

---

# Homogénéisation et plasticité de plaques minces

Stéphane Bourgeois \* — Olivier Débordes \* — Pascal Patou \*\*

\* *École Supérieure de Mécanique de Marseille  
& Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique  
IMT, Technopôle de Château-Gombert  
F-13451 Marseille cedex 20*

\*\* *Sollac Fos, CRPC, F-13776 Fos-sur-Mer cedex*

---

*RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous transposons dans le cadre de la plasticité les résultats d'homogénéisation de plaques périodiques. On met en œuvre une méthode pour déterminer les charges limites, en termes de contraintes généralisées, en résolvant des problèmes d'évolution élastoplastique tridimensionnels uniquement posés sur la cellule de base. Ces problèmes sont résolus numériquement par la méthode des éléments finis. Dans le cas où la plaque est macroscopiquement orthotrope et symétrique par rapport à son feuillet moyen, on propose un critère avec une méthode d'identification des paramètres. L'approche est validée par des résultats de référence sur une plaque homogène isotrope et l'application du critère proposé à une plaque avec une âme en nids d'abeille donne des résultats très satisfaisants.*

*ABSTRACT. This work is an illustration of the homogenization of metallic periodic plates in the plastic range. The determination of the macroscopic yield surface is reduced to three-dimensional problems, set on a basic cell. The macroscopic limit loads (membrane and bending efforts) are computed by the finite element method. When the plate is considered orthotropic and symmetric with respect to the middle surface, a limit loads criterion is proposed with an identification method of its parameters. This approach is validated for an homogeneous isotropic plate and the identification of the criterion for a honeycomb plate gives satisfying results.*

*MOTS-CLÉS : homogénéisation, plaques périodiques, plasticité, charges limites et critères, modélisation numérique, éléments finis.*

*KEY WORDS: homogenization, periodic plates, plasticity, limit loads and criteria, numerical modelling, finite elements.*

---

## 1. Introduction

De nombreuses applications industrielles requièrent l'emploi de panneaux structuraux légers, notamment dans le domaine de la construction ferroviaire, navale, ou encore du bâtiment. Techniquement, ces panneaux métalliques reposent sur le principe du sandwich : deux feuilles parallèles – ou parements – assemblées de part et d'autre d'une âme commune. Suivant la complexité de l'âme, une analyse par éléments finis d'une telle structure devient coûteuse si l'on modélise toutes les hétérogénéités. Pour simplifier une telle étude, la géométrie de ces panneaux nous amène à faire appel aux techniques d'homogénéisation périodique de plaque.

Réalisée en collaboration avec la société SOLLAC, cette étude a pour objet de proposer une méthode pour calculer numériquement les charges limites d'un panneau structural léger. Pour cela, nous transposons dans le cadre de la plasticité les travaux de D. Caillerie [CAI 84] sur l'homogénéisation de plaque périodique, en s'appuyant sur les travaux de P. Suquet [SUQ 82]. Nous mettons en œuvre une méthode numérique, dans le logiciel de calcul par éléments finis SIC, permettant d'obtenir des charges limites en résolvant des problèmes d'évolution élastoplastique tridimensionnels uniquement posés sur la cellule de base. Ces charges limites s'expriment en termes de contraintes généralisées.

Dans la littérature, il existe de nombreux critères de charges limites pour les plaques homogènes isotropes mais le cas des plaques anisotropes est moins évoqué. Dans le cas où le panneau est macroscopiquement orthotrope et symétrique par rapport à son feuillet moyen, on propose un nouveau critère avec une méthode d'identification des paramètres. Ce critère s'appuie sur une généralisation du critère linéarisé d'Ilyushin [ILY 56], établi pour une plaque homogène isotrope.

L'approche est validée par une comparaison des résultats numériques obtenus pour une plaque homogène aux critères de la littérature. On traite enfin comme exemple d'application le cas d'un panneau structural léger avec une âme en nids d'abeille.

## 2. Hypothèses et formulation

### 2.1. Homogénéisation de plaques périodiques

Une plaque est une structure dont l'une des dimensions, l'épaisseur, est très petite par rapport aux deux autres. On considère ici une telle structure, étant de plus finement hétérogène et périodique dans le plan perpendiculaire à la direction de l'épaisseur. Partant d'un modèle tridimensionnel, on cherche un modèle bidimensionnel homogène équivalent de type plaque.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, ce problème, traité par D. Caillerie [CAI 84], fait intervenir deux petits paramètres  $\eta$  et  $\xi$ , qui sont respectivement les rapports de l'épaisseur et de la période sur la dimension de la plaque totale. Cet

auteur met en évidence l'importance du rapport  $\eta/\xi$  dans la détermination des coefficients de la loi de comportement de la plaque homogène équivalente. En effet, le processus d'homogénéisation consiste à faire tendre  $\eta$  et  $\xi$  vers 0 et l'ordre de passage à la limite de ces deux paramètres ne commute pas. Étant donné les propriétés géométriques des panneaux structuraux légers étudiés ici, nous nous restreignons au cas où la taille de la période est du même ordre de grandeur que l'épaisseur :  $\eta \approx \xi$ .

