
Résistance de plaques multiperforées : comparaison calcul – expérience

Pascal Francescato — Joseph Pastor

*Laboratoire Matériaux Composites (LaMaCo)
ESIGEC, Université de Savoie
F-73376 Le Bourget du Lac
joseph.pastor@univ-savoie.fr*

RÉSUMÉ. Le présent travail est consacré à la détermination des charges limites de plaques minces perforées périodiquement. Elle est basée sur la théorie de l'analyse limite et ses méthodes statique et cinématique d'une part, et sur la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques d'autre part. Les programmes correspondants utilisent une discrétisation du VER en éléments finis discontinus et débouchent sur des problèmes d'optimisation linéaire. L'application traite du problème de la traction simple de plusieurs matériaux perforés ; une comparaison détaillée est faite entre nos essais expérimentaux et leur simulation numérique, comparaison satisfaisante aussi bien pour les charges limites que pour les modes de ruptures observés.

ABSTRACT. This study concerns the strength prediction of heterogeneous ductile materials. On the one hand, we use the limit analysis theory with the kinematic and static methods and, on the other hand, the homogenization theory of periodic media. The corresponding programs use a RVE discretization with discontinuous finite elements for both stress and strain rates and they lead to linear optimization problems. The problem studied concern the evaluation of the uniaxial tensile strength of perforated sheets made up of different materials. A detailed comparison between our own numerical and experimental results is presented which is a satisfactory comparison for both the limit loads and the failure mechanics.

MOTS-CLÉS : analyse limite, homogénéisation des milieux périodiques, méthode des éléments finis, milieux perforés, optimisation linéaire, plasticité.

KEY WORDS: limit analysis, homogenization of periodic media, finite element method, perforated plates, linear optimization, plasticity.

1. Introduction

Le problème de la détermination du domaine de plasticité de structures hétérogènes se pose dans des situations industrielles et scientifiques qui nécessitent une parfaite connaissance des phénomènes mécaniques entrant en jeu. L'amorçage, la croissance et la coalescence des microvides sont des exemples de phénomènes qui interviennent dans la rupture ductile d'un matériau. En particulier, la détermination précise des charges limites de structures fortement hétérogènes, telles les plaques perforées, peut s'imposer dans certaines applications industrielles comme les plaques à tubes de générateurs à vapeur en centrale nucléaire ou les ailettes de turbines, dont la tenue sous sollicitation doit être parfaitement maîtrisée. Pour des matériaux très hétérogènes soumis à des chargements complexes, il est nécessaire de simuler leur comportement par des méthodes d'homogénéisation où le problème de rupture par écoulement plastique est ramené à un problème d'analyse limite ou d'élastoplasticité posé sur une cellule de base [NEE 72], [MAR 87], [TUR 87], [FRA 97].

En étendant au cas de l'homogénéisation périodique les travaux exposés en [BOE 82] traitant du problème de la traction simple d'une éprouvette anisotrope, nous proposons dans cette étude des méthodes numériques permettant de déterminer le critère de plasticité macroscopique d'une structure hétérogène et périodique, en contraintes planes. On peut alors définir un matériau homogène équivalent [LEN 77], [SUQ 82] et déterminer son convexe de résistance via la résolution d'un problème d'analyse limite [SAL 83] posé sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER).

Plus précisément, les méthodes numériques proposées mettent en œuvre les approches statique et cinématique de l'analyse limite par résolution de problèmes d'optimisation linéaire posés sur le VER [FRA 94]. Les programmes correspondants utilisent une discrétisation des VER en éléments finis *discontinus* et adoptent une nouvelle linéarisation des critères de Tresca et von Mises *en contraintes planes*.

Le but poursuivi est ici double : tout d'abord résumer les points essentiels des programmes numériques présentés en [BOE 82, PAS 83, FRA 94] ; confronter ensuite, sur le problème de la traction simple hors-axes de plusieurs matériaux perforés, ce que donne la simulation numérique en comparaison des résultats de nos essais expérimentaux.

2. L'analyse limite et le problème posé

2.1. *Rappels succincts d'analyse limite [SAL 83]*

Soit un système rigide-plastique standard, à critère de plasticité convexe $f(\sigma)$, soumis à un chargement à n paramètres $Q = (Q_1, \dots, Q_i, \dots, Q_n)$, la vitesse de déformation étant définie par $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$. Le domaine des chargements licites est le convexe K de \mathbf{R}^n :

$$K = \{ Q(\sigma), \sigma \text{ SA et PA} \} \quad [1]$$

Un champ de contraintes σ est statiquement admissible (SA) s'il vérifie les équations de l'équilibre et les conditions aux limites en contrainte, ainsi que les continuités nécessaires ; σ est licite s'il est SA et aussi PA c'est-à-dire $f(\sigma) \leq 0$. La frontière ∂K de K est le lieu des chargements limites. Soit $Q^d = (Q_1^d, \dots, Q_{i0}^d, \dots, Q_n^d)$ un chargement licite donné. On obtient le chargement limite $Q_{lim}^d = (Q_1^d, \dots, \lambda^* Q_{i0}^d, \dots, Q_n^d)$, si celui-ci existe, en résolvant :

$$\lambda^* = \text{Max} \{ \lambda \geq 0 / \exists \sigma \text{ licite tel que } Q(\sigma) = (Q_1^d, \dots, \lambda Q_{i0}^d, \dots, Q_n^d) \} \quad [2]$$

C'est la méthode statique qui conduit à une approche intérieure de K (figure 1. a).

