
Un algorithme de décomposition convexe pour l'étude de structures en alliage à mémoire de forme Application aux manchons de raccordement

Stéphane Pagano — Pierre Alart — Frédéric Lebon

*Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, CNRS
UMR 5508, Université Montpellier 2, cc048
F-34095 Montpellier cedex 5
{pagano,alart,fred}@lmgc.univ-montp2.fr*

RÉSUMÉ. On présente dans cet article une modélisation théorique et numérique de manchons de raccordement en alliage à mémoire de forme. La modélisation prend en compte le comportement des alliages à mémoire de forme, les couplages thermomécaniques forts et le contact frottant. La résolution numérique est basée sur un algorithme de différence convexe associé à deux algorithmes de point fixe pour le problème thermique et le frottement.

ABSTRACT. We present, in this paper, a theoretical and numerical modelisation of the coupling sleeves. The model takes into account shape memory alloys behavior, thermomechanics couplings and frictional contact. The numerical solution is based on a convex difference algorithm associated with two fixed point algorithms for thermal and frictional problems.

MOTS-CLÉS : alliage à mémoire de forme, transition de phase, contact unilatéral, frottement, couplages thermomécaniques, décomposition convexe, point fixe, Gauss-Seidel projeté, méthode de Cranck-Nicholson.

KEY WORDS: shape memory alloys, phase transition, unilateral contact, friction, thermomechanical couplings, convex decomposition, fixed point, Gauss-Seidel with projection, Cranck-Nicholson method.

1. Introduction

Les alliages à mémoire de forme (AMF) se caractérisent par des comportements particuliers. Ils peuvent subir des déformations très importantes, en apparence plastiques, et pourtant réversibles de l'ordre de dix fois celles observées généralement en élasticité. Ils se dilatent lorsque la température diminue et réagissent à une sollicitation mécanique donnée de façon très différente pour des températures voisines de quelques degrés seulement. Ces phénomènes sont dus à un changement de phase à l'état solide appelé *transformation martensitique* qui caractérise une modification de la structure cristallographique de l'alliage métallique. Dans le cas des AMF il y a changement de forme lors du passage de l'état austénitique à l'état martensitique ; une chaleur latente est absorbée ou dégagée suivant le sens de la transformation et on parle de comportement *pseudo-élastique*. Différentes approches ont été développées pour modéliser le comportement pseudo-élastique des AMF. Citons les travaux de Achenbach et Müller [ACH 85], Frémond [FRE 87a], Patoor, Eberhardt et Berveiller [PAT 87], Sprekels [SPE 90], Ball et James [BAL 92], Raniecki, LExcellent et Tanaka [RAN 92], Abeyaratne et Knowles [ABE 93], Chrysochoos, Löbel et Maisonneuve [CHR 95], LExcellent et Licht [LEX 91], Nguyen et Moumni [NGU 95].

Même si la découverte de ces alliages date des années trente (alliage Au-Cd) leur application industrielle date seulement du début des années soixante. Du fait de leur coût ces alliages sont longtemps restés des curiosités de laboratoire. Pourtant, leurs propriétés peuvent paraître intéressantes d'un point de vue strictement technologique. A partir des années soixante-dix, un certain nombre de développements, coïncidant avec l'apparition de nouveaux alliages (CuAlZn, CuAlNi, NiTi...), ont vu le jour : actionneurs de satellite, de friteuse, implants cardio-vasculaires, armatures de lunettes, baleines de soutien-gorge, thermomarqueurs... Les difficultés rencontrées dans le développement de ces alliages sont principalement liées à leur extrême sensibilité. Une très faible variation dans leur composition peut entraîner de très grandes différences au niveau de leur tenue mécanique. De plus leur usinage est extrêmement complexe entraînant un coût très élevé et une très faible production. Toutefois, ces matériaux devraient encore connaître d'importants développements dans les années à venir. L'une des premières et des plus célèbres applications industrielles des AMF a été le manchon de raccordement et d'étanchéité pour tuyauterie (cf. [PAT 90]). Cette technique a été développée par l'industrie aéronautique militaire américaine. Elle utilise l'effet mémoire simple sens et l'effort considérable qui est développé par ces matériaux lorsque l'on empêche leur retour à leur forme initiale (figure 1). Le principe est bien connu, c'est celui du fretage.

L'effet mémoire simple sens se caractérise par :

- une importante dilatation lorsque l'on refroidit un AMF (sous une contrainte macroscopique nulle) à partir d'un état austénitique en dessous d'une certaine température de transformation,
- un retour à la forme initiale après retour à la température initiale.

On présente dans cet article une modélisation des différents phénomènes entrant en jeu dans cette application : transformation de phase (fort couplage thermomécanique), contact et frottement.

La loi de comportement de l'AMF est celle non monotone donnée par M. Frémond [FRE 87a], loi capable de rendre compte simplement du changement de phase et déjà étudiée par les auteurs dans le cas d'éprouvettes en CuZnAl [PAG 96]. Le contact frottant est modélisé par les lois de Signorini et de Coulomb [MOR 66].

La loi de comportement utilisée ici se prête à une résolution numérique par un algorithme de *Décomposition Convexe (D.C.)* [AUC 89]. Cet algorithme est basé sur la décomposition de l'énergie potentielle en la différence de deux fonctions convexes. On est alors conduit à chercher des points critiques d'un Lagrangien introduit par Auchmuty [AUC 89]. Cette recherche se fait par une succession de minimisations globales et locales.

L'algorithme D.C. est couplé à deux algorithmes de point fixe, l'un pour le problème thermique, l'autre pour le problème de frottement [RAO 88, LEB 92]. Le problème thermique est résolu par une méthode de Cranck-Nicholson, le problème de frottement est résolu par une méthode de Gauss-Seidel surrelaxée projetée.

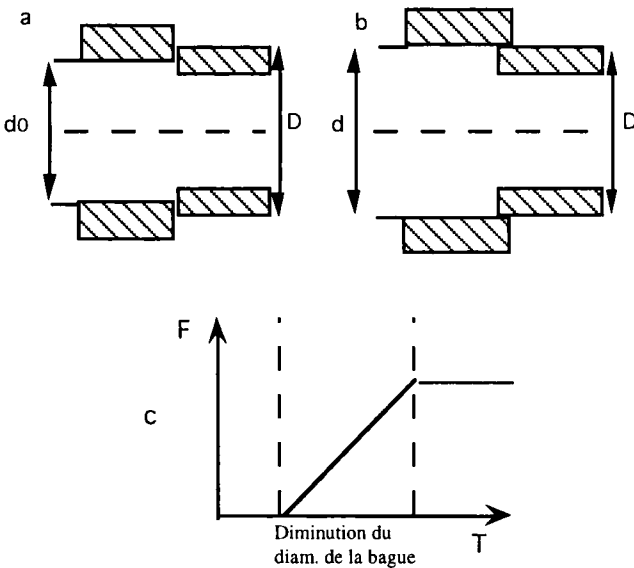


Figure 1. Principe du manchon a) le diamètre intérieur d_0 de la bague est inférieur au diamètre D , b) la bague est dilatée, son diamètre d devient supérieur à D , c) la bague développe un effort de serrage (*d'après [PAT 90]*)

Dans la première partie, on décrit le problème mécanique dans le cadre des matériaux standard généralisés. Dans la seconde partie, on présente les différents algorithmes utilisés, en particulier l'algorithme D.C. Enfin, la dernière partie est consacrée à l'étude numérique des manchons de raccordement. On tiendra compte, en particulier, de défauts géométriques ou comportementaux.

2. Modélisation des AMF

2.1. Loi de comportement

Les lois proposées par Michel Frémond [FRE 87a] permettent de représenter le comportement instable du matériau à l'échelle microstructurale lors du changement de phase. On suppose que seulement une austénite et deux types de martensite sont en présence. Les densités d'énergie libre volumiques des phases martensitiques sont notées W_i ($i = 1,2$) et W_0 celle de l'austénite.

$$W_0(e,T) = \frac{1}{2} eKe - c(T) - C_0 T \log T, \quad [1]$$

$$W_1(e,T) = \frac{1}{2} eKe - \alpha(T) \operatorname{tr} e - C_0 T \log T, \quad [2]$$

$$W_2(e,T) = \frac{1}{2} eKe + \alpha(T) \operatorname{tr} e - C_0 T \log T. \quad [3]$$

avec

$$\alpha(T) = \begin{cases} -a(T-T_0) & \text{si } T \leq T_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } c(T) = \frac{\mathfrak{L}}{T_0}(T-T_0) \quad [4]$$

où T et e représentent respectivement la température et le tenseur des déformations linéarisées, K est le tenseur de rigidité, C_0 est la capacité calorifique, \mathfrak{L} est la chaleur latente de changement de phase austénite-martensite, a est un coefficient lié à la dilatation thermique et T_0 et T_c sont des températures caractéristiques du matériau. On suppose par la suite que T_0 est inférieure ou égale à T_c . On remarque que α est une fonction positive de la température T .

Dans ces potentiels, le terme $\frac{1}{2} eKe$ représente la densité d'énergie élastique, le terme $c(T)$ est une densité associée au changement de phase austénite-martensite, $\alpha(T) \operatorname{tr} e$ est un terme lié à la dilatation thermique lors du changement de phase et $C_0 T \log T$ est lié au couplage thermique. On écrit la densité d'énergie libre du mélange Ψ comme une combinaison convexe des énergies de chacune des phases. Les proportions β_i ($i = 1,2$) des martensites sont astreintes à rester dans le simplexe C (figure 2) :

$$C = \{(\gamma_1, \gamma_2), 0 \leq \gamma_i \leq 1, i = 1,2; \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1\}. \quad [5]$$

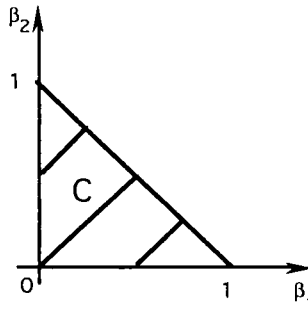


Figure 2. Le simplexe C auquel appartiennent les proportions volumiques de martensites

Ψ peut donc se mettre sous la forme :

$$\Psi(T,e,\beta_1,\beta_2) = (1 - \beta_1 - \beta_2)W_0(T,e) + \beta_1 W_1(T,e) + \beta_2 W_2(T,e) + T I_C(\beta_1,\beta_2) \quad [6]$$

où I_C est la fonction indicatrice du simplexe C définie par

$$I_C(\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\gamma_1,\gamma_2) \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le dernier terme de [6] est un terme d'énergie d'interaction qui pourrait être choisi de manière plus complexe [FRE 96]. L'énergie libre du mélange a une forme très simple, la fonction indicatrice imposant uniquement des conditions sur les proportions de martensite β_1 et β_2 . Elle apparaît comme une fonction linéaire des variables β_1 et β_2 , convexe par rapport à e et concave par rapport à la température.

En utilisant le formalisme des matériaux standard généralisés [HAL 75] et en négligeant la dissipation intrinsèque – hypothèse confirmée par des expériences menées au laboratoire [CHR 95] – on peut éliminer les variables internes β_1 et β_2 dans le potentiel [PAG 97a]. Ce potentiel, noté W , dépend seulement des variables d'état T et e et s'exprime comme le minimum de l'énergie libre du mélange par rapport aux variables internes. La fonctionnelle Ψ étant linéaire par rapport à β_1 et β_2 , le minimum est atteint au bord du triangle C et W s'écrit comme le minimum des énergies de chacune des trois phases :

$$\begin{aligned} W(e,T) &= \min \{ \Psi(T,e,\beta_1,\beta_2), (\beta_1,\beta_2) \in C \} \\ &= \min \{ W_0(e,T), W_1(e,T), W_2(e,T) \}. \end{aligned} \quad [7]$$

On représente sur la figure 3, l'énergie W pour trois températures caractéristiques.