En appliquant alors la technique des développements asymptotiques [SAN 80] par rapport au petit paramètre  $\eta$ , on aboutit à un comportement homogénéisé de type plaque de Kirchhoff-Love ([CAI 84], [MOU 96]). Les coefficients de la loi de comportement de la plaque homogène équivalente sont déterminés en résolvant des problèmes élastiques tridimensionnels uniquement posés sur la cellule de base. Nous présentons dans ce paragraphe ces problèmes cellulaires de localisation, problèmes que nous allons transposer par la suite dans le cadre de la plasticité.

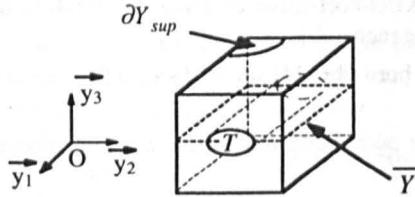


Figure 1. Description de la cellule de base

On considère une cellule de base  $Y$ , pouvant comporter des vides  $T$  (figure 1). Elle est rapportée au repère  $(O, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$  tel que  $\bar{y}_3$  soit la direction de l'épaisseur. La partie de  $Y$  occupée par le matériau est désignée par  $Y^*$ . Les faces supérieure, inférieure et latérales sont notées respectivement  $\partial Y_{sup}$ ,  $\partial Y_{inf}$  et  $\partial Y_{lat}$ . Le feuillet moyen de la cellule de base est désigné par  $\bar{Y}$ , dont l'aire est  $|\bar{Y}|$ . La position dans l'épaisseur de ce feuillet moyen définit l'altitude de référence  $y_3 = 0$ . Dans la suite, les indices latins prendront les valeurs 1, 2 ou 3 et les indices grecs les valeurs 1 ou 2.

Se donnant les déformations généralisées macroscopiques de membrane  $E_{\alpha\beta}$  et de flexion  $K_{\alpha\beta}$ , le problème cellulaire tridimensionnel à résoudre en élasticité linéaire pour la localisation des déformations et des contraintes microscopiques s'énonce ( $a$  désignant le tenseur d'élasticité) :

Trouver  $\chi$ , champ de déplacement tridimensionnel vérifiant :

$$\sigma = a : \varepsilon \quad [1]$$

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{dans } Y^* \quad [2]$$

$$\varepsilon = E - y_3 K + \varepsilon(\chi) \quad [3]$$

$$\sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \partial Y_{sup}, \partial Y_{inf} \text{ et } \partial T \quad [4]$$

$$\chi \text{ } y_1, y_2 \text{ - périodique, } \sigma \cdot n \text{ } y_1, y_2 \text{ - antipériodique sur } \partial Y_{lat} \quad [5]$$

Les contraintes généralisées macroscopiques de membrane  $N_{\alpha\beta}$  et de flexion  $M_{\alpha\beta}$  sont alors déterminées à partir des contraintes microscopiques  $\sigma_{ij}$  par les relations de moyenne :

$$N_{\alpha\beta} = \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \sigma_{\alpha\beta} dy \quad \text{et} \quad M_{\alpha\beta} = \langle -y_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} -y_3 \sigma_{\alpha\beta} dy \quad [6]$$

Le champ de déplacement  $\chi$  est solution d'un problème d'élasticité classique (loi de comportement [1], équations d'équilibre [2]) avec :

- une cinématique particulière [3], la déformation totale étant la somme d'une déformation de type Kirchhoff-Love et d'une déformation dérivant du champ de déplacement périodique recherché,

- des conditions de bord libre [4] sur les faces inférieure et supérieure et dans les cavités,

- des conditions de périodicité [5] portant sur le déplacement recherché et les contraintes microscopiques.

On notera que le champ de déplacement  $\chi$  est unique à une translation près. Dans [3], on a posé :

$$E_{i3} = E_{3i} = K_{i3} = K_{3i} = 0 \quad [7]$$

## 2.2. Domaine de plasticité macroscopique

On considère maintenant que la cellule de base est constituée de matériaux élastiques parfaitement plastiques qui obéissent au critère de Von-Mises. Le domaine de plasticité microscopique  $P(y)$  se définit alors par :

$$\sigma(y) \in P(y) \Leftrightarrow \sigma_{eq}(y) \leq \sigma_0(y)$$

$$\text{avec } \sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \sigma_{ij}^D : \sigma_{ij}^D \right)^{1/2},$$

$\sigma^D$  étant le déviateur du tenseur des contraintes et  $\sigma_0(y)$  la limite élastique du matériau au point de coordonnées  $y$ .

