

---

# Schémas explicites d'ordre élevé pour les problèmes non linéaires de mécanique des structures

Mohamed Rachik — Jean Marc Roelandt

Laboratoire de Génie Mécanique pour les Matériaux et les Structures  
UPRES A 6066, UTC/GSM/Division MNM  
Pôle Modélisation de Picardie  
BP 529  
F-60206 Compiègne

---

*RÉSUMÉ.* Nous présentons quelques schémas numériques explicites pour la résolution de problèmes non linéaires en mécanique des structures. Dans les algorithmes présentés, le pas d'intégration en temps est ajusté de manière à obtenir la précision souhaitée tout en optimisant le coût de calcul. Une technique de pas adaptatif et de prolongement de la solution dans le cas d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre a été adoptée. Dans les procédés de mise en forme tels que le soufflage des plastiques ou l'hydroformage des tôles, la solution peut présenter des instabilités qui se traduisent par des points limites sur les courbes charges-déplacements. Des techniques de pilotage ont été développées afin d'adapter l'algorithme aux problèmes présentant des points limites. Les résultats obtenus sur des exemples de membranes sous pression attestent d'une économie notable en temps de calcul en comparaison avec d'autres schémas itératifs tel que la méthode classique de Newton-Raphson. Enfin, on montre que l'intérêt de ces méthodes est encore accru dans le cas de problèmes faisant intervenir des conditions de contact évolutives.

*ABSTRACT.* This paper presents some numerical schemes for non-linear structural mechanic problems. The proposed algorithms are non-iterative and are associated with technics for time step size and error control. We treat the discrete equilibrium relation as a system of ordinary differential equations. This system is then solved with a fourth order Runge-Kutta method. In order to use these algorithms for numerical simulation of sheet forming processes where instabilities occur we have developed a prescribed displacement technique analysis. The results obtained on bulge test and thermoforming examples show a great computational cost economy in comparison with the iterative Newton-Raphson method.

*MOTS-CLÉS :* résolution de problèmes non linéaires, schémas explicites, méthode d'intégration de Runge-Kutta, mise en forme de matériaux, points limites, pilotage.

*KEY WORDS :* non-linear problems, explicit schemes, Runge-Kutta method, instabilities, prescribed displacement analysis.

---

## 1. Introduction

La simulation numérique de la mise en forme des matériaux conduit, après discrétisation par éléments finis, à la résolution de systèmes d'équations non linéaires traduisant l'équilibre sous forme faible. Plusieurs algorithmes ont été développés pour la résolution de ces équations [DAT84]. Le schéma de résolution le plus utilisé est le schéma de Newton-Raphson. Pour une formulation en déplacements, cette technique consiste à discrétiser le chargement en plusieurs incréments et à calculer les déplacements  $\{u_1\}$ ,  $\{u_2\}$ ... $\{u_n\}$  correspondant aux pas de chargement. Le calcul du champ de déplacements  $\{u_{n+1}\}$  à partir de  $\{u_n\}$  se fait de manière itérative en construisant une suite  $\{u_{n+1}^i\}$  qui converge vers la solution satisfaisant l'équilibre de la structure. La difficulté de convergence de ces schémas augmente avec les non linéarités du problème traité. Les techniques itératives ont eu peu de succès dans le cas des problèmes qui combinent de fortes non linéarités géométriques et matérielles à des conditions aux limites évolutives (problèmes de mise en forme). Ces difficultés de convergence ont motivé le développement et l'utilisation de schémas explicites (non itératifs).

En particulier, dans le domaine de la modélisation des procédés de mise en forme, les schémas de type dynamique explicite ont constitué une alternative intéressante. Traditionnellement utilisés pour la résolution des problèmes d'impact, ces schémas ont été adaptés avec succès à la modélisation de l'emboutissage [NUM95] [NUM96].

Les schémas dynamiques explicites ont l'avantage majeur de remédier aux problèmes de divergence et de permettre d'obtenir des résultats, mais ils présentent un certain nombre d'inconvénients :

- la condition de stabilité impose une limite sur la taille du pas de temps, ce qui conduit à des coûts de calcul relativement importants.
- la solution obtenue est souvent qualitative car elle ne vérifie pas *a priori* l'équilibre. Ainsi dans le cas de l'emboutissage, le champ de contraintes obtenu en fin d'opération ne permet pas toujours d'avoir une évaluation correcte du retour élastique.
- la qualité de la solution est peu satisfaisante lorsque le contact outil-structure n'est pas établi dès le début de l'opération (soufflage des plastiques).

Depuis 1989, nous avons entrepris des travaux de recherche en vue de contribuer à la simulation des procédés de mise en forme des corps creux plastiques tels que le soufflage et le thermoformage [RAH93] [RAH94]. Avec l'approche dynamique explicite, nous avons été confrontés aux difficultés que nous avons citées auparavant. Pour ces procédés, la mise en forme étant réalisée en appliquant une pression, les déformations ne sont pas contrôlées par un déplacement d'outil. Pour obtenir une solution acceptable, il est nécessaire d'utiliser un fort amortissement qui augmente de manière sensible le temps de calcul. Ceci nous a incités à adapter des schémas de résolution explicites d'ordre plus élevé.

Le schéma que nous avons adopté est issu des travaux de Touzot et *al.* [TOU93]. Dans la suite de cet article, nous donnons une brève description de l'algorithme, puis nous décrivons son adaptation aux problèmes spécifiques qui nous intéressent et nous donnons enfin les résultats de quelques tests numériques.