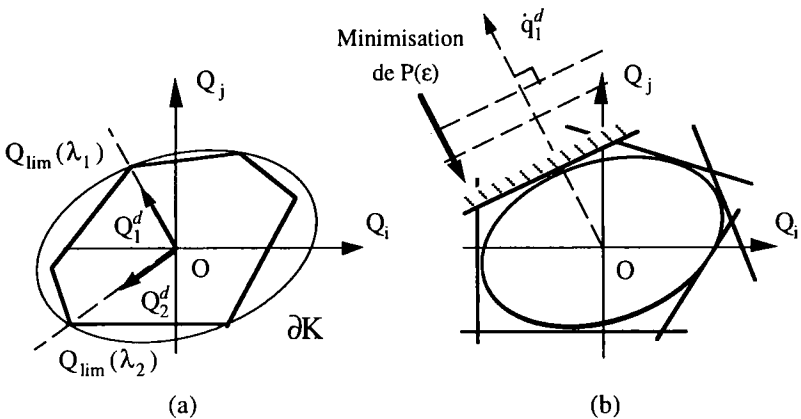


Figure 1. Approches statique et cinématique dans le cas de deux paramètres de chargement (Q_i, Q_j)

Un champ de vitesse de déformation ϵ est cinématiquement admissible (CA) s'il dérive d'un champ de vitesse de déplacement u satisfaisant les conditions aux limites en vitesse ; le champ u doit être dérivable sauf en ses surfaces de discontinuité où le saut de vitesse $[u]$ doit être borné : u est alors licite. Pour être de plus PA, et donc licite, ϵ et $[u]$ doivent satisfaire la loi de normalité, c'est-à-dire pouvoir être placés sur une normale à la surface représentant leurs critères respectifs.

L'approche par l'extérieur de K , ou méthode cinématique, se fait dans une direction donnée \dot{q}_d de \mathbf{R}^n en résolvant le problème :

$$P_0 = \text{Min} \{ P(\epsilon(u)) / u \text{ licite et } \dot{q}(u) = \dot{q}^d \} \quad [3]$$

où $P(u)$ est la puissance totale dissipée dans le système ; elle est définie par :

$$P(u) = \frac{1}{V} \int_V \sigma : \varepsilon(u) \, dV + \frac{1}{V} \int_S [u] \cdot (\sigma \cdot n) \, dS \quad [4]$$

où ε et $[u]$ sont licites et S représente l'ensemble des surfaces de discontinuité ; ici σ doit être associé à ε (par la loi de normalité) et $\sigma \cdot n$ associé à $[u]$.

L'hyperplan d'équation $Q \cdot \dot{q}_d - P_0 = 0$ est alors tangent à ∂K (figure 1.b).

2.2. Le problème étudié

Nous considérons une plaque métallique allégée par un réseau périodique de trous de sorte que l'on puisse définir un VER carré ou hexagonal de surface S et de contour extérieur Γ (figure 2). La plaque est soumise à une traction simple Σ agissant dans le plan (X, Y) suivant une direction faisant un angle θ avec la direction privilégiée Y . La plaque est assez mince pour être traitée en contrainte plane.

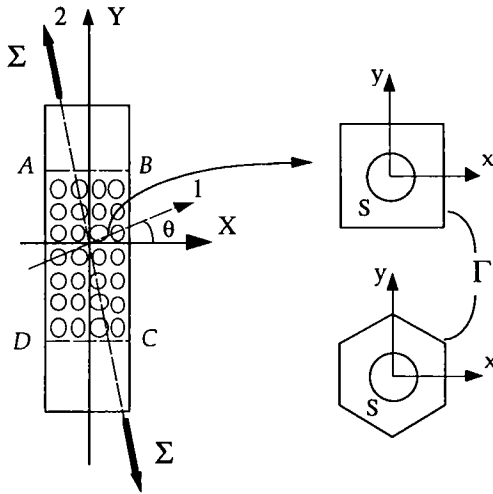


Figure 2. Eprouvette perforée périodiquement, VER carré et hexagonal

Selon la théorie de l'homogénéisation périodique [SUQ 85], les états de contraintes Σ et de vitesses de déformation E macroscopiques qui règnent dans le milieu homogène équivalent, sont les moyennes sur le VER de leurs homologues microscopiques σ et ε . La présence de lignes de discontinuité en vitesse de déplacement u et en contrainte σ amène à poser :

$$\begin{cases} \sigma \cdot n & \text{antipériodique sur } \Gamma \\ u = \hat{u} + E^v \cdot x, \quad (\hat{u} - E^d \cdot x) & \text{périodique sur } \Gamma \end{cases} \quad [5]$$

où n est la normale extérieure à Γ , E^v est la moyenne du champ ε dans les zones où u est continu et E^d correspond à la vitesse de déformation moyenne induite par le saut $[u]$ le long des lignes de discontinuité en u . Si L désigne l'union de toutes les lignes présentes dans le VER, n étant leur normale, les composantes de E^d sont définies selon :

$$E^d = \frac{1}{2S} \int_L ([u] \otimes n + n \otimes [u]) dL \quad [6]$$

Les VER utilisés sont discrétisés en éléments finis du type Lagrange P1 tant en statique qu'en cinématique. Sur l'ensemble du VER, chaque côté commun à deux éléments finis adjacents est un segment de discontinuité potentiel en u ou σ , selon le cas. L'utilisation d'éléments finis discontinus autorise la description des mécanismes de blocs (toujours performants) en cinématique ; ces champs discontinus sont en pratique indispensables en statique [PAS 78].

3. Détermination de la résistance en traction simple hors-axes S

3.1. Formes linéarisées des critères de Tresca et Mises

Compte tenu du caractère non linéaire des critères de plasticité employés, les méthodes statique et cinématique décrites précédemment conduisent naturellement à des problèmes d'optimisation non linéaires. Ces problèmes sont en général difficiles à résoudre au même titre que peuvent l'être certains problèmes d'élastoplasticité. Sur la base d'une linéarisation préalable des critères de plasticité, la formulation linéaire de ces méthodes a montré son efficacité sur nombre de problèmes autres que la contrainte plane (cf. [PAS 78] et [FRA 97], entre autres).