Dans le cadre de l'homogénéisation en plasticité, on se base sur les travaux de [SUQ 82], [WEI 84], [DÉB 85] et [MAR 87]. Les résultats présentés par ces auteurs ont été établis dans le cadre de l'homogénéisation périodique où on a périodicité

dans toutes les directions de l'espace. On utilise alors la méthode des moyennes et les conditions de périodicité traduites sur la cellule de base. Cette méthode repose sur l'hypothèse que les déformations et les contraintes macroscopiques sont les moyennes de leurs homologues microscopiques. Cette hypothèse est justifiée par des considérations sur les fonctions rapidement oscillantes [SUQ 82].

Dans le cadre de l'homogénéisation de plaque périodique, les contraintes macroscopiques s'expriment en fonction des contraintes microscopiques par les relations de moyenne [6]. On définit alors le domaine de plasticité macroscopique  $P^{hom}$  de manière analogue à P. Suquet ([SUQ 82], [DÉB 85], [MAR 87]) : on remarque qu'à un état de contraintes macroscopiques  $\{N, M\}$ , on doit pouvoir faire correspondre un état de contraintes microscopiques  $\sigma$  vérifiant :

- $\sigma$  est supportable au niveau microscopique :  $\sigma(y) \in P(y) \quad \forall y \in Y^*$ ,
- $\sigma$  vérifie les équations d'équilibre [2] et les conditions de bords libres [4],
- $\sigma$  vérifie les conditions de périodicité [5],
- $\sigma$  vérifie les relations de moyenne [6].

On définit alors le domaine de plasticité macroscopique par :

$$P^{hom} = \left\{ \{N, M\} \mid \exists \sigma, \sigma(y) \in P(y), \forall y \in Y^*, \operatorname{div} \sigma = 0, \right. \\ \left. \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \partial Y_{sup}, \partial Y_{inf} \text{ et } \partial T, \sigma \cdot n_{y_1, y_2} - \text{antipériodique sur } \partial Y_{lat}, \right. \\ \left. N_{\alpha\beta} = \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle, M_{\alpha\beta} = \langle -y_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle \right\} \quad [8]$$

On montre que le domaine de plasticité ainsi défini est convexe et fermé si  $P(y)$  est convexe et fermé.

### 2.3. Problèmes cellulaires en plasticité

Dans le cadre de l'homogénéisation où on a périodicité spatiale dans les trois directions de l'espace, la détermination du domaine de plasticité se ramène à des problèmes d'analyse limite uniquement posés sur la cellule de base ([SUQ 82], [WEI 84], [DÉB 85] et [MAR 87]). Ces problèmes sont établis à l'aide des relations de moyenne et de périodicité sur les déformations, qui permettent de vérifier la condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel. Cette condition, traduisant le fait que l'énergie interne macroscopique est la moyenne de l'énergie interne microscopique, permet d'utiliser les raisonnements d'analyse limite.

Dans le cadre de l'homogénéisation de plaque périodique, nous n'avons pas explicitement les relations de moyenne entre les déformations macroscopiques et les déformations microscopiques. A ce stade, on fait l'hypothèse que la cinématique établie en élasticité pour les problèmes cellulaires est toujours valable en plasticité : on suppose pouvoir décomposer la déformation totale en un point de la cellule de

base en la somme d'une déformation macroscopique de type Kirchhoff-Love et d'une déformation dérivant d'un déplacement périodique  $\chi$  (cf [3], [5] et [7]). Cette hypothèse permet de vérifier la condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel :

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = N : E + M : K$$

Cette condition permet d'utiliser les résultats d'analyse limite et de construire le domaine de plasticité macroscopique [8] de manière analogue à [MAR 87], en déterminant des contraintes à la limite de ce domaine. On présente ci-après le problème cellulaire tridimensionnel d'évolution élastoplastique à direction de contraintes macroscopiques  $\{N^0, M^0\}$  imposée :

Trouver  $N^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} N$  et  $M^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M$  tels que :

$$\sigma = a : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad \text{dans } Y^* \tag{9}$$

$$\sigma_{eq}^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\sigma}^D \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = 0 & \text{si } \sigma_{eq}^2 < \sigma_0^2 \\ \dot{\sigma} \geq 0 & \text{si } \sigma_{eq}^2 = \sigma_0^2 \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{div } \sigma = 0 \quad \text{dans } Y^* \tag{11}$$

$$\varepsilon = E - y_3 K + \varepsilon(\chi) \tag{12}$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial Y_{sup}, \partial Y_{inf} \text{ et } \partial T \tag{13}$$

$$\chi \quad y_1, y_2 - \text{périodique}, \quad \sigma \cdot n \quad y_1, y_2 - \text{antipériodique sur } \partial Y_{lat} \tag{14}$$

$$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = N_{\alpha\beta} = \lambda N_{\alpha\beta}^0 \quad \text{et} \quad \langle -y_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle = M_{\alpha\beta} = \lambda M_{\alpha\beta}^0 \tag{15}$$

$$E : N^0 + K : M^0 = t \tag{16}$$

$$E|_{t=0} = K|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon^p|_{t=0} = 0 \quad \text{dans } Y^*$$