## 2. Description de l'algorithme

Dans le cas des problèmes que nous nous proposons de traiter, la discrétisation par éléments finis du principe des travaux virtuels conduit à l'équation d'équilibre suivante :

$$\{R\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\} = 0 \quad [1]$$

$\{R\}$  : vecteur résidu  
 $\{F_{ext}\}$  : vecteur des forces externes  
 $\{F_{int}\}$  : vecteur des forces internes

Pour résoudre l'équation [1], nous avons adopté la stratégie de résolution proposée par Dabounou [DAB94]. Cette stratégie consiste à exprimer l'équation d'équilibre globale en terme de taux par rapport au temps. Par dérivation de la relation [1], on obtient :

$$\{\dot{R}\} = \{\dot{F}_{ext}\} - \{\dot{F}_{int}\} = 0 \quad [2]$$

En considérant que le résidu est nul à tout instant, l'équation d'équilibre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\dot{R}\} = \{\dot{F}_{ext}\} - [K_T]\{\dot{u}\} \quad [3]$$

$[K_T]$  : matrice tangente dépendant des déplacements  
 $\{\dot{u}\}$  : vecteur des vitesses nodales de la structure

Le système différentiel du premier ordre en  $\{u\}$  à intégrer sur le pas de temps (entre  $t$  et  $t + \Delta t$ ) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \{\dot{u}\} = [K_T]^{-1} \{\dot{F}_{ext}\} \\ \{u(t)\} = \{u_n\} \end{cases} \quad (\text{condition initiale}) \quad [4]$$

où  $\{u_n\}$  représente le déplacement obtenu au pas précédent. L'intégration de [4] sur le pas de temps permet donc d'obtenir le déplacement  $\{u_{n+1}\}$  à partir de  $\{u_n\}$ .

Pour contourner le difficile problème de convergence des algorithmes itératifs, on utilise un schéma explicite pour intégrer l'équation [4]. La solution  $\{u_{n+1}\}$  obtenue, n'est satisfaisante que pour des tailles de pas de temps limitées. Pour

augmenter l'efficacité du schéma, on introduit le résidu d'équilibre du pas de temps  $n$  sous forme de chargement au pas  $n+1$ . L'équation [4] devient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u}(t) \end{cases} = [\mathbf{K}_T]^{-1} \left( \begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \\ \mathbf{F}_{\text{res}} \end{cases} \right) \quad [5]$$

Une estimation de  $\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_{\text{res}} \end{cases}$  est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_{\text{res}} \end{cases} = \frac{1}{\Delta t_n} \begin{cases} \mathbf{R}_n \end{cases} \quad [6]$$

$\Delta t_n$  : valeur du pas de temps précédent.  
 $\begin{cases} \mathbf{R}_n \end{cases}$  : résidu d'équilibre au pas précédent

Pour des raisons de commodité d'écriture, on adopte la notation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_m \end{cases} = \begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \end{cases} + \begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_{\text{res}} \end{cases} \quad [7]$$

et on réécrit l'équation [5] et la condition initiale associée sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u}(t) \end{cases} = [\mathbf{K}_T]^{-1} \begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_m \end{cases} \quad [8]$$

### 3. Intégration de l'équation différentielle et contrôle du pas de temps

Le calcul de la solution  $\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} \end{cases}$ , correspondant à un nouvel incrément de charge, se fait par intégration de l'équation [8] sur le pas de temps. Les méthodes d'intégration les plus utilisées pour une telle équation sont les méthodes d'Euler et celles de Runge-Kutta [DHA84] [WOO90]. L'efficacité de ces méthodes peut être grandement améliorée lorsqu'on leur associe un calcul de pas de temps adaptatif. On peut en effet subdiviser le pas en un ou plusieurs sous-pas de taille variable. La taille du sous-pas est évaluée de manière automatique pour répondre aux deux critères suivants :

- limiter la taille du sous-pas afin de s'adapter aux non-linéarités du problème et obtenir la précision requise.

- utiliser la taille de sous-pas la plus grande possible afin de réduire le temps de calcul.

Nous présentons dans la suite, les relations associées au schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 que nous avons adopté et au schéma d'Euler explicite utilisable dans le cas de faibles non-linéarités.

### 3.1. Méthode de Runge-Kutta

Lors de l'utilisation du schéma dynamique explicite pour la simulation du soufflage des plastiques, nous avons rencontré des problèmes liés aux instabilités de contact pendant la phase qui précède le contact de la membrane soufflée avec le moule. Ceci nous a incités à utiliser des schémas d'intégration d'ordre plus élevé. Nous avons opté pour un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 avec une méthode de calcul du pas adaptatif proposée par Touzot et *al.* [TOU93], [DEB87]. La solution  $\{u_{n+1}\}$  est estimée à partir de  $\{u_n\}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \{h_1\} &= \{\dot{u}(t_n, \{u_n\})\} \\
 \{h_2\} &= \left\{ \dot{u}\left(t_n + \frac{\Delta t_n}{2}, \{u_n\} + \frac{\Delta t_n}{2} \{h_1\}\right) \right\} \\
 \{h_3\} &= \left\{ \dot{u}\left(t_n + \frac{\Delta t_n}{2}, \{u_n\} + \frac{\Delta t_n}{2} \{h_2\}\right) \right\} \\
 \{h_4\} &= \{\dot{u}(t_{n+1}, \{u_n\} + \Delta t_n \{h_3\})\} \\
 \{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \frac{\Delta t_n}{6} (\{h_1\} + 2(\{h_2\} + \{h_3\}) + \{h_4\})
 \end{aligned} \tag{9}$$

Le coût du calcul de pas adaptatif est un inconvénient majeur des méthodes de Runge-Kutta. La technique la plus utilisée est celle du pas double [PRE94] [ENG96]. Elle consiste à construire deux estimations de la solution  $\{u_{n+1}\}$  :

$$\begin{aligned}
 \{u_{n+1}^1\} &\text{ avec un sous-pas de taille } \Delta t_n \\
 \{u_{n+1}^2\} &\text{ avec deux sous-pas de temps de taille } \frac{\Delta t_n}{2} \text{ chacun}
 \end{aligned}$$

La différence entre ces deux solutions constitue une approximation de l'erreur de troncature. Cette méthode est très coûteuse. Elle nécessite onze évaluations de la dérivée par sous-pas. Pour remédier à cet inconvénient, nous utilisons une méthode proposée par Touzot et *al.* [TOU93]. Cette méthode, associée au schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 consiste à approcher  $\{\dot{u}\}$  par un polynôme  $\{\bar{u}\}$  obtenu par interpolation des valeurs de la dérivée calculées sur le pas de temps. Une bonne estimation de l'erreur est obtenue par la comparaison de  $\{\bar{u}\}$  et  $\{\dot{u}\}$  à la fin du pas. Pour l'estimation de la taille du pas de temps, on procède de la manière suivante :

$$\{\bar{u}_{n+1}\} = [K_T(\{u_{n+1}\}, t_{n+1})]^{-1} \{\dot{F}_m\} \tag{10}$$

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{h_4\} \tag{11}$$

l'estimation de l'erreur sur  $\{\dot{u}\}$  est donnée par :

$$r = \frac{5\Delta t_n}{6} \left\| \{\dot{u}_{n+1}\} - \{\bar{u}_{n+1}\} \right\| \tag{12}$$

Si  $r$  est inférieure à la précision requise, alors la solution est retenue et la taille du pas de temps suivant est évaluée par :

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \min\{0.9q, 4\} \quad \text{avec} \quad q = \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-0.25} \quad [13]$$

Si la précision requise n'est pas atteinte ( $r > \varepsilon$ ) alors la taille du sous-pas est réévaluée par :

$$\Delta t_n \leftarrow 0.9q\Delta t_n \quad [14]$$

La quantité  $\{\bar{u}_{n+1}\}$  est utilisée pour construire la solution au pas de temps suivant ( $\{h_1\}$ ). L'évaluation de l'erreur et du pas de temps adaptatif se fait donc sans évaluation supplémentaire de la dérivée. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter l'excellent travail de Dabounou [DAB 94].

