
Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan

Mohamed Tahar Belarbi* — Abdelhamid Charif**

* *Institut de Génie Civil*
Centre Universitaire de Biskra
BP 145
07000 Algérie

** *Département de Génie Civil*
Université de Batna
05000 Algérie

RÉSUMÉ. Dans la modélisation par éléments finis des structures complexes à contour circulaire comme les buses ou les tunnels enterrés, deux types d'éléments peuvent être utilisés : les éléments poutres (arc) et les éléments membranaires. Ces éléments construits selon la formulation classique ne partagent pas, en général, les mêmes degrés de liberté nodaux, compliquant ainsi l'élaboration d'un modèle compatible. Afin de parer à ce problème, nous proposons de développer un nouvel élément secteur membranaire basé sur le modèle de déformation de substitution à trois degrés de liberté par nœud, y compris la rotation comme degré de liberté additionnel. Cela aide énormément à la résolution des problèmes généraux d'élasticité plane ayant un contour circulaire.

ABSTRACT. Elements, as beams and membranes, could be used in finite element modelling of complex structural systems such as buried drain pipes or tunnels. These elements of different kind, based on classical formulations, generally do not share the same nodal degrees of freedom, which complicates construction of a compatible model. To solve this modelling problem, we propose to develop a new sector membrane element based on the assumed strain model with three degrees of freedom at each node including inplane rotation as an additional degree of freedom. This helps enormously to solve easily, general plane elasticity problems having a circular contour.

MOTS-CLÉS : élément secteur, degré de liberté de rotation, modèle de déformation de substitution, membrane, élasticité plane.

KEY WORDS: sector element, rotational degree of freedom, assumed strain model, membrane, plane elasticity.

1. Introduction

L'interpolation directe des déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs et sur les contraintes ; contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ des déplacements. Les avantages des éléments à modèle de déformation sont ([DJO 90], [ASH 72]) :

- satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergences liées directement aux déformations (mode de déformation constantes et le mode de corps rigides),
- découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées),
- possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires (permettant ainsi de traiter le fameux problème de verrouillage, *locking*).

Les éléments finis de membrane à trois degrés de liberté par nœud, deux translations et une rotation autour de la normale au plan moyen, ont été formulés et/ou utilisés par plusieurs auteurs et la première tentative fut celle d'Allman [ALL 84] à [IBR 93].

Le succès de l'application du modèle de déformation pour le développement des éléments de membrane avec prise en compte de la rotation dans le plan (rotation autour de la normale au plan moyen) en coordonnées cartésiennes [SAB 85], a encouragé les chercheurs de l'école de Cardiff (GB) à développer des éléments secteurs en coordonnées polaires ayant θ_z comme degré de liberté additionnel (DDLA). De tels éléments sont utilisés dans certaines applications particulières où ils s'adaptent bien à la géométrie du problème, ainsi qu'aux structures complexes (comme les buses ou les tunnels enterrés). La combinaison de ces éléments avec des poutres (arcs) ayant trois degrés de liberté (DDL) par nœud, nécessite l'introduction d'un DDLA aux éléments plans bidimensionnels, afin de faciliter la jonction d'une part et exprimer le plus fidèlement possible la déformation dans le plan d'autre part.

Le premier élément secteur basé sur le modèle de déformation de Bouzeria [BOU 87] donne de mauvais résultats en flexion pure à cause du choix inapproprié du champ de déformations. Les deux autres éléments secteurs de Djoudi [DJO 90] améliorent la qualité des résultats mais restent sensibles au rapport d'aspect.

Pour pallier ces inconvénients nous décrivons un nouvel élément secteur nommé SBS4 (*Strain Based Sector 4-node*) simple à trois DDL par nœud, deux déplacements (radial et tangentiel) et une rotation considérée comme DDLA.

2. Description de l'élément SBS4

La figure 1 montre la géométrie de l'élément secteur SBS4 et les variables cinématiques nodales correspondantes. A chaque nœud (i) de DDL U_i et V_i est attribuée une rotation additionnelle notée θ_{zi} .

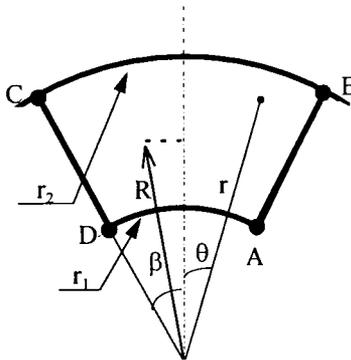


Figure 1. Géométrie de l'élément secteur SBS4

L'élément est limité par deux arcs circulaires concentriques et deux lignes radiales rectilignes. Il possède quatre nœuds et trois DDL par nœud :

U_r : déplacement radial

V_θ : déplacement circonférentiel (tangential)

θ_z : rotation autour de la normale au plan de l'élément

3. Formulation des éléments secteurs utilisant des modèles de déformation de substitution

Trois approches distinctes ont été utilisées pour le développement des éléments secteurs à modèle de déformation [RAJ 69], [SAB 86] et [BOU 87] :

3.1. Intégration directe

Les variables cinématiques sont directement exprimées en coordonnées polaires par intégration des équations reliant les déformations aux déplacements (exprimées en coordonnées polaires). L'élément secteur de Bouzerira [BOU 87] évoqué précédemment utilise cette approche.

3.2. Transformation de coordonnées [SAB 86]

Dans cette approche les variables cinématiques sont développées en coordonnées cartésiennes (X,Y), puis transformées en coordonnées polaires (r,θ) comme suit (figure 2) :

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin\theta \\
 y &= r \cos\theta - R \dots \\
 U_r &= \bar{U} \sin\theta + \bar{V} \cos\theta \\
 V_\theta &= \bar{U} \cos\theta - \bar{V} \sin\theta
 \end{aligned}$$

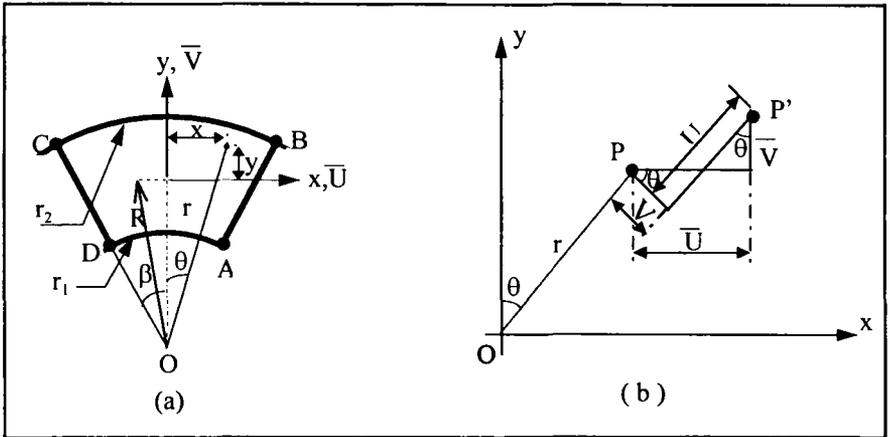


Figure 2. Système de coordonnées et déplacements

Les deux éléments secteurs de Djoudi [DJO 90] sont obtenus en combinant les deux premières approches.

