
Modélisation du comportement mécanique de câbles métalliques

Damien Durville

Laboratoire de Mécanique LMSS_Mat
École Centrale Paris, CNRS URA 850
Grande Voie des Vignes
F-92295 Châtenay-Malabry cedex
durville@mss.ecp.fr

RÉSUMÉ. Le comportement mécanique d'un câble métallique dépend éminemment des interactions entre ses constituants que sont les fils élémentaires. Nous proposons ici de modéliser ce comportement en ayant recours à la méthode des éléments finis et en considérant le câble comme un assemblage de poutres en grandes déformations et en interactions de contact-frottement. Un modèle de poutre à cinématique enrichie est utilisé pour tenir compte des effets de déformations transverses dans les fils. L'accent est mis sur le dispositif de prise en compte du contact qui repose sur une discrétisation a priori du modèle de contact, indépendante de la discrétisation par éléments finis de la structure. Des résultats numériques sont donnés, montrant l'efficacité de la démarche.

ABSTRACT. The mechanical behaviour of a wire rope depends highly on the interactions between its elementary wires. We suggest to model this behaviour by the mean of the finite element method, considering the wire rope as an assembly of rods undergoing large deformations and submitted to contact-friction interactions. An enriched kinematical beam model is used to take into account the effects of transverse strains in the wires. A special emphasis is put on the modeling of contact, based on an a priori discretization of the contact problem, independently of the finite element discretization of the structure. Numerical results are given to prove the efficiency of the approach.

MOTS-CLÉS : câble, contact-frottement, grandes transformations, modèles de poutres, non-linéarités, éléments finis.

KEY WORDS: wire rope, contact-friction, large transformations, beam models, nonlinearities, finite elements.

1. Introduction

Le comportement mécanique des câbles est étudié depuis quelques années par de nombreux auteurs : qu'on se réfère pour cela aux travaux effectués en collaboration avec Costello (par exemple : [COS 90], [PRA 92], [SHI 94]). Les approches développées dans ces travaux sont essentiellement de type analytique, reposant sur des considérations géométriques et des hypothèses sur les états de contact-frottement [WEI 95]. Elles offrent des méthodes simples permettant de quantifier un certain nombre de grandeurs globales définissant le comportement mécanique des câbles étudiés.

Nous souhaitons ici mettre en œuvre les outils de la modélisation numérique actuellement disponibles, en particulier la méthode des éléments finis, pour étudier le comportement des câbles (cf. [NAW 97]). Celui-ci, dépendant d'une part du comportement de chacun des fils internes, mais aussi d'autre part de manière cruciale des interactions de contact-frottement développées entre ces fils, nous proposons de modéliser le câble comme un assemblage de poutres en grandes transformations et en interactions de contact-frottement. Un tel objectif demande de disposer d'un modèle de poutre adapté pour représenter le comportement de chaque fil élémentaire, d'un modèle apte à rendre compte de manière fine des interactions de contact-frottement entre fils, ainsi que d'un algorithme robuste capable de résoudre de manière efficace les nombreuses non linéarités couplées présentes dans le problème (grands déplacements et grandes rotations, détermination géométrique du contact, détermination des réactions de contact et de frottement).

Nous commençons par poser le problème à résoudre sous la forme d'un principe des travaux virtuels, exprimé dans le cadre des grands déplacements. Pour modéliser le comportement de chacun des fils, nous présentons ensuite un modèle de poutre à cinématique enrichie, tenant compte de déformations planes des sections des fils, et développé dans le cadre des grandes transformations. Ce modèle permet entre autres de rendre compte des effets des variations de section des fils sur les interactions de contact-frottement. La prise en compte du contact est abordée par une manière originale de discrétiser a priori le problème de contact. Celle-ci consiste à déterminer et à disposer sur la structure des éléments de contact, définis comme des couples de particules matérielles potentiellement au contact. Cette disposition d'éléments de contact se fait de manière indépendante du maillage des fils du câble, et permet de venir tester le contact en des lieux géométriques précis. Nous exposons ensuite les modèles régularisés qui nous permettent de représenter les effets du contact et du frottement. Nous terminons en donnant des résultats numériques sur des assemblages réalistes (25 fils), dans le cas de l'application combinée d'une flexion et d'une tension, et dans un cas de compression axiale qui fait apparaître le phénomène de « cage à oiseaux ».

