
Génération automatique de maillages tridimensionnels respectant une carte de taille

Paul Louis George * — Houman Borouchaki **

* INRIA Rocquencourt
BP 105, F-78153 Le Chesnay cedex
Paul-Louis.George@inria.fr

** Université de Technologie de Troyes
BP 2060, F-10100 Troyes cedex
Houman.Borouchaki@univ-troyes.fr

RÉSUMÉ. *Toute simulation par la méthode des éléments finis de problèmes physiques modélisés en termes d'équations aux dérivées partielles nécessite dans une première phase la construction d'un maillage du domaine de calcul. Cet article se propose de présenter une méthode permettant la génération d'un maillage tridimensionnel respectant une carte de taille spécifiée en entrée. La méthode utilisée est du type Delaunay et fournit un maillage composé de tétraèdres isotropes dont la taille est conforme à la spécification. L'application de la méthode décrite s'insère tout naturellement dans les processus d'adaptation de maillages utilisés dans un ensemble (maillage, calcul, estimation d'erreur).*

ABSTRACT. *Constructing a mesh is an essential pre-requisite for any computational process using a finite element approach. This paper describes a 3D mesh generation method which aims at constructing a tetrahedral mesh whose elements conform a pre-specified size. Such a method would be a natural component of any mesh adaptation process included in a (mesh construction, solution, error estimate) computational scheme.*

MOTS-CLÉS : *génération de maillages, éléments finis, adaptation, Delaunay, maillage adapté, maillage isotropes.*

KEY WORDS: *mesh generation, finite element, adaptation, Delaunay, adapted mesh, isotropic mesh.*

1. Introduction

La simulation numérique par la méthode des éléments finis, [CIA 78], de nombreux problèmes physiques formulés en termes d'équations aux dérivées partielles nécessite, dans une première étape, la construction d'un maillage du domaine de calcul. Cette étape, réalisée via telle ou telle méthode de maillage (cf. [GEO 91a]), est suivie de l'étape de calcul. La solution obtenue sur ce maillage peut ensuite être analysée, via un estimateur d'erreur, indiquant sa plus ou moins bonne qualité. Cette dernière est, en particulier, liée à la plus ou moins bonne adéquation du maillage au comportement physique du problème. Ainsi, l'estimateur d'erreur peut indiquer que, dans telle ou telle région du domaine de calcul, le maillage est trop fin ou trop grossier. Dans un cas, le calcul est inutilement coûteux alors que dans l'autre, la nature de la solution n'a vraisemblablement pas été captée. Pour tenter de parvenir à ces fins, un maillage adapté doit être construit, fin aux endroits voulus, plus grossier ailleurs.

On ne s'intéresse pas directement à l'aspect estimateur d'erreur pour se concentrer sur l'aspect technologie de maillage et, dans un cadre isotrope, on propose une méthode permettant de construire un maillage tel que :

- ses éléments soient équilatéraux (autant que faire se peut),
- la taille de ces éléments corresponde à une taille indiquée à l'avance (via l'estimateur d'erreur).

La méthode choisie est du type Delaunay. L'originalité de ce travail réside dans une formulation rigoureuse du problème qui permet d'utiliser les fondements théoriques des méthodes de type Delaunay.

Dans un premier temps, section 2, on va donner les grandes lignes d'une telle méthode (en reprenant la situation classique, *i.e.*, en l'absence de champ de taille). En section 3, on va indiquer quelques approches utilisées pour définir un champ de taille servant à gouverner le processus de maillage. L'approche employée ici consistera à utiliser un maillage de fond de même nature que le maillage actuel et, section 4, on va décrire la façon de construire les sommets du maillage en utilisant un tel maillage de fond. À cette fin, la notion de longueur unité sera rappelée. Section 5, on va indiquer quelques outils d'optimisation de maillage. La section 6 regarde rapidement le problème du remaillage d'une surface de façon à respecter une carte de taille. La section 7 va illustrer l'intérêt de la méthode proposée en donnant quelques exemples. Enfin, les développements et extensions de la méthode feront l'objet de la section 8.

2. Schéma classique d'une méthode de type Delaunay

L'objet de cette section est d'indiquer les principaux ingrédients utilisés pour construire un mailleur de type Delaunay. On va mentionner les étapes d'un tel processus, *a priori* bien connu (cf. [BAK 88], [WAT 81]) afin de montrer quelles modifications seront à apporter pour construire une méthode de maillage permettant de respecter une carte de taille spécifiée à l'avance.

On se place donc, ici, dans le cas classique, c'est-à-dire que l'on se donne un maillage conforme de la surface du domaine. Le problème est alors de mailler ce domaine en utilisant cette seule information.

2.1. Schéma synthétique

Un schéma possible d'une méthode de maillage de type Delaunay englobe les étapes qui suivent, cf. [GEO 97a].

- Préparation : lecture des données (coordonnées des points, entités (faces et arêtes) de la frontière et entités internes (le cas échéant)), construction d'une boîte englobante (pour se retrouver dans un cas convexe), maillage de cette boîte en cinq tétraèdres.
- Construction du maillage de la boîte : insertion des points donnés dans le maillage de la boîte via le *noyau de Delaunay*.
- Construction du maillage frontalier : recherche des arêtes et faces spécifiées non formées, forçage de ces entités, marquage des composantes connexes du domaine.
- Création et insertion des points internes : (A) Analyse des arêtes (internes) du maillage courant, création de points sur ces arêtes puis insertion de ces points avant retour en (A).
- Définition du maillage du domaine : élimination des éléments non inclus dans le domaine, classement des éléments par rapport aux composantes connexes du domaine.
- Optimisation : bascule (modification topologique), bougé de points (modification géométrique).

Ce schéma repose sur quatre algorithmes de base. Un algorithme d'insertion de points (le noyau), un algorithme de recouvrement de la frontière, un algorithme de création des points internes et un algorithme d'optimisation.

2.2. Processus incrémental d'insertion de points

Le noyau de Delaunay est un processus incrémental permettant l'insertion d'un point dans une triangulation (on est par défaut dans le cas d'un domaine convexe et chaque point à insérer est interne à la triangulation courante).

On suppose que l'on a construit \mathcal{T}_i la triangulation de Delaunay de la boîte introduite ci-dessus comprenant comme sommets d'élément les i premiers points de l'ensemble des points à insérer. On considère le point $i + 1$ de cet ensemble (noté P).

Le noyau de Delaunay permet alors de construire, à partir de \mathcal{T}_i , la triangulation \mathcal{T}_{i+1} incorporant P comme sommet d'éléments. Ceci s'écrit, [GEO 92],

$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$$

où \mathcal{C}_P est la *cavité* associée au point P , c'est-à-dire la réunion des tétraèdres de \mathcal{T}_i dont la boule circonscrite contient P tandis que \mathcal{B}_P , la *boule* de P , est l'ensemble des tétraèdres formés en joignant P aux faces externes de \mathcal{C}_P .

2.3. Régénération de la frontière du domaine

En appliquant le noyau de Delaunay à l'ensemble des points de la frontière du domaine à mailler, on obtient un maillage de la boîte dont les sommets sont, outre les points définissant cette boîte, les sommets des faces (extrémités des arêtes) du maillage de la frontière. Néanmoins, en général, ceci ne garantit pas l'existence de toutes ces arêtes et faces, par suite il n'est pas possible d'extraire du maillage de la boîte un (premier) maillage du domaine auquel on s'intéresse.