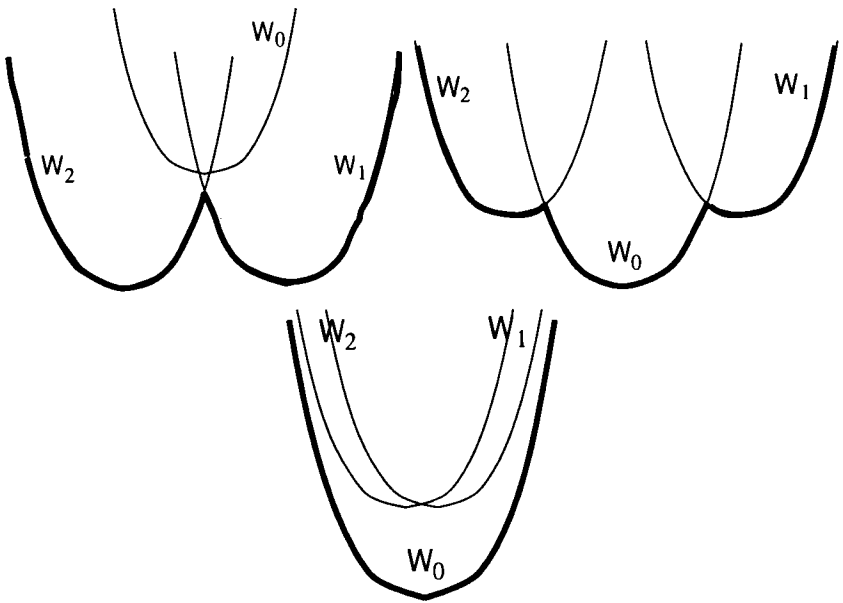


Figure 3. *Potentiel pour $T \leq T_0$, $T_0 \leq T \leq T_c$ et $T \geq T_c$*

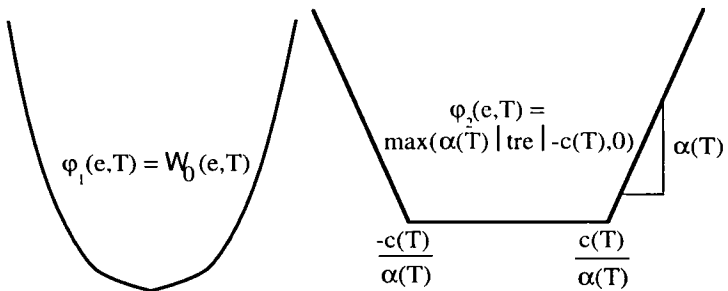


Figure 4. *Décomposition convexe du potentiel pour $T_0 \leq T \leq T_c$*

En extrayant la densité d'énergie libre de la phase austénitique du minimum des trois énergies et par des transformations élémentaires, on montre que le potentiel $W(e, T)$, non convexe et non différentiable, peut s'écrire comme la différence de deux fonctions convexes [PAG 96] φ_1 et φ_2 ,

$$\varphi_1(e, T) = \frac{1}{2} eKe - c(T) - C_0 T \log T, \tag{8}$$

$$\varphi_2(e, T) = \max (\alpha(T) |tr e| - c(T), 0). \tag{9}$$

Cette décomposition pour un cas unidimensionnel est présentée sur la figure 4 dans le cas d'une température intermédiaire T ($T_0 \leq T \leq T_c$).

A partir de cette décomposition, on écrit la loi de comportement du matériau sous la forme suivante :

$$\sigma \in \partial_e \varphi_1(e(u), T) - \sigma_2, \text{ pour tout } \sigma_2 \in \partial_e \varphi_2(e(u), T) \quad [10]$$

où ∂_e est l'opérateur sous-différentiel [MOR 63] et u le champ des déplacements.

La loi de comportement obtenue est présentée sur la figure 5 pour différentes températures dans un cas unidimensionnel. A basses températures (figure 5a), le premier type de martensite existe pour des déformations positives et le second pour des déformations négatives. A des températures intermédiaires (figure 5b), la loi de comportement est plus complexe. La phase austénitique existe pour des déformations comprises entre $-c(T)/\alpha(T)$ et $c(T)/\alpha(T)$ alors que la phase martensitique existe pour des déformations supérieures à $c(T)/\alpha(T)$ ou inférieures à $-c(T)/\alpha(T)$. Enfin, à hautes températures (Figure 5c), on obtient une loi de comportement de type élastique linéarisée et seule la phase austénitique est présente. Dans les deux premiers graphes $\alpha(T)$ représente le saut de contrainte lors du passage de la phase austénitique à l'une des deux phases martensitiques et le coefficient $c(T)/\alpha(T)$ représente la valeur du seuil de changement de phase en déformation.

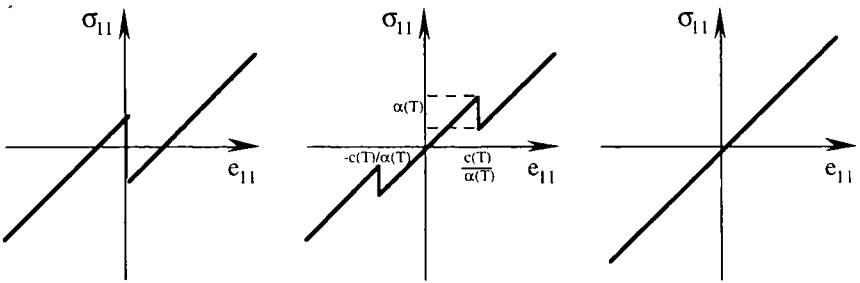


Figure 5. Loi de comportement pour $T \leq T_0$, $T_0 \leq T \leq T_c$ et $T \geq T_c$

2.2. Modélisation du contact et du frottement

2.2.1. Généralités et notations

On désire prendre en compte le contact entre la bague en alliage à mémoire de forme et les tuyaux. On appelle Ω la structure plane considérée c'est-à-dire la bague en AMF. On notera Γ_c la frontière de contact bague/tuyau, Γ_d et Γ_f les parties de la frontière de Ω où respectivement des déplacements et des efforts surfaciques extérieurs sont imposés.

Soit $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre 1 et H le sous-espace de $(H^1(\Omega))^2$ défini ci-dessous,

$$H = \{v \in (H^1(\Omega))^2, \gamma v = U \text{ sur } \Gamma_d\}, \tag{11}$$

γ désigne l'opérateur trace sur la frontière Γ_d . On notera $H_0^1(\Omega)$ (resp. H_0) le sous-espace de $H^1(\Omega)$ (resp. $(H^1(\Omega))^2$) dont la trace est nulle sur le bord. On suppose par la suite que les tuyaux sont parfaitement rigides.

On introduit le référentiel local (n,t) où n désigne la normale extérieure à Ω et le convexe de contact \mathbb{K} définissant l'ensemble des champs cinématiquement admissibles

$$\mathbb{K} = \{v \in H, v_N \leq 0\}, \tag{12}$$

où v_N est la composante normale de la trace du déplacement v sur le bord du domaine Γ_c . On notera v_T la composante tangentielle du déplacement et σ_N, σ_T respectivement les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte σn . Les forces thermodynamiques seront décomposées en partie réversible (indignée r) et irréversible (indignée ir).

2.2.2. Lois d'état

Les conditions de contact unilatéral (conditions de Signorini) sont prises en compte en ajoutant au potentiel défini dans le paragraphe précédent la fonction indicatrice du convexe \mathbb{K} des champs de déplacements admissibles,

$$\phi(e(v), T) = W(e(v), T) + I_{\mathbb{K}}(v), \tag{13}$$

où $I_{\mathbb{K}}$ est la fonction indicatrice du convexe \mathbb{K} .

Les lois d'état s'écrivent,

$$\sigma^r \in \partial_e \phi_1(e(u), T) - \sigma_2, \text{ pour tout } \sigma_2 \in \partial_e \phi_2(e(u), T) \text{ dans } \Omega, \tag{14}$$

$$-(\sigma_N^r, \sigma_T^r) \in \partial I_{\mathbb{K}}(u) \text{ sur } \Gamma_c. \tag{15}$$

En transformant [15], grâce à des considérations d'analyse convexe, on obtient que la partie irréversible de la contrainte tangentielle est nulle sur la frontière de contact. Ce qui donne le problème de complémentarité,

$$\sigma_N^r \leq 0, u_N \leq 0, \sigma_N^r u_N = 0 \text{ sur } \Gamma_c. \tag{16}$$

2.2.3. Lois complémentaires

Le pseudo-potentiel de dissipation associée à la loi de Coulomb, supposé ici indépendant de la température, s'écrit,

$$\mathfrak{D}(\overset{\circ}{v}_T) = \mu |\sigma_N^r| \|\overset{\circ}{v}_T\|, \tag{17}$$

où $\overset{\circ}{v}$ désigne la dérivée par rapport au temps du champ de déplacement v .

Dans le domaine Ω la contrainte irréversible est nulle car le potentiel de dissipation ne dépend pas de la vitesse de déformation. Sur la frontière du domaine, il en est de même pour la composante normale irréversible de la force thermodynamique. Il nous reste donc sur la frontière de contact,

$$\sigma_T = \sigma_T^{ir} \in -\partial\mathfrak{D}(\overset{\circ}{u}_T) \text{ sur } \Gamma_C. \tag{18}$$

En explicitant l'équation [18], on en déduit le principe de dissipation minimale [MOR 66] et l'écriture classique de la loi de Coulomb [LEB 92],

$$|\sigma_T| \leq \mu |\sigma_N| \text{ sur } \Gamma_C \tag{19}$$

$$\text{si } |\sigma_T| < \mu |\sigma_N| \text{ alors } \overset{\circ}{u}_T = 0 \tag{20}$$

$$\text{si } |\sigma_T| = \mu |\sigma_N| \text{ alors } \overset{\circ}{u}_T = -\lambda \sigma_T, \lambda > 0. \tag{21}$$

La figure 6 représente les graphes des lois de frottement et de contact en un point de la surface de contact. Les figures 5 et 6 montrent que le problème est très fortement non linéaire (non-linéarité de la loi de comportement dans le domaine et non-linéarité des lois d'interface).

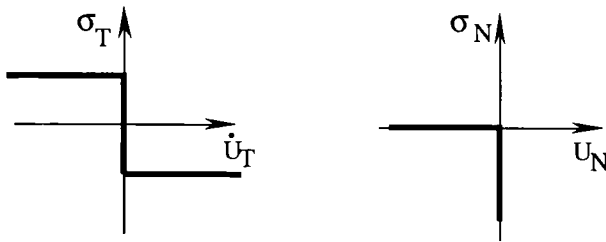


Figure 6. Lois de frottement et de contact

2.2.4. Equations d'équilibre et formulation variationnelle

On se place sous des hypothèses quasi-statiques et dans le cadre des petites perturbations. On note f et F respectivement les efforts volumiques appliqués dans Ω et surfaciques appliqués sur Γ_f . On suppose qu'à l'instant initial le champ des déplacements et le tenseur « de changement de phase » σ_2 sont donnés. Les équations d'équilibre s'écrivent,

$$\text{div } \sigma + f = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{22}$$

$$u = U \text{ sur } \Gamma_d, \tag{23}$$

$$\sigma n = F \text{ sur } \Gamma_f. \tag{24}$$

A ces trois équations sont associées les conditions de Signorini [16], la loi de Coulomb [18], [19], [20], [21] et la loi de comportement [14].