3.3. Approche directe [RAJ 69]

Cette troisième approche consiste à interpoler sur les variables polaires r et θ de la même manière qu'on le fait sur les variables cartésiennes x et y , tout en vérifiant l'équation de compatibilité (exprimées en coordonnées polaires).

REMARQUE. — Nous retenons l'approche directe pour le développement d'un élément secteur membranaire avec DDL de rotation basé sur le modèle de déformation de substitution.

4. Éléments secteurs développés utilisant l'approche directe

4.1. Élément de Raju et Rao [RAJ 69]

L'un des éléments finis les plus utilisés dans l'analyse des problèmes de l'élasticité plane est l'élément quadrilatère bilinéaire. En coordonnées cartésiennes les fonctions de déplacement sont données par :

$$\bar{U} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x y \quad [1a]$$

$$\bar{V} = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 x y \quad [1b]$$

Raju et Rao ont développé un élément secteur PSL (*Sector element with Linear displacement variation*) utilisant le champ des déplacements [1] soit :

$$U_r = a_1 + a_2 r + a_3 \theta + a_4 r \theta \quad [2a]$$

$$V_\theta = a_5 + a_6 r + a_7 \theta + a_8 r \theta \quad [2b]$$

Cependant, l'élément résultant (PSL) donne de mauvais résultats quand il s'agit d'étudier un problème plan de flexion pure (flexion pure d'un anneau semi-circulaire).

4.2. Élément de Sabir et Salhi [SAB 86]

Sabir et Salhi ont introduit un nouveau champ de déplacement soit :

$$U_r = a_1 - a_3 \theta + a_4 r + a_5 r \theta - a_7 \frac{\theta^2}{2} + a_8 \frac{\theta}{2} \quad [3]$$

$$V_\theta = a_2 + a_3 r - a_5 \frac{r^2}{2} + a_6 \theta + a_7 r \theta + a_8 \frac{r}{2}$$

Les résultats restent toujours insuffisants pour le même problème.

5. Formulation variationnelle de l'élément SBS4

Considérons l'élément secteur illustré sur la figure 2a. Les trois composantes cartésiennes du champ de déformation dans le plan d'un point P de l'élément sont données par :

$$\epsilon_x = \bar{U}_{,x} = (\partial \bar{U} / \partial x) ; \epsilon_y = \bar{V}_{,y} ; \gamma_{xy} = \bar{U}_{,y} + \bar{V}_{,x} \quad [4]$$

\bar{U} , \bar{V} : composantes du déplacement respectivement dans les directions x et y.

Les équations [4] doivent au minimum représenter le mouvement d'un corps rigide. Donc on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 0 \\ \epsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad [5]$$

L'intégration de [5] permet d'obtenir une solution particulière :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= a_1 - a_3 y \\ \bar{V} &= a_2 + a_3 x \end{aligned} \tag{6}$$

et la rotation θ_z sera donnée par :

$$\theta_z = \frac{1}{2}(\bar{V}_{,x} - \bar{U}_{,y}) = a_3 \tag{7}$$

Les équations [6] et [7] représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide (MCR).

Le présent élément possède quatre nœuds et trois DDL par nœud (U_r , V_θ et θ_z). Le champ de déplacement doit contenir douze constantes indépendantes. Trois d'entre elles (a_1 , a_2 et a_3) sont déjà utilisées pour représenter le MCR, il en reste donc neuf (a_4 , a_5 , ... a_{12}) pour représenter approximativement la déformation dans l'élément, tout en vérifiant l'équation de compatibilité [8] :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \tag{8}$$

soit :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= a_4 + a_6 y + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \\ \epsilon_y &= a_7 + a_8 x - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \\ \gamma_{xy} &= 2a_5 + 2a_6 x + 2a_8 y + 2a_9 y + 2a_{12} x \end{aligned} \tag{9}$$

En substituant [9] dans [4] et après intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ \bar{V} &= a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \\ \theta_z &= -a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{aligned} \tag{10}$$

Le champ de déplacement final sera obtenu par combinaison de [6] et [10] :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ \bar{V} &= a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \\ \theta_z &= a_3 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{aligned} \tag{11}$$

Dans le passage en coordonnées polaires, on ne substitue pas x par $(r \cos\theta)$ et y par $(r \sin\theta)$, mais on fait des interpolations similaires sur les variables r et θ comme l'a effectué Raju et Rao [RAJ 69]. Cette procédure est justifiée car elle ne viole pas la vérification de l'équation de compatibilité [12] (annexe 1) :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad [12]$$

Les relations [11] deviennent :

$$\begin{aligned} U_r &= a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta + a_6r\theta + a_8 \frac{\theta^2}{2} + a_9\theta^2 + a_{10}r\theta^2 + a_{11}r^2\theta^3 \\ V_\theta &= a_2 + a_3r + a_5r + a_6 \frac{r^2}{2} + a_7\theta + a_8r\theta - a_{10}r^2\theta - a_{11}\theta^2r^3 + a_{12}r^2 \\ \theta_z &= a_3 - a_9\theta - 2a_{10}r\theta - 3a_{11}r^2\theta^2 + a_{12}r \end{aligned} \quad [13]$$

Nous remarquons ici, que les fonctions de déplacement finales contiennent des termes quadratiques et cubiques permettant ainsi le changement de courbure.

SBS4 possède les caractéristiques suivantes :

- description correcte du MCR ;
- représentation les états de déformations constantes ;
- continuité à l'intérieur de l'élément ;
- évaluation simple et efficace de la matrice de rigidité (sans intégration numérique) ;
- convergence monotone vers la solution analytique en raffinant le maillage.