Ce problème constitue un problème d'évolution élastoplastique classique (loi de comportement [9] et [10], équations d'équilibre [11]), dans lequel on a introduit une cinématique particulière [12] et des conditions de périodicité [14]. Par [15], on impose un trajet radial dans l'espace des contraintes macroscopiques. Le chargement est imposé par les relations linéaires [16] qui déterminent implicitement l'amplitude  $\lambda$ . Lorsque le paramètre de chargement  $t$  tend vers l'infini, l'amplitude  $\lambda$  tend vers une asymptote  $\lambda^\infty$ . La charge macroscopique  $\{\lambda^\infty N^0, \lambda^\infty M^0\}$  correspond à la charge de ruine plastique de la cellule de base. Ainsi,  $\{N, M\}$  tend vers une limite  $\{N^\infty, M^\infty\}$  qui se trouve au bord du domaine de plasticité macroscopique. De plus, les vitesses de déformations macroscopiques  $\{\dot{E}, \dot{K}\}$  tendent vers une limite  $\{\dot{E}^\infty, \dot{K}^\infty\}$  qui constitue une normale sortante à ce domaine.

Pour déterminer des points à la limite du domaine, on peut aussi résoudre des problèmes à vitesse de déformations  $\{\dot{E}^0, \dot{K}^0\}$  imposée en remplaçant [15] par [6] et [16] par :

$$E = t \dot{E}^0 \quad \text{et} \quad K = t \dot{K}^0$$

Dans ce cas aussi, lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $\{N, M\}$  tend vers une limite  $\{N^\infty, M^\infty\}$  qui se trouve au bord du domaine de plasticité macroscopique et  $\{\dot{E}^0, \dot{K}^0\}$  constitue une normale sortante à ce domaine.

## 2.4. Implantation numérique

Le calcul des charges limites s'effectue par la méthode des éléments finis. Pour obtenir la formulation variationnelle des problèmes cellulaires, on applique le principe des travaux virtuels à l'équation d'équilibre [11] en introduisant une cinématique virtuelle de type [12]. En intégrant par parties et en tenant compte des relations de moyenne [6], des relations de périodicité [14] et des conditions de bord libre [13], les équations [11], [13], [14] et les relations de moyenne contenues dans [15] peuvent être remplacées par la formulation suivante :

$$\forall \delta\chi \quad y_1, y_2 - \text{périodique,}$$

$$\forall \delta E \text{ et } \delta K \text{ vérifiant [7],}$$

$$\int_{\mathcal{Y}} \sigma : (\delta E - y_3 \delta K + \varepsilon(\delta\chi)) = |\bar{Y}| N : \delta E + |\bar{Y}| M : \delta K \quad [17]$$

La formulation variationnelle [17] suggère de considérer les déformations macroscopiques  $E$  et  $K$  comme des degrés de liberté dont les forces nodales associées sont les contraintes généralisées macroscopiques multipliées par l'aire du feuillet moyen de la cellule de base  $|\bar{Y}| N$  et  $|\bar{Y}| M$ . Ce concept a été introduit par O. Débordes ([DÉB 86], [DÉB 89]). Concrètement, après discrétisation spatiale, un nœud supplémentaire (dont les degrés de liberté sont les déformations généralisées macroscopiques) est affecté à tous les éléments du maillage de la cellule de base et la matrice liant les déformations aux degrés de libertés élémentaires est modifiée pour tenir compte de l'expression [12] de la déformation totale de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B^{elem} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -y_3 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi^{elem} \\ E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ K_{11} \\ K_{22} \\ 2K_{12} \end{Bmatrix} \quad [18]$$

Dans l'expression précédente [18], la matrice  $[B^{elem}]$  est la matrice de déformation de l'élément fini classique qui a pour degrés de liberté  $\{\chi^{elem}\}$ . Ces degrés de liberté sont alors les déplacements périodiques recherchés.

Les problèmes d'évolution élastoplastique sont traités classiquement de façon incrémentale selon un schéma d'Euler implicite et résolus à chaque pas de temps par un algorithme de Newton-Raphson. A chaque itération, la matrice tangente globale résulte de l'assemblage des matrices élémentaires qui s'expriment pour un élément  $\Omega_e$  par :

$$[k_r] = \int_{\Omega_e} [B]^T [D^{ep}] [B] d\Omega_e$$

où  $[B]$  désigne l'opérateur déformation modifié pour l'homogénéisation et défini par [18] et  $[D^{ep}]$  l'opérateur tangent élastoplastique [ZIE 91].