Afin de formuler le problème variationnel en termes de déplacements, on applique le principe des travaux virtuels,

$$\int_{\Omega} \sigma(u):e(v) \, dx - \int_{\Gamma_c} \sigma n \cdot \gamma v \, dl = l(v), \quad \forall v \in H_0 \tag{25}$$

où $l(v)$ désigne le travail virtuel des efforts extérieurs (volumiques et surfaciques).

La relation [14] s'écrit comme un système de deux inégalités qui découle de la définition d'un sous-différentiel. Après intégration sur le volume et la frontière, il vient,

$$\int_{\Omega} K e(u):e(v-\overset{\circ}{u}) \, dx - \int_{\Gamma_c} \sigma n(u) \cdot \gamma(v-\overset{\circ}{u}) \, dl \geq l(v-\overset{\circ}{u}) + \int_{\Omega} \sigma_2:(e(v-\overset{\circ}{u})) \, dx, \quad \forall v \in H_0 \tag{26}$$

et pour chaque $\sigma_2 \in L = L^2(0,T; (L^2(\Omega))^6)$

$$\Phi_2(e(v),T) - \Phi_2(e(u),T) \geq \int_{\Omega} \sigma_2:(e(v)-e(u)) \, dx, \quad \forall v \in H_0, \tag{27}$$

avec

$$\Phi_2(e(v),T) = \int_{\Omega} \phi_2(e(v),T) \, dx. \tag{28}$$

Par la suite, on notera,

$$\Phi_1(v,T) = \int_{\Omega} \varphi_1(e(v),T) dx - l(v). \tag{29}$$

Le terme sur Γ_c dans l'équation [26] doit satisfaire aux lois de contact et de frottement [15] et [18]. En utilisant une démarche similaire à celle proposée dans [COC 95], on obtient la formulation variationnelle en termes de déplacements composée de trois inéquations variationnelles couplées.

PROBLEME M

$u_0 \in H, \Sigma_2 \in (L^2(\Omega))^6$ donnés, trouver $u \in V = H^1(0,T; \mathbb{K})$ et $\sigma_2 \in L$ tels que
 $u(0) = u_0$ dans Ω , [30]

$\sigma_2(0) = \Sigma_2$ dans Ω , [31]

$$\int_{\Omega} Ke(u):e(v-\overset{\circ}{u}) dx + j(u,v) - j(u,\overset{\circ}{u}) \geq l(v-\overset{\circ}{u}) + \int_{\Omega} \sigma_2:(e(v)-e(\overset{\circ}{u})) dx$$

$$+ \int_{\Gamma_c} \sigma_N(u)(v_N-u_N) dl, \forall v \in H_0, \tag{32}$$

et pour chaque $\sigma_2 \in L$ tel que

$$\Phi_2(e(v),T) - \Phi_2(e(u),T) \geq \int_{\Omega} \sigma_2:(e(v)-e(u)) dx, \forall v \in H_0, \tag{33}$$

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N(u) (z_N - u_N) dl \geq 0 \forall z \in \mathbb{K} \tag{34}$$

avec $j(u,v) = - \int_{\Gamma_c} \mu \sigma_N(u) |v_T| dl. \tag{35}$

2.3. Equation de la chaleur

L'entropie massique s du matériau dérive de la densité d'énergie libre du mélange Ψ ,

$$s = \frac{\partial \Psi}{\partial T}(e(u),T) \tag{36}$$

En l'absence de source de chaleur, le second principe de la thermodynamique s'énonce sous la forme,

$$\dot{s} + \text{div}\left(\frac{q}{T}\right) = \frac{d}{T} \geq 0 \tag{37}$$

où $d = d_1 + d_2$ est la dissipation totale et q le vecteur flux de chaleur. En négligeant la dissipation intrinsèque d_1 [CHR 93, CHR 95] et en utilisant la loi de Fourier $q = k \text{ grad}(T)$, on obtient l'équation de la chaleur suivante,

$$\rho C_0 \dot{T}(x,t) - k \Delta T(x,t) = \rho \mathcal{L} \dot{\beta}_1(x,t) + \rho \mathcal{L} \dot{\beta}_2(x,t) = S(x,t), \tag{38}$$

où ρ est la densité volumique et k la conductivité thermique.

Dans cette modélisation les proportions de martensite β_i ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. En un point donné de la structure une seule phase est présente et ceci revient à représenter *la transition de phase de manière instantanée*. L'ensemble M_i définit l'ensemble des points où la phase martensitique i est active,

$$M_1 = \{(x,t), \alpha(T) \text{ tr } e(x,t) \geq c(T)\}, \tag{39}$$

$$M_2 = \{(x,t), \alpha(T) \text{ tr } e(x,t) \leq -c(T)\}. \tag{40}$$

Les champs de proportions de martensite β_1 et β_2 sont assimilables aux fonctions caractéristiques $\chi_1(x,t)$ et $\chi_2(x,t)$ des ensembles M_1 et M_2 ,

$$\chi_i(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in M_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les problèmes mécanique et thermique sont fortement couplés. Les fractions volumiques de martensite et d'austénite dans l'équation de la chaleur dépendent du problème mécanique et les coefficients α et c intervenant dans les équations d'équilibre sont des fonctions de la température.

On suppose que la température est imposée sur une partie de la frontière, notée Γ_I et que l'on a des conditions d'échange sur une autre partie de la frontière Γ_T . On appelle g le coefficient de transfert à travers cette frontière et T^{ext} (resp. T_I) la température extérieure (resp. imposée sur Γ_I).

On note Z le sous-espace de $H^1(\Omega)$ où la trace est égale à T_I sur Γ_I . La formulation variationnelle s'écrit classiquement :

PROBLEME T

$\theta_0 \in L^2(\Omega)$ donné, trouver $T \in W = H^1(0,T; Z)$ tel que

$$T(0) = \theta_0 \text{ dans } \Omega, \tag{41}$$

$$A(T, \theta) = L(\theta), \forall \theta \in H_0^1(\Omega), \tag{42}$$

avec

$$A(T, \theta) = \int_{\Omega} [\rho C_0 \overset{\circ}{T} \theta + k \text{grad}T \cdot \text{grad}\theta] dx + \int_{\Gamma_T} g_T \theta dl, \tag{43}$$

$$L(\theta) = \int_{\Omega} S \theta dx + \int_{\Gamma_T} g_T^{\text{ext}} \theta dl. \tag{44}$$

3. Résolution numérique

3.1. Algorithme de décomposition convexe (D.C.)

Dans un premier temps, on va s'intéresser à la résolution du seul problème de transition de phase à température constante et sans contact. Pour cela, on introduit un Lagrangien de type II défini par Auchmuty [AUC 89],

$$L_{II}(v, \tau) = \Phi_1(v) + \Phi_2^*(\tau) - \int_{\Omega} e(v) : \tau dx, \tag{45}$$

où Φ_2^* est la fonction convexe conjuguée de Fenchel de la fonction Φ_2 c'est-à-dire :

$$\Phi_2^*(\tau) = \sup_e \left(\int_{\Omega} e : \tau dx - \Phi_2(e) \right). \tag{46}$$

Ce Lagrangien est convexe par rapport à chacune des deux variables mais non convexe par rapport au couple. On associe de manière naturelle à ce Lagrangien un problème min-min (par analogie au problème min-max associé au Lagrangien classique convexe-concave). On en déduit un algorithme (tableau 1) convergeant vers un point ∂ -critique de cette fonctionnelle. Par définition, (u, σ_2) appartenant à $H \times (L^2(\Omega))^6$ est un point ∂ -critique de L_{II} si il vérifie les relations suivantes,

$$L_{II}(u, \sigma_2) \leq L_{II}(v, \sigma_2), \forall v \in H \tag{47}$$

$$L_{II}(u, \sigma_2) \leq L_{II}(u, \tau), \forall \tau \in (L^2(\Omega))^6. \tag{48}$$

ALGORITHME D.C.: u^k et σ_2^k donnés.

étape 1 : $u^{k+1} = \text{Argmin } L_{II} (\cdot , \sigma_2^k)$

$$\int_{\Omega} e(u^{k+1}) : Ke(v) \, dx = l(v) + \int_{\Omega} \sigma_2^k : e(v) \, dx$$

étape 2 : $\sigma_2^{k+1} \in \text{Argmin } L_{II} (u^{k+1}, \cdot)$

étape 3 : Test de convergence.

Tableau 1. *Algorithme de différence convexe (D.C.)*

Cet algorithme de descente permet de construire une suite en minimisant, alternativement, par rapport à la variable primale u et à la variable duale σ_2 . Dans cette approche, les deux sous-étapes sont des problèmes de minimisation convexe et on peut donc utiliser des algorithmes standard. La première minimisation est *globale*, on résout à chaque itération un problème d'élasticité classique dont le second membre est perturbé par un champ de contrainte connu (solution de l'étape précédente). La deuxième minimisation, *locale*, nécessite le calcul de la conjuguée de Fenchel φ_2^* de la densité d'énergie φ_2 dont la forme *analytique* est :

$$\varphi_2^*(\tau) = \begin{cases} \frac{c}{\alpha} |s| + I_{[-\alpha, \alpha]}(s) & \text{si } \tau = sI_2 \\ + & \text{sinon} \end{cases} \quad [49]$$

où I_m désigne le tenseur identité d'ordre m .

On s'intéresse par la suite à la seconde minimisation pour des discrétisations bidimensionnelles par différents types d'éléments finis. En notant K_i l'élément utilisé, [45] se met sous la forme :

$$L_{II}(u^{k+1}, \tau) = \Phi_1(u^{k+1}) + \sum_i \int_{K_i} (\varphi_2^*(\tau) - e(u^{k+1}) : \tau) \, dx. \quad [50]$$

Dans la suite, suivant la notation donnée dans [DHA 84], on note $[B]$ la matrice reliant les gradients aux variables nodales, $[R]$ la matrice reliant les gradients globaux aux gradients locaux, $\{I_2\}$ le vecteur de composantes $(1,1,0)$, $\{\sigma_2\}$

(resp. $\{\Sigma_2\}$) le vecteur des valeurs globales (resp. locales) aux points de Gauss de la « contrainte » σ_2^{k+1} à l'itération $k+1$ et $\{u_n\}$ les variables nodales du déplacement d'un élément à l'itération $k+1$.

a. *Elément P1 (triangle à 3 nœuds, interpolation linéaire)*

En utilisant ce type d'élément la déformation linéarisée e et la « contrainte » σ_2 deviennent constantes sur chaque triangle. La deuxième minimisation est donc locale et revient à minimiser sur chaque triangle le terme $\varphi_2^*(\tau) - e(u^{k+1}) : \tau$. Ceci nous conduit à chercher $\{\Sigma_2\} = [R]\{\sigma_2\}$ tel que $\{\Sigma_2\} \in \partial \varphi_2([B]\{u_n\})$. D'après la définition de φ_2 et les propriétés du sous-différentiel, on obtient cinq cas possibles en fonction des valeurs de la trace de la déformation locale $[B]\{u_n\}$:

- (i) si $\text{tr}([B]\{u_n\}) < -\frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_2\} = -\alpha\{\mathbb{I}_2\}$;
- (ii) si $\text{tr}([B]\{u_n\}) > \frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_2\} = \alpha\{\mathbb{I}_2\}$;
- (iii) si $-\frac{c}{\alpha} < \text{tr}([B]\{u_n\}) < \frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_2\} = 0$;
- (iv) si $\text{tr}([B]\{u_n\}) = \frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_2\} = s\{\mathbb{I}_2\}$, $s \in [0, \alpha]$;
- (v) si $\text{tr}([B]\{u_n\}) = -\frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_2\} = -s\{\mathbb{I}_2\}$, $s \in [0, \alpha]$.