### 3.2. Méthode d'Euler explicite

En l'absence de fortes non linéarités, l'intégration de l'équation [8] à l'aide d'un schéma d'Euler explicite s'avère plus efficace. Nous donnons les grandes lignes de cette méthode ci-après. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au travaux de Abbo et al. [ABB96]. En discrétisant  $\{u\}$  par un schéma de différences finies décentré, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta t}(\{u_{n+1}\} - \{u_n\}) = [K_T]^{-1} \{\dot{F}_m\} \quad [15]$$

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \Delta t [K_T]^{-1} \{\dot{F}_m\} \quad [16]$$

Pour le calcul du pas de temps adaptatif, les auteurs utilisent un schéma d'Euler modifié. Pour l'estimation de la taille du pas de temps, on calcule deux estimations de la solution :

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_1\} \quad [17]$$

$$\{\hat{u}_{n+1}\} = \{u_n\} + \frac{1}{2}(\{\Delta u_1\} + \{\Delta u_2\}) \quad [18]$$

Les incréments  $\{\Delta u_1\}$  et  $\{\Delta u_2\}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \{\Delta u_1\} &= \Delta t [K_T(\{u_n\})]^{-1} \{\dot{F}_m\} \\ \{\Delta u_2\} &= \Delta t [K_T(\{u_n\} + \{\Delta u_1\})]^{-1} \{\dot{F}_m\} \end{aligned} \quad [19]$$

Une estimation de la norme de l'erreur relative de troncature est donnée par :

$$r = \frac{1}{2} \frac{\|\{\Delta u_2\} - \{\Delta u_1\}\|}{\|\hat{u}_{n+1}\|} \quad [20]$$

La solution est retenue si  $r$  est inférieure à la précision requise  $\varepsilon$ , dans le cas contraire, la nouvelle taille du pas est estimée par [ABB96] :

$$\Delta t_n \leftarrow q \Delta t_n \quad \text{avec} \quad q = \max \left\{ 0.7 \sqrt{\frac{\varepsilon}{r}}, 0.1 \right\} \quad [21]$$

La taille du pas de temps suivant  $\Delta t_{n+1}$  est donnée par :

$$\Delta t_{n+1} = q \Delta t_n \quad \text{avec} \quad q = \min \left\{ 0.7 \sqrt{\frac{\varepsilon}{r}}, 1.1 \right\} \quad [22]$$

Le calcul de la taille du pas de temps se fait sans évaluation supplémentaire de la dérivée car la quantité  $\{\Delta u_2\}$  est utilisée pour l'estimation de la solution au pas suivant :

$$\{\Delta u_1\}_{(\text{pas actuel})} = q \{\Delta u_2\}_{(\text{pas précédent})} \quad [23]$$

#### 4. Adaptation des algorithmes aux problèmes non linéaires avec instabilité

Dans les procédés de mise en forme, tels que le soufflage des matières plastiques ou l'hydroformage des tôles, la structure présente des instabilités au cours de l'opération. Elles se traduisent par des points limites sur la courbe charge-déplacement s'accompagnant d'une singularité de la matrice tangente [FAF85] [BAT86]. Il est donc nécessaire de pouvoir changer de stratégie de résolution au cours de l'opération de mise en forme. Notre travail consiste entre autres à développer des techniques de pilotage associées aux algorithmes décrits précédemment. Dans ce qui suit, nous présentons des techniques de pilotage en déplacement associées à des charges de différentes natures (charges ponctuelles, charges suiveuses). Nous appliquerons ensuite ces techniques à des exemples représentatifs des problèmes que nous souhaitons aborder dans le cadre de nos travaux sur les procédés de mise en forme. Des techniques de pilotage en longueurs d'arc peuvent également être utilisées, mais nous ne les avons pas implantées dans notre code de calcul car elles n'ont pas été nécessaires pour mener à bien nos simulations de procédés.

Dans l'équation [4],  $\{\dot{F}_{\text{ext}}\}$  représente la vitesse de chargement, supposée constante sur le pas. Son mode d'évaluation dépend de la stratégie de résolution utilisée.

#### 4.1. Forces imposées

Lorsqu'on est en présence de forces externes imposées dont on connaît l'évolution au cours du temps, on procède de la manière suivante.

On définit le chargement à l'aide d'un vecteur global de charge de référence  $\{F_r\}$  qui est obtenu par assemblage de vecteurs forces réparties élémentaires dans le cas d'une pression appliquée. A ce chargement, on associe une table d'évolution  $\lambda_F(t)$  qui peut être définie sous forme d'une fonction explicite ou d'une courbe donnée par un ensemble de points. Il faut souligner que nous traitons en général des problèmes quasi-statiques et que la variable  $t$  (pseudo-temps) permet de définir l'évolution de chargements ou de conditions aux limites au cours des procédés étudiés.

$$\{F_{ext}\} = \lambda_F(t)\{F_r\} \quad [24]$$

Dans le cas de charges suivieuses, et pour une formulation lagrangienne actualisée,  $\{F_r\}$  est un vecteur dont l'expression dépend de la géométrie actualisée du pas précédent. Sur le pas, seul  $\lambda_F(t)$  est supposé variable.

La vitesse des forces externes est donnée par :

$$\{\dot{F}_{ext}\} = \dot{\lambda}_F(t)\{F_r\} \quad [25]$$

$\dot{\lambda}_F(t)$  est évaluée à chaque pas de temps par dérivation formelle dans le cas d'une fonction explicite ou par le calcul de la pente locale dans le cas d'une courbe.