2. Position du problème sous forme de principe des travaux virtuels

2.1. Description de la structure

Nous considérons le câble comme un assemblage de n fils, soumis d'une part à des efforts et à des déplacements imposés, et d'autre part à des interactions de contact-frottement. Un fil α donné est défini par sa configuration matérielle, notée $\Omega_{\alpha\xi}$, sa configuration initiale $\Omega_{\alpha 0}$, et sa configuration actuelle Ω_{α} . Nous notons Γ_u la réunion de l'ensemble des parties des surfaces des fils où le déplacement est bloqué, et Γ_σ la réunion de l'ensemble des parties des surfaces des fils où un effort de surface est appliqué.

2.2. Description du contact

Rigoureusement, le contact entre les fils d'un câble se produit sur des zones de contact dont les surfaces sont plus ou moins étendues selon qu'il s'agit de contact entre des fils croisés ou entre des fils parallèles. Dans notre approche, nous définissons le contact comme le fait que deux particules matérielles appartenant chacune à un fil différent, occupent la même position au même instant. Nous postulons alors que toute zone de contact est constituée par un ensemble discret de couples de particules en contact. Nous notons $C_{\alpha\beta}$ l'ensemble des couples de particules matérielles appartenant aux fils α et β en contact à un instant donné, ensemble défini par :

$$C_{\alpha\beta} = \left\{ (\xi^\alpha, \xi^\beta) \in \Omega_{\alpha\xi} \times \Omega_{\beta\xi}; \mathbf{x}(\xi^\alpha) = \mathbf{x}(\xi^\beta) \right\}.$$

Nous considérons par ailleurs qu'en chaque contact se développe une force d'interaction, notée $\mathbf{R}(\xi^\alpha, \xi^\beta)$, qui représente l'action du fil α sur le fil β au point de contact. Par application du principe de l'action et de la réaction, le fil β applique sur le fil α , au même point de contact, une force opposée :

$$\forall (\xi^\alpha, \xi^\beta) \in C_{\alpha\beta}; \mathbf{R}(\xi^\alpha, \xi^\beta) = -\mathbf{R}(\xi^\beta, \xi^\alpha).$$

Nous supposons que les surfaces des fils sont suffisamment régulières pour pouvoir définir une normale en tout point de la surface, normale notée $\mathbf{N}(\xi^\alpha)$ en la particule ξ^α , prise par convention de norme unité, et dirigée vers l'extérieur du volume. Aux lieux de contact, on peut montrer que les normales aux surfaces des fils en contact sont nécessairement colinéaires et opposées :

$$\forall (\xi^\alpha, \xi^\beta) \in C_{\alpha\beta}; \mathbf{N}(\xi^\alpha) = -\mathbf{N}(\xi^\beta).$$

Cette direction normale permet de déterminer une composante normale de la force d'interaction, notée \mathbf{R}_N , qui reprend les effets de contact pur, ainsi qu'une composante tangentielle, notée \mathbf{R}_T , liée aux effets de frottement, définies comme suit :

$$\forall (\xi^\alpha, \xi^\beta) \in C_{\alpha\beta}, \mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta) = \left(\mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta), \mathbf{N}(\xi^\alpha) \right) \mathbf{N}(\xi^\alpha),$$

$$\mathbf{R}_T(\xi^\alpha, \xi^\beta) = \mathbf{R}(\xi^\alpha, \xi^\beta) - \mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta).$$

2.3. Principe des travaux virtuels

Nous caractérisons la solution en déplacement à l'équilibre de la structure à l'aide d'un principe des travaux virtuels. Nous définissons comme suit l'ensemble V_{ad} des déplacements cinématiquement admissibles :

$$V_{ad} = \{ \mathbf{u} \in L^2(\cup_{\alpha} \Omega_{\alpha 0}) ; \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u \}.$$

Nous posons le problème mécanique de comportement du câble sous la forme du principe des travaux virtuels suivant :

Trouver $\mathbf{u} \in V_{ad}$ tel que $\forall \mathbf{v} \in V_{ad}$:

$$\sum_{\alpha} \int_{\Omega_{\alpha 0}} \text{Tr} [\mathbf{s}(\mathbf{u}) \mathbf{D}_u \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] d\Omega$$

$$+ \sum_{\beta, \gamma} \left(\sum_{(\xi^\beta, \xi^\gamma) \in C_{\beta\gamma}} \left(\mathbf{R}_{\beta \rightarrow \gamma}(\xi^\beta, \xi^\gamma), \mathbf{v}(\xi^\beta) - \mathbf{v}(\xi^\gamma) \right) \right) = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{f}, \mathbf{v}) d\Gamma$$

Le premier terme de l'expression ci-dessus représente le travail virtuel des efforts internes dans les fils. Dans le cadre des grands déplacements, un formalisme lagrangien total est utilisé pour le calculer, $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ représentant le second tenseur symétrique des contraintes de Piola-Kirchhoff, et $\mathbf{E}(\mathbf{u})$, le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Le second terme de cette expression du principe des travaux virtuels rassemble le travail virtuel des efforts d'interaction développés au niveau de l'ensemble des couples de particules matérielles au contact.