Les relations déformation-déplacement en coordonnées polaires s'écrivent :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} ; \varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} ; \gamma_{r\theta} = \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} ; \quad [14]$$

La matrice de déformation [B] s'obtient en substituant les équations [13] dans [14] :

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \theta & 0 & 0 & \theta^2 & 2r\theta^3 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \frac{\theta}{r} & 0 & \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\theta^2}{2r}\right) & \frac{\theta^2}{r} & (\theta^2 - r) & (r\theta^3 - 2r^2\theta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r}{2}\right) & -\frac{\theta}{r} & \frac{\theta}{r} & \frac{2\theta}{r} & (2\theta - r\theta) & (3r\theta^2 - 2r^2\theta^2) & r \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ de SBS4 s'obtient ainsi en suivant les techniques habituelles de la méthode des éléments finis.

$$[K_e] = [A^{-1}]^T \left[\iint_S [B]^T [D] [B] . r . dr . d\theta \right] [A^{-1}] \tag{15a}$$

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \tag{15b}$$

$$\text{avec : } [K_0] = \int_{-\beta r_1}^{\beta r_2} \iint [B]^T [D] [B] . r . dr . d\theta \tag{15c}$$

Pour un matériau élastique, homogène et isotrope en contraintes planes, la matrice [D] s'écrit :

$$[D] = \frac{E . t}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

La construction des matrices [K₀] et [A] est détaillée en annexe 2.

[K_e] est donc calculée en multipliant [K₀] par [A⁻¹] et par sa transposée [A⁻¹]^T.

6. Applications

Le but de cette partie est de montrer l'intérêt du modèle de déformation pour le calcul des structures à contours circulaires. Les tests sont limités à des applications simples mais suffisantes pour montrer les principales performances de SBS4. Les travaux de Ashwell et al. [ASH 71] ont montré l'intérêt du modèle de déformation pour le calcul des arcs.

6.1. Flexion pure d'un anneau semi-circulaire

Soit un anneau semi-circulaire (a x b = 40 x 80) est déformée en flexion pure par un moment d'extrémité (M = 1). Par raison de symétrie, seule la moitié de l'anneau est considérée (figure 3).

La moitié de l'anneau est discrétisée par un seul élément secteur membranaire (figure 3b), le moment peut être appliqué de deux manières différentes : soit par des forces nodales formant un couple (cc1), soit par des moments nodaux statiquement équivalents (cc2).

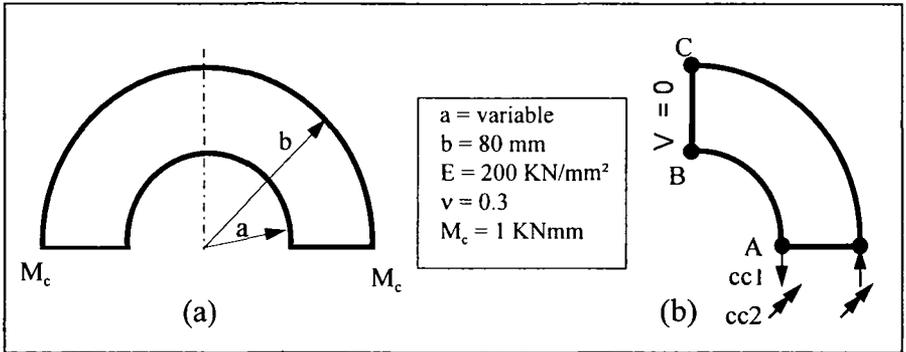


Figure 3. Flexion pure d'un anneau semi-circulaire

Les résultats des déplacements radial U_r et tangentiel V_θ ainsi que la contrainte tangentielle σ_θ en différents points (A, B et C) sont reportés sur le tableau 1.

	cas de charge		solution analytique [TIM 51]
	Couple : cc1	Moment : cc2	
$V_{\theta A}$	-0,191	-0,191	-0,202
U_{rA}	$2,970 \cdot 10^{-3}$	$3,007 \cdot 10^{-3}$	$3,250 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\theta B}$	$4,827 \cdot 10^{-3}$	$4,931 \cdot 10^{-3}$	$4,847 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\theta C}$	$-3,038 \cdot 10^{-3}$	$-3,015 \cdot 10^{-3}$	$-3,073 \cdot 10^{-3}$

Tableau 1. Flexion pure d'un anneau semi-circulaire

Pour les cas de charges cc1 et cc2, les résultats sont en accord avec la solution analytique [TIM 51]. Ces résultats confirment que l'élément ainsi développé satisfait bien au patch test d'ordre supérieur [BAT 90] et [TAY 86].

Plusieurs rapports d'aspect « b/a » sont considérés dans l'analyse, et dans tous les cas « b » est pris constant, tandis que « a » varie pour donner :

$$\frac{b}{a} = 3, 2 \text{ et } 1,3 .$$

Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique donnée par Timoshenko [TIM 51].

Les figures 5 et 6 montrent la variation des déplacements radial U_r et tangentiel V_θ suivant une section droite (m'n') pour un maillage de 3 x 2 éléments (figure 4) et un rapport d'aspect b/a = 2.

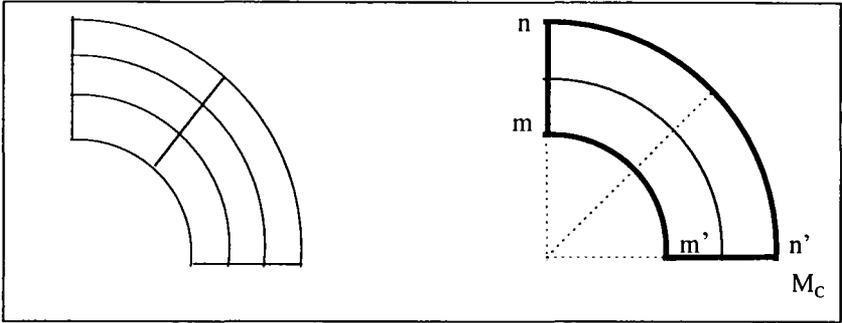


Figure 4. Maillage 3x2 et 2x2

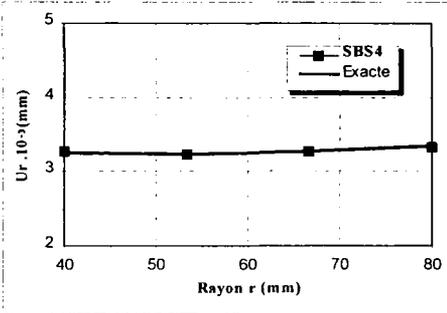


Figure 5. Variation du déplacement radial le long de $m'n'$ pour $b/a = 2$

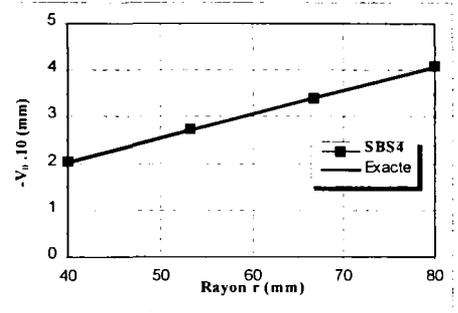


Figure 6. Variation du déplacement tangentiel le long de $m'n'$ pour $b/a = 2$

Nous constatons que l'élément SBS4 donne de bons résultats.