#### 4.2. Déplacement imposé

Lorsqu'on est en présence de déplacements imposés dont on connaît l'évolution au cours du temps, on leur associe une table d'évolution  $\lambda_u(t)$  et un déplacement de référence  $\{\bar{u}_r\}$ . La vitesse des déplacements imposés est donnée par la relation suivante :

$$\{\dot{\bar{u}}\} = \dot{\lambda}_u(t)\{\bar{u}_r\} \quad [26]$$

Cette vitesse est imposée par une technique appropriée à chaque résolution de  $[K_T]\{\dot{u}\} = \{\dot{F}_m\}$ . Le chargement résultant est donné par les réactions qui sont calculées *a posteriori*.

### 4.3. Pilotage en déplacement

Lorsque la courbe représentative de la réponse de la structure présente des points limites, les stratégies décrites précédemment ne peuvent pas être utilisées dans le cas d'un chargement quelconque. Ainsi pour déterminer la partie AB de la courbe de la figure 1, il est nécessaire d'utiliser une technique de pilotage en déplacement.

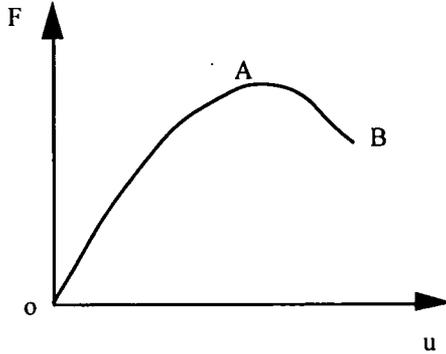


Figure 1. Courbe charge-déplacement

On choisit un degré de liberté  $u_q$  qui se comporte de manière monotone au cours du chargement et on lui associe une valeur de référence  $u_r$  et une table d'évolution  $\lambda_u(t)$ . De la même manière, on associe une valeur de référence  $\{F_r\}$  et une table d'évolution  $\lambda_F(t)$  aux charges externes. Pour un pas de temps  $n$ , (entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$ ) on doit vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_q &= \lambda_u(t_{n+1})u_r \\ \{F_{ext}\} &= \lambda_F(t_{n+1})\{F_r\} = \lambda_F^{n+1}\{F_r\} \\ \{F_{ext}(u_{n+1}, t_{n+1})\} - \{F_{int}(u_{n+1}, t_{n+1})\} &= 0 \end{aligned} \quad [27]$$

où on a posé  $\lambda_F(t_{n+1}) = \lambda_F^{n+1}$ .

La table d'évolution  $\lambda_u(t)$  est définie en prenant en compte la nature du problème traité et les objectifs de l'analyse qu'on désire effectuer. Les inconnues du problème sont  $\lambda_F^{n+1}$  et  $u_{n+1}$ .

Dans ce qui suit, nous décrivons un algorithme qui permet de prendre en compte les relations [27] lors de l'intégration de l'équation différentielle ordinaire à l'aide du schéma de Runge-Kutta [9].

Connaissant  $\lambda_u(t)$ , on peut calculer la vitesse du degré de liberté  $u_q$ .

$$\dot{u}_q = \frac{du_q}{dt}(t_{n+1}) = \frac{d\lambda_u}{dt}(t_{n+1}) u_r \quad [28]$$

Pour la phase de prédiction, on se fixe une vitesse des forces externes qui peut être celle du pas précédent ( $\dot{\lambda}_F^p = \dot{\lambda}_F(t_n)$ ):

$$\{\dot{F}_{ext}\} = \dot{\lambda}_F^p \{F_r\} \quad [29]$$

A chaque sous-pas de temps, lors de l'évaluation de  $\{h_1\}$ ,  $\{h_2\}$ ,  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$ , on corrige la vitesse de déplacement  $\{\dot{u}\}$  et la vitesse des forces externes  $\{\dot{F}_{ext}\}$  de la manière suivante :

Soit  $h_{qi}^p$  la valeur de la vitesse du degré de liberté piloté  $u_q$  obtenue à la  $i^{ème}$  résolution lors de la phase de prédiction. Le vecteur  $\{h_i^p\}$  des vitesses obtenu à la  $i^{ème}$  résolution et la vitesse des forces externes sont ajustés à l'aide de la relation suivante

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\dot{u}_q}{h_{qi}^p} \quad (i=1,4) \\ \{h_i\} &= \alpha_i \{h_i^p\} \\ \dot{\lambda}_{Fi} &= \alpha_i \dot{\lambda}_F^p \end{aligned} \quad [30]$$

Le facteur multiplicateur des forces externes  $\lambda_F^{n+1}$  peut être obtenu à l'aide de deux méthodes.

**Méthode 1.**  $\lambda_F^{n+1}$  est calculé à partir des  $\dot{\lambda}_{Fi}$  :

$$\begin{aligned} \{F_{ext}\}(t_{n+1}) &= \lambda_F^{n+1} \{F_r\} \\ \text{avec} & \\ \lambda_F^{n+1} &= \lambda_F^n + \frac{\Delta t_n}{6} (\dot{\lambda}_{F1} + 2(\dot{\lambda}_{F2} + \dot{\lambda}_{F3}) + \dot{\lambda}_{F4}) \end{aligned} \quad [31]$$

Toutefois, l'utilisation d'une vitesse de forces externes variable sur le pas entraîne des erreurs sur le résidu. Nous avons donc opté pour une méthode qui privilégie l'équilibre de la structure.

**Méthode 2.** Après le calcul de la solution  $\{u_{n+1}\}$ , on cherche  $\lambda_F^{n+1}$  qui minimise le résidu à la fin du pas noté  $\{R\}_{n+1}$  :

$$\{R\}_{n+1} = \lambda_F^{n+1} \{F_r\} - \{F_{int}\}_{n+1} \tag{32}$$

$$\frac{\partial(\{R\}_{n+1} \{R\}_{n+1})}{\partial \lambda_F^{n+1}} = 0 \Rightarrow \lambda_F^{n+1} = \frac{\langle F_r \rangle \{F_{int}\}_{n+1}}{\langle F_r \rangle \{F_r\}} \tag{33}$$

où le vecteur efforts internes de la fin du pas est noté  $\{F_{int}\}_{n+1} = \{F_{int}(t_{n+1})\}$ .