b. *Elément P2 (triangle à 6 nœuds, interpolation quadratique)*

Dans ce cas la déformation et la « contrainte » sont affines sur chaque triangle. On choisit les trois points de Gauss, notés 1, 2 et 3, au milieu des arêtes du triangle (figure 7). Les déformations locales, notées $[e_1]$, $[e_2]$, $[e_3]$, calculées en chacun des points 1, 2 et 3 sont obtenues à partir des composantes de $[B]\{u_n\}$. Il faut donc minimiser le terme,

$$\sum_{i=1}^{i=3} (\varphi_2^*([\tau_i]) - [e_i] : [\tau_i]) \tag{51}$$

par rapport à la matrice locale $[\tau_i]$ (au point i). Ceci revient à minimiser une fonction convexe par rapport aux trois variables séparées $[\tau_1]$, $[\tau_2]$, $[\tau_3]$ ce qui se traduit par une minimisation en chacun des points de Gauss. En chacun de ces points, on

obtient cinq cas possibles en fonction des valeurs de la déformation au point considéré. Au point de Gauss i on a, en notant $\{\Sigma_{2i}\}$ la « contrainte » en ce point :

- (i) si $\text{tr}[e_i] < -\frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_{2i}\} = -\alpha\{\mathbb{I}_2\}$;
- (ii) si $\text{tr}[e_i] > \frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_{2i}\} = \alpha\{\mathbb{I}_2\}$;
- (iii) si $-\frac{c}{\alpha} < \text{tr}[e_i] < \frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_{2i}\} = 0$;
- (iv) si $\text{tr}[e_i] = \frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_{2i}\} = s\{\mathbb{I}_2\}$, $s \in [0, \alpha]$;
- (v) si $\text{tr}[e_i] = -\frac{c}{\alpha}$ alors $\{\Sigma_{2i}\} = -s\{\mathbb{I}_2\}$, $s \in [0, \alpha]$.

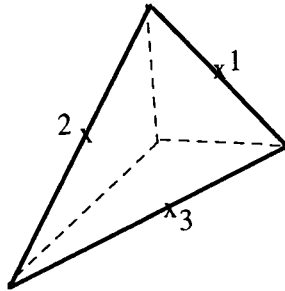


Figure 7. Points de Gauss pour l'élément P2

c. Élément quelconque (interpolation de type Lagrange avec N points de Gauss)

Dans ce cas, on peut généraliser la minimisation de [51] en introduisant les poids ω_i affectés à chacun des points de Gauss :

$$\sum_{i=1}^{i=N} \omega_i (\varphi_2^*([\tau_i]) - [e_i] : [\tau_i]). \tag{52}$$

où $[e_i]$ et $[\tau_i]$ sont respectivement les matrices des déformations locales et des « contraintes de changement de phase » locales calculées aux points de Gauss i .

Pour des raisons similaires au cas b, on obtient les cinq mêmes alternatives que celles présentées au b.(i)(ii)(iii)(iv)(v) pour les N points de Gauss de l'élément (voir par exemple la figure 8). En prenant pour ω_i la surface (resp. le tiers de la surface) de l'élément et un point (resp. trois points) de Gauss, on retrouve le cas a (resp. b).

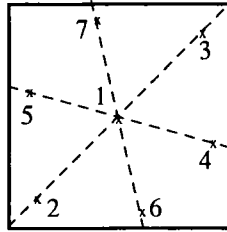


Figure 8. Un choix de 7 points de Gauss de l'élément Q_5

3.2. Application numérique dans le cas isotherme

On présente, afin de montrer l'efficacité et la robustesse de la méthode, l'exemple élémentaire d'une poutre en alliage Nickel-Titane en flexion (module d'Young $E = 85$ GPa et coefficient de Poisson $\nu = 0,3$). Cette poutre est encastree sur l'une de ses sections et l'on applique sur son autre section un chargement vertical de densité F égale à 70 MPa (figure 9). Ce test est intéressant car lors de cet essai les deux types de martensite apparaissent liés à une zone en traction et une zone en compression.

On considère trois niveaux de maillages triangulaires de type P1 (cf. 3.1), grossier (325 nœuds, 580 éléments), médian (808 nœuds, 1 504 éléments) et fin (2 527 nœuds, 4 860 éléments). La minimisation globale est effectuée à l'aide d'une méthode de gradient conjugué preconditionné (factorisation incomplète de Crout [JOL 90]). Le résultat de la minimisation locale nous donne le statut de l'élément (austénite ou martensites). Lorsque le statut est connu sur tous les éléments la convergence est obtenue en une itération. On mesurera donc la convergence sur la variation relative du déplacement (en norme euclidienne) au cours des itérations : lorsque ce critère vaut zéro la convergence est atteinte.

Le changement de phase est présenté sur la figure 8. La zone grise correspond à la phase austénitique, la zone noire à la phase martensitique activée en traction et la zone blanche à la deuxième martensite activée en compression. On observe que les résultats sont stables en fonction de la finesse du maillage. Dans les trois cas la convergence est rapide (figure 10) et le nombre d'itérations de l'algorithme D.C. ne dépend que très faiblement du pas de discrétisation : il est toujours de l'ordre de la dizaine. On remarque toutefois que le raffinement induit certaines fluctuations numériques liées à la recherche des statuts sur le front de changement de phase. De ce fait le nombre d'itérations devient légèrement supérieur aux cas de maillages plus grossiers.

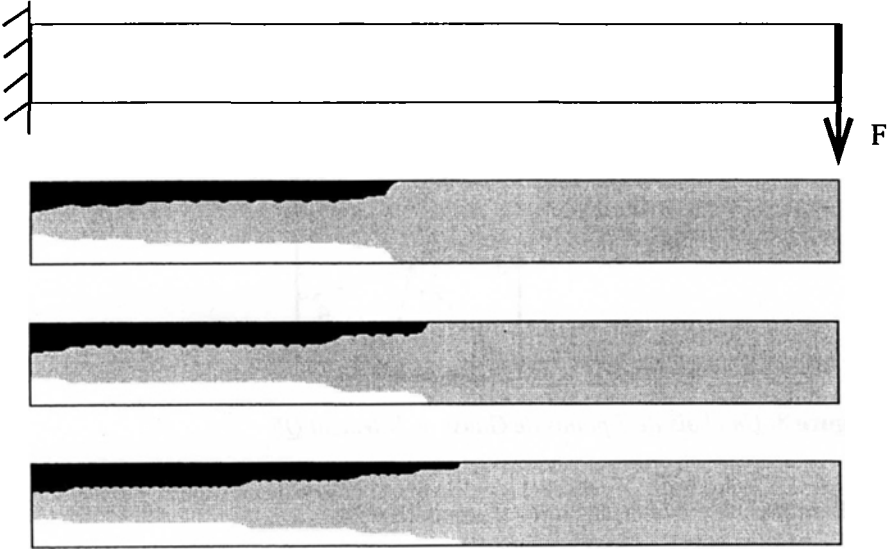


Figure 9. Poutre en flexion (maillages et changement de phase) avec $\alpha = 0,8 \text{ Jm}^3\text{kg}^{-1}$ et $c = 0,01 \text{ Jm}^3\text{kg}^{-1}$ (température intermédiaire)

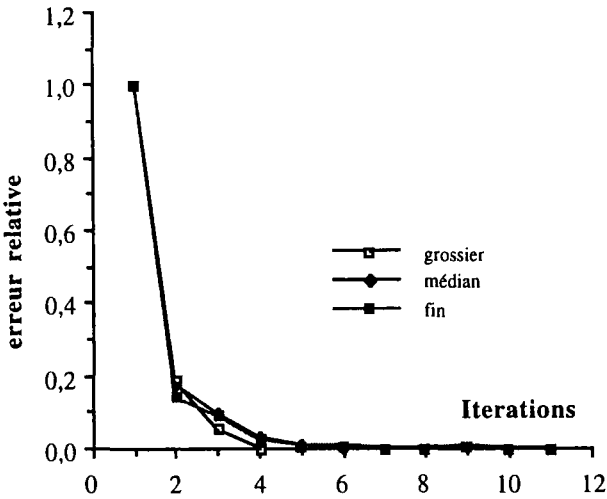


Figure 10. Convergence de l'algorithme D.C. pour trois maillages

3.3. Prise en compte de la température

On va expliciter dans un premier temps la résolution du problème thermique et dans un second temps la résolution du problème thermo-mécanique fortement couplé. On résout l'équation [38] par une méthode d'éléments finis. En suivant les notations introduites au paragraphe 3.1, [38] se met sous la forme,

$$[M] \{\dot{T}\} + [C] \{T\} = \{S_\beta\} \quad [53]$$

où $[M]$ et $[C]$ sont respectivement les matrices de capacité et de conductivité associées au problème thermique et $\{T\}$ est le vecteur des températures nodales. La matrice de capacité calorifique $[M]$ est concentrée aux nœuds pour des raisons de stabilité numérique.

Le système différentiel obtenu est résolu par une θ -méthode [CRO 92, CHA 89]. On note Δt le pas de temps et θ un coefficient de l'intervalle $[0,1]$. On se donne une subdivision régulière de l'intervalle $[0,T]$ et on pose $t_k = k\Delta t$. On indice par k les valeurs des variables à l'instant t_k . L'équation [53] devient,

$$([M] + \theta\Delta t[C]) \{T^{k+1}\} = ([M] + (1-\theta)\Delta t[C]) \{T^k\} + \Delta t(\theta\{S_\beta^{k+1}\} + (1-\theta)\{S_\beta^k\}) \quad [54]$$

Le terme $\{S_\beta^{k+1}\}$ est *a priori* inconnu. On introduit une méthode de point fixe : on suppose que les termes liés aux fractions volumiques de martensite sont donnés par la résolution du problème mécanique. La résolution du système permet de déterminer à partir de la température ainsi obtenue, les nouvelles valeurs de c et α qui sont injectées dans le problème mécanique. On itère ainsi jusqu'à obtention de la solution. L'algorithme est donné tableau 2 (on indice par r l'itération de point fixe).

Nous allons expliciter le calcul du terme $\{S_\beta^{k+1,r}\}$ pour différents types d'éléments finis. Pour cela, le second membre $S(x,t)$ de l'équation [38] est approché par,

$$\rho \mathcal{L} \left(\frac{\beta_1^{k+1,r} - \beta_1^k}{\Delta t} + \frac{\beta_2^{k+1,r} - \beta_2^k}{\Delta t} \right). \quad [55]$$

Au niveau de l'élément K_i , si l'on note $\langle N_i \rangle$ le vecteur des fonctions d'interpolation, la contribution élémentaire de $S(x,t)$ devient dans le cas d'un élément à N points de Gauss,

$$\sum_{j=1}^{j=N} \omega_j \langle N_i(j) \rangle S(j), \quad [56]$$

où $S(j)$ et $\langle N_i(j) \rangle$ sont respectivement les valeurs de S et de la fonction d'interpolation au point de Gauss. Dans le cas d'un élément P1, [56] vaut le sixième de la valeur de S sur l'élément.

