa)
 COMP3D : Modèle tridimensionnel,
 CPLAC2D : Modèle des plaques non symétriques

3. Application

Des essais de traction, sur la partie centrale de la bande transporteuse, ont été effectués avec un dynamomètre connecté à un oscilloscope numérique asservi par une électronique qui intègre la courbe réelle du diagramme charge-allongement. Ces essais ont permis le calcul des modules de Young suivant les directions chaîne et trame.

3.1. Calcul des coefficients d'élasticité

a. La géométrie de la cellule de base, rappelée dans la figure 4, est définie à partir d'une couche de tissu standard. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la cellule de base suffit pour résoudre le problème en remplaçant les conditions de périodicité par des conditions de nullité [LEN 90]. La multitude des fils rencontrés dans une zone standard d'entrecroisement ne constitue qu'un seul fil global. La section transversale d'un fil prend une forme elliptique, à cause de l'entassement des fils. La géométrie est une approximation de la réalité, elle permet d'avoir à la fois une géométrie simple et très représentative de la structure.

Les fils de trame sont constitués d'un mélange de brins de polyamide et de coton et forment une ellipse. Le grand axe de l'ellipse (AT) est égal à 5 mm et le petit axe (BT) est égal à 3 mm. Les fils de chaîne sont constitués de polyester, leur grand axe (AC) est égal à 5 mm et leur petit axe (BC) est égal à 2 mm. L'ensemble de la structure est intégré dans un volume (figure 4) de dimensions égales à 20*14*8 mm³ (L*I*H).

Les caractéristiques mécaniques des fils sont obtenues en utilisant le modèle d'homogénéisation des composites fibreux (CFIBRE), en tenant compte de leur imprégnation par le PVC. Ainsi, les modules élastiques des différents constituants de la bande sont pour :

- Matrice : $E = 560 \text{ MPa}, \nu = 0,4$
- Fils de chaîne : $E_L = 2628 \text{ MPa}, E_T = 1108 \text{ MPa}, G_{LT} = 333 \text{ MPa},$
 $G_{TT} = 299 \text{ MPa}, \nu_{LT} = 0,38$
- Fils de trame : $E_L = 1055 \text{ MPa}, E_T = 842 \text{ MPa}, G_{LT} = 281 \text{ MPa},$
 $G_{TT} = 266 \text{ MPa}, \nu_{LT} = 0,39$

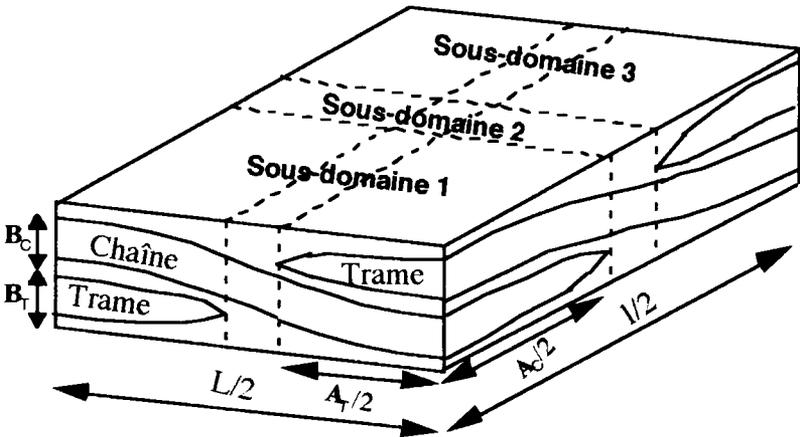


Figure 4. Un quart de la cellule de base

Le choix d'une géométrie réaliste et les caractéristiques des matériaux conduisent à des résultats en assez bon accord avec les essais expérimentaux.

b. Le tableau 2 présente une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux, des coefficients d'élasticité équivalents. Nous constatons un bon accord des modules de Young suivant la direction des fils de chaîne. Cependant, les résultats sont moins bons suivant les fils de trame. Ceci peut s'expliquer par la difficulté de décrire parfaitement le motif géométrique de la trajectoire des fils de trame. Les expériences n'ont pas permis de quantifier le coefficient de Poisson et de cisaillement. Toutefois les résultats déjà obtenus permettent de conclure que les valeurs trouvées pour ces coefficients sont acceptables. Notons que, pour cette structure complexe, le taux d'imprégnation des fils de la structure textile par le PVC était approximé.