3. Modèle de poutre en grandes transformations à sections déformables

La littérature fournit bon nombre de modèles de poutres en grandes transformations. Dans leurs formulations cinématiques, ces modèles reposent sur diverses hypothèses permettant d'exprimer le déplacement dans l'ensemble du volume de la poutre à partir de champs définis sur la fibre moyenne de la poutre. Le plus souvent, ils supposent rigides les sections de la poutre, décrivant alors leur cinématique à l'aide d'une translation et d'une rotation. Cependant, dès que l'on sort de l'hypothèse des petites rotations, l'opérateur de rotation devient non-linéaire par rapport aux trois paramètres de la rotation (angle et axe de rotation), ce qui oblige à développer des algorithmes particuliers pour le traitement des grandes rotations (cf. [SIM 85]). Du point de vue rhéologique, les lois de comportement associées à

ces modèles s'obtiennent la plupart du temps par condensation des lois de comportement tridimensionnelles standard, en supposant nulles les contraintes développées dans les directions transverses de la poutre.

Dans notre approche, en nous référant à des travaux d'enrichissement de modèles de plaques et coques ([BEN 92,95], [SIM 90], [BÛC 94]), nous avons voulu enrichir la description cinématique de la poutre en permettant à ses sections de se déformer selon des modes de déformations planes. Pour ce faire, nous exprimons la position de tout point de la poutre comme un développement limité autour de sa fibre moyenne dans les deux directions transverses.

Nous supposons la poutre décrite dans sa configuration matérielle par un ouvert Ω_ξ défini, dans un repère orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, par :

$$\Omega_\xi = \left\{ \xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3); 0 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq R^2, 0 \leq \xi_3 \leq L \right\}.$$

Nous exprimons alors le placement \mathbf{x} de toute particule matérielle ξ de la manière suivante :

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}_0(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{g}_\alpha(\xi_3), (\alpha = 1, 2),$$

ce qui permet d'exprimer le déplacement de toute particule de la poutre sous la forme :

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_0(\xi_3) + \xi_\alpha \mathbf{h}_\alpha(\xi_3), (\alpha = 1, 2).$$

Dans ce modèle, trois champs vectoriels définis sur la fibre moyenne sont nécessaires pour décrire la cinématique de tout point de la poutre. Le champ \mathbf{u}_0 représente le déplacement de la fibre moyenne de la poutre. Les champs \mathbf{h}_α (vecteurs sans dimension) peuvent se comprendre comme des variations des deux vecteurs directeurs de chaque section de la poutre. Les variations de la longueur de ces vecteurs, ainsi que de l'angle qu'ils forment entre eux, induisent des déformations de formes elliptiques pour chacune des sections.

Ce modèle cinématique permet d'une part de s'affranchir des traitements spécifiques des grandes rotations en présentant une formulation relativement naturelle, les champs cinématiques réels et virtuels étant de même type et appartenant aux mêmes espaces fonctionnels. D'autre part, les déformations autorisées pour les sections conduisent à l'expression d'un tenseur des déformations dont aucune des composantes n'est a priori nulle. Ceci permet d'utiliser une loi de comportement élastique isotrope réellement tridimensionnelle, formulée dans le cadre des grandes déformations, afin de prendre en compte les effets dans les dimensions transverses des fils. Le modèle cinématique peut cependant s'avérer encore trop pauvre par rapport à la réalité – les déformations prises en compte dans les sections n'étant pas assez riches par rapport aux déformations réelles – ce qui peut conduire à certains types de verrouillage. Une partie de ces verrouillages peut être levée par modification des coefficients de la loi de comportement se rapportant aux termes de déformations non constants dans les sections. On observe cependant un verrouillage persistant dans le domaine des fortes flexions analogue à celui que l'on peut observer dans les coques à épaisseur variable (cf. [BÛC 94]). Le principal intérêt de ce modèle réside dans la prise en compte d'un comportement

tridimensionnel des fils dont les variations de sections (par effet de Poisson entre autres) peuvent avoir des influences non négligeables sur le comportement global de l'assemblage.