Il est donc nécessaire de modifier le maillage actuel pour régénérer les entités de la frontière manquantes.

Une succession de modifications topologiques (basculer d'arêtes et de faces) couplées avec une éventuelle création de points (les points de *Steiner*) permet, en général, d'arriver au résultat cherché, cf. [GEO 91b] et [WEA 90] par exemple. Le domaine est alors défini correctement et il est possible de créer des points en son intérieur.

2.4. Création des points internes

La méthode retenue consiste à analyser les arêtes internes du maillage actuel et, en fonction des situations, à construire des points sur celles-ci. Une fois ces points créés, ils sont insérés en utilisant à nouveau le noyau de Delaunay.

Soit AB une arête du maillage actuel et soient h_A et h_B les tailles¹ souhaitées en A et B . Le but de la méthode est de déterminer s'il est nécessaire ou non de construire un ou plusieurs points sur AB . En cas de réponse positive, il faut trouver à la fois le nombre de points, n , à créer et la position de ce(s) point(s) afin, d'une part, de saturer l'arête AB et, d'autre part, de faire en sorte que les points ainsi construits suivent une distribution régulière.

On peut choisir une progression arithmétique pour cette distribution de points. Ainsi, cf. [GEO 91c], si $h(0) = h_A$ est la taille associée à $P_0 = A$ et $h(n+1) = h_B$

1. Si A est un sommet de la frontière, son h est calculé comme la moyenne des longueurs des arêtes de la peau incidentes en A . Si A est un point interne, son h est connu, il a été calculé par interpolation lors de la création du point A .

est celle de $P_{n+1} = B$, on peut définir une suite α_i par

$$\begin{cases} \alpha_0 = h(0) + r \\ \alpha_n = h(n+1) - r \\ \alpha_i = d_{P_i, P_{i+1}} \end{cases}$$

où $d_{P_i, P_{i+1}}$ est la distance (euclidienne) entre P_i et P_{i+1} , tandis que r est la raison de la progression. Le problème revient alors à résoudre le système

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \alpha_i = d \\ \alpha_{i+1} = \alpha_i + r \end{cases}$$

pour trouver r et n , d étant la longueur de AB . Il vient

$$n = \frac{2d}{h(0) + h(n+1)} - 1$$

et

$$r = \frac{h(n+1) - h(0)}{n+2}.$$

Comme n doit être entier, la solution est recalée pour que n et r conduisent à une discrétisation exacte de l'arête examinée. Quand n et r sont calculés, la suite des α_i est connue et les points cherchés sont définis. On associe alors à chaque point ainsi défini une valeur, h , calculée à partir de celles associées à son arête support.

Ce procédé est itéré pour toutes les arêtes du maillage actuel et le paquet des points obtenus est alors filtré. Cette opération est liée au fait que les sommets sont bien placés les uns par rapport aux autres pour chaque arête, mais que globalement cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée (pensons aux sommets construits sur les arêtes incidentes en un même point).

Le filtrage utilise une technique de "bucket". Une grille est construite. Les points sont insérés dans les cases de cette grille en gérant les collisions (*i.e.*, lorsque plusieurs points tombent dans la même case) via une chaîne. Ensuite, pour déterminer si un point est trop proche d'un autre, on cherche dans quelle case tombe le point et on regarde par voisinage dans la grille, les points les plus proches. Il suffit alors de comparer les distances entre ces points pour savoir si le point examiné entre en conflit avec un point existant.

Les points retenus après filtrage sont insérés via le noyau de Delaunay et le processus complet est itéré tant que des arêtes du maillage courant sont à subdiviser car trop grandes par rapport aux h de leurs extrémités.

2.5. Optimisation

Le maillage obtenu après insertion des points ainsi construits est alors optimisé pour améliorer la qualité (en forme) des éléments. L'optimisation consiste à

- supprimer une face libre (par bascule),

- supprimer une arête libre (par réécriture locale),
- supprimer une arête libre par identification de ses deux extrémités,
- bouger un sommet libre,
- supprimer un sommet libre,

tant que la qualité s'améliore. Le critère de qualité retenu est défini comme

$$Q_{\mathcal{T}} = \max_{K \in \mathcal{T}} Q_K$$

pour le maillage avec, pour chaque élément, une qualité définie par

$$Q_K = \alpha \frac{h_{max}}{\rho_K}$$

où α est un coefficient de normalisation, h_{max} est le diamètre de l'élément K considéré et ρ_K est le rayon de sa sphère inscrite. Cette valeur mesure l'aspect de l'élément et représente la *qualité en forme* de celui-ci.

3. Spécification d'un champ de taille

La méthode classique, telle que rapidement rappelée ci-dessus, est uniquement contrôlée par la nature du maillage de la peau du domaine. Pour obtenir un contrôle plus précis à l'intérieur de celui-ci, il est nécessaire d'ajouter des informations indiquant les tailles souhaitées en telle ou telle région du domaine. Plusieurs solutions existent pour spécifier ces informations. Nous allons rapidement introduire les trois approches les plus utilisées.

3.1. Utilisation de sources

Dans ce cas, on fournit un certain nombre de points (ou sources) à l'intérieur du domaine. Un point source est défini par ses coordonnées et une valeur h , taille souhaitée en son voisinage. Il y a alors deux façons de prendre en compte l'information relative à ces points.

- chaque point source sera sommet du maillage et agira (via son h) lors de l'analyse de toute arête l'ayant comme extrémité (on utilise ici la méthode classique telle que décrite ci-dessus),
- chaque source, étant plus tard insérée comme sommet ou non, intervient dans une zone définie par proximité.

La première approche est relativement simple à mettre en œuvre et existe dans [GEO 97a] (cf. l'exemple fourni plus bas) tandis que la seconde technique est plus délicate à implémenter. Il faut en effet déterminer les zones d'action des différentes sources les unes par rapport aux autres.

3.2. Utilisation d'une structure particulière

Dans ce cas, on spécifie l'information de taille en donnant à la fois une structure (généralement simple, une grille, un "octree") adéquate et le moyen de l'exploiter. Par exemple, si on prend le cas d'un octree (cf. [CHE 88] ou [YER 84]), chaque octant code la taille souhaitée en son voisinage soit via une valeur associée soit par sa taille elle-même, soit encore en fournissant comme point à insérer ses sommets (ou son centre). Dans ce cas, on devine aisément que la taille obtenue résulte de la nature de l'octree (finesse, profondeur). On pourra également se reporter à [RAS 95] qui utilise cette dernière technique dans le cadre d'une méthode frontale.

3.3. Utilisation d'un maillage de fond

Dans ce cas, un maillage, dit *maillage de fond*, est spécifié, aux sommets duquel des valeurs h sont données. Cette approche semble naturelle, en particulier dans le cadre d'une boucle d'adaptation. Le maillage de fond à l'étape i n'est autre que le maillage de l'étape $i - 1$ dont les sommets portent l'information voulue (obtenue via l'estimateur d'erreur par exemple). Dans la suite, c'est cette approche que nous retiendrons (hormis pour le premier jeu d'exemples donné ci-après).