Le critère de Tresca en contrainte plane, qui dans un repère spécifique est représenté par l'intersection d'un cylindre (C1) et de deux cônes (C2) et (C3) (figure 3), est linéarisé extérieurement par $3m$ plans comme suit [BOE 82, PAS 83] :

$$\begin{cases} f_{1r}^l(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (\sigma_x - \sigma_y) \cos \frac{2\pi r}{m} + 2\tau_{xy} \sin \frac{2\pi r}{m} - \sigma_0 \leq 0 \\ f_{2r}^l(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (\sigma_x - \sigma_y) \cos \frac{2\pi r}{m} - (\sigma_x + \sigma_y) + 2\tau_{xy} \sin \frac{2\pi r}{m} - 2\sigma_0 \leq 0 \\ f_{3r}^l(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (\sigma_x - \sigma_y) \cos \frac{2\pi r}{m} + (\sigma_x + \sigma_y) + 2\tau_{xy} \sin \frac{2\pi r}{m} - 2\sigma_0 \leq 0 \end{cases} \quad [7]$$

Le critère de Mises, représenté en trait interrompu sur la figure 3.a, est tangent intérieurement au critère de Tresca. Il prend dans un repère spécifique la forme d'une sphère (S_M) de rayon $2\sigma_0/\sqrt{3}$. La linéarisation de ce critère est réalisée par un polyèdre quasi régulier tangent à cette sphère [FRA 94] et le critère de Mises est remplacé par (figure 3.b):

$$f_i^m(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \left(\frac{x_i}{\sqrt{3}} + y_i\right)\sigma_x + \left(\frac{x_i}{\sqrt{3}} - y_i\right)\sigma_y + 2z_i \tau_{xy} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \leq 0 \quad [8]$$

où σ_0 est la résistance limite en traction simple du matériau sain ; (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées de p points M_i répartis régulièrement sur la sphère de rayon unité selon la technique de [COQ 87].

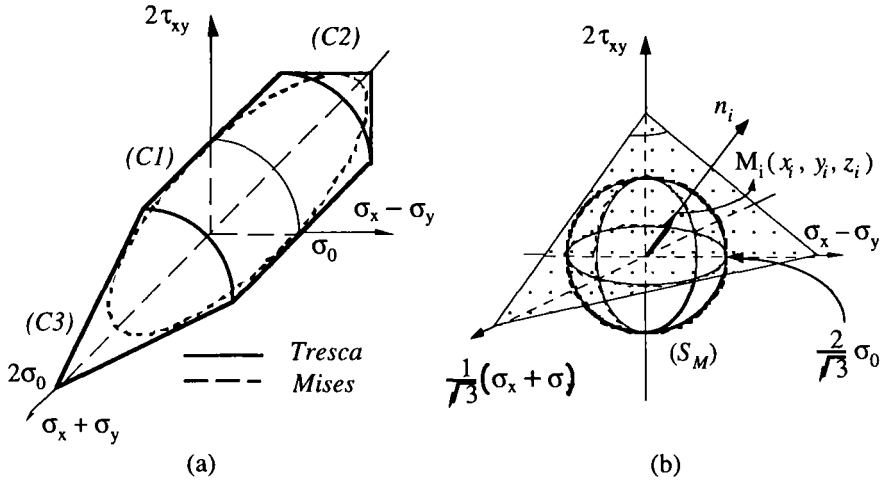


Figure 3. Critères de Tresca et de Mises en contraintes planes

3.2. Formulation numérique du problème statique

Nous rappelons ici brièvement les caractéristiques du programme statique que nous avons utilisé dans le cas de la contrainte plane avec les critères isotropes de Tresca et Mises. Chaque maillage est formé d'éléments finis triangulaires du type Lagrange P1 dont chaque côté est une ligne de discontinuité potentielle en contrainte (figure 4).

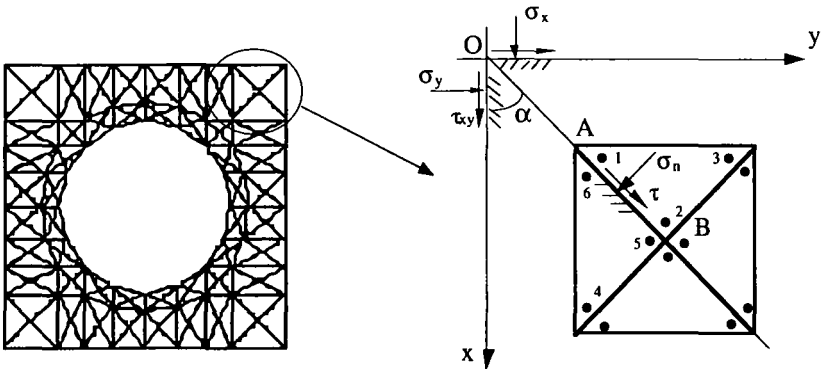


Figure 4. Le maillage éléments finis et sa structure élémentaire

Le champ de contrainte σ , linéaire en x et y sur chaque triangle, est licite s'il satisfait :

a. Les équations de l'équilibre indéfini, qui en l'absence de force de volume s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{9}$$

b. La continuité de σ_n et τ entre deux triangles imposées aux extrémités de la ligne de discontinuité (points A et B figure 4), ce qui garantit qu'elle est vérifiée le long de celle-ci compte tenu de la linéarité de variation de $\{\sigma\}$,

c. Les conditions aux limites qui traduisent ici l'antipériodicité du vecteur contrainte sur le contour Γ du VER (eqn. [5₁]), et les conditions de symétrie éventuelles,

d. La définition des paramètres de chargement macroscopiques Σ_x , Σ_y et Σ_{xy} qui sont les moyennes sur le VER de leurs homologues microscopiques,

e. Les conditions d'admissibilité plastique (PA), assurées dès lors que σ vérifie en chaque sommet d'élément les critères [7] ou [8], ceux-ci étant convexes.

Nous obtenons finalement le problème d'optimisation linéaire P_S :

$$P_S \begin{cases} \text{Max } F = \{C\}^T \{X\} \\ [A] \{X\} \leq \{B\} \end{cases} \tag{10}$$

où, en notation numérique, le vecteur $\{X\}$ est défini par $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_N\}$ où les composantes X_i sont les variables « nodales » σ_{ij} , composantes du tenseur contrainte en chaque sommet de l'élément fini ainsi que les composantes des tenseurs des contraintes macroscopiques Σ . Les composantes X_i doivent maximiser F en respectant les conditions représentées par :

$$[S] \{X\} = \{B_1\} \text{ et } [C] \{X\} \leq \{B_2\}$$

La matrice $[S]$ rassemble les équations relatives à l'aspect SA du champ de contrainte σ (conditions a à d ci-dessus) ; la matrice $[C]$ regroupe les conditions PA e, l'ensemble de ces conditions formant le système [10]. Le résultat n'est pas exactement PA car selon la méthode proposée, le critère est linéarisé par l'extérieur ; ceci nécessite simplement une post-correction du résultat pour le rendre licite, correction s'avérant bien inférieure à 1 % compte tenu du nombre important de plans linéarisant le critère.