Les figures 7 à 12 représentent la variation des contraintes tangentielle σ_θ et normale σ_r , le long d'une section droite ($m n$), pour $b/a = 3, 2$ et $1,3$ et un maillage de 13×3 éléments.

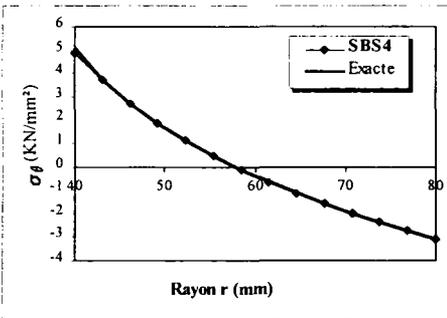


Figure 7. Variation de la contrainte tangentielle le long $m n$ pour $b/a = 2$

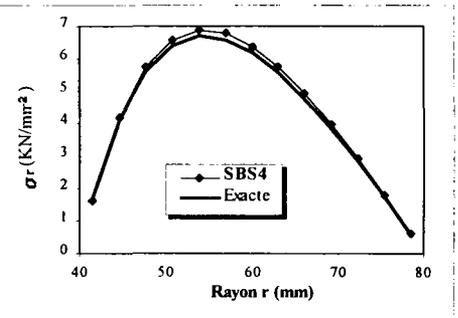


Figure 8. Variation de la contrainte radiale le long d'une section droite $m n$ pour $b/a = 2$

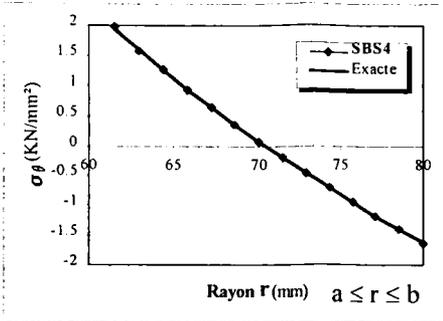


Figure 9. Variation de la contrainte tangentielle le long de $m n$ pour $b/a = 1,3$

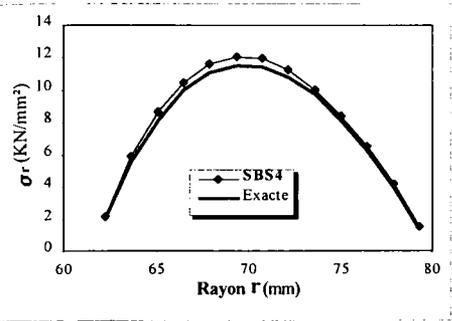


Figure 10. Variation de la contrainte radiale le long de $m n$ pour $b/a = 1,3$

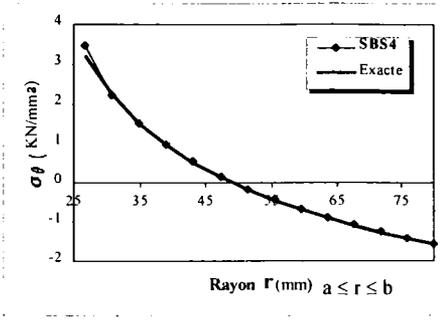


Figure 11. Variation de la contrainte tangentielle le long de $m n$ pour $b/a = 3$

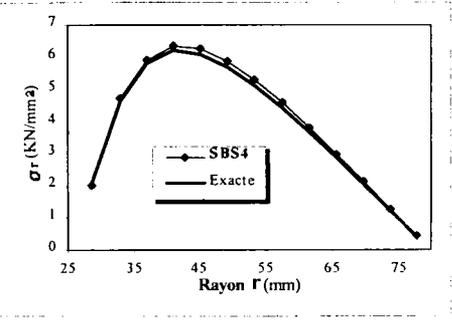


Figure 12. Variation de la contrainte radiale le long de $m n$ pour $b/a = 3$

Ces courbes nous permettent de conclure que l'élément SBS4 permet un bon encadrement des solutions analytiques associées aux déplacements et aux contraintes.

Nous constatons que le nombre réduit d'éléments suivant la direction circonférentielle n'affecte pas les résultats (vu que c'est un problème axisymétrique).

6.2. Cylindre épais sous pression interne

Le cylindre considéré est soumis à une pression interne uniforme. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées par la figure 13. Pour des raisons de symétrie, seul un quart du cylindre est modélisé.

Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique donnée par Rekach [REK 80].

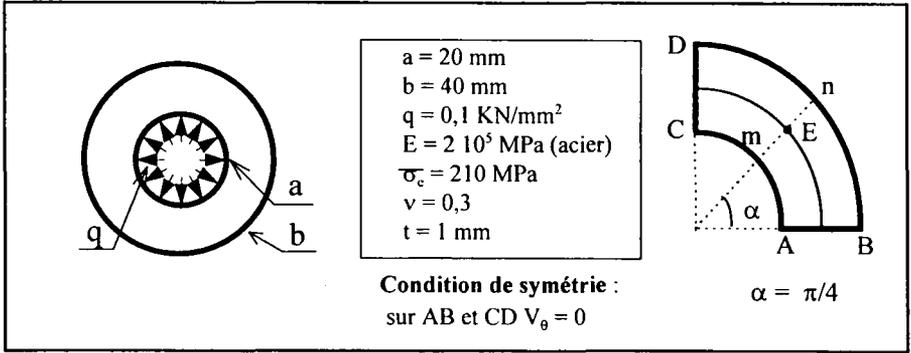


Figure 13. Cylindre épais sous pression interne

6.2.1. Présentation des résultats

Les convergences du déplacement radial (U_r), de la contrainte radiale (σ_r) et de la contrainte tangentielle (σ_θ) au point E ($r = 30 \text{ mm}$) sont montrées sur le tableau 2 et sur les figures 15, 16 et 17 pour différents maillages (figure 14).