	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
Essai 1	1200	----	----	----	----	----
Essai 2	1038	600	----	----	----	----
CPLAQ2D	1099	777	0,38	240	123	119

Tableau 2. Comparaison des modules élastiques de la bande (en MPa)

c. La complexité géométrique des structures textiles rend très difficile l'exploitation des résultats numériques. Néanmoins, quelques résultats paramétriques peuvent être présentés facilement par le modèle des plaques non symétriques, pour voir l'influence de la nature de la matrice et des paramètres géométriques, comme le rapport des largeurs des sections des fils BC/AC. Notons, dans ce cas, qu'en agissant sur les deux paramètres, la quantité de PVC situé autour des fils de la cellule de base varie.

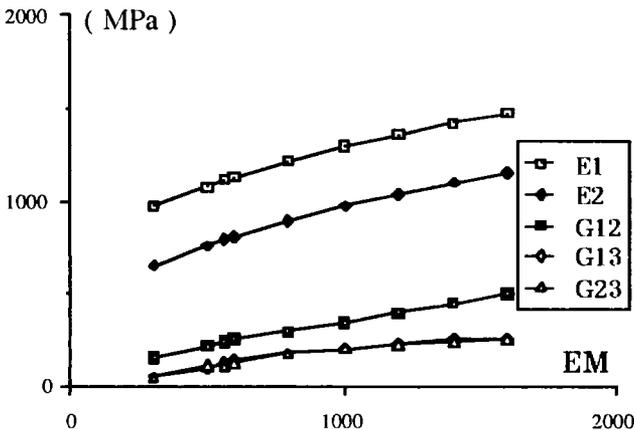


Figure 5. Modules élastiques en fonction du module de Young de la matrice

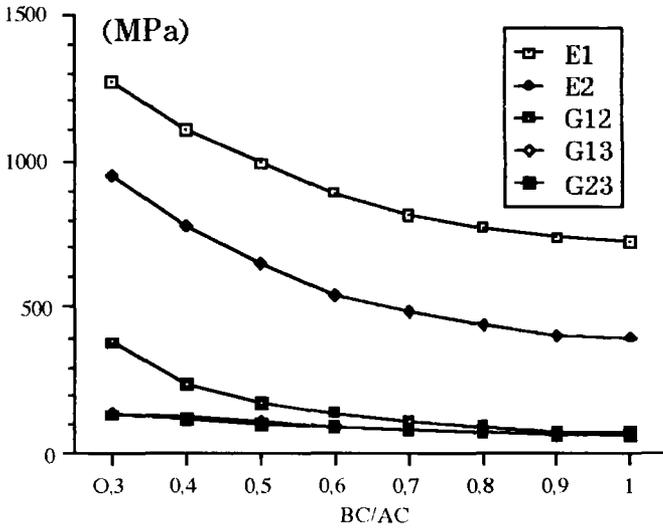


Figure 6. Modules élastiques en fonction du rapport BC/AC

La figure 5 représente la variation des modules élastiques équivalents en fonction du module de Young de la matrice. On remarque que les valeurs des modules équivalents de traction et de cisaillement augmentent quand on utilise une matrice rigide. La figure 6 décrit la variation des modules en fonction du rapport BC/AC, ce qui permet de voir l'effet de l'aplatissement des fils de chaîne sur la rigidité du matériau.

3.2. Localisation des microcontraintes

Pour la localisation des microcontraintes, on distingue les grandeurs macroscopiques qui règnent dans le milieu homogénéisé traduit en fonction de x (échelle globale) et les grandeurs microscopiques qui règnent autour du point $\ll M(x) \gg$ (échelle locale). Ainsi, les contraintes et déformations globales sont les moyennes des contraintes locales (ou microscopiques). Les figures 7, 8 et 9 représentent la répartition des microcontraintes ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$) induites dans chaque zone de la cellule de base, par une charge de traction $\Sigma_{11} = 100$ MPa, suivant la direction chaîne. Nous constatons une surcontrainte supportée par les zones de fils de chaîne, ainsi que la réaction aux interfaces des différentes zones de l'armure. Nous remarquons aussi des effets d'ondulation des fils de renforts. Ce qui permet au niveau technologique de faire le lien avec l'embuvage et la résistance des bandes. Dans la répartition de σ_{11} (figure 7), la contrainte atteint une valeur (140 MPa) nettement supérieure à la charge globale appliquée dans les zones contenant les fils de chaîne. De plus, nous constatons la naissance des microcontraintes σ_{22} (figure 8) et σ_{12} (figure 9) dont les valeurs sont beaucoup plus petites que celles de σ_{11} .