4. Construction des points internes

On suit ici la même idée que dans la méthode classique. Les arêtes du maillage courant servent de support pour la construction des sommets internes. Les points vont être construits, pour une arête donnée, à une distance 1 les uns des autres, longueur unité mesurée en rapport avec le champ de taille. Cette notion de longueur unité est maintenant précisée.

4.1. Longueur unité

Les seules longueurs qui nous servent sont les longueurs d'arêtes évaluées en présence du champ de taille. Si AB désigne une arête et si $h(t)$ est la fonction de taille (t variant de 0 à 1 avec $t = 0$ pour A et $t = 1$ pour B), une telle longueur, cf. [BOR 96], s'exprime par

$$l_{AB} = d_{AB} \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt$$

où d_{AB} est la distance (usuelle) entre A et B . Dans notre cas, $h(t)$ n'est connue que de manière discrète (aux nœuds du maillage de fond), par suite le calcul ci-dessus ne

peut être qu'approché. Ainsi, la longueur d'une arête AB sera

- si $h(A)$ et $h(B)$ sont les seules valeurs connues

$$l_{AB} = \frac{d_{AB}}{2} \left(\frac{1}{h(A)} + \frac{1}{h(B)} \right)$$

- ou, si en plus de $h(A)$ et $h(B)$, sont connues les $h(M_i)$, tailles en n points M_i , ($i = 1, n$), de AB , alors (en posant $M_0 = A$ et $M_{n+1} = B$),

$$l_{AB} = \sum_{i=0}^{i=n} l_{M_i M_{i+1}}$$

avec maintenant (selon la formule de la longueur)

$$l_{M_i M_{i+1}} = \frac{d_{M_i M_{i+1}}}{2} \left(\frac{1}{h(M_i)} + \frac{1}{h(M_{i+1})} \right).$$

La méthode repose donc sur la connaissance de ces points M_i et des h associés. Pour obtenir cette information, on interroge le maillage de fond.

4.2. Interrogation du maillage de fond

Pour chaque arête (du maillage courant), on interroge le maillage de fond (noté \mathcal{T}_F) afin d'en tirer les informations relatives aux tailles souhaitées. Soit AB l'arête en question, on réalise l'intersection entre AB et \mathcal{T}_F :

- on cherche dans quel élément de \mathcal{T}_F se trouve A ,
- on cherche dans quel élément de \mathcal{T}_F se trouve B ,
- on cherche tout élément de \mathcal{T}_F coupé par AB .

Cette opération est basée sur un algorithme de localisation permettant de situer un point dans un maillage. Ce type d'algorithme ne marche que dans les maillages convexes et, par suite, doit être judicieusement mis en œuvre pour tenir compte du fait que \mathcal{T}_F n'est pas nécessairement convexe.

En effet, localiser un point dans un maillage non convexe peut conduire à "buter" sur une frontière, par suite, on ne peut pas trouver d'élément contenant le point examiné. Pour remédier à ce problème, on procède d'abord en sens inverse. On localise en premier les sommets du maillage de fond dans le maillage courant (qui, lui, est nécessairement convexe (on utilise en effet une boîte)). Ensuite, on "inverse" cette relation.

À l'issu de ce travail, on dispose de l'ensemble des éléments de \mathcal{T}_F coupés par AB et en corollaire de l'ensemble des points M_i (utilisés ci-dessus) dont le h est obtenu par interpolation à partir des h des sommets de l'élément de \mathcal{T}_F contenant ces points.

4.3. Analyse des arêtes et construction des points

L'analyse des arêtes consiste à en calculer la longueur et à comparer cette longueur à 1. Si AB est l'arête en cours de traitement et si M_i ($i = 1, n$) est l'ensemble des points définis ci-dessus alors l_{AB} est obtenu par la relation (10). Construire des points sur AB se fait alors par l'algorithme suivant

- $l = 0$.
- Faire de $i = 0$ à n
 - $l = l + l_{M_i, M_{i+1}}$
 - (A) - Si $l > 1$
 - créer un point entre M_i et M_{i+1} à la longueur 1 avec le point précédemment construit (le point $M_0 = A$ au départ),
 - $l = l - 1$ et retour en (A).
- Fin de la boucle Faire.

On calcule, au vol, le h des points ainsi construits par interpolation entre les h du segment $M_i M_{i+1}$ utilisé. Une fois toutes les arêtes traitées, on filtre le paquet de points (chaque point est bien situé sur son arête support de construction mais peut entrer en litige avec des points d'autres arêtes). Ce filtrage s'effectue comme dans le cas classique en changeant la manière dont on calcule la distance entre deux points réputés voisins.

Les points retenus sont alors insérés via le noyau de Delaunay et le processus d'analyse des arêtes du maillage courant est itéré tant que des arêtes sont de longueur plus grande que 1.

Notons que, en pratique, cette valeur 1 n'est pas la valeur utilisée dans le programme. Deux remarques nuancent le sens que l'on doit donner à cette valeur unité. En premier lieu, la longueur d'une arête n'est que rarement une valeur entière (et par conséquent, on ne peut pas la subdiviser en segments de longueur exactement 1), ensuite, il faut noter que couper en deux (si on prend cet exemple) une arête de longueur l plus grande que 1 mais plus petite qu'un seuil conduirait à construire deux arêtes de longueur plus petite que 1 mais "violant" deux fois le but (au lieu d'une seule fois dans la situation initiale).

5. Optimisation

Le but de cette phase est d'améliorer les longueurs des arêtes tout en maintenant une qualité en forme satisfaisante.

Dans certains cas, ces deux notions sont conflictuelles. Dans notre expérience, nous avons d'abord considéré le critère de taille avant de prendre en compte le critère de qualité.

5.1. Optimisation en qualité

Cette opération est identique au cas classique (cf. ci-dessus) et comprend l'ensemble des modifications classiques.

5.2. Optimisation en taille

Cette opération est propre au maillage contrôlé. Les outils de base sont identiques, au moins formellement, à ceux du cas classique. Le but est ici, tout en préservant une qualité en forme raisonnable, de traiter les arêtes de longueur incorrecte pouvant exister dans le maillage construit (en principe, le nombre de telles arêtes doit être faible, au moins quand le champ de taille ne présente pas de variation trop brutale). On se donne donc trois opérateurs spécifiques

- un opérateur pour “fusionner” les deux extrémités d’une arête trop courte,
- un opérateur pour casser en deux une arête trop longue,
- un opérateur de bougé de points à longueur unité.

Les deux premiers opérateurs sont classiques (la seule différence vient de la façon de calculer les longueurs d’arêtes). Le dernier opérateur s’écrit, si on bouge le point P :

$$\bar{P}_j = P_j + \frac{P_j P}{\|P_j P\|} \bar{h}_j$$

où les P_j sont les points tels qu’il existe une arête PP_j (ce sont donc les sommets autres que P de tous les tétraèdres ayant P comme sommet) et \bar{h}_j est tel que $l_{PP_j} = 1$. On obtient ainsi les points \bar{P}_j , positions idéales de P pour les arêtes PP_j et on en déduit un point moyen. On déplace alors P vers ce point tant que la nouvelle configuration reste valide.