La loi de comportement élastoplastique est intégrée selon un schéma d'Euler implicite couplé à une méthode de Newton-Raphson.

Les relations de périodicité sont imposées par des relations linéaires portant sur les degrés de liberté des nœuds appartenant aux paires de faces latérales en vis-à-vis. Ces relations linéaires sont prises en compte par l'élimination des degrés de liberté redondants.

L'implantation de cette méthode a été effectuée dans le logiciel SIC (Système Interactif de Conception) développé par l'UTC, Compiègne, et le LMA (CNRS, Marseille) sur la base des développements de J.-C. Michel.

Au niveau de la gestion des incréments de chargement, le premier incrément est choisi de façon à rester dans le domaine élastique et à définir une raideur de référence. Le test d'arrêt pour l'obtention de la charge limite porte sur le rapport de la raideur courante sur la raideur de référence.

### 3. Critère de charges limites

#### 3.1. Plaque homogène

A.-A. Ilyushin [ILY 56] a traité le cas d'une plaque homogène et isotrope d'épaisseur  $e$  constante. Il considère un matériau plastique parfait, obéissant au critère de Von Mises et de limite élastique  $\sigma_0$ . Faisant l'hypothèse que les déformations suivent une cinématique de Kirchhoff-Love dans l'épaisseur, il aboutit à la détermination de la surface de charges limites sous forme paramétrique à l'aide de quantités intermédiaires définies à partir des efforts généralisés normalisés :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{N_0}, m_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{M_0} \quad \text{avec} \quad N_0 = e \sigma_0, M_0 = \frac{1}{4} e^2 \sigma_0$$

Les grandeurs généralisées  $N_0$  et  $M_0$  sont respectivement les charges limites en traction pure et en flexion pure. On définit ensuite des quantités intermédiaires relatives aux critères pour des sollicitations en membrane, en flexion et en membrane-flexion :

$$Q_n = n_{11}^2 + n_{22}^2 - n_{11}n_{22} + 3n_{12}^2 \quad [19]$$

$$Q_m = m_{11}^2 + m_{22}^2 - m_{11}m_{22} + 3m_{12}^2 \quad [20]$$

$$Q_{nm} = n_{11}m_{11} + n_{22}m_{22} - \frac{1}{2}n_{11}m_{22} - \frac{1}{2}n_{22}m_{11} + 3n_{12}m_{12} \quad [21]$$

On reconnaît dans l'expression de  $Q_n$  et  $Q_m$  l'expression du critère de Von Mises en contraintes planes dans lequel les contraintes ont été remplacées par les contraintes généralisées normalisées.

Le critère exact établi par Ilyushin s'exprime sous la forme paramétrique d'un système de trois équations non linéaires (donnant les expressions de  $Q_n$ ,  $Q_m$  et  $Q_{nm}$ ) en fonction de deux paramètres décrivant l'état de la déformation le long de la normale [ILY 56]. Devant la complexité de ce critère, Ilyushin, ainsi que d'autres auteurs, ont proposé des critères approchés. On retient dans la littérature :

- le critère linéarisé d'Ilyushin [ILY 56],

$$\sqrt{Q_n + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}}|Q_{nm}|} - 1 = 0 \quad [22]$$

- le critère suggéré par Ilyushin [ILY 56] et repris par Owen et Figueiras [OWE 83],

$$\sqrt{Q_n + Q_m} - 1 = 0 \quad [23]$$

### 3.2. Critère proposé

Les structures périodiques considérées possèdent un comportement macroscopique anisotrope. Dans la littérature, Owen et Figueiras [OWE 83] ont proposé un critère pour une plaque orthotrope basé sur le critère [23] en remplaçant dans les expressions ([19], [20]) de  $Q_n$  et  $Q_m$  le critère de Von Mises par le critère de Hill. Mais ce critère ne contient pas de termes de couplage membrane-flexion.

On propose ici de généraliser le critère linéarisé d'Ilyushin [22] dans le cas où la cellule de base possède deux plans de symétries géométriques et matérielles : un par rapport à son feuillet moyen et un autre perpendiculaire à ce dernier. Le comportement macroscopique qui en découle est alors orthotrope. Le critère [22] est adapté comme suit :

$$\sqrt{Q_n + Q_m + |Q_{nm}|} - 1 = 0 \quad [24]$$

avec :

$$Q_n = \phi_{1111}^n N_{11}^2 + \phi_{2222}^n N_{22}^2 + 2\phi_{1122}^n N_{11} N_{22} + \phi_{1212}^n N_{12}^2 \quad [25]$$

$$Q_m = \phi_{1111}^m M_{11}^2 + \phi_{2222}^m M_{22}^2 + 2\phi_{1122}^m M_{11} M_{22} + \phi_{1212}^m M_{12}^2 \quad [26]$$