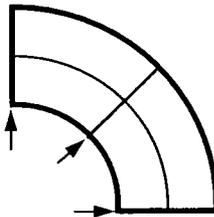


Figure 14. Maillage 2x2 et forces nodales

Maillage size*	déplacement radial U_r (mm)	contrainte radiale σ_r (MPa)	contrainte tangentielle σ_θ (MPa)
2 x 2	1,3718	36,684	85,1075
4 x 2	1,4036	28,275	90,7060
6 x 2	1,4101	26,959	91,7000
8 x 2	1,4125	26,505	92,1185
10 x 2	1,4136	26,296	92,2890
12 x 2	1,4142	26,182	92,3800
14 x 2	1,4145	26,114	92,4360
Sol. exacte	1,4155**	25,9259**	92,5900**

*1/4 du cylindre

** Réf. [REK 80]

Tableau 2. Cylindre épais sous pression interne

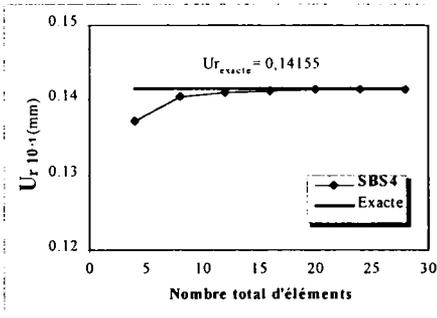


Figure 15. Convergence du déplacement radial en E

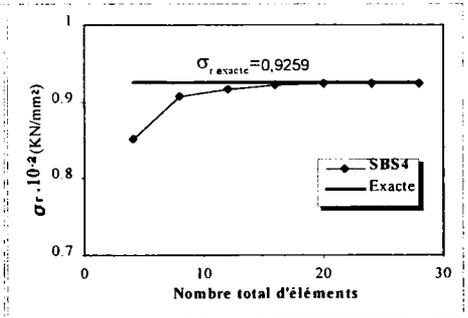


Figure 16. Convergence de la contrainte radiale en E

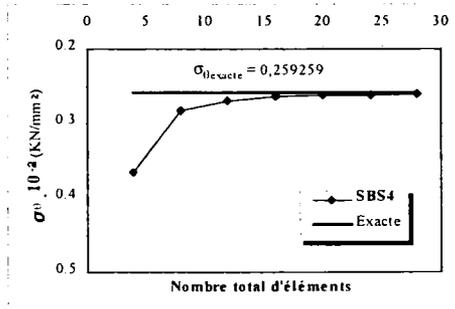


Figure 17. Convergence de la contrainte tangentielle en E

Les figures 18 à 20 illustrent la variation de U_r , σ_r et σ_θ le long d'une section droite (m n) pour un maillage de 14 x 2 éléments.

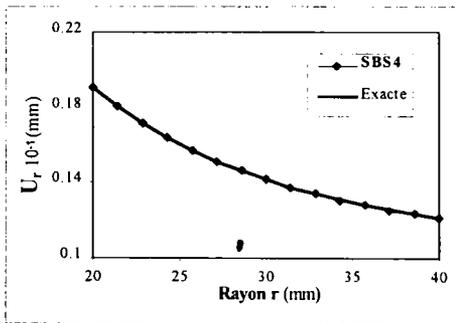


Figure 18. Variation du déplacement radial le long de m n

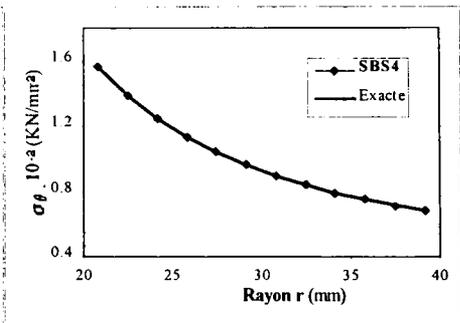


Figure 19. Variation de la contrainte tangentielle le long de m n

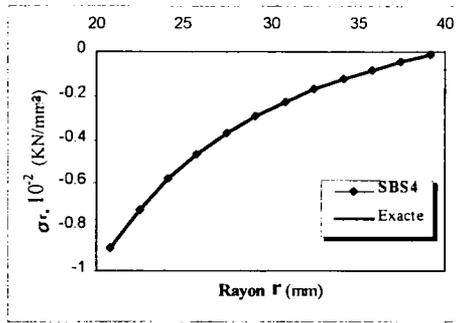


Figure 20. Variation de la contrainte radiale le long de m n

L’analyse du tableau 2 et des figures 14 à 19 permet de tirer les conclusions suivantes :

- les résultats sont estimés très satisfaisants, bien que le découpage suivant la direction circonférentielle est maintenu constant (= 2) ;
- la convergence est monotone en déplacement et en contraintes.

L’élément secteur SBS4 présente des performances très satisfaisantes, à titre d’exemple :

- pour une maille de 4 x 2 éléments, l’erreur est de 0,84 % pour le déplacement et 2 % pour la contrainte tangentielle.
- pour une maille de 14 x 2 éléments, l’erreur est de 0,07 % pour le déplacement et 0,16 % pour la contrainte tangentielle.

6.2.2. Ovalisation du cylindre

Sous l’action de la pression interne, le cylindre se déforme radialement avec augmentation des rayons externe et interne et diminution de l’épaisseur. L’ovalisation est observée avec le plus d’intensité pour un maillage de taille 14 x 2 éléments (tableau 3 et figure 21).

r (mm)	α (figure 13)		
	0	π/4	π/2
20	0,19050	0,19050	0,19050
30	0,14145	0,14145	0,14145
40	0,12130	0,12130	0,12130

Tableau 3. Déplacement radial U,

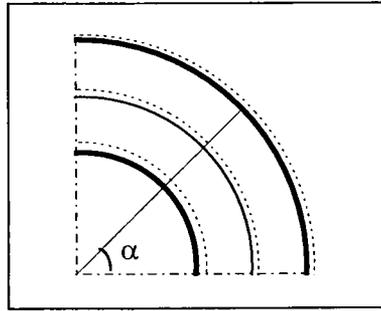


Figure 21. Ovalisation du cylindre

7. Comparaison avec d'autres éléments secteur

La comparaison se fait sur la base de l'exemple de l'anneau semi-circulaire (figure 3). Le présent élément SBS4 est comparé :

- aux éléments secteurs I et II de Djoudi [DJO 90] dont les champs de déplacement figurent en annexe 3 ;
- aux solutions élémentaires de la résistance des matériaux ;
- à la solution analytique (exacte) donnée par Timoshenko [TIM 51].