5.3. Indice d’efficacité

Si l_i désigne la longueur de l’arête i mesurée dans le champ, on définit l’indice d’efficacité du maillage comme la valeur moyenne des carrés des écarts à 1 pour toutes les arêtes de ce maillage (on note na ce nombre d’arêtes). Ainsi, cet indice est défini par

$$\tau = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{na} e_i^2}{na}$$

avec $e_i = 1 - l_i$ si $l_i < 1$ ou $e_i = 1 - \frac{1}{l_i}$ si $l_i > 1$

Cet indicateur semble approprié pour évaluer rapidement la qualité d’un maillage vis-à-vis d’un champ de taille. Afin de donner une idée de la sensibilité de cette mesure, nous donnons le tableau 1 dans lequel on suppose que l est constante pour toutes

l	20	10	5	3	2	$\sqrt{2}$	1.3	1.2	1.1	1
τ	0.097	0.19	0.36	0.51	0.75	0.91	0.9467	0.9722	0.9917	1.

Tableau 1. Sensibilité de l'indice d'efficacité.

les arêtes (ce qui est non réaliste mais permet de voir l'incidence d'un défaut de taille sur la valeur τ) et indique que les arêtes sont l fois trop grandes ou trop petites ($l = 5$ (tout comme $l = 0.2$) signifie que les arêtes sont en défaut de longueur dans un rapport cinq, cinq fois trop longues (cinq fois trop courtes)). L'optimum est donc la valeur 1 et, en pratique, une valeur supérieure à .91 donne une garantie de respect très raisonnable du champ spécifié.

Ce tableau pourra être consulté lors de l'analyse des résultats présentés plus bas pour se donner une idée de la nature de ceux-ci.

6. Remaillage unité de la surface

Cette étape du processus de maillage est non triviale et, à elle seule, justifierait quelques développements (voir par exemple [BOR 97]). Dans ce qui suit nous n'allons que donner les grandes lignes d'un schéma possible pour construire, par remaillage de la surface actuelle, un maillage adapté de cette dernière.

On suppose donc que la surface à mailler est connue, du point de vue géométrique, soit directement (analytiquement) soit via un maillage (adéquat).

Dans le cas où la surface est connue directement, on est capable (par exemple en "posant des questions" à un code de CAO) d'extraire les informations utiles au processus de *remaillage* envisagé (normale, plan tangent, courbure).

Dans le cas où la surface est définie par un maillage, ce dernier sert de base à la construction d'un support mathématique ([GEO 97b]). Ce support permet alors de se ramener au cas précédent, on sait en effet "interroger" la surface pour en extraire les informations dont on a besoin.

On suppose par ailleurs que l'on dispose déjà d'un maillage quelconque (qui peut être le maillage servant de support) et on se propose de donner une méthode permettant de construire un nouveau maillage respectant telle ou telle propriété, le problème est donc un problème de *remaillage*. Les informations utiles à un tel remaillage consistent essentiellement à :

- savoir positionner un point sur la surface,
- connaître la géométrie de la surface en un point donné (normales, rayon de courbure minimal, rayons de courbure principaux).

On définit alors quelques opérations locales permettant de :

- créer et insérer un point,

- supprimer un point,
- effectuer une bascule d'arête.

Ces opérations logiques utilisent quelques opérateurs locaux qui, pour la plupart, sont les mêmes que ceux utilisés pour l'optimisation. En particulier, du point de vue topologique, on doit savoir :

- basculer une arête,
- remailler un "polygone" (pour supprimer un point).

À partir de l'ensemble de ces outils, il est possible de remailler une surface. L'idée de base est toujours la même, on remaille de telle sorte que les arêtes du nouveau maillage soient de longueur unité (dans une métrique liée à la géométrie de la surface) tout en s'assurant de la qualité des éléments générés et en vérifiant la géométrie de la surface. Notons que l'on considère en premier le remaillage des arêtes vives de la surface.

7. Quelques résultats

On va donner plusieurs exemples de maillages gouvernés construits par la méthode proposée (hormis le premier, construit par la méthode classique) en notant, à titre de synthèse, que la méthode proposée suit le schéma rappelé au départ et que seules les phases de création de points et d'optimisation ont été modifiées.

Le premier jeu d'exemples correspond au cas où un, puis deux points sources sont utilisés. Les autres exemples sont gouvernés par un maillage de fond aux sommets duquel une fonction de taille est spécifiée analytiquement (mais, pour s'éloigner d'une situation académique et se rapprocher d'un cas concret, ne sera utilisé que de manière discrète, c'est-à-dire aux nœuds du maillage de fond courant). Le premier de ces exemples est à frontière fixe (le maillage de la surface respecte le champ donné) tandis que pour les autres, le maillage de la surface ne suit pas le champ, la surface doit alors être remaillée à chaque itération (le dernier exemple correspond à un domaine non convexe).

7.1. Un premier exemple (à frontière fixe) avec sources

On donne ici deux exemples. Le domaine est une sphère de rayon 1, centrée à l'origine. Sa surface, maillée régulièrement, impose une taille pratiquement constante de l'ordre de 0.08.

On impose alors (figure 1) un point source défini par ses coordonnées, ($x = 0.25, y = 0.25, z = 0.50$), et une taille $h = 0.025$. Ce point joue donc le rôle d'un attracteur, en son voisinage les mailles seront plus fines. L'autre exemple (figure 2) comprend deux points sources, ($x = 0.25, y = 0.25, z = 0.50$) et ($x = -0.25, y = -0.25, z = 0.50$) de tailles respectives $h = 0.015$ et $h = 0.30$. Le premier est donc

un attracteur tandis que le second est un répulseur. Pour chacun de ces exemples, on montre une coupe, par le plan $z = 0.5$, du maillage obtenu.

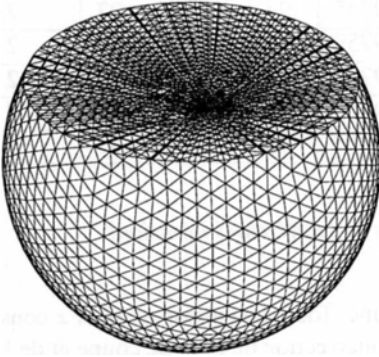


Figure 1. Coupe du maillage avec le plan $z = 0.5$ (une source)

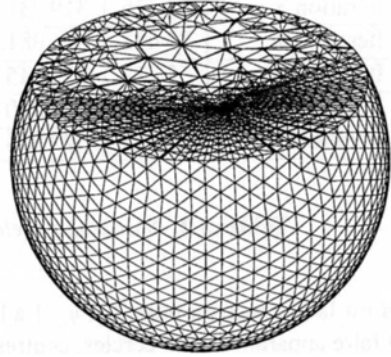


Figure 2. Coupe du maillage avec le plan $z = 0.5$ (deux sources)

Le maillage de la figure 1 comprend 171 151 tétraèdres, celui de la figure 2 en a 107 404. La vitesse de génération (sur ces exemples) est de l'ordre de 800 000 éléments par minute (HP9000/C180).

Cette approche de contrôle par points sources (utilisés ici comme sommets) a l'avantage d'être très rapide (la vitesse obtenue est la même que celle d'un mailleur "classique"). Par contre, elle présente quelques faiblesses relatives à

- la difficulté liée à la définition des points sources,
- l'effet de ces points (effet plus ou moins prévisible),
- etc.