$$Q_{nm} = \phi_{1111}^{nm} N_{11} M_{11} + \phi_{2222}^{nm} N_{22} M_{22} - \phi_{1122}^{nm} N_{11} M_{22} \\ - \phi_{2211}^{nm} N_{22} M_{11} + \phi_{1212}^{nm} N_{12} M_{12} \quad [27]$$

$$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{nm} \geq 0 \quad [28]$$

Les coefficients  $\phi$  sont des paramètres à identifier. Ce critère est exprimé dans le repère lié aux axes d'orthotropie de la plaque. Les signes [28] dans la formulation [27] de  $Q_{nm}$  ont été choisis de façon à rester cohérent avec le critère d'Ilyushin [22] et l'expression [21]. On vérifie par ailleurs que ce critère admet certaines propriétés induites par la définition de  $P^{hom}$  et par les symétries de la cellule de base :

- Si  $\{N, M\}$  appartient à  $P^{hom}$ ,  $\{-N, -M\}$  appartient à  $P^{hom}$ .

Cette propriété découle de la propriété analogue du critère de Von Mises.

- Si  $\{N, M\}$  appartient à  $P^{hom}$ ,  $\{N, -M\}$  appartient à  $P^{hom}$ .

Cette propriété découle de la symétrie de la cellule de base par rapport à son feuillet moyen. Elle justifie la présence de la valeur absolue dans l'expression [24].

Conformément à la propriété d'orthotropie macroscopique, on ne fait pas intervenir dans [25], [26] et [27] des produits de contraintes généralisées de composantes  $\alpha\alpha$  et  $12$ .

D'autre part, le domaine de plasticité étant convexe, les coefficients  $\phi$  ne peuvent être quelconques. Toutefois, il est difficile de déterminer des conditions suffisantes sur les paramètres pour assurer la convexité du critère identifié. On peut néanmoins établir quelques conditions nécessaires. En considérant seulement des contraintes de membrane non nulles, on doit vérifier que  $Q_n$  est convexe, ce qui implique les relations :

$$\phi_{1111}^n \geq 0, \phi_{2222}^n \geq 0, \phi_{1212}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \phi_{1111}^n \phi_{2222}^n \geq (\phi_{1122}^n)^2$$

On obtient les mêmes relations sur les coefficients  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^m$  en considérant que  $Q_m$  doit être convexe.

De plus, si on ne considère que deux contraintes généralisées  $N_{\alpha\beta}$  et  $M_{\gamma\delta}$  non nulles, on établit la relation :

$$4\phi_{\alpha\beta\alpha\beta}^n \phi_{\gamma\delta\gamma\delta}^m \geq (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{nm})^2 \quad [29]$$

En ce qui concerne l'identification, nous proposons une procédure en plusieurs temps. Nous étudions l'intersection de la surface de charges limites macroscopiques avec les plans de contraintes généralisées où seules deux contraintes ne sont pas

nulles. Les charges limites sont déterminées en résolvant numériquement les problèmes d'évolution décrits au paragraphe 2.3.

Pour identifier les coefficients de l'expression de  $Q_n$ , on se limite ainsi à l'étude des plans où seules deux contraintes de membrane ne sont pas nulles. En considérant les symétries de la surface de charges limites, cette étude peut être réduite au demi-plan ( $N_{11}, N_{22} \geq 0$ ) et aux quarts de plans ( $N_{11} \geq 0, N_{12} \geq 0$ ) et ( $N_{22} \geq 0, N_{12} \geq 0$ ). Les coefficients  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^n$  sont déterminés par la méthode des moindres carrés à partir d'un certain nombre de charges limites obtenues numériquement.

Les coefficients  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^m$  sont identifiés de la même manière en déterminant des charges limites dans le demi-plan ( $M_{11}, M_{22} \geq 0$ ) et dans les quarts de plan ( $M_{11} \geq 0, M_{12} \geq 0$ ) et ( $M_{22} \geq 0, M_{12} \geq 0$ ).

Il ne reste alors qu'à déterminer les paramètres intervenant dans l'expression de  $Q_{nm}$ . On identifie successivement chaque coefficient  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{nm}$  en déterminant des charges limites dans le quart de plan ( $N_{\alpha\beta} \geq 0, M_{\gamma\delta} \geq 0$ ).