ALGORITHME D.C.T: (au pas $k+1$)

étape 1 : $\{T^{k+1,0}\} = \{T^k\}, \{S_\beta^{k+1,0}\} = \{S_\beta^k\}$

étape 2 : Résolution du problème thermique (itération r)

$$([M] + \theta\Delta t[K]) \{T^{k+1,r}\} = ([M] + (1-\theta)\Delta t[K]) \{T^k\} + \Delta t(\theta\{S_\beta^{k+1,r-1}\} + (1-\theta)\{S_\beta^k\})$$

$$\rightarrow \{T^{k+1,r}\} \qquad \rightarrow \{c^{k+1,r}\}, \{\alpha^{k+1,r}\}$$

étape 3 : Résolution du problème mécanique (D.C.)

$$\rightarrow \{u^{k+1,r}\}, \{\sigma_2^{k+1,r}\} \qquad \rightarrow \{S_\beta^{k+1,r}\}$$

étape 4 : Test d'arrêt sur le point fixe (variation relative de la température)

Début du pas de temps suivant $k+2$

Tableau 2. *Algorithme de différence convexe avec prise en compte de la température (D.C.T.)*

3.3. Prise en compte du contact frottant

De façon similaire au terme de fraction volumique, le terme en vitesse dans les équations de contact-frottant [32][33] est approché par une différence finie,

$$\overset{\circ}{u}^{k+1} \cong \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \frac{\Delta u^k}{\Delta t} \quad [57]$$

A l'instant t_{k+1} , le problème mécanique M est exprimé sous la forme d'un problème de point fixe sur le seuil de glissement [LEB 92]. On a alors à chercher g^{k+1} le **point fixe** de l'application $g \mapsto \mu | \sigma_N(u^{k+1}(g)) |$ où u^{k+1} est solution du problème M' à seuil fixé,

PROBLEME M' (à l'instant t_{k+1})

trouver $u^{k+1} = u^k + \Delta u^k \in \mathbb{K}$ et $\sigma_2^{k+1} \in (L^2(\Omega))^6$ tels que

$$\Phi_1(v, T^{k+1}) - \Phi_1(u^{k+1}, T^{k+1}) + j(v) - j(u^{k+1}) \geq \int_{\Omega} \sigma_2^{k+1} : (e(v) - e(u^{k+1})) dx, \forall v \in \mathbb{K}, \quad [58]$$

et pour chaque $\sigma_2^{k+1} \in (L^2(\Omega))^6$ tel que,

$$\Phi_2(e(v), T^{k+1}) - \Phi_2(e(u^{k+1}), T^{k+1}) \geq \int_{\Omega} \sigma_2^{k+1} : (e(v) - e(u^{k+1})) dx, \forall v \in H_0, \quad [59]$$

$$\text{avec } j(v) = \int_{\Gamma_c} g |v_T - u_T^k| dl. \quad [60]$$

Ces équations sont résolues par un algorithme D.C. La minimisation locale [59] est identique à celle présentée au paragraphe 3.1. La minimisation globale [58] est obtenue par un algorithme de Gauss-Seidel Projeté avec Surrelaxation [RAO 88, LEB 92]. Il s'agit d'un algorithme de Gauss-Seidel avec Surrelaxation modifié; la composante normale est projetée dans \mathbb{R}_- et la composante tangentielle est obtenue en testant le signe de l'itérée lié à la « dérivée » de j (équation [60]). L'algorithme de point fixe traite le caractère non associé de la loi de Coulomb ; il autorise de plus une grande souplesse dans le choix de l'algorithme de résolution du problème complet. On peut choisir de placer la boucle de point fixe sur le frottement avant ou après celle sur la fraction volumique de martensite. D'autres algorithmes, en particulier une formulation de type quasi-Lagrangien augmenté associé à une méthode de Newton généralisée [ALA 91, ALA 95b, HEE 95], impose de résoudre le problème thermique avant le problème de contact frottant. Ils induisent également des systèmes non symétriques mal conditionnés [ALA 95a]. On choisit ici de prendre le point fixe sur le seuil de glissement interne au point fixe sur les fractions volumiques. Ceci permet d'utiliser un procédé diagonal pour le point fixe sur le seuil de glissement [RAO 88]. On utilise les mêmes notations au niveau de la discrétisation par éléments finis. En pratique, on utilise des éléments P1 qui sont d'utilisation simple pour la résolution des problèmes de contact [LEB 92]. On indice par s l'itération de point fixe sur le seuil de glissement. L'algorithme est donné tableau 3.

Les non-linéarités dues au contact-frottant sont prises en compte au niveau de la minimisation globale et celles dues à la loi de comportement au niveau de la minimisation locale. Elles sont donc toutes intégrées dans la résolution du problème mécanique.

ALGORITHME D.C.T.F.: (au pas $k+1$)

Boucle 1 : Point fixe sur les fractions volumiques

$$\{T^{k+1,0}\} = \{T^k\}, \{S_{\beta}^{k+1,0}\} = \{S_{\beta}^k\}, \{u^{k+1,0}\} = \{u^k\}$$

Résolution du problème thermique (itération r)

$$\rightarrow \{T^{k+1,r}\} \rightarrow \{c^{k+1,r}\}, \{\alpha^{k+1,r}\}$$

Boucle 2 : Point fixe sur le seuil de glissement

$$\{g^{k+1,0}\} = \{g^k\}, \{u^{k+1,r,0}\} = \{u^{k+1,r}\}, \{\sigma_2^{k+1,r,0}\} = \{\sigma_2^{k+1,r}\}$$

Résolution du problème mécanique (itération s) (D.C.)

$$\rightarrow \{u^{k+1,r,s}\}, \{\sigma_2^{k+1,r,s}\} \rightarrow \{S_{\beta}^{k+1,r,s}\}$$

Test d'arrêt sur le point fixe seuil de glissement

(variation relative du déplacement et du seuil de glissement)

$$\rightarrow \{u^{k+1,r}\}, \{\sigma_2^{k+1,r}\} \rightarrow \{S_{\beta}^{k+1,r}\}$$

Test d'arrêt sur le point fixe fractions volumiques

Début du pas de temps suivant $k+2$

Tableau 3. *Algorithme de différence convexe avec prise en compte de la température et du contact-frottant (D.C.T.F.)*

4. Résultats numériques

4.1. Manchons de raccordement

On présente l'exemple du frottement d'un tuyau supposé rigide par une bague en alliage Nickel-Titane de rayon 5 cm (module d'Young $E = 85$ GPa, coefficient de Poisson $\nu = 0,3$, $a = 300$ J K⁻¹kg⁻¹, $\rho = 7\,900$ kg m⁻³, $T_0 = 210$ K, $T_C = 280$ K,

$\mathcal{L} = 3\,000 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $g = 500 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$). Pour des raisons de symétrie, on considère seulement le quart ou la moitié du manchon de raccordement selon la géométrie du tuyau considéré (circulaire ou elliptique). On s'intéresse par la suite à différents cas de conditions aux limites thermiques entre la bague et le tuyau : les conditions de type échange de chaleur (conditions de type Fourier) tiennent compte ou non du contact par l'intermédiaire du coefficient d'échange g (ce coefficient prendra la valeur $2\,000 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ dans le cas où il y a contact). Dans tous les exemples présentés la valeur initiale de la température dans le manchon est de 196 K et on suppose de plus que le manchon est dans un état austénitique (σ_2^0 est donc le tenseur nul).

4.2. Tuyau rigide circulaire

Dans ce cas, le tuyau est supposé rigide et parfaitement circulaire de rayon $5,05 \text{ cm}$ (figure 11). Pour la résolution des équations de la thermique, on choisit $\theta = 0,5$, ce qui correspond à une méthode de Cranck-Nicholson.

4.2.1. Le coefficient d'échange g est constant

On suppose, ici, que le coefficient d'échange g ne varie pas lors du contact et que le coefficient de frottement est nul. On donne sur la figure 12 l'évolution de la densité de force de serrage (GPa) en fonction de la température ($^{\circ} \text{C}$) en un point de la surface intérieure de la bague. Dans une première étape, le manchon n'étant pas encore rentré en contact avec le tuyau la force de serrage est nulle. Dans un second temps, le contact intervient sur toute la surface intérieure de la bague mais le changement de phase martensite-austénite n'a pas encore eu lieu (la bague reste dans un état martensitique) et on remarque que la force évolue de manière linéaire par rapport à la température. Le changement de phase s'initie sur la surface interne du manchon ; la force de contact évolue donc par à coup. A partir d'une certaine valeur de la température le changement de phase intervient brutalement sur tout le manchon et la force de serrage évolue de la même manière. Dans la dernière étape, le matériau est entièrement dans un état austénitique et la force de serrage ne varie plus. Les figures 13 et 14 montrent l'évolution de la contrainte (qui est radiale) et de la température à trois instants du processus (fin de l'étape de dilatation de la bague, milieu de la phase de contact bague-tuyauterie et fin du processus). On remarque que la force de serrage est uniforme ce qui ne sera pas forcément le cas si l'on prend en compte certains défauts (circularité du tuyau, mauvais positionnement de la bague par exemple). On remarque également que la température évolue par bande circulaire.

Les nombres maxima d'itérations sont de l'ordre de 3 pour le point fixe sur les proportions de martensite, de 4 pour l'algorithme D.C. et de 10 pour l'algorithme de relaxation avec projection (le paramètre de relaxation ω est égal à 1,88). En cas de contact affleurant le nombre d'itérations de la méthode de relaxation augmente de manière non négligeable.

Tuyau rigide circulaire

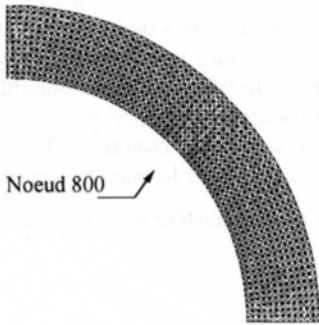


Figure 11. Maillage

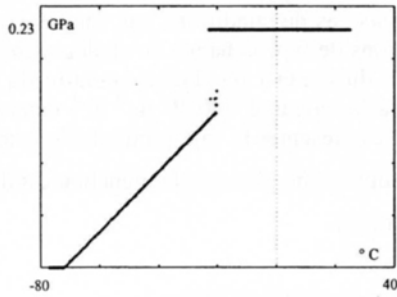


Figure 12. Effort de serrage

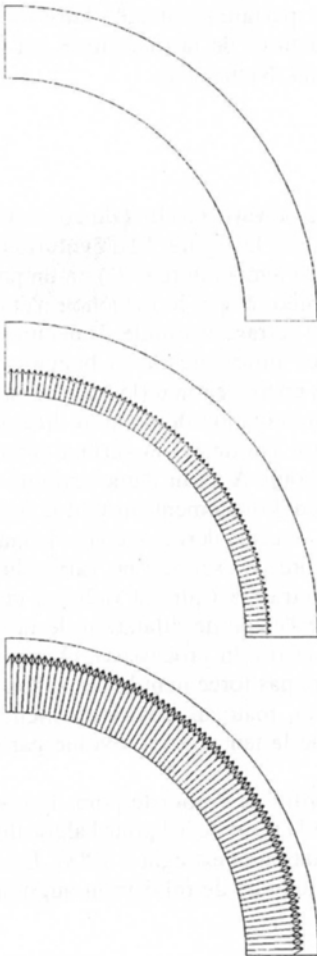


Figure 13. Forces de serrage à trois étapes

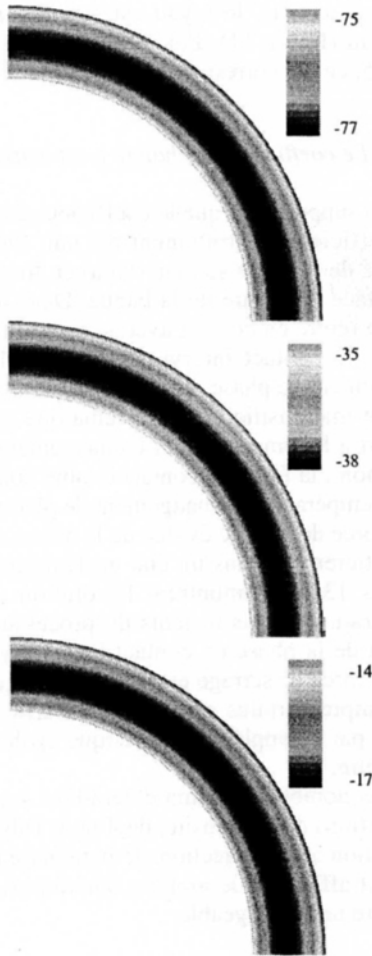


Figure 14. Température (°C)