Ainsi, selon la nature de l'application, cette approche sera utilisable sans problème ou difficilement contrôlable.

7.2. Un premier exemple (à frontière fixe) avec maillage de fond

Le domaine à mailler est une simple sphère de rayon 1, centrée à l'origine. Le champ de contrôle des tailles est défini de manière analytique par la relation suivante :

$$h(x, y, z) = 0.45 \times \|d - 0.15\| \times \|d - 0.65\| + 0.261$$

-	np	ne	τ	per	Q	1 - 2	2 - 3
Maillage initial	1 663	8 340	.5857	3	2.11	98	1
Itération 1	48 514	289 746	0.9719	94	4.97	96	2
Itération 2	52 977	316 927	0.9749	97	4.47	97	2
Itération 3	53 426	319 731	0.9755	97	4.99	97	2
Itération 4	53 642	321 081	0.9759	98	4.89	97	2
Itération 5	53 718	321 545	0.9761	98	3.90	97	2
Itération 6	53 798	322 070	0.9763	98	4.26	97	2
Itération 7	53 887	322 553	0.9765	98	4.11	97	2

Tableau 2. Statistiques relatives aux différentes itérations.

où d est la distance du point (x, y, z) à l'origine. Toute coupe par un plan z constant doit faire apparaître deux cercles, centrés à l'intersection du plan de coupe et de l'axe des z .

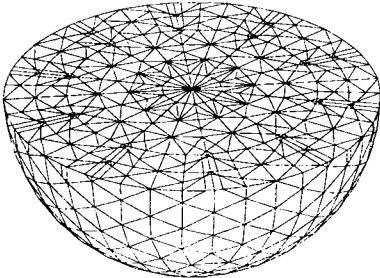


Figure 3. Coupe du maillage initial avec le plan $z = 0$

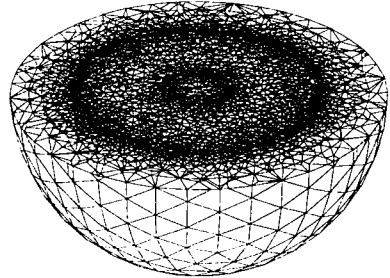


Figure 4. Coupe du maillage de l'itération 4 avec le plan $z = 0$

La vitesse de génération (sur cette série d'exemples) est comprise entre 300 000 et 450 000 éléments par minute (HP9000/C180).

Dans cet exemple, relativement simple (il n'y a pas de variation trop grande entre les h spécifiés), la convergence est obtenue rapidement (cf. le tableau 2 dans lequel le nombre de sommets est np , le nombre d'éléments est ne , τ désigne l'indice d'efficacité introduit ci-dessus tandis que per indique le nombre d'arêtes (en pourcentage) de longueur unité (en pratique, de longueur comprise entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}$). Par ailleurs, Q

est la qualité du maillage, la colonne 1 – 2 indique le pourcentage d'éléments dont la qualité est comprise entre 1 (le tétraèdre équilatéral) et 2 tandis que la colonne 2 – 3 correspond aux éléments de qualité comprise entre 2 et 3), on peut en effet considérer que dès l'itération trois, le résultat est pratiquement stable.

7.3. Un second exemple (à frontière variable) avec maillage de fond

Le domaine à mailler est une simple sphère de rayon 1, centrée à l'origine. Le champ de contrôle des tailles, sensiblement plus contraignant que dans l'exemple précédent (hors le fait qu'il affecte également la surface), est défini de manière analytique² par la relation suivante :

$$h(x, y, z) = \min_{i=1,6}(h_i(x, y, z))$$

avec

$$h_1(x, y, z) = 1.5 \times \|d_1 - 1.\| + 0.006$$

$$h_2(x, y, z) = 1.5 \times \|d_2 - 1.\| + 0.006$$

$$h_3(x, y, z) = 1.5 \times \|d_3 - 1.\| + 0.012$$

$$h_4(x, y, z) = 1.5 \times \|d_4 - 1.\| + 0.012$$

$$h_5(x, y, z) = 1.5 \times \|d_5 - 1.\| + 0.018$$

$$h_6(x, y, z) = 1.5 \times \|d_6 - 1.\| + 0.018$$

où d_1 est la distance entre le point (x, y, z) et le point $(1., 0., 0.)$, d_2 est la distance au point $(-1., 0., 0.)$, d_3 est la distance au point $(0., 1., 0.)$, d_4 est la distance au point $(0., -1., 0.)$, d_5 est la distance au point $(0., 0., 1.)$ et d_6 est la distance au point $(0., 0., -1.)$. En pratique, ce champ ne sera connu qu'aux sommets du maillage de fond correspondant à l'itération en cours.

On regarde, en premier, l'évolution du maillage de la surface en fonction des itérations (figures 5 à 12). Ces figures indiquent l'effet du maillage de fond quant à la qualité de la capture du champ de contrôle. Le maillage de la figure 5 ne suit absolument pas le champ, en effet, ce maillage a été construit sans tenir compte de ce champ. Le maillage de la figure 6 ne capte pas le champ spécifié et, de plus, présente des zones maillées trop finement. Ce phénomène est lié au fait qu'il existe des arêtes dont les extrémités ont une taille petite et que le maillage de fond ne donne pas d'indication supplémentaire entre ces extrémités. Par suite, une telle arête ne peut être que découpée trop finement. Le maillage de la figure 7 laisse voir une capture relativement bonne du champ avec, toutefois, quelques défauts de densité. Le dernier maillage (figure 8) est jugé satisfaisant.

On montre maintenant, figures 9 à 24, des coupes du maillage volumique au fil des itérations.

2. Ce type de fonction a été choisi pour faciliter d'une part l'appréciation rapide des résultats et d'autre part pour simuler des champs de taille avec des variations significatives.

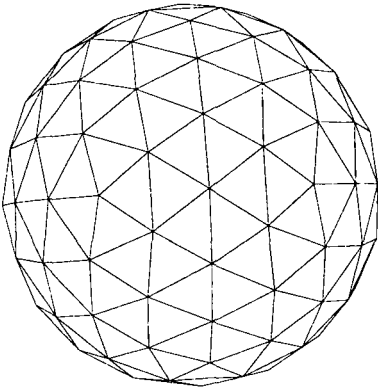


Figure 5. *Le maillage initial de la surface (122 sommets et 240 triangles)*

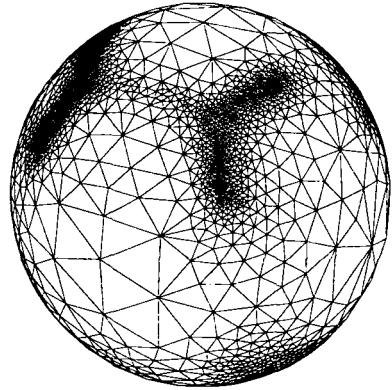


Figure 6. *Le maillage de la surface à l'itération 1 (3 489 sommets et 6 974 triangles)*