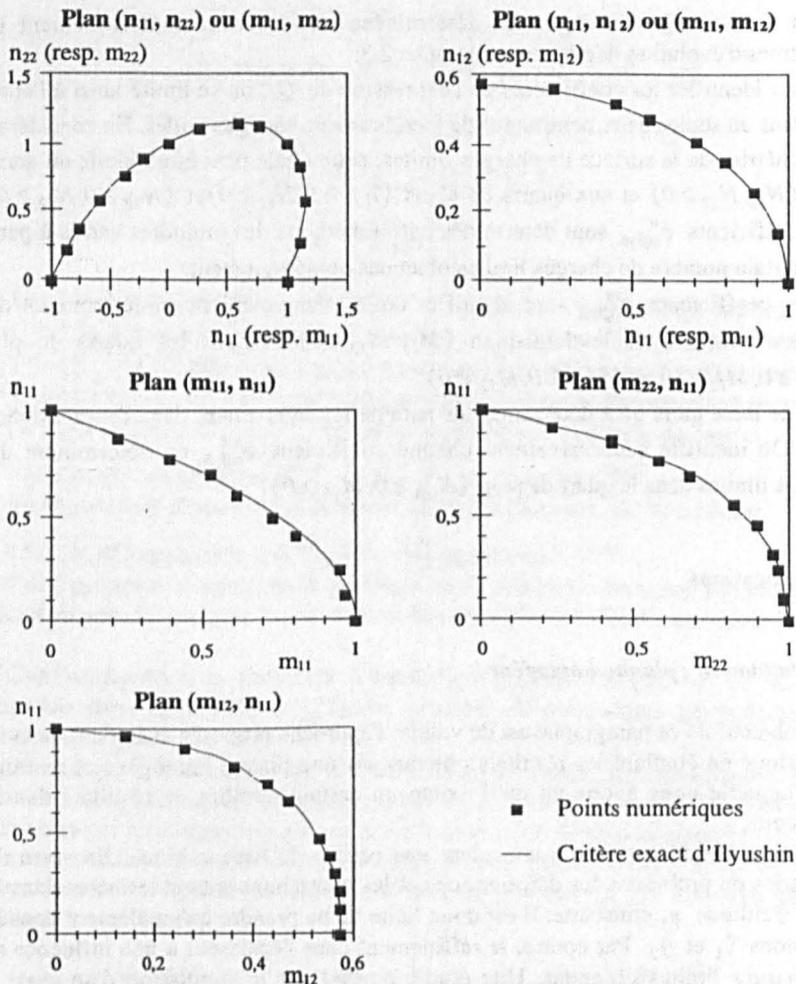
## 4. Applications

### 4.1. Validation : plaque homogène

L'objectif de ce paragraphe est de valider l'approche proposée et son implantation numérique en étudiant les résultats obtenus sur une plaque homogène et isotrope, pour laquelle nous avons vu qu'il existe un certain nombre de résultats dans la littérature.

Pour la modélisation, on considère une cellule de base cubique. En vertu des symétries du problème, les déformations et les contraintes sont invariantes dans les plans d'altitude  $y_3$  constante. Il est donc licite de ne prendre qu'un élément dans les directions  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$ . Par contre, le raffinement dans l'épaisseur a une influence sur les charges limites obtenues. Une étude, portant sur la simulation d'un essai de flexion pure, nous amène à prendre deux éléments dans l'épaisseur pour obtenir une bonne précision sur les charges limites [BOU 97]. Les éléments utilisés sont des briques à vingt nœuds (H20) à interpolation quadratique en déplacement, qui permettent de décrire correctement le comportement en flexion.

Pour valider les charges limites obtenues numériquement, on étudie l'intersection du domaine de plasticité macroscopique avec chaque plan où seules deux contraintes macroscopiques ne sont pas nulles. Grâce aux symétries du problème, on se ramène à l'étude de neuf demi-plans ou quarts de plans indépendants, qui peuvent être ramenés à cinq en considérant les propriétés du critère exact. L'étude complète est menée dans [BOU 97]. Au regard des résultats reportés figure 2, on constate une très bonne adéquation entre le critère exact et les points numériques obtenus, ce qui valide l'approche proposée.



**Figure 2.** Comparaison des résultats numériques avec le critère exact d'Ilyushin

Pour valider la procédure d'identification des paramètres du critère proposé, nous l'avons appliqué à la plaque homogène. Les résultats sont comparés à ceux proposés par Ilyushin ([19], [20], [21] et [22]). L'identification en membrane et en flexion des coefficients  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^n$  et  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^m$  donne des écarts de moins de 1 %. L'identification en membrane-flexion des coefficients  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{nm}$  fournit des écarts plus importants, principalement sur le coefficient  $\phi_{1122}^{nm} = \phi_{2211}^{nm}$ . Cet écart est illustré figure 3 sur laquelle on constate que le critère identifié est qualitativement meilleur que le critère linéarisé d'Ilyushin en comparaison avec le critère exact. Ces résultats valident la procédure d'identification.