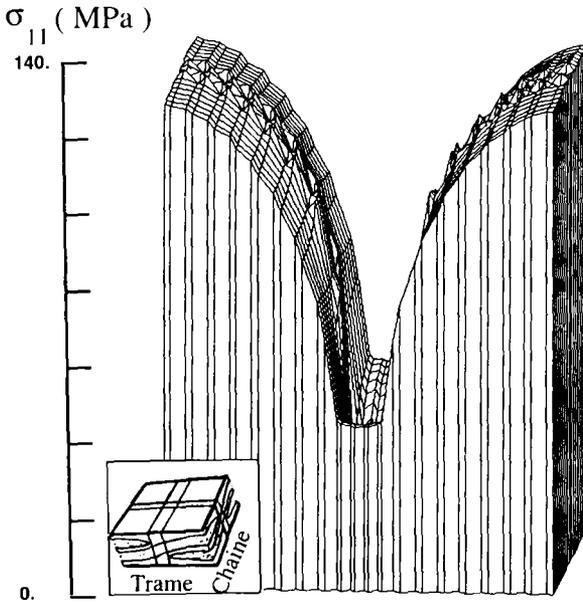


Figure 7. Répartition des microcontraintes σ_{11} en MPa

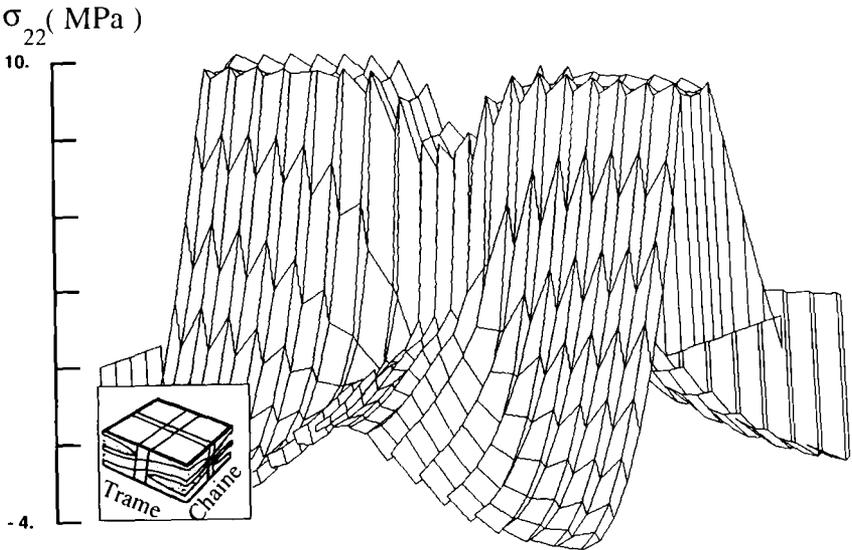


Figure 8. Répartition des microcontraintes σ_{22} en MPa

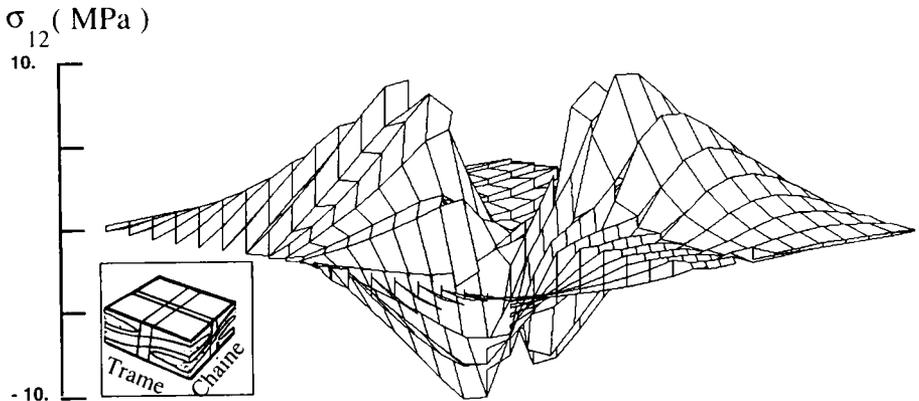


Figure 9. Répartition des microcontraintes σ_{12} en MPa

4. Conclusion

L'optimisation de la résistance des bandes transporteuses passe par la mise au point du renfort textile constitué d'un tissu 3D assez complexe. L'établissement d'un lien entre les paramètres de tissage du tissu 3D et les caractéristiques du produit fini constitué par la bande transporteuse était devenu nécessaire.