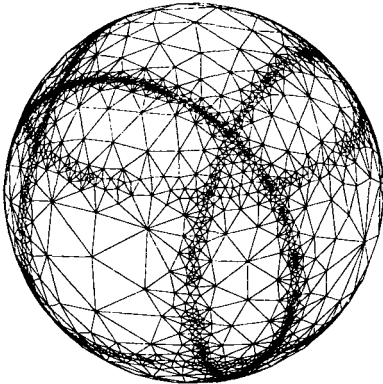


Figure 7. *Le maillage de la surface à l'itération 3 (3 964 sommets et 7 924 triangles)*

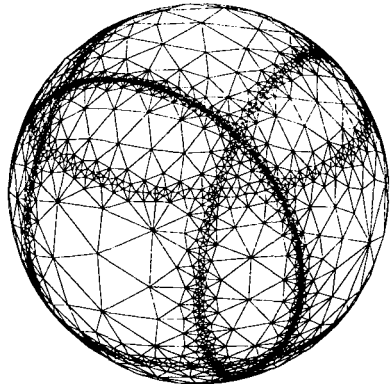


Figure 8. *Le maillage de la surface à l'itération 7 (4 766 sommets et 9 528 triangles)*

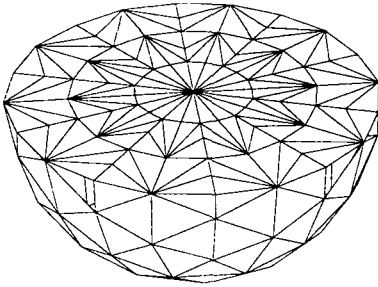


Figure 9. Coupe du maillage initial avec le plan $z = 0$

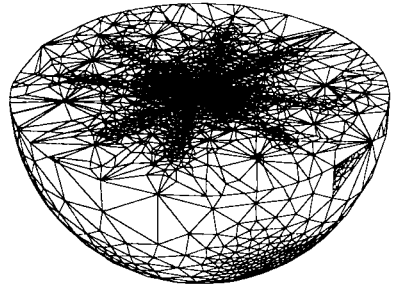


Figure 10. Coupe du maillage de l'itération 1 avec le plan $z = 0$

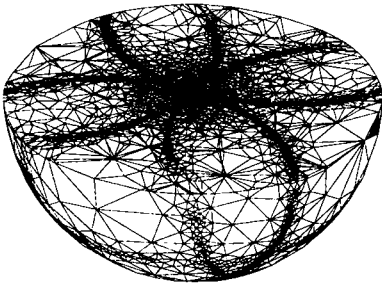


Figure 11. Coupe du maillage de l'itération 3 avec le plan $z = 0$

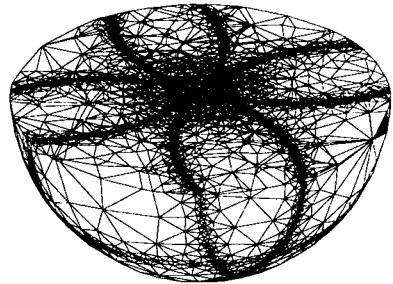


Figure 12. Coupe du maillage de l'itération 7 avec le plan $z = 0$

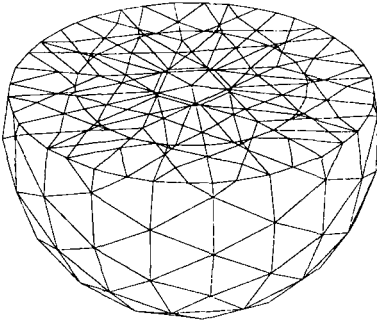


Figure 13. Coupe du maillage initial avec le plan $z = 0.25$.