Les maxima et minima de la tension σ_θ peuvent être présentés sous la forme :

$$\sigma_\theta = m(M_c/a^2) \tag{16}$$

Les valeurs du facteur numérique « m » obtenues pour les différents cas figurent au tableau 4. Nous constatons que pour les rapports $b/a = 2$ et 3 , les valeurs obtenues pour les trois éléments SBS4, I et II sont en accord avec ceux de la solution exacte. Cependant pour le cas d'un anneau mince ($b/a = 1,3$) seul l'élément SBS4 donne des résultats très satisfaisants même pour un nombre de DDL très réduit (10 contre 242).

b/a	Distribution des tensions suivant une loi linéaire	Distribution des tensions suivant une loi hyperbolique	Solution exacte	[DJO 90] "I"	[DJO 90] "II"	Présent élément SBS4	
						Couple : cc1	Moment : cc2
1,3	+66,67	+72,98	+73,05	+109,032	+92,40	+72,980	+73,629
	-66,67	-61,27	-61,35	-79,547	-88,54	-61,268	-60,87
2	+6,00	+7,725	+7,755	+8,523	+8,145	+7,723	+7,890
	-6,00	-4,863	-4,917	-5,148	-5,305	-4,861	-4,825
3	+1,50	+2,285	+2,292	+2,412	+2,357	+2,283	+2,350
	-1,50	-1,095	-1,130	-1,150	-1,165	-1,094	-1,093
Degrés de liberté actifs				242	242	10	

Tableau 4. Coefficient « m » de l'équation [16]

8. Conclusion

La très bonne performance de SBS4 a été démontrée, les résultats correspondants sont globalement plus précis que les éléments I et II pour ce type de problème dominé par la flexion.

Il serait intéressant de coupler cet élément SBS4 avec un élément secteur de plaque riche en flexion tel que BSN [RAJ 73] (*Sector plate Bending element based on the Natural stiffness approach*) pour obtenir un élément secteur coque à facette plane à six DDL par nœud. Un tel élément pourrait s'avérer très performant pour certaines applications particulières où il s'adapte bien à la géométrie du problème. L'extension de cette approche aux problèmes tridimensionnels avec des coordonnées cylindriques ou sphériques mérite aussi d'être explorée.

9. Bibliographie

- [ALL 84] ALLMAN D.J., A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity, *Computer & Structures*, 19, p. 1-8, 1984.
- [ALL 88a] ALLMAN D.J., Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 26, p. 2645-2655, 1988.
- [ALL 88b] ALLMAN D.J., A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 26, p. 717-730, 1988.
- [ASH 72] ASHWELL D.G., SABIR A.B., A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 14, p. 171-183, 1972.
- [ASH 71] ASHWELL D.G., SABIR A.B., ROBERTS T.M., Further studies in the application of curved finite elements to circular arches, *Int. J. Mech. Sci.*, vol.13, p. 507-517, 1971.
- [BAT 90] BATOZ Jean Louis, DHATT Gouri, *Modélisation des structures par éléments finis*, Editions Hermès, Paris, 1990.
- [BER 85] BERGAN P.G., FELIPPA C.A., A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, *Comput. Meth. App. Mech. Eng.*, vol. 50, p. 25-69, 1985.
- [BOU 87] BOUZERIRA C., Finite element analysis for general plane elasticity, Msc. thesis university of Walles College of Cardiff (G.B), 1987.
- [CAR 85] CARPENTER N., STOLARSKI H., BELYTSCHKO T., A flat triangular shell element with improved membrane interpolation, *Comm. Appl. Num. Meth.*, vol. 1, p. 161-168, 1985.
- [COO 86] COOK R.D., On the Allman triangle and a related quadrilateral element, *Comput. & Struct.*, vol. 22, p. 1065-1067, 1986.
- [COO 87] COOK R.D., A plane hybrid element with rotational d.o.f and adjustable stiffness, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 24, p. 1499-1508, 1987.
- [DJO 90] DJOUDI M.S., Strain based Finite Elements for linear and geometrically non-linear analysis of structures, PhD thesis university of Walles College of Cardiff (GB), 1990.

[IBR 93] IBRAHIMBEGOVIC A., FREY F., REBORA B., Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes, *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 2, p. 257-287, 1993.

[RAJ 69] RAJU I.S., RAO A.K., Stiffness matrices for sector elements, *A.I.A.A.J.* 7, p. 156-157, 1969.

[RAJ 73] RAJU I.S., KRISHNA A.V., RAO A.K., Sector elements for matrix displacement analysis, *Int. J. of Num. Meth. in Eng.*, vol. 6, p. 553-563, 1973.

[REK 80] REKATCH V., *Problèmes de la théorie de l'élasticité*, Edition MIR Moscou, 1980.

[SAB 85] SABIR A.B., A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Chapter 9 in *Proceeding of the 2nd international conference on variational methods in engineering*, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, p. 17-25, 1985.

[SAB 86] SABIR A.B., SALHI H.Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanics*, 19, p. 1-16, 1986.

[TAY 86] TAYLOR R.L., SIMO J.C., ZIENKIEWICZ O.C., CHAN A.C., The patch test : A Condition for Assessing Finite Element Convergence, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 22, p. 39-62, 1986.

[TIM 51] TIMOSHENKO S., GOUDIER J.N., *Theory of elasticity*, Mc Graw Hill New York, 1951.

[ZIN 91] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The Finite Element Method*, fourth edition, vol. 1, Mc Graw Hill London , 1991.