Les critères de Tresca et Mises conduisent à des matrices contraintes [A] beaucoup plus profondes que larges. Dans le problème dual [PAS 78, 83], la matrice des conditions est la transposée de [A]. Le temps de calcul est sensiblement proportionnel au produit du nombre de lignes par le nombre de termes non nuls de la matrice : la dualisation de (P_S) est donc recommandée, d'autant que cette méthode a largement prouvé maintenant son efficacité. Les différents problèmes (P_S) traités sont résolus à l'aide du code d'optimisation linéaire XPRESS sur stations SUN Sparc 2 ou 5 pour un temps CPU variant de quelques minutes à plusieurs heures, selon le raffinement du maillage utilisé et les choix de paramètres de linéarisation m et p . Les résultats obtenus sont licites à la seule précision interne près du calculateur ; le caractère licite du champ de contrainte optimal σ est vérifié de nouveau, *a posteriori*, par une procédure totalement indépendante.

3.3. Formulation numérique du problème cinématique

3.3.1. Description du champ de vitesse de déplacement u

La zone maillée est divisée en triangles ; à chacun des sommets d'élément est affectée une vitesse de déplacement à deux composantes u_x, u_y . La vitesse u varie linéairement en x et y sur le triangle (de sommets 1, 2 et 3) et les sauts de vitesse $[u]$ sont autorisés le long des segments séparant deux éléments finis adjacents. Du fait de la linéarité de u à l'intérieur de chaque élément, le saut de vitesse $[u]$ s'exprime linéairement à partir de ses valeurs aux couples de nœuds I et II situés aux extrémités du segment de discontinuité (points A et B), soit en accord avec la figure 5 :

$$[u^{(I)}] = u^{(6)} - u^{(1)} \quad \text{et} \quad [u^{(II)}] = u^{(5)} - u^{(2)} \quad [11]$$

Dans notre formulation le champ de vitesse est défini par $u = \hat{u} + E^d x$ (équation [5₂]) où $(\hat{u} - E^d x)$ est périodique sur le contour Γ , E^d étant défini en [6].

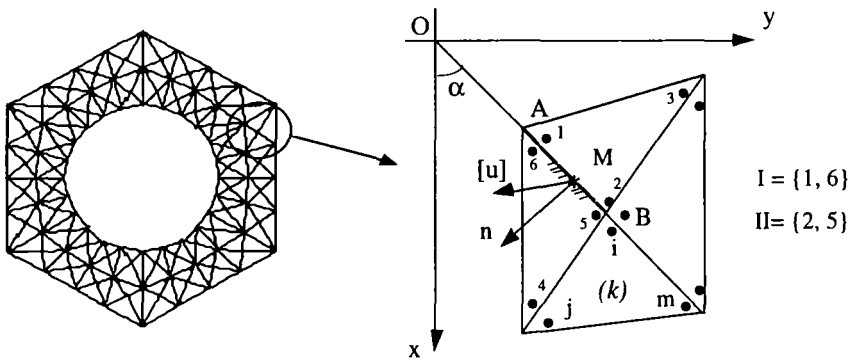


Figure 5. Maillage éléments finis et ligne de discontinuité en vitesse $[u]$

3.3.2. Conditions rendant ε licite

Soit l'élément triangulaire P1 (k) de sommets i, j, m (figure 5). Le champ de vitesse de déformation ε est naturellement CA dans l'élément. Pour qu'il soit licite (CA et PA) nous aurons sur chaque élément (k) le système d'équations suivant :

$$\varepsilon(u) = \lambda \frac{\partial f^{m,t}(\sigma)}{\partial \sigma} \quad \text{avec } f^{m,t}(\sigma) = 0 \text{ et } \lambda \geq 0 \quad [12]$$

En présence de lignes de discontinuité en vitesse de déplacement, la loi de normalité impose que les critères de plasticité linéarisés de Tresca $F^t(T)$ et de Mises $F^m(T)$ dans le plan de Mohr soient fonction potentiel du saut de vitesse $[u]$, autrement dit :

$$[u]_{PA} \Leftrightarrow \exists T = (\sigma_n, \tau) \text{ tel que } F(T) = 0 \text{ et} \quad [13]$$

$$[u^M] = [\bar{u}^M] = \mu \frac{\partial F^{m,t}(T)}{\partial T}, \quad \mu \geq 0$$

Les critères $F(T)$ et $F^m(T)$, représentés figure 6, sont remplacés par leurs formes linéarisées tangentes notées respectivement $F_i^t(T)$ et $F_i^m(T)$ ($i = 1 \text{ à } d$) et définies en [FRA 94].

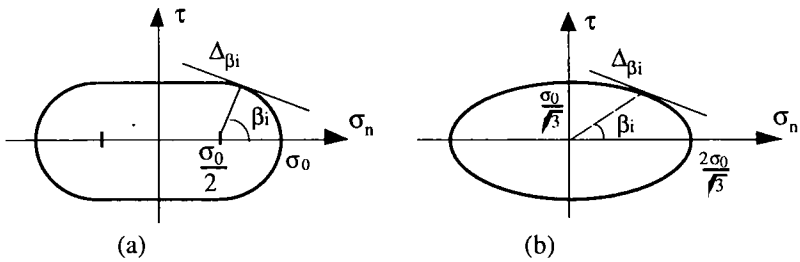


Figure 6. Critères de Tresca (a) et Mises (b) dans le plan de Mohr linéarisés par d droites tangentes $\Delta\beta_i$

Comme dans le problème statique, les conditions de périodicité $[5_2]$ sur le contour Γ augmentées éventuellement des conditions de symétrie spécifiques au type du VER doivent être imposées. Ces conditions permettent d'étendre le champ u obtenu dans le demi-VER au VER entier de manière licite et donc d'obtenir le résultat cinématique cherché.