### 5. Applications

Nous avons appliqué les algorithmes présentés précédemment à trois exemples combinant de fortes non-linéarités géométriques et matérielles. Ces exemples font intervenir des chargements répartis et les courbes charges-déplacements complètes présentent, pour deux d'entre eux, des points limites. Ils ont été traités avec différentes stratégies de résolution : schémas explicites d'Euler ou de Runge-Kutta et schéma quasi statique implicite de Newton-Raphson. Pour ce dernier schéma, les résultats ont été obtenus à l'aide d'une technique de pilotage en déplacement à pas d'accroissement constant. Les comparaisons portent sur la qualité des solutions et les coûts de temps calcul.

Les schémas que nous proposons constituent une alternative très intéressante aux méthodes existantes pour la modélisation des procédés de mise en forme. Nous anticipons sur une publication à venir sur le sujet et nous présentons l'exemple du thermoformage d'une boîte rectangulaire.

#### 5.1. Bulge test hyperélastique

Cet exemple a souvent été traité dans la littérature. Nous comparons nos résultats à ceux obtenus par Hughes et Carnoy [HUG82]. Le comportement du matériau constitutif est de type hyperélastique incompressible; il est représenté par une loi de Mooney-Rivlin décrite à l'aide du potentiel de déformations suivant :

$$S = \frac{\partial W}{\partial E} \quad \text{où : } W(I_1, I_2, I_3) = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) + \frac{p}{2} (I_3 - 1) \tag{34}$$

- où : S est le tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff de seconde espèce
- E est le tenseur des déformations de Green-Lagrange
- p est un multiplicateur de Lagrange homogène à une pression
- $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2, \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$
- ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  élongations principales )

Le problème décrit sur la figure 2 a été traité en déplacement imposé.

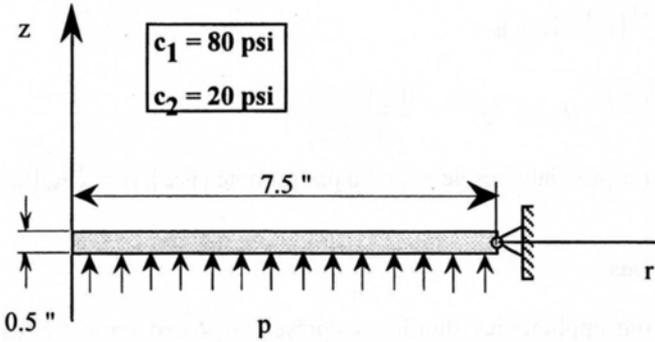


Figure 2. Bulge test hyperélastique

Nous avons discrétisé la plaque à l'aide de 15 éléments tronconiques de membrane flexion. La figure 3 présente la courbe charge-déplacement dans les différents cas ; elle est comparée à celle obtenue par Hughes et Carnoy [HUG82]. On note une bonne concordance des résultats obtenus et une bonne adaptabilité du pas de temps du schéma de Runge-Kutta. Le schéma de Newton-Raphson converge en 4 itérations par pas en moyenne.

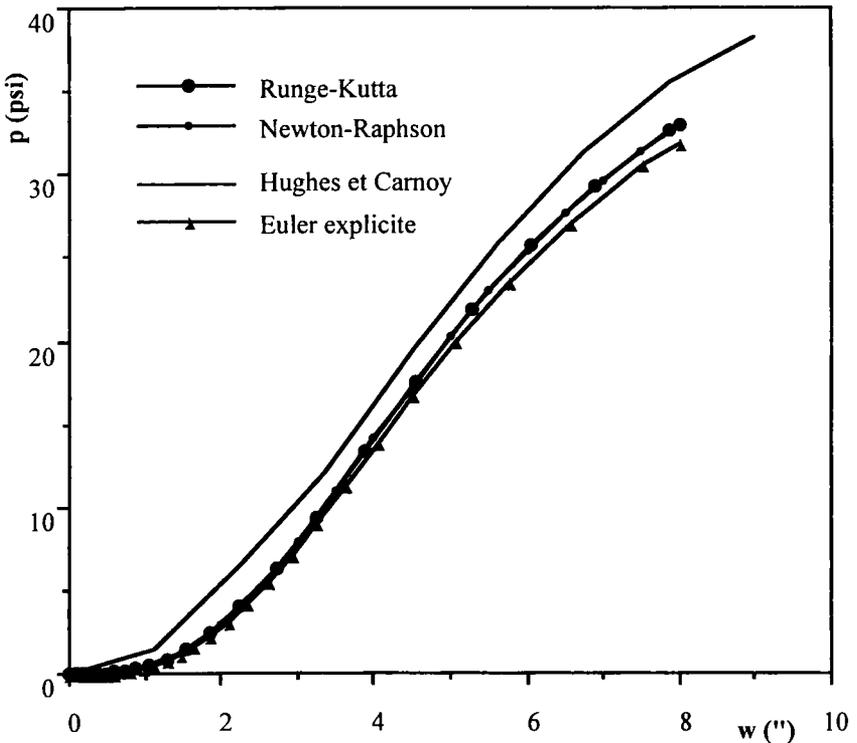


Figure 3. Pression en fonction du déplacement du centre

Temps cpu (pour une précision de $10^{-3}$ )		
Newton-Raphson	Runge-Kutta	Euler explicite
1,073 u	0,846 u	0,924 u

Les différences qu'on observe peuvent être attribuées aux erreurs que nous avons commises lors du relevé des résultats de références et aux types d'éléments utilisés. En effet, Hughes et Carnoy utilisent un élément axisymétrique massif alors que nous utilisons un élément de coques en grandes rotations [EBE93].

## 5.2. Bulge test élastoplastique

Pour tester l'efficacité de l'algorithme dans le cas d'un comportement plus complexe, nous avons traité l'exemple du test de gonflage d'une membrane élastoplastique. Les données du problème sont indiquées sur la figure 4.