Cette étude a ainsi permis d'étudier le comportement mécanique des composites textiles en simplifiant un problème initialement 3D en un problème 2D. Les paramètres étudiés montrent l'influence de la géométrie sur le comportement mécanique de la structure. L'aplatissement des fils de renfort permet d'obtenir un produit fini plus résistant. La matrice donne une bonne cohésion des renforts et participe à la rigidité du matériau. Ainsi la technique d'homogénéisation est un outil de précision et d'analyse du comportement mécanique des composites à structure périodique qui permet de comprendre au mieux le comportement local des structures complexes. Le couplage de cette technique avec les plans d'expériences peut aider à la conception et l'optimisation d'un nouveau produit.

Remerciements

Les auteurs souhaitent mentionner l'excellente collaboration mise en place au cours de cette étude avec le Professeur J. Y. Drean de l'Ecole de Textiles de Mulhouse et avec Mrs. J. Cartier et L. Bouaziz de la Société Depreux.

5. Bibliographie

- [BES 90] BESSON J. M., DÉBORDES O., JAEGER M., Homogénéisation de composites à tissus de fibres. Composite-88, Nice, juin 1988, Composite Structure, Ed. A. Nikulari.
- [CAI 82] CAILLERIE D., Etude de quelques problèmes de perturbation en théorie de l'élasticité et de la conduction thermique, Doctorat d'Etat, Paris 6, 1982, 154 pages.
- [CAI 87] CAILLERIE D., Models of thin or thick plates and membranes derived from linear elasticity, in *Applications of Multiples Scaling in Mechanics*, P. G. Ciarlet et E. Sanchez Palencia, Ed., R.M.A. 4, Masson, Paris, 1987, pp. 54-68.
- [CHA 91] CHAFFOUI H., PLAY D., Prévision du comportement mécanique des composites à renforts textiles, *Mat. tec.*, Paris, octobre 1991, pp. 379-384.
- [CHA 92] CHAFFOUI H., Modélisation du comportement mécanique des bandes transporteuses à structure textile 3D « Homogénéisation-Éléments finis », Thèse de doctorat, INSA, Lyon, 1992, 185 pages.
- [CHO 80] CHOU T. W., KELLY A., Mechanical properties of composites, *Ann. Rev. Mater. Sci.*, 1980, Vol. 10, pp. 229-259.
- [CHO 89] CHOU T. W., ISHIKAWA T., *Analysis and modelling of two dimensional fabric composites*. Elsevier, 1989, pp. 209-264.
- [CIA 79] CIARLET P. G., DESTUYNDER P., A justification of the two dimensional plate model, *Journal de Mécanique*, Vol. 18, n° 2, 1979, pp. 315-344.
- [DUV 76] DUVAUT G., Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus « Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique - Homogénéisation », *Theo. And. App. Mech.*, W. T. Koiter, ed. North-Holland Publishing Company, 1976, pp. 119-139.
- [HAM 64] HAMILTON J. B., A general system of woven-fabric geometry, *J. Of. Text. Inst.*, 1964, Vol. 10, pp. 66-82.
- [HAS 80] HASSIM M. A., Homogénéisation par éléments finis d'un matériau élastique renforcé par des fibres, Thèse de troisième cycle, Un. Paul Sabatier, Toulouse, 1980, 91 pages.
- [LEN 84] LÉNÉ F., Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement, Thèse de doctorat d'Etat, Paris 6, 1982, 352 pages.
- [LEN 90] LÉNÉ F., Technique d'homogénéisation des composites à renforts tissés. *Méc. Mat. Elect.*, 1990, n° 433, pp. 24-28.
- [PEI 37] PEIRCE F. T., The geometry of cloth structures, *J. Of. Text. Inst.*, 1937, Vol. 28, pp. 145-196.
- [SUQ 82] SUQUET P., Plasticité et homogénéisation, Thèse de doctorat d'Etat, Paris 6, 1982, 334 pages.