3.3.3. Application du théorème des puissances virtuelles

La puissance dissipée (moyenne) dans la structure, de surface S comportant l'ensemble L de lignes de discontinuité s'écrit ici, pour u licite (cf. [SAL 83]) :

$$P(u) = \frac{1}{S} \int_S \pi(\epsilon) dS + \frac{1}{S} \int_L \pi([u]) dL \tag{14}$$

où $\pi(\epsilon)$ est la puissance dissipée surfacique (problème plan ici) et $\pi([u])$ est la puissance dissipée unitaire le long des lignes de discontinuité définies par :

$$\begin{aligned} \pi(\epsilon) &= \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2\tau_{xy} \epsilon_{xy} , \quad \sigma \text{ P.A. associé à } \epsilon \\ \text{et } \pi([u]) &= \sigma_n [u_n] + \tau [u_t] , \quad (\sigma_n, \tau) \text{ P.A. associé à } [u] \end{aligned} \tag{15}$$

Le champ ϵ étant constant dans l'élément et $[u]$ variant linéairement le long des côtés d'élément, la puissance dissipée totale dans la structure vérifie finalement, pour N éléments finis et D lignes de discontinuité :

– pour le matériau de Tresca :

$$\begin{aligned} P(u) \leq \text{Min}_{\lambda, \mu \geq 0} & \left(\frac{\sigma_0}{V} \left[\sum_{k=1}^N \left(\sum_{r=1}^m \lambda_{1r}^{(k)} + 2(\lambda_{2r}^{(k)} + \lambda_{3r}^{(k)}) \right) S_k + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{4} \sum_{j=1}^D \left(\sum_{i=1}^d (\mu_i^I + \mu_i^{II}) \left(1 + \left| \cos \frac{2\pi i}{d} \right| \right) \right) \right] \right) \end{aligned} \tag{16}$$

– pour le matériau de Mises :

$$P(u) \leq \text{Min}_{\lambda, \mu \geq 0} \left(\frac{\sigma_0}{S} \left[\sum_{k=1}^N \left(\sum_{r=1}^p \lambda_r^{(k)} \right) S_k + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^D \left(\sum_{i=1}^d (\mu_i^I + \mu_i^{II}) \right) l_j \right] \right) \tag{17}$$

Le caractère d'inégalité est dû au fait que la composante $[u_t]$ du saut $[u]$ peut théoriquement changer de signe sur le côté de triangle support de la discontinuité [TUR 76] : en pratique, à l'examen des solutions optimales, ce cas ne se présente jamais. Les membres de droite des relations [16] et [17] constituent donc les fonctionnelles $F(\lambda, \mu)$ à optimiser et le problème cinématique devient finalement :

$$(P_c) \begin{cases} \text{Min } F(\lambda, \mu) \\ [C]\{X\} = \{B\} \end{cases} \tag{18}$$

Le vecteur $\{X\}$ est formé des déplacements nodaux $u_x^{(k)}$ et $u_y^{(k)}$ ainsi que des coefficients plastiques λ et μ : $[C]$ est la matrice des contraintes comprenant l'ensemble des conditions rendant le champ u licite. La résolution de ce problème d'optimisation linéaire est effectuée grâce au code d'optimisation linéaire XPRESS [XPR 91] qui nous donne la puissance (linéarisée) et le champ de vitesse de déformation optimaux dans la structure, d'où la valeur cinématique recherchée.

Les solutions trouvées sont ensuite contrôlées par des procédures de post-traitement en revenant au calcul avec les critères réels (non linéarisés) puisque le champ u est licite pour le critère réel. Du fait des valeurs élevées de p et m retenues ($p = 96$ et $m = 36$), qui paramètrent les linéarisations respectives des critères de von Mises et de Tresca, le résultat cinématique obtenu n'est pratiquement pas amélioré en recalculant cette puissance réelle à partir du champ de vitesse u optimal,

Les méthodes statique et cinématique employées aboutissent donc à deux problèmes indépendants d'optimisation linéaire. La résolution de ces problèmes fournit ainsi un encadrement rigoureux de la résistance en traction simple hors-axes Σ de la structure hétérogène.

4. Résultats

Dans un premier temps, nous avons comparé nos valeurs (statiques et cinématiques) de résistance en traction simple de plaques multiperforées de trous rectangulaires avec celles mesurées expérimentalement par Litewka *et al.* [LIT 84]. Les résultats de ces expériences avaient déjà été confrontés avec les approches numériques élastoplastique de [MAR 87] et cinématique de [MAG 91]. Les méthodes présentées ici fournissent, contrairement aux méthodes citées, un encadrement de la charge limite recherchée par une valeur supérieure (cinématique) et inférieure (statique), encadrement d'autant meilleur que les bornes sont proches.

Il apparaît que les valeurs de la charge limite obtenues expérimentalement par Litewka *et al.* sont constamment supérieures aux valeurs obtenues par toutes les méthodes proposées, cinématiques comprises. Nos résultats confirment bien l'explication partielle avancée en [MAG 91] selon laquelle l'hypothèse de la contrainte plane partout dans le VER est trop restrictive, en particulier au voisinage des coins du trou. Une modélisation tridimensionnelle du problème serait là plus réaliste, d'autant plus que les charges limites de la structure modélisée en contrainte plane sont des *bornes inférieures* des charges limites calculées en considérant la structure du point de vue tridimensionnel [SAL 83]. Une présentation détaillée des résultats obtenus et des comparaisons réalisées sur ce sujet est faite en [FRA 94].

Forts de l'expérience précédente, nous nous sommes intéressés alors au comportement plastique de plaques minces perforées par des réseaux périodiques de *trous circulaires* afin de diminuer le risque d'amorce de fissuration par absence de points singuliers à la frontière des trous. Faute de disposer dans la littérature de résultats expérimentaux fiables, nous avons réalisé une campagne d'essais jusqu'à rupture sur des éprouvettes de traction perforées périodiquement.