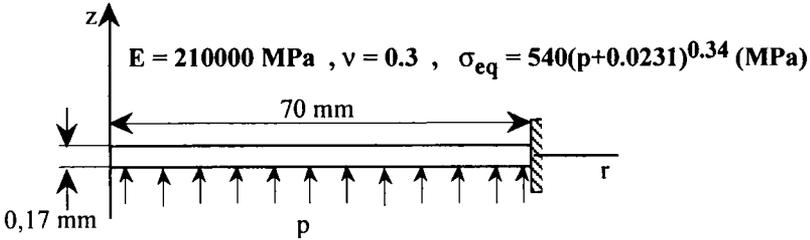


Figure 4. Bulge test élastoplastique

La structure a été discrétisée à l'aide de 20 éléments tronconiques de membrane flexion avec cisaillement transverse. Sur la figure 5, on note une bonne concordance des résultats obtenus à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson et ceux obtenus à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta explicite. La loi de comportement élastoplastique est intégrée à l'aide d'un algorithme implicite proposé par Simo et Taylor [SIM86].

Temps cpu (pour une précision de $10^{-3}$ )	
Newton-Raphson	Runge-Kutta
287,59u	145,6 u

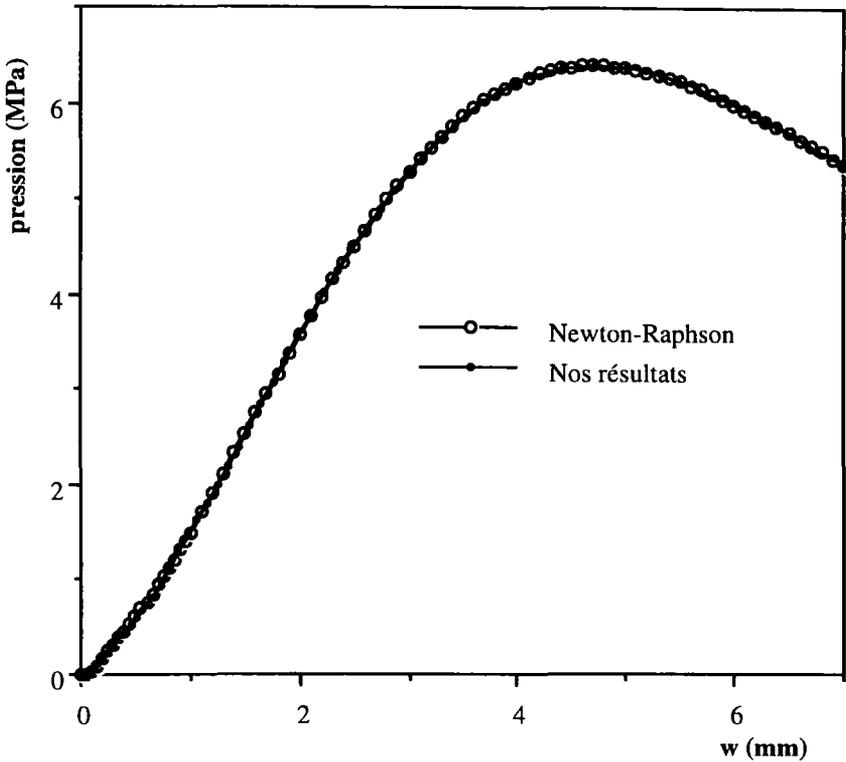


Figure 5. Pression en fonction du déplacement du centre

### 5.3. Sphère hyperélastique sous pression

Cet exemple pour lequel nous disposons d'une solution analytique permet de tester l'efficacité du pilotage en déplacement. Le comportement du matériau constitutif est représenté par un modèle de Mooney-Rivlin. Les paramètres géométriques et matériels sont donnés sur la figure 6.

Nous avons discrétisé la moitié de la génératrice à l'aide de 10 éléments tronconiques de membrane à 2 nœuds. La courbe charge-variation de rayon de la figure 7 montre une bonne concordance des différents résultats ainsi qu'une bonne adaptabilité de la taille du pas de temps au voisinage des points limites pour le schéma de Runge-Kutta. La méthode d'Euler explicite s'avère plus coûteuse et moins précise que les deux autres méthodes.

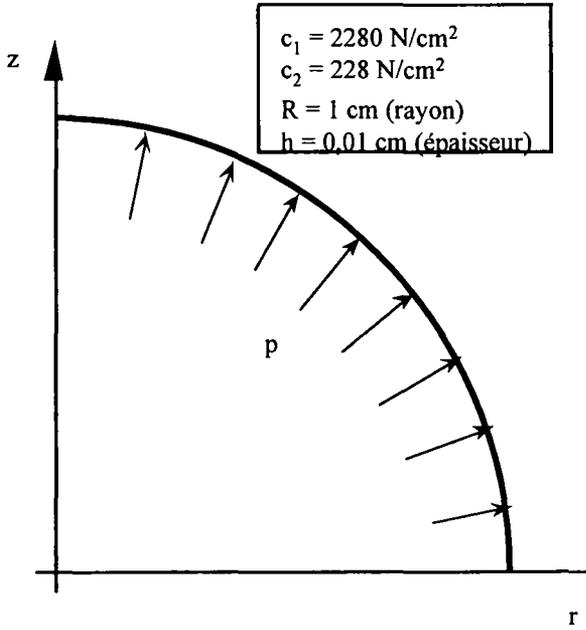


Figure 6. *Sphère sous pression*

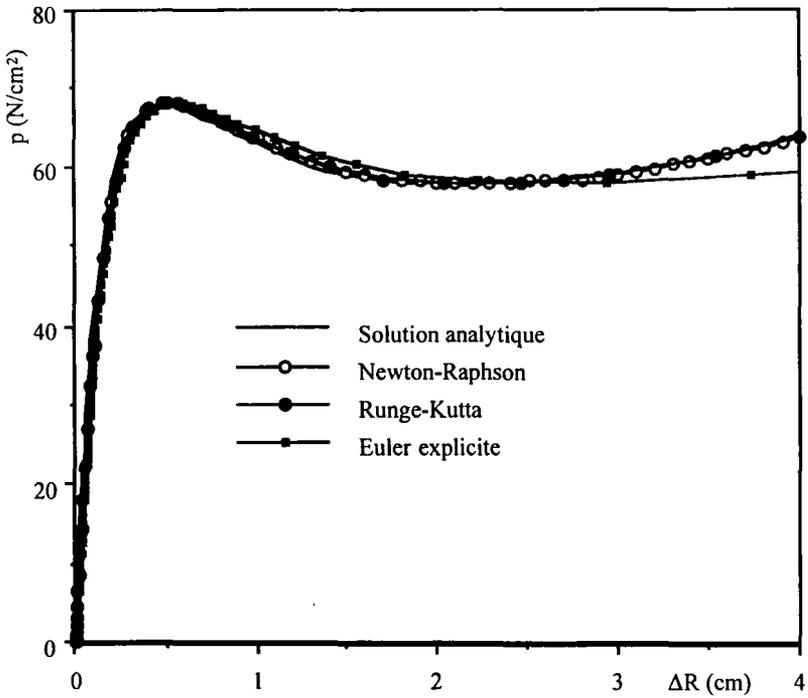


Figure 7. *Pression en fonction de la variation de rayon*

Temps cpu (pour une précision de $10^{-3}$ )		
Newton-Raphson	Runge-Kutta	Euler explicite
1,243 u	0,674 u	14,2 u