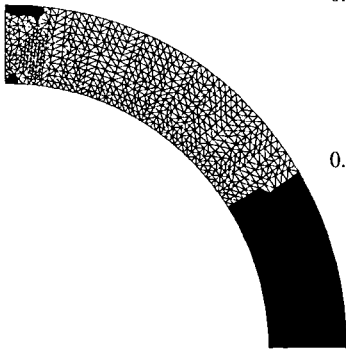


Figure 15. Zone de changement de phase

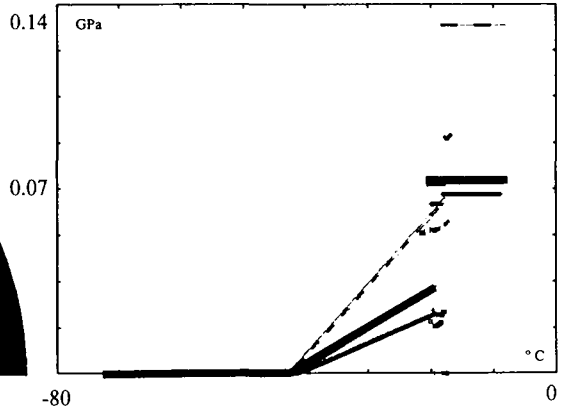


Figure 16. Effort de serrage en trois points de la zone de contact

Notons que la précision du maillage joue un rôle très important dans la qualité de la solution (nous donnons un exemple sur les figures 15 et 16). Dans ce cas les coordonnées du maillage sont en simple précision, ce qui influe à la fois sur les matrices de masse et de rigidité et sur la précision des projections dans le traitement du contact. Ce dernier point est particulièrement important, nous n'avons jamais rencontré ce type de difficulté pour des problèmes sans contact ; la solution obtenue est dégradée. Dans l'exemple que nous présentons ici, le changement de phase se déclenche localement sans respecter la symétrie du problème. Les densités de force de serrage, données en trois points de la surface de contact, diffèrent de manière importante et l'on ne retrouve pas un serrage uniforme. De plus la propagation du changement de phase et ses effets locaux modifient le processus de façon importante.

4.2.2. Le coefficient d'échange g est variable

Dans ce deuxième exemple, nous supposons que le coefficient d'échange est modifié lorsque le tuyau et le manchon rentrent en contact. Le coefficient prend donc les valeurs $500 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ou $2\,000 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ selon le statut de contact. Le maillage utilisé est le même que dans le cas précédent. On présente sur les figures 17 et 18 l'évolution de la température ($^{\circ}\text{C}$) en un point de la frontière de contact au cours des itérations et de la densité de force de serrage (GPa) en fonction de la température. Les figures 19 et 20 donnent la contrainte de serrage et la température à trois instants du processus. Contrairement au cas précédent, le changement de phase intervient progressivement (il s'initialise au niveau de l'interface manchon-tuyau du fait de la variation de température lors du contact) et la force de serrage augmente donc par à-coup, de façon beaucoup plus régulière que dans le cas où le coefficient d'échange est constant. En fin de processus les efforts à l'interface sont répartis de façon uniforme et du même ordre que dans le cas 4.2.1. Dans la première phase (quand la température est inférieure à -30°C) la force de serrage est inférieure à celle

Tuyau rigide circulaire avec coefficient d'échange g variable

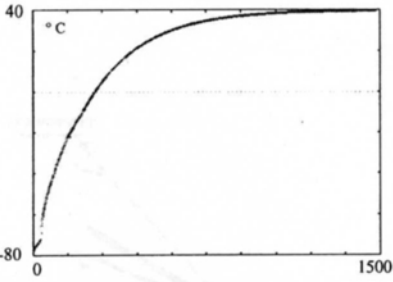


Figure 17. Température en un point

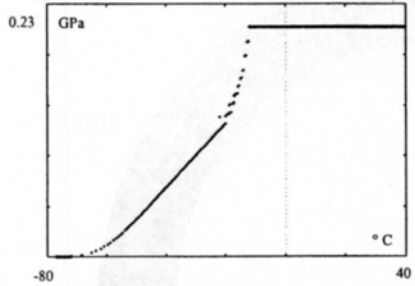


Figure 18. Effort de serrage

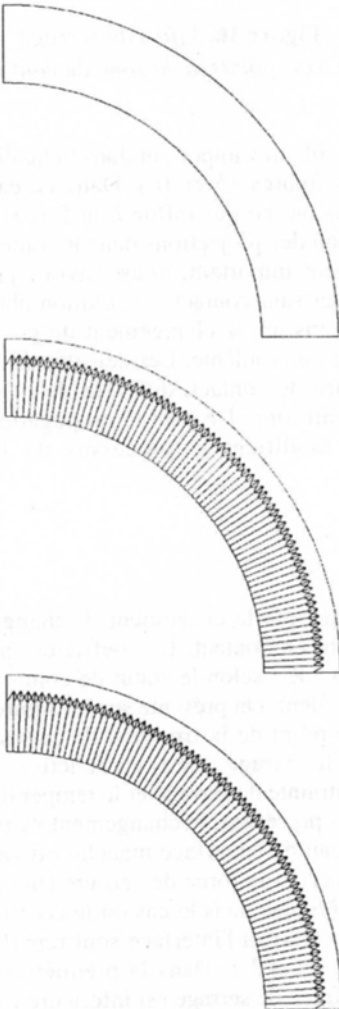


Figure 19. Force de serrage à trois étapes

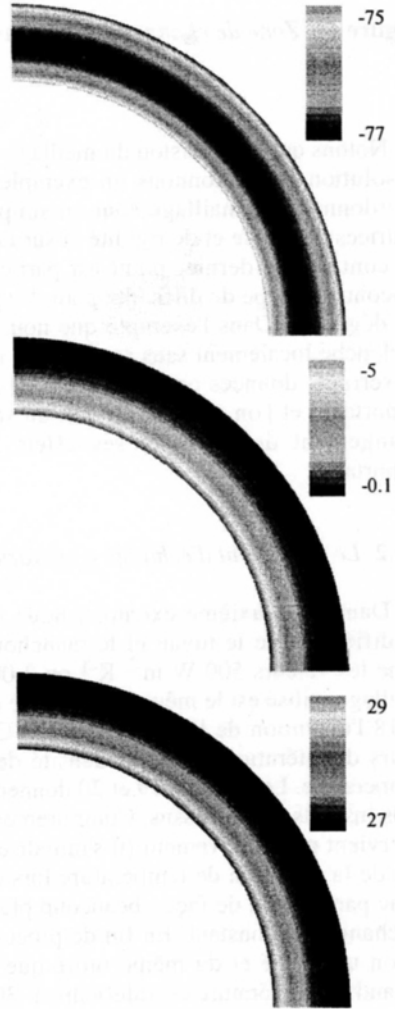


Figure 20. Température (°C)

obtenue au cas précédent. La figure 19 montre qu'elle a déjà atteint son niveau maximum au milieu de la phase de retour à la température initiale. La prise en compte de la variation de g accélère le retour à l'équilibre thermo-mécanique, la répartition de la température et donc le processus de sertissage.

4.3. Tuyau rigide circulaire décentré et coefficient d'échange constant

On considère maintenant que le tuyau est encore circulaire mais que la bague est mal positionnée (la bague est décentrée de 0,05 cm par rapport au tuyau). Dans ce cas, la symétrie du problème nous permet de ne mailler que la moitié du manchon en AMF (figure 21, le point A est fixé). On montre sur la figure 22 l'évolution de la densité de force de serrage en fonction de la température en un point de la surface intérieure de la bague. Les figures 23 et 24 montrent l'évolution de la contrainte (toujours radiale) et de la température à trois instants du processus (fin de l'étape de dilatation de la bague, début de la phase de contact bague-tuyauterie et fin du processus). Comme dans le cas précédent, la force de serrage est uniforme. De plus, elle est du même ordre. Ces résultats s'expliquent par des déplacements qui sont radiaux à tout instant du processus. La déformée coïncide à un certain instant avec la surface du tuyau rigide et le contact intervient à cet instant en tout point. Un léger décentrage dans la position du tuyau n'a pas de conséquence sur le processus de sertissage si l'on néglige les effets du frottement : une première phase où la force de serrage est nulle, une seconde où elle évolue linéairement par rapport à la température, une troisième phase caractérisée par des à-coups et une dernière où la force n'évolue plus.

4.4. Modélisation des défauts

4.4.1. Tuyau rigide elliptique sans frottement

On considère que le tuyau rigide est de forme elliptique, le petit axe étant suivant l'axe horizontal. Le demi grand axe vaut 5,05 cm et le demi petit axe 5,04 cm. On représente comme pour les exemples précédents, le maillage (figure 25), l'évolution de la densité de force de serrage en fonction de la température (figure 26) et l'évolution de la contrainte et de la température à trois instants du processus (figures 27 et 28). Le contact commence par intervenir suivant le grand axe de l'ellipse. Avant que le contact ait lieu suivant le petit axe il y a relâchement suivant le grand axe dû à un léger fléchissement de la bague (voir figure 26). A l'état final, la force de serrage est quasiment uniforme. Elle est toutefois légèrement supérieure pour les nœuds du grand axe. Notons aussi qu'elle est légèrement inférieure (de l'ordre de 10 %) aux cas précédents. Le processus de sertissage se décompose en cinq phases, différentes suivant la position des points sur la surface de contact : une première phase où la force de serrage est nulle, une seconde caractérisée par des états successifs de contact et de relâchement pour les points situés à proximité du grand axe de l'ellipse, dans la troisième phase la force évolue de façon linéaire, puis brutalement dans la quatrième et enfin devient constante dans la dernière.