Les éprouvettes utilisées dans les essais expérimentaux sont prélevées dans des tôles de différents matériaux ductiles ; aluminium (nuance A5), acier doux (nuance E24) et cuivre, dans lesquelles ont été préalablement usinés des trous circulaires présentant des répartitions carrées et hexagonales conduisant à différentes porosités. L'épaisseur des éprouvettes est de 2 mm et la largeur varie de 25 à 65 mm selon la répartition des trous ou l'angle de sollicitation θ retenu. Afin de restaurer les propriétés physiques et mécaniques des matériaux, un recuit de recristallisation est effectué sur toutes les éprouvettes à l'issue de l'usinage. Les essais de traction ont été réalisés sur une machine Schenk RSA 100 complétée par un système d'acquisition et de dépouillement informatisé. La vitesse de sollicitation est fixée à 10 mm/min, soit une déformation de $1,67 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Les têtes de l'éprouvette sont encastrées entre deux mors hydrauliques classiques. Les têtes sont suffisamment renforcées et éloignées de la zone utile représentée par la partie ABCD sur la figure 2 pour que l'utilisation de mors à rotule ne soit pas nécessaire. Ces essais nous fournissent les charges de rupture des éprouvettes suivant différentes directions de sollicitation fixées par l'angle θ (figure 2) ainsi que les modes de rupture. La contrainte de rupture est calculée comme la moyenne des valeurs expérimentales obtenues pour une série de trois éprouvettes (cf. tableau 1). La faible dispersion des résultats obtenus pour toutes les répartitions et porosités a confirmé ce choix.

L'application des techniques d'homogénéisation est licite si on considère des systèmes mécaniques contenant un grand nombre d'hétérogénéités. Si on note e une dimension caractéristique de l'hétérogénéité (par exemple le pas entre deux trous) et L une dimension caractéristique de l'éprouvette (par exemple sa largeur), alors on admet en pratique que l'application de l'homogénéisation périodique est justifiée dès que $e/L \leq 0,1$. Dans un premier temps et afin de fixer un nombre de trous « optimal » pour notre série d'éprouvettes, nous avons évalué l'influence du rapport e/L sur la résistance limite en traction simple obtenue expérimentalement pour un cas où des solutions analytiques du problème d'analyse limite existent. La comparaison montre la quasi invariance des valeurs expérimentales de Σ/σ_0 par rapport au nombre de trous usinés dans la largeur de l'éprouvette, ce qui signifierait, *a priori*, que le rapport e/L est arbitraire dans le cas présent (figure 7). Une expérience similaire a été réalisée pour la direction de chargement $\theta = 45^\circ$ (VER carré) et elle conduit à la même conclusion. Les conditions aux bords de l'éprouvette n'influencent donc pas de manière significative les résultats, ce qui justifie d'autant l'emploi de perforations circulaires. Précisons que les résultats numériques obtenus pour le cas présenté figure 7 coïncident quasiment avec les valeurs analytiques (tableau 1). Dans ce cas, les états de déformation et de contrainte macroscopiques se conforment parfaitement au niveau microscopique (c'est-à-dire à l'échelle de l'hétérogénéité) à la périodicité de la géométrie. On retrouve dans ce cas un mécanisme de blocs identique au mécanisme de rupture expérimental (figure 8.a).

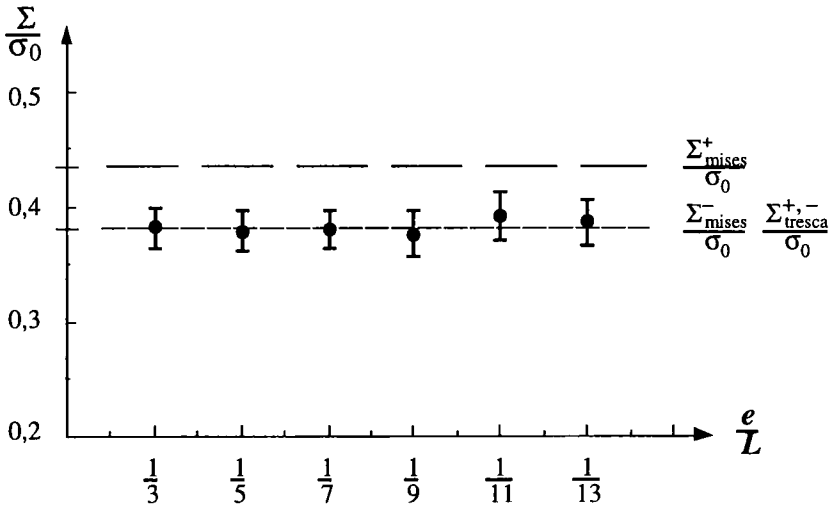


Figure 7. Comparaison entre valeurs expérimentales et analytiques de Mises et Tresca de Σ/σ_0 en fonction de e/L . VER carré, $p = 0,3$, éprouvettes acier

Les méthodes utilisées nous donnent avec une grande précision, l'état de contrainte dans chaque triangle (méthode statique) ainsi que le vecteur vitesse de déplacement correspondant à l'écoulement libre de la structure en chaque nœud du maillage (méthode cinématique). Les résultats fournis par cette dernière nous permettent de tracer le maillage déformé à la ruine du matériau. Nous nous limitons ici à la présentation de deux modes de rupture qui correspondent à des cas où l'encadrement obtenu permet d'approcher la solution exacte, par exemple le cas pour $\theta = 0^\circ$ et le matériau de Tresca (figure 8.a). Pour cette direction de chargement, le champ de contrainte, qui est un champ constant par bandes verticales, est homogène entre deux trous et seule la composante σ_y est non nulle ($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$). Le mécanisme de rupture obtenu est un mécanisme à deux blocs rigides séparés par une ligne de discontinuité perpendiculaire à la direction du chargement. On retrouve un mode de rupture identique pour le VER hexagonal, pour toute porosité, pour le matériau de Tresca et pour celui de von Mises.