4. Discrétisation *a priori* du problème de contact

4.1. Justification d'une discrétisation *a priori* du contact

Dans les approches classiques par éléments finis, on vient tester les conditions de contact en des points définis sur les éléments finis, typiquement les nœuds ou des points d'intégration. On traite en général le contact d'un tel point par rapport à la surface de l'élément fini en vis-à-vis, en suivant une stratégie de type maître-esclave. Notre approche ici est sensiblement différente. Nous reprenons la présentation du contact faite dans la deuxième partie sous forme d'interactions développées au sein de paires de particules matérielles. Notre méthodologie consistera à désigner en des lieux choisis de la structure des paires de particules matérielles, que nous appellerons éléments de contact, dont on prédit qu'elles sont susceptibles d'entrer en interaction de contact-frottement. La discrétisation du problème de contact réside pour nous en la répartition sur la structure de ces éléments de contact, qui conduisent à tester et à imposer les conditions de contact-frottement en un certain nombre de lieux discrets. Cette répartition des éléments de contact se fait *a priori*, indépendamment du maillage par éléments finis des fils. Ceci permet de placer des éléments de contact en des lieux géométriques très précis, par exemple au niveau des croisements entre fils. Les conditions de contact-frottement, exprimées en fonction des déplacements interpolés en ces particules matérielles, feront par ce biais appel à l'interpolation éléments finis mise en œuvre.

4.2. Définition d'un élément de contact

Nous appelons élément de contact un couple de particules matérielles venant en contact en un lieu géométrique donné. Dans la configuration d'équilibre, si nous notons \mathbf{x}_c un point de l'interface de contact, l'élément de contact en ce point, que nous notons $E_c(\mathbf{x}_c)$, est défini par :

$$E_c(\mathbf{x}_c) = (\xi^\alpha, \xi^\beta) \in \Omega_{\xi^\alpha} \times \Omega_{\xi^\beta}; \mathbf{x}(\xi^\alpha) = \mathbf{x}(\xi^\beta) = \mathbf{x}_c,$$

où ξ^α et ξ^β désignent deux particules matérielles des fils α et β , et où $\mathbf{x}(\xi)$ représente le placement actuel d'une particule.

Si un élément de contact se définit sans ambiguïté dans une configuration d'équilibre, il n'en est pas de même dans une configuration hors équilibre. Dans cette situation, l'élément de contact doit être prédictif et désigner des particules matérielles dont on suppose qu'elles seront en contact à l'équilibre. Pour construire ces éléments de contact, on doit suivre des règles de prédiction dont un des critères de validité est que, dans la configuration d'équilibre, elles redonnent le même élément de contact $E_c(\mathbf{x}_c)$ défini ci-dessus. En supposant que les fils gardent localement des formes cylindriques, et en considérant que dans la configuration

d'équilibre les plans tangents aux deux cylindres sont confondus au lieu du contact, une règle simple consiste à désigner comme particules matérielles candidates au contact en un lieu, celles qui occupent les intersections de la perpendiculaire commune aux deux fils, passant par le lieu choisi, avec les surfaces de ces deux fils, comme représenté sur la figure 1.

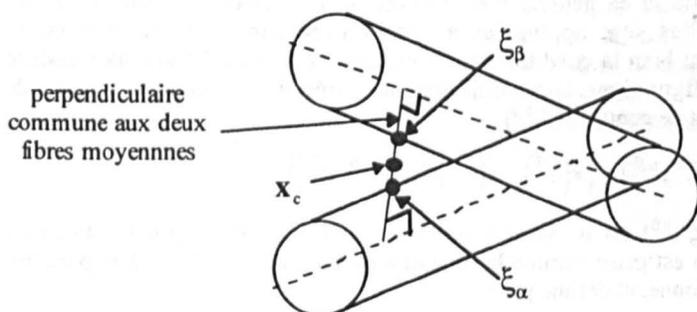


Figure 1. Détermination d'un élément de contact dans une configuration hors équilibre

4.3. Itérations sur les éléments de contact

La détermination des éléments de contact qui vient d'être décrite dépend fortement de la solution en déplacement du problème et introduit par conséquent une forte non-linéarité dans celui-ci. Pour traiter cette non-linéarité, on itère sur ces éléments de contact en réactualisant leur détermination à mesure que l'on s'approche de la solution, et ce jusqu'à convergence de ce processus. Ceci augmente sensiblement le coût du calcul mais permet de garantir qu'à l'équilibre, les interactions de contact-frottement sont bien considérées entre particules matérielles réellement au contact. Jointe à la liberté concernant la disposition des éléments de contact, cette correction de leur détermination offre une grande précision géométrique à la méthodologie utilisée.