Annexe 1

Vérification de l'équation de compatibilité (relation [12], § 5)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial^2 \epsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{12}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & \theta^2 & 2.r\theta^3 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \frac{\theta}{r} & \theta & \frac{1}{r} & \left(1 + \frac{\theta^2}{2.r}\right) & \frac{\theta^2}{r} & (\theta^2 - r) & (r\theta^3 - 2.r^2\theta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} & \left(1 + \frac{r}{2}\right) & -\frac{\theta}{r} & \frac{\theta}{r} & \frac{2.\theta}{r} & (2.\theta - r\theta) & (3.r\theta^2 - 2.r^2\theta^2) & r \end{bmatrix}$$

coefficients	$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \cdot \partial \theta}$ (2)	$-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2}$ (3)	$-r \frac{\partial^2 \epsilon_\theta}{\partial r^2}$ (4)	$-2 \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r}$ (5)	$\frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r}$ (6)	$\frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta}$ (7)	équation [12]
a ₁	0	0	-2/r ²	2/r ²	0	0	0
a ₂	0	0	0	0	0	0	0
a ₃	0	0	2θ/r ²	-2θ/r ²	0	0	0
a ₄	0	0	0	0	0	0	0
a ₅	0	0	-2θ/r ²	2θ/r ²	0	0	0
a ₆	0	0	0	0	0	0	0
a ₇	1/r ²	0	-2/r ²	2/r ²	0	-1/r ²	0
a ₈	-1/r ²	0	-θ ² /r ²	θ ² /r ²	0	1/r ²	0
a ₉	-2/r ²	0	-2θ ² /r ²	2θ ² /r ²	0	2/r ²	0
a ₁₀	-1	-2/r	0	2	0	2/r - 1	0
a ₁₁	6θ - 8rθ	-12θ	4rθ	-2θ ³ + 8rθ	2θ ³	6θ - 4rθ	0
a ₁₂	0	0	0	0	0	0	0

équation [12] = (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7)

Annexe 2

Composantes de la matrice [K₀] (relation [15c], § 5)

$$[K_0] = \begin{bmatrix}
 H_1 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & 0 & 0 \\
 & H_7 & H_8 & 0 & H_9 & H_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11} & H_{12} \\
 & & H_{13} & 0 & H_{14} & H_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{16} & H_{17} \\
 & & & H_{18} & 0 & 0 & H_{19} & H_{20} & H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\
 & & & & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{25} & H_{26} \\
 & & & & & H_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{28} & H_{29} \\
 & & & & & & H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & H_{37} & H_{38} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & H_{39} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & H_{40} & H_{41} \\
 & & & & & & & & & & & H_{42}
 \end{bmatrix}$$

Symétrique

$D_1 = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu)$; $D_2 = \nu \cdot D_1/(1-\nu)$; $D_3 = E/2(1+\nu)$;

$E_i = (r_2^i - r_1^i)_{i=1,6}$; $AL = A \log(r_2) - A \log(r_1)$;
 $A_1 = D_1 + D_2$; $A_2 = D_1 + 2 D_2$; $A_3 = 2 D_1 + 2 D_2$;
 $A_4 = D_1 + D_2$; $A_5 = D_2 - D_3 + D_1/2$; $A_6 = D_1 + D_2 + 2 D_3$;
 $A_7 = 5 D_1 + 4 D_2$; $A_8 = 8 D_1 + 16 D_2 + 24 D_3$; $A_9 = D_1 + D_2 + D_3/4$;

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 2\beta \cdot AL \cdot D_1 & H_{21} &= 2\beta^3 \cdot E_1 \cdot A_1/3 \\
 H_2 &= 2\beta \cdot E_1 \cdot A_1 & H_{22} &= 2\beta^3 \cdot E_2 \cdot A_1/3 - 2\beta \cdot E_3 \cdot A_1/3 \\
 H_3 &= 2\beta \cdot AL \cdot D_1 & H_{23} &= 2\beta^3 \cdot AL \cdot D_1/3 + 2\beta \cdot AL \cdot D_3 \\
 H_4 &= D_1 (\beta^3 \cdot AL/3 + 2\beta \cdot E_1) & H_{24} &= 2\beta^3 \cdot E_1 \cdot A_1/3 + 2\beta \cdot D_3 (E_1 + E_2/4) \\
 H_5 &= 2\beta^3 \cdot AL \cdot D_1/3 & H_{25} &= \beta^3 \cdot (\beta^2 \cdot E_2 \cdot A_2/5 - 4 \cdot E_3 \cdot A_4/9 + E_2 \cdot D_3) \\
 H_6 &= 2\beta^3 \cdot E_1 \cdot A_2/3 - \beta \cdot E_2 \cdot D_1 & H_{26} &= \beta \cdot E_2 \cdot D_3 \\
 H_7 &= 2\beta \cdot AL \cdot D_3 & H_{27} &= 2\beta^3 \cdot E_2 \cdot A_1/3 + \beta \cdot D_3 (E_2 + 2 \cdot E_3/3 + E_4/8) \\
 H_8 &= 2\beta \cdot AL \cdot D_3 & H_{28} &= \beta^3 (2 \cdot A_1 \cdot \beta^2 \cdot E_3/5 - A_6 \cdot E_4/3 + D_3 (2E_3/3 - 2E_5/15)) \\
 H_9 &= -2\beta \cdot AL \cdot D_3 & H_{29} &= D_3 \cdot \beta (E_4/4 + 2 \cdot E_3/3) \\
 H_{10} &= -2\beta \cdot D_3 (E_1 + E_2/4) & H_{30} &= AL \cdot 2\beta (D_1 + \beta^2 \cdot D_3/3) \\
 H_{11} &= 2\beta^3 \cdot D_3 (2 \cdot E_3/3 - 3 \cdot E_2/2)/3 & H_{31} &= \beta \cdot (D_1 \cdot (2 \cdot E_1 + \beta^2 \cdot AL/3) - 2\beta^2 \cdot AL \cdot D_3/3) \\
 H_{12} &= -\beta \cdot E_2 \cdot D_3 & H_{32} &= 2\beta^3 \cdot AL \cdot (D_1 - 2 \cdot D_3)/3 \\
 H_{13} &= 2\beta^3 \cdot AL \cdot D_1/3 + 2\beta \cdot AL \cdot D_3 & H_{33} &= (\beta^3/3) (2 \cdot E_1 \cdot A_1 + D_3 \cdot (E_2 - 4 \cdot E_1)) - \beta E_2 \cdot D_1 \\
 H_{14} &= -2\beta^3 \cdot AL \cdot D_1/3 - 2\beta \cdot AL \cdot D_3 & H_{34} &= \beta^3 (D_1 (2 \cdot E_1/3 + \beta^2 \cdot AL/10) + 2AL \cdot D_3/3) + \beta \cdot E_2 \cdot D_1 \\
 H_{15} &= -2\beta^3 \cdot E_1 \cdot A_1/3 - 2\beta \cdot D_3 (E_1 + E_2/4) & H_{35} &= \beta^3 \cdot (D_1 \cdot (2 \cdot E_1/3 + \beta^2 \cdot AL/5) + 4 \cdot AL \cdot D_3/3) \\
 H_{16} &= -\beta^5 \cdot E_2 \cdot A_2/5 + 4\beta^3 \cdot E_3 \cdot A_7/9 - \beta^3 \cdot E_2 \cdot D_3 & H_{36} &= \beta^3 (A_1 \cdot \beta^2 (2E_1/5 + A_3 \cdot E_2/3 + 4E_1 \cdot D_3/3) - 2\beta D_1 E_3/3) \\
 H_{17} &= -\beta \cdot E_2 \cdot D_3 & H_{37} &= 2\beta^3 \cdot AL (\beta^2 \cdot D_1/5) + 4 \cdot D_3/3) \\
 H_{18} &= 2\beta \cdot E_2 \cdot A_1 & H_{38} &= \beta^3 \cdot (2\beta^2 \cdot E_1 \cdot A_1/5 - E_2 \cdot D_1/3 + D_3 \cdot (8 \cdot E_1/3 - 2 \cdot E_2/3)) \\
 H_{19} &= 2\beta \cdot E_1 \cdot A_1 \\
 H_{20} &= A_1 (\beta \cdot E_2 + \beta^3 \cdot E_1/3) \\
 H_{39} &= \beta^3 \cdot (2 \cdot A_1 \cdot \beta^2 \cdot E_2/5 - 4 \cdot A_6 \cdot E_3/9 + D_3 \cdot E_4/6 + 4 \cdot D_3 \cdot E_2/3) + \beta \cdot E_4 \cdot D_1/2 \\
 H_{40} &= \beta^5 \cdot (A_7 \cdot E_4 \cdot \beta^2/14 - A_8 \cdot E_5/25 + 4 \cdot D_3 \cdot E_6/15 + 9 \cdot D_3 \cdot A_2/10) + 4 \cdot \beta^3 \cdot D_1 \cdot E_6/9 \\
 H_{41} &= \beta^3 \cdot D_3 \cdot (E_4/2 - 4 \cdot E_5/15) \\
 H_{42} &= \beta \cdot E_4 + \beta^3 \cdot D_3/2
 \end{aligned}$$