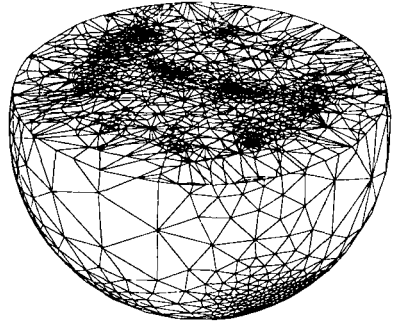


Figure 14. Coupe du maillage de l'itération 1 avec le plan $z = 0.25$

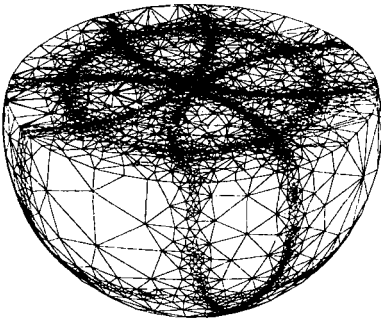


Figure 15. Coupe du maillage de l'itération 3 avec le plan $z = 0.25$

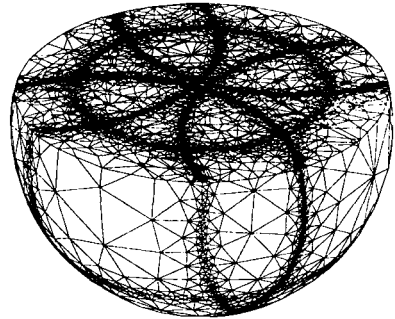


Figure 16. Coupe du maillage de l'itération 7 avec le plan $z = 0.25$

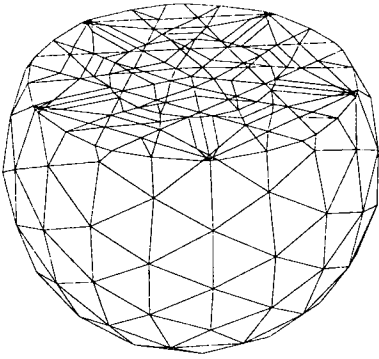


Figure 17. Coupe du maillage initial avec le plan $z = 0.50$

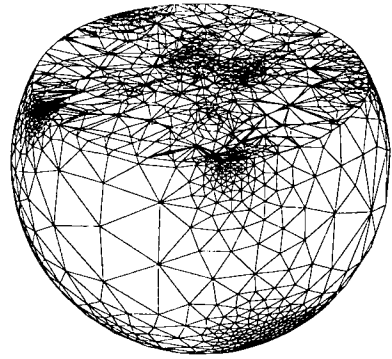


Figure 18. Coupe du maillage de l'itération 1 avec le plan $z = 0.50$

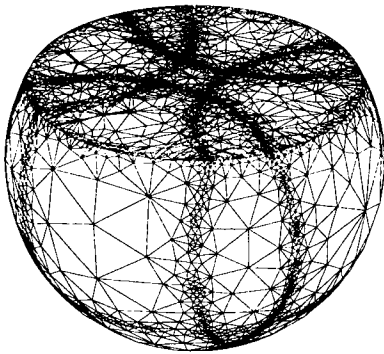


Figure 19. Coupe du maillage de l'itération 3 avec le plan $z = 0.50$

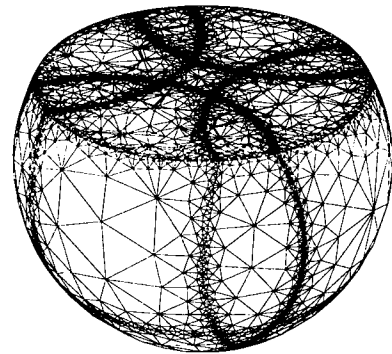


Figure 20. Coupe du maillage de l'itération 7 avec le plan $z = 0.50$

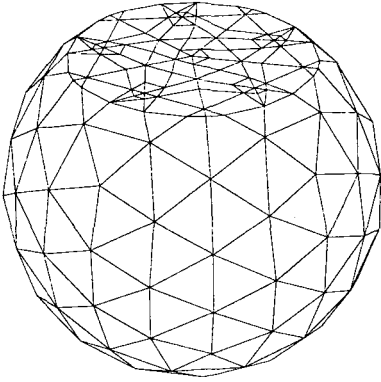


Figure 21. Coupe du maillage initial avec le plan $z = 0.75$

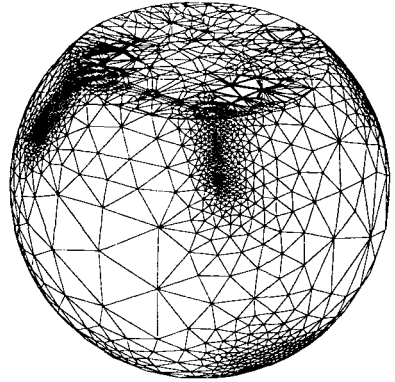


Figure 22. Coupe du maillage de l'itération 1 avec le plan $z = 0.75$

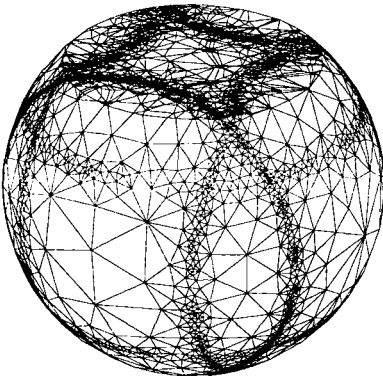


Figure 23. Coupe du maillage de l'itération 3 avec le plan $z = 0.75$

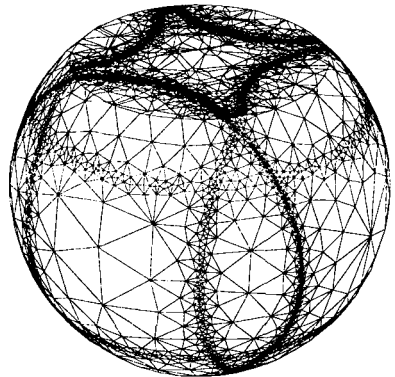


Figure 24. Coupe du maillage de l'itération 7 avec le plan $z = 0.75$

-	np	ne	τ	per	Q	1 - 2	2 - 3
Maillage initial	277	1 200	0.515	7	1.84	100	-
Itération 1	23 023	124 362	0.814	37	47.	81	11
Itération 3	115 215	647 119	0.9448	78	12.	78	20
Itération 7	253 068	1 416 617	0.9616	86	8.	74	24

Tableau 3. *Statistiques relatives aux différentes itérations.*

-	np	ne	τ	per	Q	1 - 2	2 - 3
Maillage initial	3 703	12 993	0.784	33	5.63	95	3
Itération 1	26 701	126 296	0.905	61	7.60	90	8
Itération 2	59 398	306 830	0.959	86	7.69	89	10
Itération 3	70 292	366 798	0.967	91	11.00	89	10
Itération 4	76 888	405 436	0.971	94	11.51	90	9

Tableau 4. *Statistiques relatives à la pièce mécanique "lmount".*

Le tableau 3 consigne les statistiques relatives aux différents itérés avec les paramètres introduits pour le tableau 2.

La vitesse de génération (sur cette série d' exemples) est comprise entre 200 000 et 350 000 éléments par minute (HP9000/C180).

7.4. Un exemple non convexe (à frontière variable) avec maillage de fond

Cet exemple correspond à une pièce mécanique dont la géométrie est représentative de toute une classe de problèmes (non convexité, forme relativement complexe, peu de volume). Le champ de contrôle est donné de manière analytique, il est construit à partir de la boîte englobant l'objet (un parallélépipède) et indique une variation de taille suivant six sphères centrées aux six milieux des faces de cette boîte. La taille requise est petite sur ces sphères et grandit quand on s'en éloigne.

On montre sur la figure 25 la triangulation initiale de la surface de l'objet et sur les figures 26 à 28 les maillages correspondant aux itérations 1 à 3 de la boucle d'adaptation.

Les quatre dernières figures montrent des coupes par le plan $x + y + z + 0.19 = 0$ des maillages volumiques des itérations 0 (le maillage initial non adapté) à 3. Le tableau 4 reporte, avec les mêmes paramètres que le précédent, les statistiques relatives à ces maillages.

La vitesse de génération est de l'ordre de 300 000 éléments par minute (station HP9000/C180). Les résultats semblent, au vu à la fois des dessins et des statistiques, tout à fait raisonnables. Ceci indique qu'il n'y a pas de difficulté supplémentaire pour traiter un objet réaliste par rapport au cas académique présenté auparavant.