5. Modèles de contact et de frottement

5.1. Conditions cinématiques de non-pénétration en un élément de contact

On se place ici en un élément de contact particulier, $E_c(x_c) = (\xi^\alpha, \xi^\beta)$. Dans la configuration d'équilibre, et dans un voisinage de l'élément de contact, les deux fils en contact ne s'interpénètrent pas tant que l'on vérifie que, soumises à de petites perturbations, les particules de l'élément de contact restent de part et d'autre du plan tangent commun aux deux surfaces au lieu du contact. Cette condition peut se traduire en une condition sur la mesure du gap entre les deux particules, défini comme :

$$\text{gap}(\xi^\alpha, \xi^\beta) = (\mathbf{x}(\xi^\beta) - \mathbf{x}(\xi^\alpha), \mathbf{N}).$$

où \mathbf{N} est la normale unitaire au plan tangent commun aux surfaces en contact, dirigée du fil α vers le fil β . La non-pénétration est respectée tant que ce gap reste positif ou nul.

Nous avons cependant besoin de nous définir des conditions cinématiques de non-pénétration dans les configurations hors équilibre que nous avons à traiter. Là encore, comme pour la détermination des éléments de contact, ces conditions seront prédictives et en général non exactes. Nous devons cependant nous assurer que lorsqu'elles sont appliquées à une configuration d'équilibre, ces conditions redonnent bien la condition cinématique exacte qui a été énoncée ci-dessus. Dans ces configurations hors équilibre, nous définissons comme mesure de gap de l'élément de contact (ξ^α, ξ^β) :

$$\text{gap}(\xi^\alpha, \xi^\beta) = (\mathbf{x}(\xi^\beta) - \mathbf{x}(\xi^\alpha), \mathbf{N}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \xi^\beta)),$$

où $\mathbf{N}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \xi^\beta)$ est un vecteur unitaire appelé direction normale de contact. Cette direction est prise comme la direction reliant la particule ξ^α à la particule ξ^β à un instant donné, et définie par :

$$\mathbf{N}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \xi^\beta) = \frac{\mathbf{x}^i(\xi^\beta) - \mathbf{x}^i(\xi^\alpha)}{\|\mathbf{x}^i(\xi^\beta) - \mathbf{x}^i(\xi^\alpha)\|},$$

où $\mathbf{x}^i(\xi^\alpha)$ représente la position de la particule dans la configuration dans laquelle est calculée cette normale de contact.

La condition requérant que le gap ainsi calculé reste positif peut s'interpréter comme le fait que les particules de l'élément de contact doivent rester de part et d'autre d'un plan orthogonal à $\mathbf{N}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \xi^\beta)$. Cette direction doit nécessairement être gardée fixe pour un certain nombre d'itérations du calcul. Si elle est réactualisée à chaque itération, il y a un risque de perdre les notions de positionnement par rapport à ce plan intermédiaire.

5.2. Modèle régularisé de contact

Le modèle de contact a pour but de traduire toute violation de la condition cinématique de non-pénétration en un terme d'énergie supplémentaire apportée au système ; la minimisation de cette énergie conduisant alors à contraindre les pénétrations à rester très faibles. Ce but est atteint par les méthodes de pénalisation qui reviennent, aux lieux où sont détectés des contacts, à appliquer des réactions proportionnelles à la pénétration mesurée. Selon ces modèles, la réaction normale en un élément de contact, notée $\mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta)$ est calculée, en fonction du gap et de la direction normale de contact, de la manière suivante :

$$\text{si } \text{gap}(\xi^\alpha, \xi^\beta) > 0, \text{ alors } \mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta) = \mathbf{0},$$

$$\text{sinon } \mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta) = k \left| \text{gap}(\xi^\alpha, \xi^\beta) \right| \mathbf{N}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \xi^\beta),$$

où k est le coefficient de pénalisation.

D'un point de vue algorithmique, ce modèle peut poser certaines difficultés. En effet, pour des éléments de contact qui oscillent entre l'état collé ou décollé, une petite perturbation de la solution entraîne une brusque variation de la raideur associée au contact, qui passe de k à zéro. Pour limiter cette singularité, une régularisation du modèle, qui applique cette fois une réaction normale proportionnelle au carré de la pénétration est adoptée ; elle permet d'assurer une continuité des raideurs entre les états décollés et les états collés pour les très faibles pénétrations. Le modèle de pénalisation linéaire est cependant conservé pour les pénétrations au-delà d'un certain seuil afin de préserver les qualités de convergence de l'algorithme de Newton. La combinaison de ces deux modèles, qui donne le modèle régularisé présenté sur la figure 2, offre un bon comportement de convergence. Nous renvoyons pour plus de détails à [BEN 97].