Tuyau rigide décentré

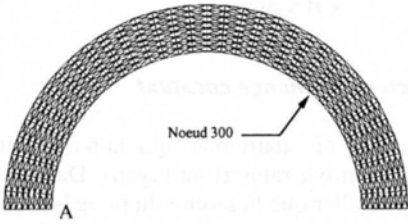


Figure 21. Maillage

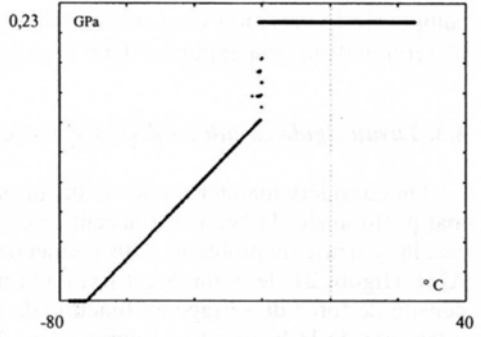


Figure 22. Effort de serrage

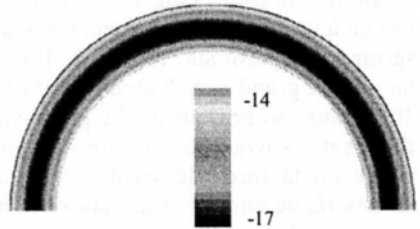
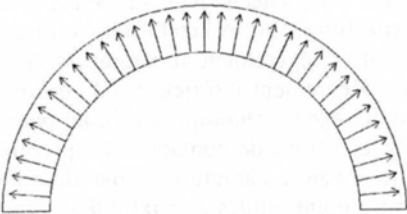
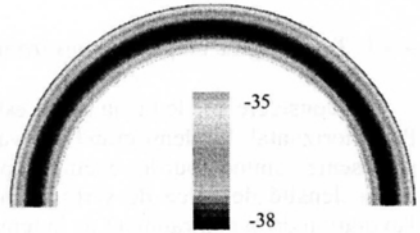
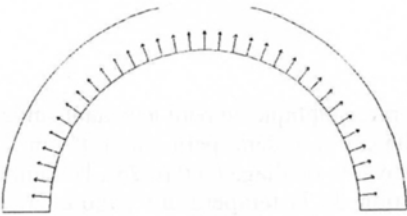
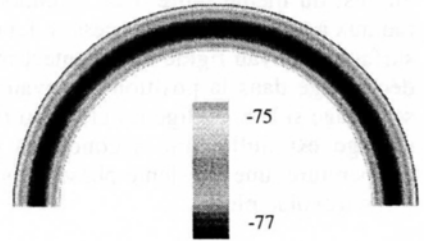
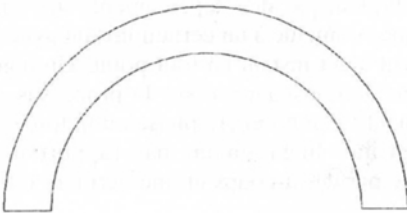


Figure 23. Force de serrage à trois étapes

Figure 24. Température (° C)

Tuyau rigide elliptique sans frottement

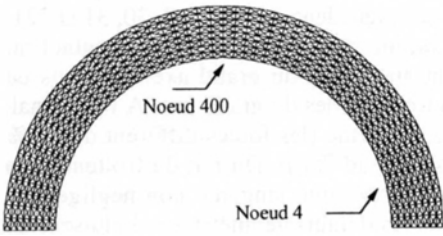


Figure 25. Maillage

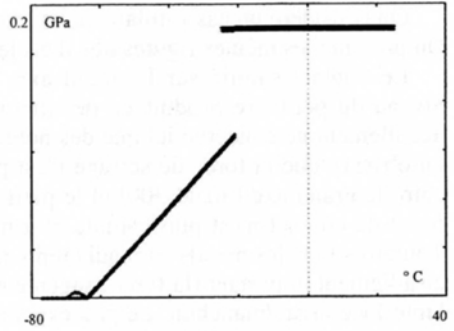


Figure 26. Effort de serrage

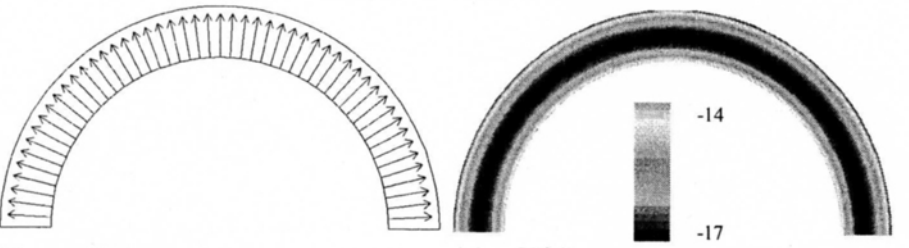
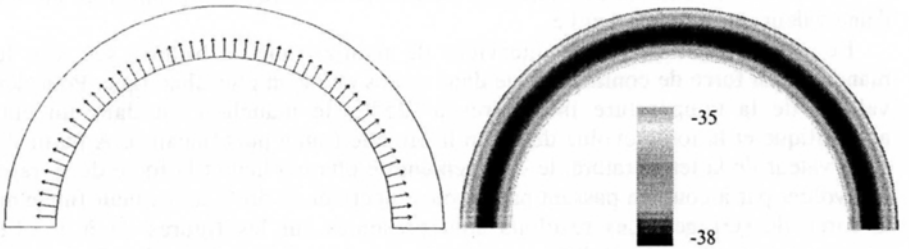
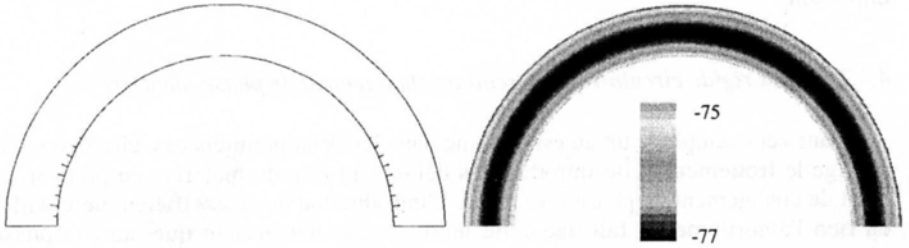


Figure 27. Force de serrage à trois étapes

Figure 28. Température (°C)

4.4.2. *Tuyau rigide elliptique avec frottement*

On considère un cas similaire à 4.4.1 avec un coefficient de frottement égal à 0,2. On présente les mêmes figures que dans les cas précédents (figures 29, 30, 31 et 32).

Le contact s'initie sur le grand axe. Comme dans le cas 4.4.1, le contact au niveau du petit axe produit un décollement au niveau du grand axe, toutefois ce décollement ne concerne ici que des nœuds très proches du grand axe. A l'état final, on observe que la force de serrage n'est pas uniforme (les forces diffèrent de 14 % entre le grand axe (nœud 300) et le petit axe (nœud 750)). Du fait du frottement la force de contact n'est plus radiale et a une composante tangente non négligeable. Toutefois tous les nœuds sont adhérents mais les défauts géométriques induisent un cisaillement important (la force tangente est de l'ordre de 8 % de la force normale) à l'interface tuyau/manchon. Le processus de sertissage se décompose en cinq phases identiques au cas précédent. La dernière phase se caractérise toutefois par des valeurs de la densité de force qui dépendent de la position du point, cette valeur étant plus grande au niveau du grand axe de l'ellipse, là où le frottement est plus important.

4.4.3. *Tuyau rigide circulaire avec seuil de changement de phase aléatoire*

Dans cet exemple le tuyau est, comme dans les deux premiers cas, circulaire. On néglige le frottement et on introduit des défauts au sein du matériau en prenant un seuil de changement de phase c variable. L'introduction de ce coefficient ne modifie en rien l'algorithme du fait que cette modification n'intervient que dans la phase locale. Pour cela, on tire de manière aléatoire un échantillon de N_e variables (où N_e est le nombre d'éléments du maillage) selon une loi normale ou uniforme autour d'une valeur moyenne du seuil c .

Le changement de phase intervient de manière moins brutale sur tout le manchon. La force de contact évolue dans ce cas de façon plus chaotique. Pour des valeurs de la température inférieures à -25°C , le manchon est dans un état austénitique et la force évolue de façon habituelle (nulle puis linéaire). A partir de cette valeur de la température, le changement de phase a lieu et la force de serrage va évoluer par à-coup en passant par un pic (supérieur de 50 % à la valeur finale de la force de serrage). Les résultats sont présentés sur les figures 33 à 36. Le changement de phase étant diffus sur la structure, la température évolue de manière plus homogène avec des minima au centre de la bague.

Tuyau rigide elliptique avec frottement $\mu = 0,2$

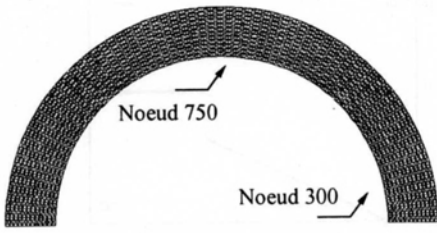


Figure 29. Maillage

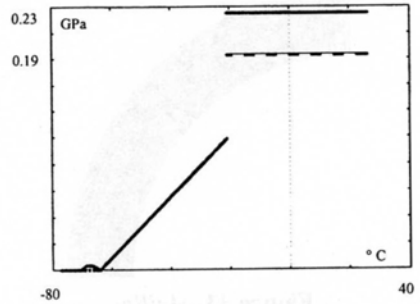


Figure 30. Effort de serrage

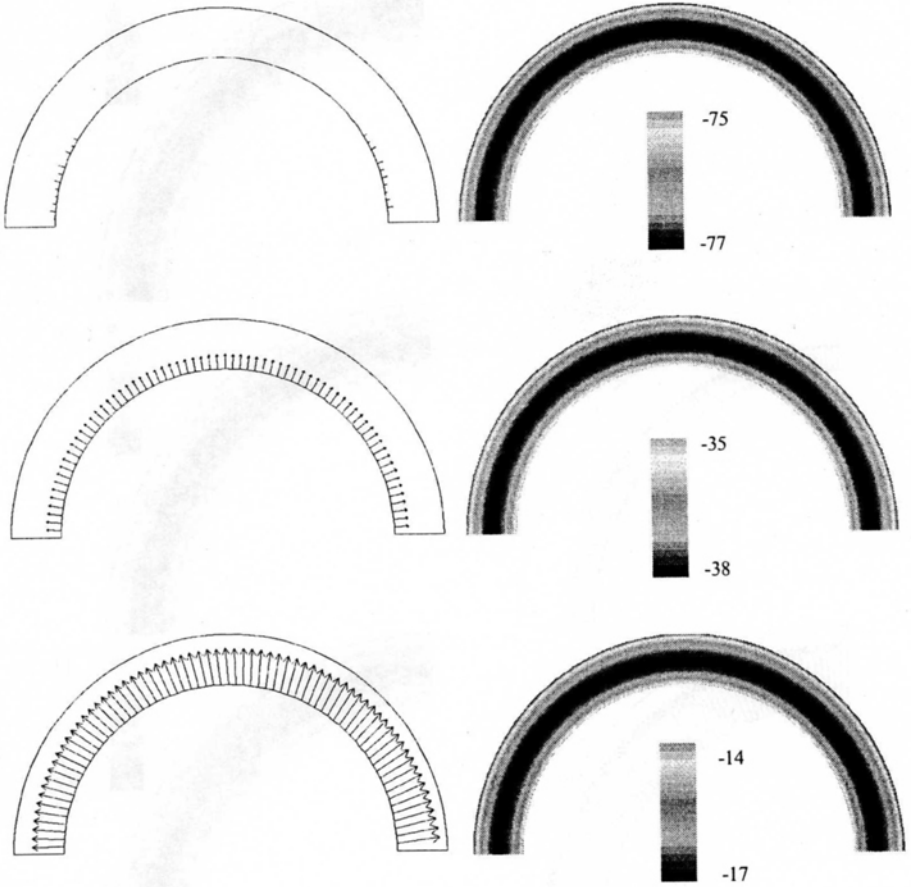


Figure 31. Force de serrage à trois étapes

Figure 32. Température (°C)