#### 5.4. Thermoformage d'une boîte rectangulaire

L'intérêt des schémas proposés devient évident lorsqu'on les applique à la modélisation de problèmes complexes tels que les procédés de mise en forme. Dans ce qui suit, nous présentons l'exemple du thermoformage d'une boîte rectangulaire. En raison de la symétrie, seul le quart de la structure a été considéré. La figure 8 représente la feuille initiale, d'épaisseur 3.5 mm, discrétisée à l'aide de 319 éléments T3 de membrane. Le comportement du matériau constitutif est représenté par un modèle de Mooney-Rivlin ( $C_1 = 1,18$  MPa,  $C_2 = 0,0968$  MPa). Le moule de dimensions 90 x 80 x 25 mm a été discrétisé à l'aide de 154 facettes triangulaires (figure 9). Les raccords sont des rayons de 7 mm. Le contact moule/polymère est supposé collant, ce qui est généralement admis dans le cadre de ce type de procédé [DEL91].

Des problèmes similaires ont été traités dans la littérature [DEL91] [BEN94]. Nous observons les mêmes tendances en ce qui concerne la répartition d'épaisseur sur le produit fini (figure 11). Nous avons traité le problème en 4mn19.78s sur une Dec Alpha 500 à 400 MHz alors que Ben Chaabane [BEN94] indique un temps CPU de 1 h 50 mn sur un Dec 4000 VS M90 et note d'importants problèmes de convergence avec le schéma de Newton-Raphson.

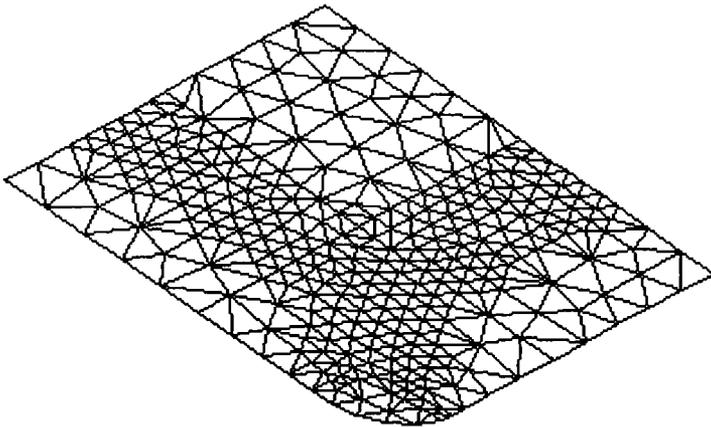
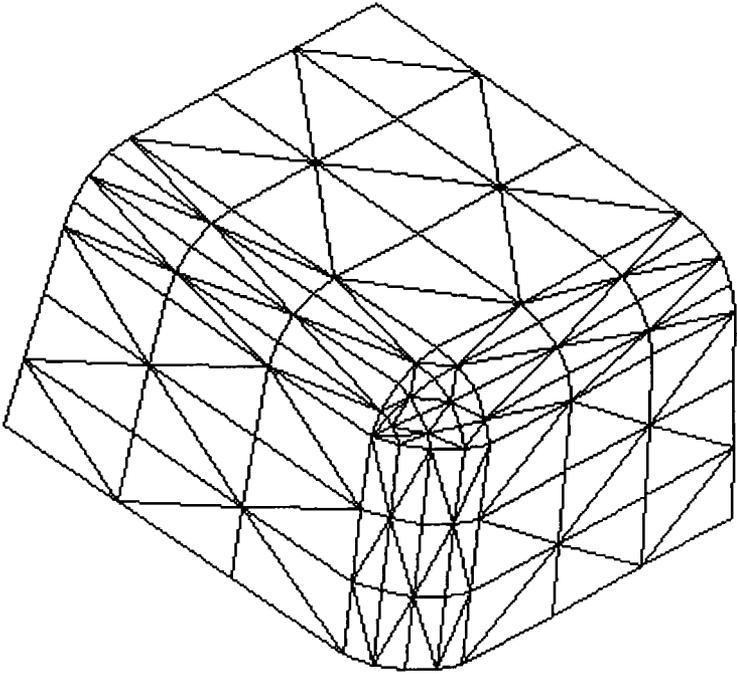
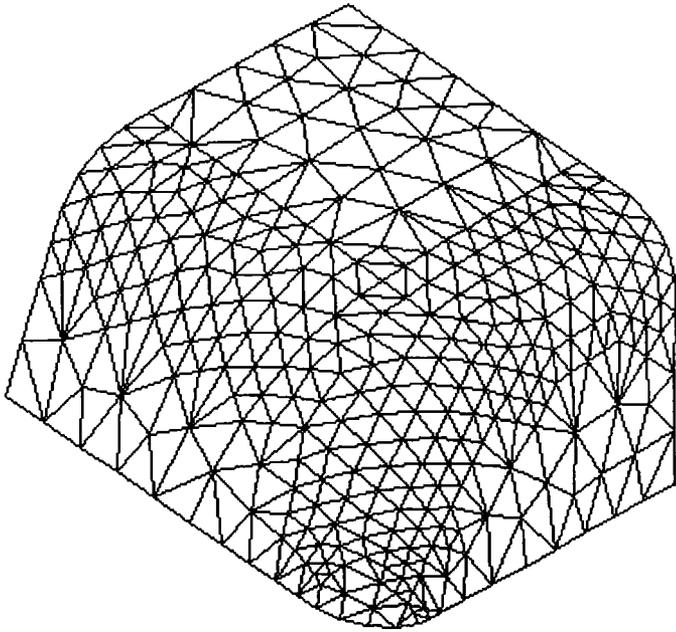