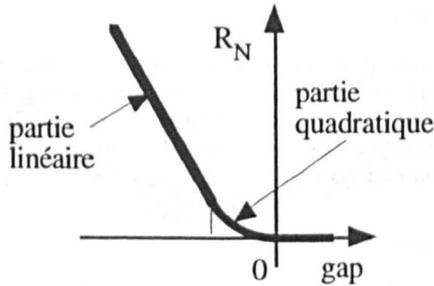


Figure 2. Graphe du modèle régularisé de contact

5.3. Modèle régularisé de frottement

Pour le modèle de frottement, nous utilisons une loi de Coulomb régularisée qui tolère un faible déplacement tangentiel élastique réversible comme illustré sur la figure 3. Elle exprime la réaction tangentielle de frottement en fonction du saut de déplacement tangentiel entre les deux particules, de la manière suivante :

$$\text{si } \left\| \left[\mathbf{u}(\xi^\beta) - \mathbf{u}(\xi^\alpha) \right]_T \right\| < [\Delta \mathbf{u}]_{T, \text{lim}}$$

$$\text{alors } \mathbf{R}_T(\xi^\alpha, \xi^\beta) = \frac{\mu \left\| \mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta) \right\|}{[\Delta \mathbf{u}]_{T, \text{lim}}} \left[\mathbf{u}(\xi^\beta) - \mathbf{u}(\xi^\alpha) \right]_T,$$

$$\text{sinon } \mathbf{R}_T(\xi^\alpha, \xi^\beta) = \mu \left\| \mathbf{R}_N(\xi^\alpha, \xi^\beta) \right\| \frac{\left[\mathbf{u}(\xi^\beta) - \mathbf{u}(\xi^\alpha) \right]_T}{\left\| \left[\mathbf{u}(\xi^\beta) - \mathbf{u}(\xi^\alpha) \right]_T \right\|}.$$

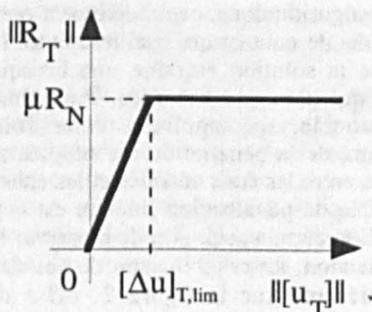


Figure 3. Graphe du modèle régularisé de frottement

6. Résultats numériques

Nous présentons deux types de résultats numériques sur des câbles à 24 et 25 fils. Le premier est un cas de flexion imposée sous chargement de tension. Le deuxième représente un cas de chargement axial du câble qui entraîne un phénomène d'ouverture du câble, connu sous le nom de « cage à oiseaux », ou en anglais, de « *bird-caging* » [CON 90].

6.1. Flexion sous tension

Nous présentons ici les résultats d'un calcul fait sur une portion de longueur 40 mm d'un câble métallique constitué de 25 fils d'acier, de rayons compris entre 0,0875 mm et 0,095 mm, organisés en trois couches et serrés par un fil de frette de rayon 0,05 mm (cf. figure 5a). La flexion est obtenue en imposant que la ligne moyenne constituée par les centres de gravité des trois fils de la couche interne se positionne sur une série de courbes évolutives (le déplacement des centres de gravité de ces trois fils internes est imposé dans les directions orthogonales aux courbes de flexion, mais libre dans le sens longitudinal). Ces courbes de flexion sont décrites par des équations :

$$y = x^2 / (2R) + x^4 / (8R^3),$$

où R représente le rayon du cercle osculateur à la courbe en $x = 0$. On fait varier ce rayon de courbure de l'infini à 10,5 mm en 10 étapes.

Une forte tension de 500 MPa est par ailleurs imposée aux fils à l'extrémité droite du câble, et un coefficient de frottement de 0,3 est considéré. Les fils sont bloqués en déplacement longitudinal à l'extrémité gauche, et astreints à rester sur une même section orthogonale à la courbe de flexion, au niveau de l'extrémité droite.

Le maillage des fils du câble comporte 770 éléments quadratiques (1 565 nœuds). 5 590 éléments de contact sont gérés pour tester le contact entre les fils. Le calcul total nécessite 1 400 itérations (constructions et inversions de systèmes), ce qui correspond à 9 heures de temps CPU sur un processeur Silicon Graphics R10000.