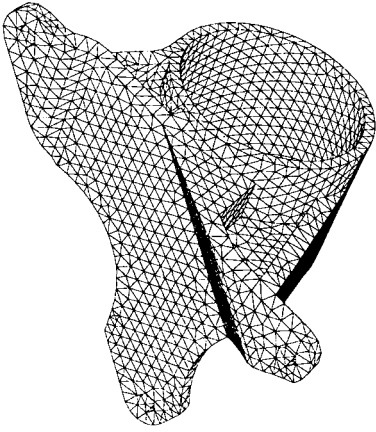


Figure 25. *Le maillage initial de la surface (courtesy of MSC)*

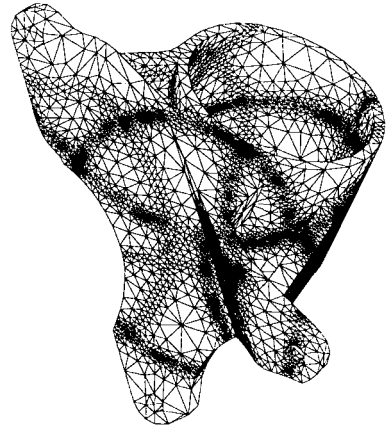


Figure 26. *Le maillage de la surface à l'itération 1*

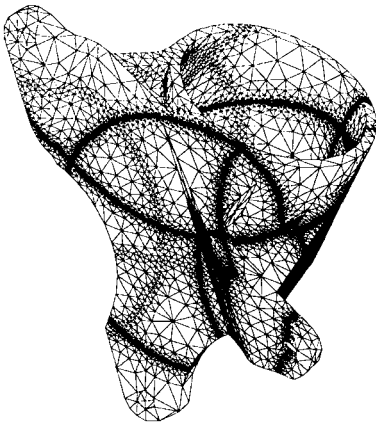


Figure 27. *Le maillage de la surface à l'itération 2*

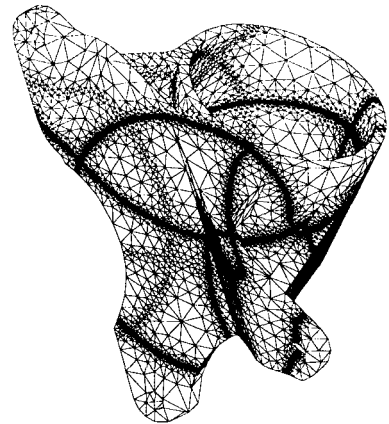


Figure 28. *Le maillage de la surface à l'itération 3*

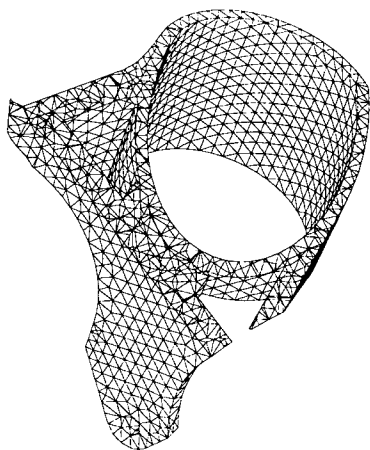


Figure 29. *Le maillage volumique initial*

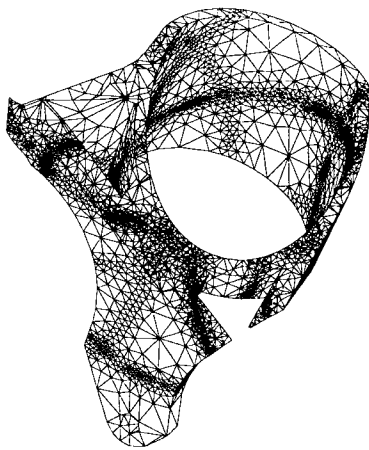


Figure 30. *Le maillage volumique à l'itération 1*

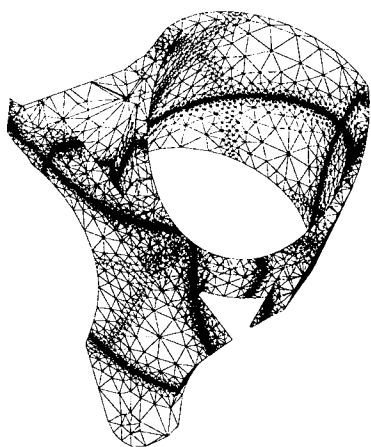


Figure 31. *Le maillage volumique à l'itération 2*

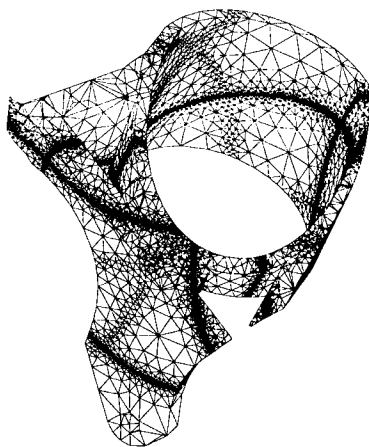


Figure 32. *Le maillage volumique à l'itération 3*

8. Extensions et conclusions

La validation de la méthode de maillage proposée doit se poursuivre, en particulier avec des exemples tirés d'applications industrielles. On pense principalement aux problèmes de mécanique du solide en se plaçant dans une boucle complète d'adaptation incorporant le cycle (construction de maillage, calcul, estimateur d'erreur) avec un champ de taille déduit de l'estimateur d'erreur et non pas spécifié analytiquement. Par ailleurs, l'approche proposée, par reconstruction totale du maillage à chaque itéré doit être comparée avec les méthodes d'adaptation par modifications locales.

D'un point de vue plus technique, il serait bon d'améliorer la vitesse de création des maillages qui semble être de l'ordre de deux à trois fois plus faible que pour un mailleur "classique".

Enfin, une extension au cas de la construction de maillages anisotropes semble naturelle, en particulier en changeant la notion de longueur unité et en généralisant le noyau de Delaunay (cf. [BOR 96]).

9. Bibliographie

- [BAK 88] T.J. BAKER, Generation of tetrahedral meshes around complete aircraft, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics '88*, Miami, 1988.
- [BOR 97] H. BOROUCAKI, P.J. FREY, Optimization tools for Adaptive Surface Meshing, *Trends in Unstructured Mesh Generation*, AMD, 220, 81-88, McNU'97, Chicago, 1997.
- [BOR 96] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, Triangulation de Delaunay et métrique riemannienne. Applications aux maillages éléments finis, *Revue européenne des éléments finis*, 5(3), 323-340, 1996.
- [CHE 88] J.H. CHENG, P.M. FINNIGAN, A.F. HATHAWAY, A. KELA, W.J. SCHOEDER, Quadtree/octree meshing with adaptive analysis, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics '88*, Miami, 1988.
- [CIA 78] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problem*, North Holland, 1978.
- [GEO 91a] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillage. Applications aux méthodes d'éléments finis*, Masson, RMA n° 16, Paris, 1991. Also as *Automatic mesh generation. Applications to finite element methods*, Wiley, 1991.
- [GEO 96] P.L. GEORGE, Automatic Mesh Generation and Finite Element Computation, in *Handbook of Numerical Analysis*, vol IV, Finite Element methods (Part 2), Numerical Methods for Solids (Part 2), P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, North Holland, 69-190, 1996.
- [GEO 97a] P.L. GEORGE, Improvement on Delaunay based 3D automatic mesh generator, *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(3-4), 297-317, 1997.
- [GEO 97b] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI, *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermes, Paris, 1997.

- [GEO 91b] P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 92, 269-288, 1991.
- [GEO 91c] P.L. GEORGE, F. HECHT, M. G. VALLET, Creation of internal points in Voronoi's type method, Control and adaptation, *Adv. in Eng. Soft.*, 13(5/6), 303-313, 1991.
- [GEO 92] P.L. GEORGE, F. HERMELINE, Delaunay's mesh of a convex polyhedron in dimension d. Application to arbitrary polyhedra, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, 33, 975-995, 1992.
- [LOH 88] R. LÖHNER, P. PARIKH, Generation of 3D unstructured grids by advancing front method, *AIAA 26 Aerospace Sciences meeting*, Reno Nevada, 1988.
- [RAS 95] A. RASSINEUX, Maillage automatique tridimensionnel par une méthode frontale pour la méthode des éléments finis, Thèse, Nancy I, 1995.
- [RAS 97] A. RASSINEUX, Maillage automatique tridimensionnel par une technique frontale et respect d'une carte de taille, *Revue européenne des éléments finis*, 6(1), 43-70, 1997.
- [SHE 88] M.S. SHEPHARD, F. GUERINONI, J.E. FLAHERTY, R.A. LUDWIG, P.L. BAEHMANN, Finite octree mesh generation for automated adaptive 3D flow analysis, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics '88*, Miami, 1988.
- [VAL 92] M.G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, Thèse, Université Paris 6, 1992.
- [WAT 81] D.F. WATSON, Computing the n-dimensionnal Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes, *Computer Journal*, 24(2), 167-172, 1981.
- [WEA 90] N.P. WEATHERILL, The integrity of geometrical boundaries in the 2-dimensional Delaunay triangulation, *Comm. in Appl. Num. Meth.*, 6, 101-109, 1990.
- [YER 84] M.A. YERRI, M.S. SHEPHARD, Automatic 3D mesh generation by the modified-octree technique, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, 20, 1965-1990, 1984.

Article reçu le 4 septembre 1997.

Version révisée le 8 avril 1998.