Parmi les paramètres influençant la méthode cinématique la forme du maillage a un rôle prépondérant ; contrairement à la méthode statique, celui-ci ne doit pas nécessairement être très raffiné, pourvu que les lignes de discontinuité en vitesse u autorisent le mécanisme de rupture réel. De ce point de vue, l'expérience montre que la rupture a lieu dans la largeur de l'éprouvette suivant une ligne qui correspond à la plus petite distance reliant deux trous appartenant à deux VER adjacents. L'orientation de cette ligne change bien avec la direction de sollicitation θ d'où la nécessité, *a priori*, d'utiliser des maillages différents pour chaque essai. Cette ligne est parfaitement visible sur la figure 8.b correspondant à un essai à $\theta = 15^\circ$. On ob-

tient pour ce maillage la meilleure borne cinématique de Σ^+/σ_0 égale à 0,360 alors que ce mécanisme de blocs rigides n'apparaît pas pour le maillage représenté sur la figure 8.c, bien plus raffiné, qui fournit une borne cinématique moins intéressante égale à 0,375. Pour ce même essai, la valeur statique atteint 0,357, preuve que le maillage utilisé pour la méthode cinématique (figure 8.b) permet d'obtenir quasiment le mécanisme de rupture réel.

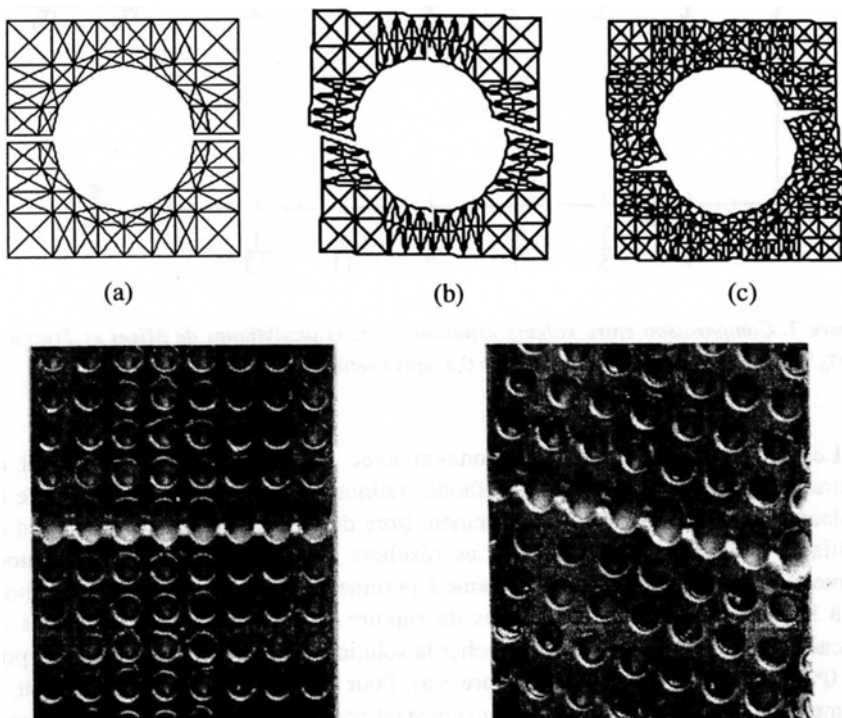


Figure 8. Modes de rupture théoriques obtenus (porosité 30 %, critère de Tresca).
 - (a) $\Sigma^+ / \sigma_0 = 0,379$ (96 triangles $\theta = 0^\circ$) - (b) $\Sigma^+ / \sigma_0 = 0,360$ (104 triangles $\theta = 15^\circ$)
 - (c) $\Sigma^+ / \sigma_0 = 0,375$ (384 triangles $\theta = 15^\circ$). Comparaison avec les modes de rupture correspondant réels

Pour les raisons précédentes, les résultats numériques présentés dans le tableau 1 sont obtenus à partir d'une large variété de maillages afin d'optimiser au mieux l'encadrement de la résistance limite. La taille des problèmes cinématiques résolus par le code d'optimisation linéaire varie de 794 lignes \times 8 149 colonnes (maillage 96 triangles) à 2 922 lignes \times 31 393 colonnes (maillage 384 triangles) pour des temps de calcul très variables. Les écarts entre les valeurs cinématiques et statiques ne dépassent pas 3 % et correspondent bien aux valeurs expérimentales

obtenues pour les trois matériaux métalliques et les deux porosités considérés. On note néanmoins une certaine disparité entre les valeurs expérimentales suivant la nature du matériau ; il semblerait que l'acier E-24 obéit mieux au critère de Tresca alors que le comportement plastique du cuivre et de l'aluminium s'identifierait plutôt au critère de Mises, critère reconnu souvent comme le plus représentatif pour les matériaux métalliques. Les courbes de traction montrent pour les trois métaux utilisés que les matériaux perforés se comportent comme des matériaux élastiques à écrouissage limité ; le comportement réel vérifie assez bien l'hypothèse rigide parfaitement plastique.

En plus de la forme du maillage, ces résultats dépendent aussi dans une large mesure des paramètres p et m de linéarisation des critères. En pratique, ces paramètres sont fixés à des valeurs permettant d'avoir des temps de calcul raisonnables, valeurs telles que leur augmentation n'apporte plus d'amélioration significative.

θ	0°	15°	30°	45°
Σ^+ / σ_0 (Tresca)	0,379	0,360	0,325	0,332
Σ^- / σ_0 (Tresca)	0,378	0,357	0,318	0,325
Σ^+ / σ_0 (Mises)	0,421	0,364	0,335	0,341
Σ^- / σ_0 (Mises)	0,417	0,359	0,329	0,337
Σ^{exp} / σ_0 (alu)	$0,442 \pm 0,015$	$0,399 \pm 0,018$	$0,355 \pm 0,02$	$0,395 \pm 0,018$
Σ^{exp} / σ_0 (cuivre)	$0,412 \pm 0,01$	$0,362 \pm 0,008$	$0,342 \pm 0,008$	$0,360 \pm 0,008$
Σ^{exp} / σ_0 (acier)	$0,382 \pm 0,006$	$0,362 \pm 0,006$	$0,358 \pm 0,003$	$0,38 \pm 0,01$

Tableau 1. Comparaison entre les bornes cinématiques Σ^+ et statiques Σ^- et les valeurs expérimentales Σ^{exp} obtenues sur éprouvettes en fonction de l'angle de sollicitation (VER carré, critères de Tresca et von Mises, porosité 30 %)

5. Conclusion

Les méthodes proposées conviennent bien aux structures hétérogènes, dont la ruine est due à un écoulement plastique libre, grâce à l'emploi des théorèmes de l'analyse limite et d'une méthode d'homogénéisation via l'utilisation d'une méthode éléments finis à présent éprouvée. Ces modélisations fournissent des outils de prévision du critère de résistance macroscopique d'une structure hétérogène à partir de la seule connaissance de la résistance limite en traction simple σ_0 du matériau constitutif et de sa géométrie.