Nous donnons une représentation volumique de la déformée du maillage des fils (figure 4), ainsi qu'un détail de cette représentation (figure 5b), à l'étape finale. Nous observons sur ce détail une tendance des fils à s'ouvrir sous l'effet des sollicitations conjuguées en forte flexion et tension, tendance néanmoins contrée par la présence du fil de frette enroulé autour du câble.

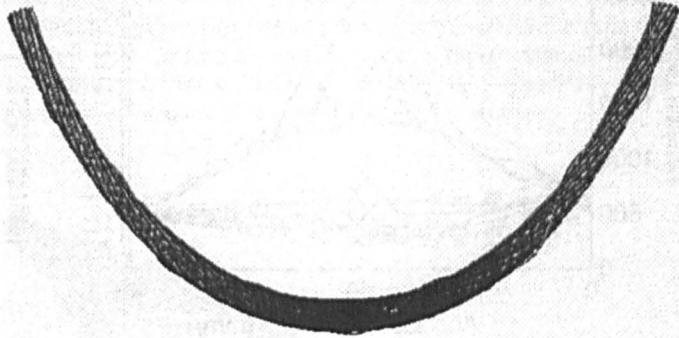


Figure 4. Représentation volumique de la déformée du maillage du câble

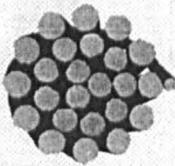


Figure 5a. Vue de l'extrémité du câble

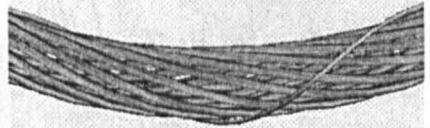


Figure 5b. Vue de détail de la représentation volumique du maillage déformé montrant une tendance à l'ouverture du câble

Le calcul fournit par ailleurs une quantification de bon nombre de grandeurs mécaniques utiles pour le dimensionnement du câble, mais la plupart du temps inaccessibles par l'expérience. On montre par exemple sur la figure 6 les variations

de tension dans les fils en fonction de l'abscisse curviligne le long du câble. La variation de ces tensions est uniquement due aux réactions de frottement, qui seules ont des composantes selon l'axe longitudinal des fils. On observe sur ce graphique que le fil de frette chargé de contenir le câble est très fortement sollicité à l'endroit de la flexion.

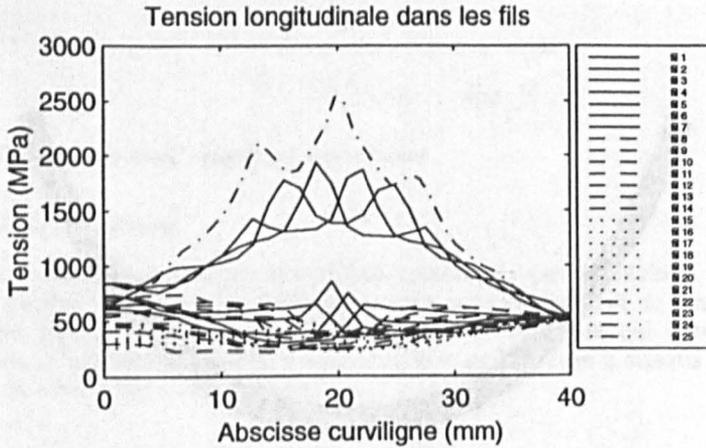


Figure 6. Variation des tensions dans les fils du câble

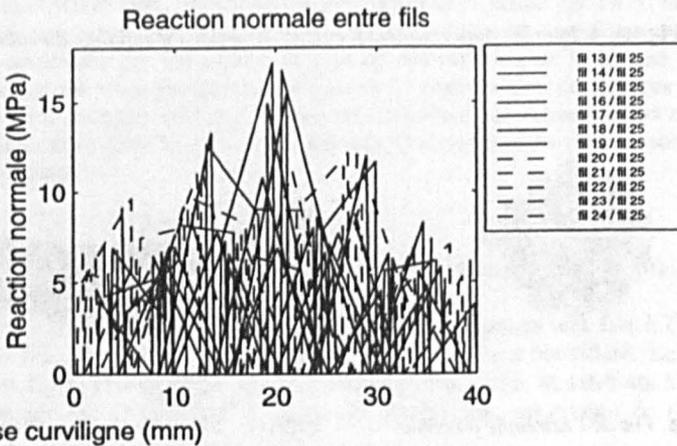


Figure 7. Réactions normales développées entre le fil de frette et chacun des fils de la couche externe

Sur la figure 7, on présente les réactions normales qui apparaissent aux lieux de contact entre le fil de frette (fil n° 25) et chaque fil de la couche externe, c'est-à-dire en des lieux localisés aux croisements entre ces fils, ce qui explique l'aspect chahuté de ces courbes. L'analyse de ces quantités permet d'étudier de manière fine les effets des interactions de contact-frottement entre fils.