Figure 8. Discrétisation de la forme initiale



**Figure 9.** *Discretisation du moule*



**Figure 10.** *Déformée finale*

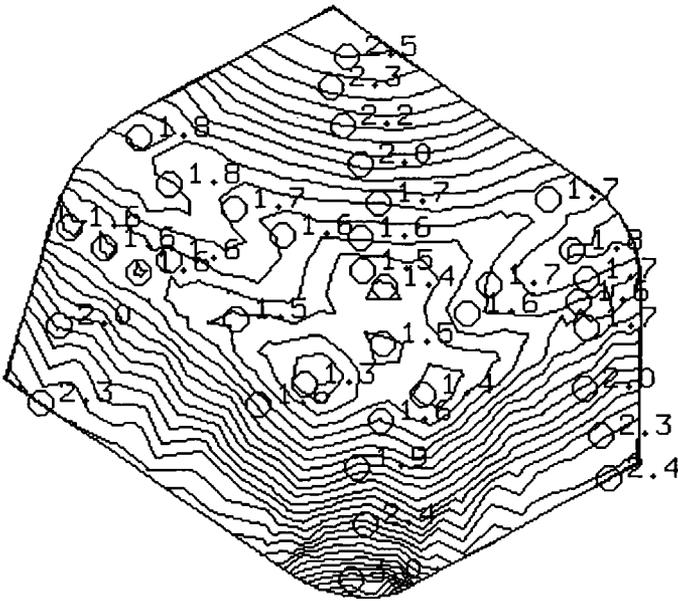


Figure 11. Répartition d'épaisseur

## 6. Conclusion

Les travaux que nous avons entrepris visent à adapter des schémas explicites performants pour la résolution des problèmes de mise en forme des matériaux. Dans une première phase, nous avons expérimenté avec succès des schémas explicites d'ordre élevé. Les problèmes que nous avons traités font intervenir des non-linéarités géométriques et matérielles en présence d'instabilités.

La comparaison du schéma itératif de Newton-Raphson aux schémas explicites montre un net avantage de ces derniers du point de vue du temps calcul. Cet avantage devient plus évident lorsqu'on traite des problèmes faisant intervenir le contact car les schémas explicites permettent de contourner les problèmes de convergence. Pour des problèmes qui présentent de faibles non-linéarités, l'intégration de l'équation d'équilibre à l'aide d'un schéma d'Euler explicite s'avère intéressante.

Nous poursuivons actuellement des travaux ayant pour cadre la mise en forme des polymères en utilisant les schémas explicites décrits précédemment. Les résultats obtenus sont très encourageants et feront l'objet d'une publication à venir.

## Remerciements

Nous tenons à remercier le Pôle Inter-régional de Modélisation Numérique pour son soutien financier.

## 7. Bibliographie

- [ABB96] A. J. ABBO, S. W. SLOAN, « An automatic load stepping algorithm with error control », *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 39, pp. 1337-1759, 1996.
- [BAT86] J. L. BATOZ, G. DHATT, Plaques et coques par éléments finis analyse linéaire et non linéaire, Cours IPSI, Paris 2-4 juin 1986.
- [BEN94] S. BEN CHAABANE, Contribution à la simulation numérique de la mise en forme des corps creux plastiques, Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, 1994.
- [DAB94] J. DABOUNOU, Résolution des problèmes de grandes transformations par la méthode des éléments finis, Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, 1994.
- [DAT84] G. DHATT, G. TOUZOT, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S. A. éditeur, 1984.
- [DEB87] O. DEBORDES, M. EL MOUATASSIM, G. TOUZOT, « Local numerical integration of large strain elasto-plastic constitutive laws », *Second International Conference and Short Course On Constitutive Laws For Engineering Materials; Theory and Application*. Tucson, USA, 1987.
- [DEL91] H. G. DELORENZI, H. F. NIED, Finite element simulation of thermoforming and blow molding, *Molding of polymer processing*, edited by A. I. ISAYEV, Hanser publishers, 1991.
- [EBE93] R. EBERLEIN, P. WRIGGERS, R. L. TAYLOR, « A fully non-linear axisymmetrical quasi-Kirchhoff-type shell element for rubber-like materials », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp. 4027-4043, 1993.
- [ENG96] G. ENGELN-MÜLLGES, F. UHLIG, *Numerical Algorithms with Fortran*, Springer-Verlag 1996.
- [FAF85] J.L. BATOZ, G. DHATT, M. FAFARD, Algorithmes de calcul automatique des configurations pré et post-flambement, Colloque Tendances Actuelles en Calcul des Structures, Bastia, 6-8 novembre 1985.
- [HUG82] T. J. R. HUGHES, E. CARNOY, « Nonlinear element shell formulation accounting for large membrane strain », *Comp. Meth. in Applied Eng.*, Vol. 39, pp. 69-82, 1983.
- [NUM95] « Simulation of materials processing Theory, Methodes and Applications », *Numiform 95*, Edited by Shan Fu Shen and P. R. Dawson, Cornell University.
- [NUM96] *Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes, Verification of simulations with Experiments*, Dearborn, Michigan, September 29-October 3, 1996, Edited by J. K. Lee and G. L. Kinzel, R. H. Wagoner, The Ohio State University.
- [PRE94] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VEHERLING, B. P. FLANNERY, *Numerical recipes*, Cambridge University Press, Second edition 1994.
- [RAC93] M. RACHIK, Simulation de la mise en forme des structures minces (soufflage des plastiques et emboutissage des tôles), Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, 1993.

- [RAC94] M. RACHIK, J. M. ROELANDT, J. L. BATOZ, « Simulation numérique du soufflage et du thermoformage des plastiques », *Revue Europ. Elém. Fin.*, Vol. 3, pp. 187-210, 1994.
- [SIM86] J. C. SIMO, R. TAYLOR, « A return mapping algorithm for plan stress elasto-plasticity », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 22, pp. 649-670, 1986.
- [TOU93] G. TOUZOT, J. DABOUNOU, « Intégration numérique de lois de comportement élastoplastique », *Revue Europ. Elém. Fin.*, Vol. 2, pp. 465-494, 1993.
- [WOO90] W. L. WOOD, *Practical Time-stepping Schemes*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

Article reçu le 20 février 1997.  
Version révisée reçue le 20 décembre 1997.