Tuyau rigide circulaire avec seuil de changement de phase aléatoire



Figure 33. Maillage

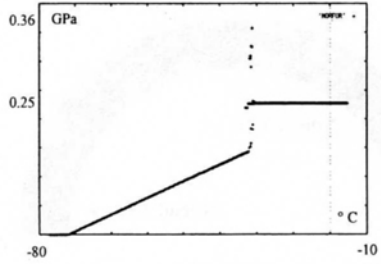


Figure 34. Effort de serrage

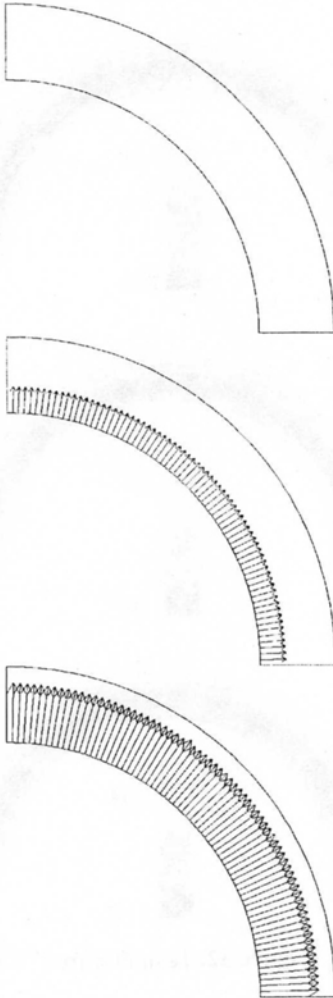


Figure 35. Force de serrage à trois étapes

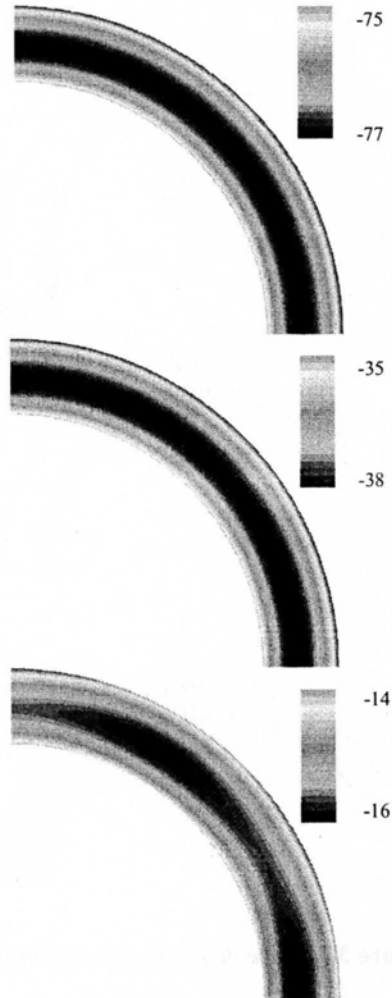


Figure 36. Température (°C)

5. Conclusion

On a présenté dans cet article une modélisation du comportement des alliages à mémoire de forme et une stratégie numérique associée. Cette stratégie permet de résoudre un problème qui est très fortement non linéaire : densité d'énergie non convexe, contact unilatéral, frottement et couplage thermique. Le cœur de l'algorithme est basé sur la décomposition en différence convexe de la densité d'énergie. Les autres non-linéarités sont résolues par des procédés de point fixe (frottement et couplage thermique) et une technique de projection (contact unilatéral).

Cette démarche a été appliquée à un problème de manchons de raccordement. Nous avons pu constater qu'elle était fiable et robuste. La convergence est obtenue sur des stations de travail en des temps raisonnables (de l'ordre de quelques heures pour 1 500 incréments de charge). Les résultats obtenus dépendent peu du raffinement du maillage. Les difficultés que l'on peut rencontrer au niveau de la convergence sont liées principalement au contact et au frottement (fort coefficient de frottement, contact affleurant) [LIC 91] [ALA 94] [ALA 97].

L'évolution de la force en fonction de la température au cours du processus est qualitativement semblable à celle obtenue expérimentalement (cf. figure 1 et [PAT 90]). On remarque que le frottement joue un rôle non négligeable au niveau de l'interface manchon/tuyau surtout en présence de défauts géométriques (apparition d'une contrainte de cisaillement).

On a utilisé ici une modélisation rustique du changement de phase, des améliorations peuvent être apportées : prise en compte de la dissymétrie de la courbe contrainte/déformation en traction et en compression [AMR 94], de tenseurs d'élasticité différents entre les deux phases martensitiques et la phase austénitique et aussi prise en compte des déformations permanentes [SEG 97].

La densité volumique d'énergie libre que nous avons utilisée ne possède pas les propriétés mathématiques suffisantes (quasi-convexité) pour démontrer l'existence d'un minimum même local. Nous avons dans d'autres travaux présenté la résolution du problème relaxé (convexification ou quasi-convexification de la densité d'énergie [PAG 97b]). On s'est attaché à rechercher des minima locaux ou globaux des énergies potentielles associées. Il conviendrait d'analyser l'application de ces énergies relaxées au problème des manchons de raccordement.

6. Bibliographie

- [ABE 93] ABEYARATNE R., KNOWLES J., (1993), « Continuum model of thermoelastic capable of undergoing phase transitions », *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, pp. 541-571.
- [ACH 85] ACHENBACH M., MULLER I., (1985), « Simulation of material behavior of alloys with shape memory », *Archive of Mechanics*, Vol. 37, pp. 573-585.
- [ALA 91] ALART P., CURNIER A., (1991), « A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods », *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 92, pp. 353-375.

- [ALA 94] ALART P., LEBON F., QUITTAU F., REY K., (1994), « Frictional contact problems in elastostatics : revisiting the uniqueness condition », *Proceeding of 2nd Contact Mechanics International Symposium*, Plenum, pp. 63-70.
- [ALA 95a] ALART P., LEBON F., (1995), « Solutions of frictional contact problems using ILU and coarse/fine preconditioners », *Computational Mechanics*, Vol. 16, pp. 98-105.
- [ALA 95b] ALART P., HEEGE A., (1995), « Consistant tangent matrices of curved contact operators involving anisotropic friction », *European Journal of Finite Element*, Vol. 4, pp. 183-207.
- [ALA 97] ALART P., « Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. 76, pp. 83-108.
- [AMR 94] EL AMRANI ZIRIFI M., (1994), Contributions à l'étude micromécanique des transformations martensitiques thermoélastiques, Thèse de Doctorat, Université de Metz.
- [AUC 89] AUCHMUTY G., (1989), « Duality algorithms for nonconvex variational principles », *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Vol. 10, pp. 211-264.
- [BAL 92] BALL J.M., JAMES R.D., (1992), « Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two-well problem », *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, Vol. 338, pp. 389-450.
- [CHA 89] CHABRAND P., LICHT C., MAISONNEUVE O., RAOUS M., (1989), « Residual thermal tempering stresses », *Computers & Structures*, Vol. 31, pp. 1003-1011.
- [CHR 93] CHRYSOCHOOS A., PHAM H., MAISONNEUVE O., (1993), « Une analyse expérimentale du comportement thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme de type Cu-Zn-Al », *Compte rendu à l'Académie des Sciences*, Vol. 316, Série 2, pp. 1031-1036.
- [CHR 95] CHRYSOCHOOS A., LÖBEL M., MAISONNEUVE O., (1995), « Couplages thermomécaniques du comportement d'alliages Cu-Zn-Al et Ni-Ti », *Compte rendu à l'Académie des Sciences*, Vol. 320, Série 2, pp. 217-223.
- [COC 95] COCU M., PRATT E., RAOUS M., (1995), « Existence d'une solution du problème quasistatique de contact unilatéral avec frottement non local », *Compte rendu à l'Académie des Sciences*, Vol. 320, Série 1, pp. 1413-1417.
- [CRO 92] CROUZEIX M., MIGNOT A.L., (1992), *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., (1984), *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris.
- [FRE 87a] FRÉMOND M., (1987), « Matériaux à mémoire de forme », *Compte rendu à l'Académie des Sciences*, Vol. 304, Série 2, pp. 239-244.
- [FRE 87b] FRÉMOND M., (1987), « Adhérence des solides », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol. 6, pp. 383-407.
- [FRE 96] FRÉMOND M., MIYAZAKI S., (1996), « *Shape Memory Alloys* », CSIM Courses and Lectures notes, Springer-Verlag Ed.

- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN Q.S., (1975), « Sur les matériaux standards généralisés », *Journal de Mécanique*, Vol. 14, pp. 39-63.
- [HEE 95] HEEGE A., ALART P., ONATE E., (1995), « Numerical modelling and simulation of frictional contact using a generalized Coulomb law », *Engineering Computations*, Vol. 12, pp. 641-656.
- [JOL 90] JOLY P., (1990), « *Mise en œuvre de la méthode des éléments finis* », Ellipse, Paris.
- [LEB 92] LEBON F., RAOUS M., (1992), « Multibody contact problem including friction in structure assembly », *Computers & Structures*, Vol. 43, pp. 925-934.
- [LEX 91] LEXCELLENT C., LICHT C., (1991), « Some remarks on the modelling of the thermomechanical behaviour of shape memory alloys », *Journal de Physique Appliquée*, Vol. 1, pp. 35-39.
- [LIC 91] LICHT C., PRATT E., RAOUS M., (1991) « Remarks on a numerical method for unilateral contact including friction », *International Series of Numerical Mathematics*, Vol. 101, pp. 129-144.
- [MOR 63] MOREAU J.J., (1963), « Fonctionnelles sous-différentiables », *Compte rendu à l'Académie des Sciences*, Vol. 257, pp. 4117-4119.
- [MOR 66] MOREAU J.J., (1966), « Quadratic programming in mechanics : dynamics of one-sided constraints », *SIAM Journal of Control*, Vol. 4, pp. 153-158.
- [NGU 95] NGUYEN Q.S., MOUMNI Z., « Sur une modélisation du changement de phases solides », *Compte rendu à l'Académie des Sciences*, Vol. 321, Série 2, pp. 87-92.
- [PAG 96] PAGANO S., ALART P., LEBON F., MAISONNEUVE M., (1996), « A numerical study of shape memory alloys using a non convex potential », *Proceedings of the 1996 ESDA Conference*, Vol. 6, pp. 215-220.
- [PAG 97a] PAGANO S., ALART P., LEBON F., MAISONNEUVE M., (1997), « Evolution of phases in a shape memory alloy by local and global minimisations of a non convex potential », *Proceeding of IUTAM Symposium Variations of domains and free boundaries in mechanics of solids*, à paraître Klüwer.
- [PAG 97b] PAGANO S., ALART P., LEBON F., MAISONNEUVE M., (1997), « Local and global minimisations of non convex and relaxed potentials », *International Journal of Engineering Science*, soumis.
- [PAT 87] PATOOR E., EBERHARDT M., BERVEILLER M., (1987), « Potentiel pseudo-élastique et plasticité de transformation martensitique dans les mono et poly cristaux métalliques », *Acta Metallurgica*, Vol. 38, pp. 2779-2789.
- [PAT 90] PATOOR E., BERVEILLER M., (1990), *Les alliages à mémoire de forme*, Editions Hermès, Paris.
- [RAN 92] RANIECKI B., LEXCELLENT C., TANAKA K., (1992), « Thermodynamic models of pseudoelastic behaviour of shape memory alloy », *Archive of Mechanics*, Vol. 44, pp. 262-288.

- [RAO 88] RAOUS M., CHABRAND P., LEBON F., (1988), « Numerical methods for frictional contact problems and applications », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Supplément n° 1 au Vol. 7, pp. 111-128.
- [SEG 97] SEGARD E., GILLET Y., FERRON G., PATOOR E., BERVEILLER M., (1997), « Modélisation par éléments finis de la réponse d'une structure superélastique », *Actes du 3^e Colloque National en Calcul des Structures*, Giens 20-23 mai 1997, Presses Académiques de l'Ouest, Vol. 2, pp. 767-772.
- [SPE 90] SPREKELS J., (1990), « Shape memory alloys : mathematical models for a class first order solid-solid phase transitions in metals », *Control and Cybernetics*, Vol. 19, pp. 287-308.

Article reçu le 22 juillet 1997.
Version révisée le 27 avril 1998.