6.2. Chargement en compression axiale : phénomène de cage à oiseaux

Pour le calcul présenté ici, on reprend le câble précédent auquel on retire le fil de frette pour permettre l'ouverture. La longueur de câble étudiée est de 25 mm. Le calcul est piloté en déplacement : on impose à l'extrémité droite trois déplacements successifs de 0,3 mm. La figure 8, qui donne une représentation volumique de la déformée du maillage à l'issue du calcul, témoigne de l'apparition d'une ouverture du câble, phénomène connu sous le nom de « cage à oiseaux ».

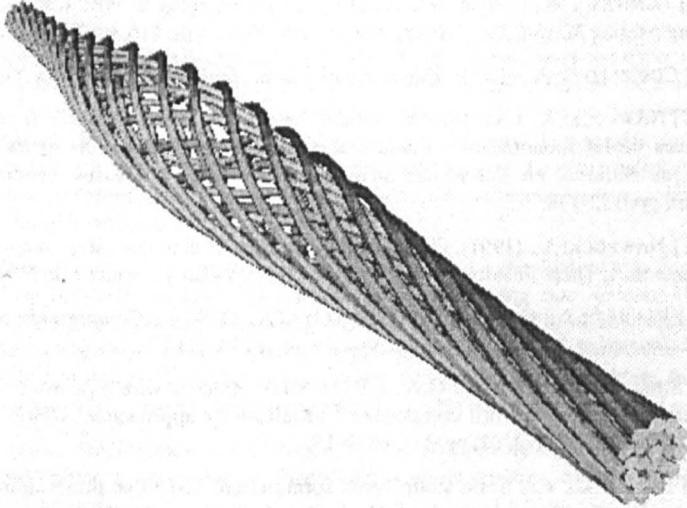


Figure 8. Représentation volumique de la déformée du maillage d'un câble soumis à une compression axiale : phénomène de « cage à oiseaux »

Remerciements

Cette étude n'a pu être menée que grâce au soutien et à la collaboration active de la Manufacture Française des Pneumatiques Michelin.

7. Bibliographie

- [BEN 92] BEN DHIA H., DURVILLE D., (1992), « An enriched kinematical model for the sheet metal simulation », *Numerical Methods Industrial Forming Processes, NUMIFORM 92*, Editors Chenot, Wood, Zienkiewicz, Balkema, pp. 409-414.
- [BEN 95] BEN DHIA H., DURVILLE D., (1995), « Enrichissement cinématique de modèles de plaques : application à la détermination du retour élastique en emboutissage », *Deuxième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, mai 1995, Editions Hermès, pp. 311-316.
- [BEN 97] BEN DHIA H., (1997), « Plaques en grandes déformations élastiques sous contact hyperélastique », *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens 1997, Presses Académiques de l'Ouest, pp. 465-470.
- [BÜC 94] BÜCHTER N., RAMM E., ROEHL D., (1990), « Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept », *Int. Journ. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp. 2551-2568.
- [CON 90] CONWAY T.A., COSTELLO G.A., (1990), « Bird-Caging in Wire Rope », *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, New York, Vol. 116, pp. 822-831.
- [COS 90] COSTELLO G. A., (1990), *Theory of Wire Rope*, Springer-Verlag, New York.
- [NAW 97] NAWROCKI A., LABROSSE M., DUBIGEON S., (1997), « Modélisation par éléments finis des câbles monotorons - Etude des contacts interfilaire », *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens 1997, Presses Académiques de l'Ouest, pp. 133-138.
- [NAW 97] NAWROCKI A., (1997), Contribution à la modélisation des câbles monotorons par éléments finis, Thèse de doctorat, Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes.
- [PRA 92] PRAKASH A., CONWAY T., COSTELLO G.A., (1992), « Compression of a cord », *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. S213-S216.
- [SHI 94] SHIELD C.K., COSTELLO G.A., (1994), « The effect of wire rope mechanics on the material properties of cord composites : an elasticity approach », *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 1-8, pp. 9-15.
- [SIM 85] SIMO J. C., « A finite strain beam formulation. The three dimensional dynamic problem. Part I », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 49, pp. 55-70.
- [SIM 90] SIMO J. C., RIFAI M.S., FOX D.D., (1990), « On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV : Variable thickness shells with through-the-thickness stretching », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 81, pp. 53-91.
- [WEI 95] WEI JIANG, (1995), « A general formulation of the theory of wire ropes », *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 747-755.