Composantes de la matrice [A] (relation 15b, § 5)

$$[A] = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & -\beta & R_1 & \beta & R_1\beta & 0 & \beta^2/2 & \beta^2 & R_1\beta^2 & R_1^2\beta^3 & 0 \\
 0 & 1 & R_1 & 0 & R_1 & R_1^2/2 & \beta & R_1\beta & 0 & -R_1^2\beta & -R_1^3\beta^2 & R_1^2 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta & -4\beta & -6R_1^2\beta^2 & 2R_1 \\
 1 & 0 & -\beta & R_2 & \beta & R_2\beta & 0 & \beta^2/2 & \beta^2 & R_2\beta^2 & R_2^2\beta^3 & 0 \\
 0 & 1 & R_2 & 0 & R_2 & R_2^2/2 & \beta & R_2\beta & 0 & -R_2^2\beta & -R_2^3\beta^2 & R_2^2 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta & -4R_2\beta & -6R_2^2\beta^2 & 2R_2 \\
 1 & 0 & \beta & R_2 & -\beta & -R_2\beta & 0 & \beta^2/2 & \beta^2 & R_2\beta^2 & -R_2^2\beta^3 & 0 \\
 0 & 1 & R_2 & 0 & R_2 & R_2^2/2 & -\beta & -R_2\beta & 0 & R_2^2\beta & -R_2^3\beta^2 & R_2^2 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & 4R_2\beta & -6R_2^2\beta^2 & 2R_2 \\
 1 & 0 & \beta & R_1 & -\beta & -R_1\beta & 0 & \beta^2/2 & \beta^2 & R_1\beta^2 & -R_1^2\beta^3 & 0 \\
 0 & 1 & R_1 & 0 & R_1 & R_1^2/2 & -\beta & -R_1\beta & 0 & R_1^2\beta & -R_1^3\beta^2 & R_1^2 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & 4R_1\beta & -6R_1^2\beta^2 & 2R_1
 \end{bmatrix}$$

Annexe 3

A.3.1. Champ de déplacement de l'élément secteur (I) [DJO 90]

$$U_r = a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta + a_3 R \sin\theta + a_4 r \sin^2\theta - a_5 \sin\theta (R - 2r \cos\theta) - a_6 r \sin^2\theta (R - r \cos\theta) + a_7 \cos\theta (r \cos\theta - R) + a_8 r \sin\theta \cos\theta (r \cos\theta - R) + a_9 \sin\theta (r \cos\theta - R)^2 + a_{10} R r \sin^2\theta (R - r \cos\theta) - a_{11} R r^2 \sin^2\theta (R - r \cos\theta)^2 + a_{12} r^2 \sin^2\theta \cos\theta .$$

$$V_\theta = a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta - a_3 (r - R \cos\theta) + a_4 r \sin\theta \cos\theta - a_5 (r + R \cos\theta - 2r \cos^2\theta) + a_6 r \sin\theta \cos\theta (r \cos\theta - R) + a_7 \sin\theta (R - r \cos\theta) + a_8 r \sin^2\theta (R - r \cos\theta) + a_9 \cos\theta (r \cos\theta - R)^2 + a_{10} r \sin\theta (r \cos\theta - R)(r - R \cos\theta) - a_{11} r^2 \sin^2\theta (r - R \cos\theta)(r \cos\theta - R)^2 + a_{12} r^2 \sin^2\theta \cos\theta .$$

$$\Phi = a_3 - a_6 (r/2) \sin\theta - a_8 (R - r \cos\theta)/2 - a_9 (r \cos\theta - R) - 2a_{10} r \sin\theta (r \cos\theta - R) - 3a_{11} r^2 \sin^2\theta (R - r \cos\theta)^2 + a_{12} r \sin\theta$$

A.3.2. Champ de déplacement de l'élément secteur (II) [DJO 90]

$$U_r = a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta + a_4 r + a_5 r\theta + a_6 r^2/2 + a_9 + a_{11}$$

$$V_\theta = -a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta + a_3 r - a_4 r\theta - a_5 r\theta^2/2 + a_7 r\theta + a_8 r\theta^2/2 + (a_{10} - a_5)r \log(r) - a_{11} \theta + a_{12} r^2$$

$$\Phi = a_3 - a_4 \theta - a_5 (2 - 2 \log(r) - \theta^2)/2 + a_7 \theta - a_8 \theta^2/2 + a_{10} (2 \log(r) + 1)/2 - a_{11} \theta/(2r) + 3a_{12} r/2$$

Article soumis le 10 juillet 1997.
Version révisée le 10 décembre 1997.