Les résultats obtenus sont rigoureusement licites et de plus vérifiables a posteriori. La méthode cinématique est fortement dépendante de la forme du maillage car celui-ci doit autoriser l'apparition de mécanismes de blocs souvent spécifiques au cas traité. Ceci est très largement facilité par l'utilisation d'éléments finis du type discontinu, dont l'efficacité pourrait être encore accrue par l'utilisation de maillages optimisés selon, par exemple, une méthode basée sur le gradient de la

puissance dissipée dans le maillage [THA 97]. La méthode statique, elle, dépend plus du raffinement du maillage et beaucoup moins de sa forme. Dans tous les cas, les temps de calcul restent raisonnables compte tenu des performances actuelles des codes d'optimisation linéaire tels XPRESS ou OSL.

Un complément naturel à cette étude consisterait à passer au cas tridimensionnel intégral, dont la contrainte plane n'est qu'une approximation. Ceci permettrait de répondre à la question signalée plus haut de préciser l'influence du caractère nécessairement tridimensionnel au voisinage des perforations, même circulaires ; ceci rejoint d'ailleurs, en plasticité, une préoccupation analogue bien connue en mécanique des plaques composites perforées en élasticité.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier R. Arrieux, Professeur à l'ESIA d'Annecy, et J.L. Favre, Directeur de COMPOSI'tec, pour leur aide dans la réalisation de ce travail.

6. Bibliographie

- [BOE 82] BOEHLER J.P., RACLIN J., PASTOR J., TURGEMAN S., « Grandes déformations et endommagement t » Rapport GRECO - CNRS, 1982.
- [CAP 72] CAPURSO M., « Limit analysis of continuous media with piecewise linear programming », *Int. Jl. Solids Struct.*, vol. 8, p. 1413-1431, 1972.
- [COQ 87] COQUARD N., « Le polisseur de boules », *Sciences et Vie Micro*, n° 39, 1987.
- [FRA 94] FRANCESCATO P., « Prévission du comportement plastique des matériaux hétérogènes à constituants métalliques. Application aux composites à matrice métallique à fibres continues et aux plaques perforées », Thèse, UJF Grenoble, 1994.
- [FRA 95] FRANCESCATO P., PASTOR J., « Approches numériques de la résistance des matériaux composites unidirectionnels », *CRAS, Série II*, t. 321, p.7-13, 1995.
- [FRA 97] FRANCESCATO P., PASTOR J., « Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composites by limit analysis methods », *Eur. Jl. Mech.*, vol. 16, n° 2, p. 213-234, 1997.
- [LEN 77] LE NIZHERY D., « Calcul à la rupture des matériaux composites », *Symposium franco-polonais, Cracovie 1977*; in Problèmes non linéaires de Mécanique, Acad. Sc. Pologne, Varsovie, 1980, pp.359-370.
- [LIT 84] LITEWKA A., SAWCZUK A., STANISLAWSKA J., « Simulation of oriented continuous damage evolution », *Jl. Applied Mech.*, n° 3, p. 675-688, 1984.

- [MAG 91] MAGHOUS S., « Détermination du critère de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à structure périodique : approche numérique », Thèse de troisième cycle, ENPC, 1991.
- [MAR 87] MARIGO J.J., MIALON P., MICHEL J.C., SUQUET P., « Un exemple de prévision des charges limites d'une structure hétérogène périodique », *Jl Méca. Théo. Appl. (Eur. Jl. Mech.)*, vol. 6, pp. 47-75, 1987.
- [NEE 72] NEEDLEMAN A., « Void growth in an elastic-plastic medium », *Jl. Appl Mech.*, vol. 39, p. 964-970, 1979.
- [PAS 78] PASTOR J., « Analyse Limite : Détermination Numérique de Solutions Statiques Complètes. Application au Talus Vertical », *Jl. Méca. Théo. Appl. (Eur. Jl. Mech.)*, vol 2, n° 2, p. 167-196., 1978.
- [PAS 83] PASTOR J., « Application de la Théorie de l'Analyse Limite aux Milieux Isotropes et Orthotropes de Révolution », Thèse d'Etat, USMG ET INPG Grenoble, 1983.
- [SAL 83] SALENÇON J., *Calcul à la Rupture et Analyse Limite*, Presses ENPC, Paris, 1983.
- [SUQ 82] SUQUET P., « Plasticité et homogénéisation », Thèse d'Etat, Univ. Paris VI, 1982.
- [SUQ 85] SUQUET P., « Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics », in *Homogenization Techniques for Composite Media*, CISM Lectures, Springer Verlag, Udine, 1985.
- [THA 97] THAI T.H., « Analyse Limite : Application aux structures et aux matériaux poreux », Thèse, Université de Savoie, Chambéry, 1997.
- [TUR 76] TURGEMAN S., « Etude des fondations sollicitées à l'arrachement par la théorie de l'analyse limite », Thèse de troisième cycle, Université de Grenoble, 1976.
- [TUR 87] TURGEMAN S., PASTOR J., « Comparaison des charges limites d'une structure hétérogène et homogénéisée » *Jl. Méca. Théo. Appl. (Eur. Jl. Mech.)*, n° 6, p. 121-135, 1987.
- [XPR 91] XPRESS - MP - Reference Manual, Dash Associated Ltd, Church Lane, Blisworth, Northants, U.K, 1991.
- [ZIE 77] ZIENKIEWICZ O.C., *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw Hill, New York, 1st edition, 1967, 3rd edition 1977.

Article reçu le 18 juin 1997.

Version révisée reçue le 9 mars 1998.