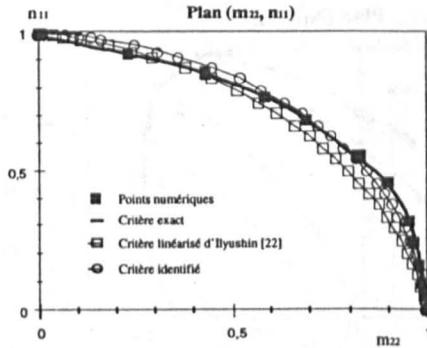


Figure 3. Comparaison du critère identifié avec les critères d'Ilyushin

#### 4.2. Plaque avec une âme en nids d'abeille

On traite enfin le cas d'un panneau structural léger avec une âme en nids d'abeille. Le maillage de la cellule de base (figure 4) comporte des éléments de type H20 et P15 (prismes à 15 nœuds) à interpolation quadratique en déplacement.

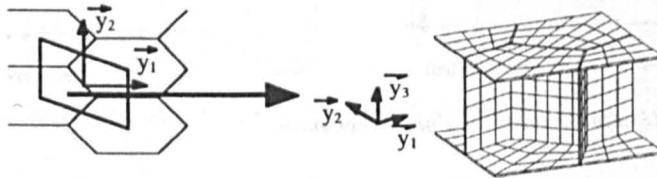


Figure 4. Cellule de base et maillage

Cette plaque possède toutes les propriétés requises pour appliquer le critère proposé et ses paramètres sont identifiés selon la procédure décrite au paragraphe 3.2.

On présente figure 5 les résultats d'identification en membrane. Les points numériques repérés par des ronds pleins représentent les efforts généralisés pour lesquels apparaît la première plastification dans la cellule de base. A partir de ces points, nous avons identifié un critère de limite d'élasticité macroscopique sous la même forme que celui proposé pour les charges limites. Sur la figure 5, nous avons aussi reporté les tangentes au domaine de plasticité macroscopique obtenues numériquement en relevant les vitesses de déformations à la limite. La zone comprise entre les deux critères représente la zone d'écroutissage structural.

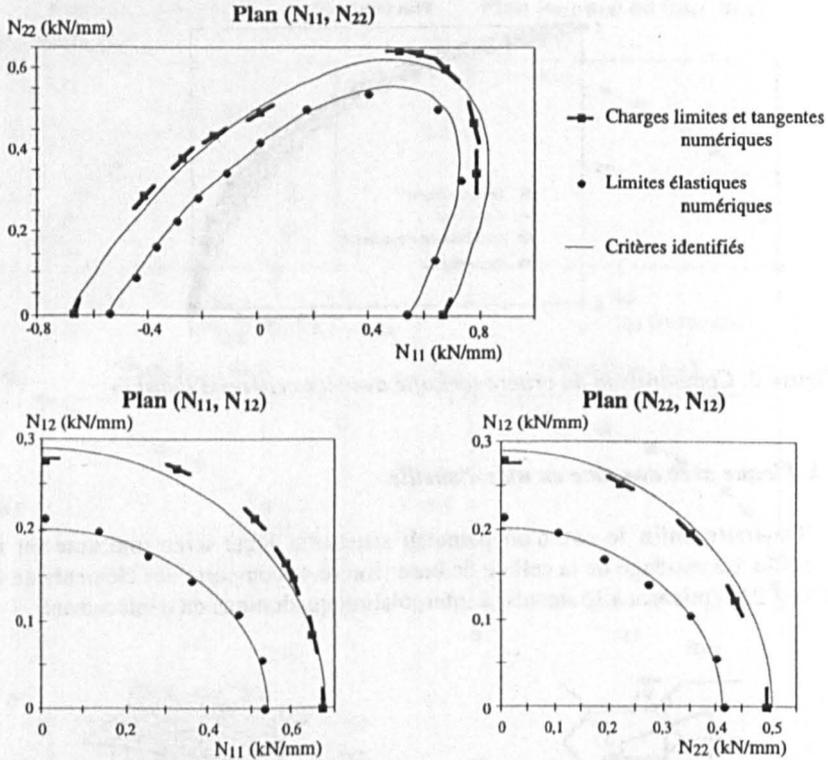


Figure 5. Résultats d'identification en membrane

Les résultats d'identification en membrane sont très satisfaisants puisque les critères identifiés sont en accord avec les points numériques. On obtient une concordance similaire pour l'identification en flexion [BOU 97].

L'identification des paramètres  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{nm}$  est illustrée figure 6 pour les critères de charges limites et de limite d'élasticité. On notera que les coefficients  $\phi_{2222}^{nm}$  et  $\phi_{1212}^{nm}$  ont été recalés pour le critère de charges limites en considérant l'égalité dans l'expression [29]. Ce recalage permet d'obtenir une droite dans les quarts de plan ( $M_{22} \geq 0, N_{22} \geq 0$ ) et ( $M_{12} \geq 0, N_{12} \geq 0$ ) et de satisfaire la condition de convexité [29] que ne vérifiaient pas les coefficients obtenus par la procédure d'identification.

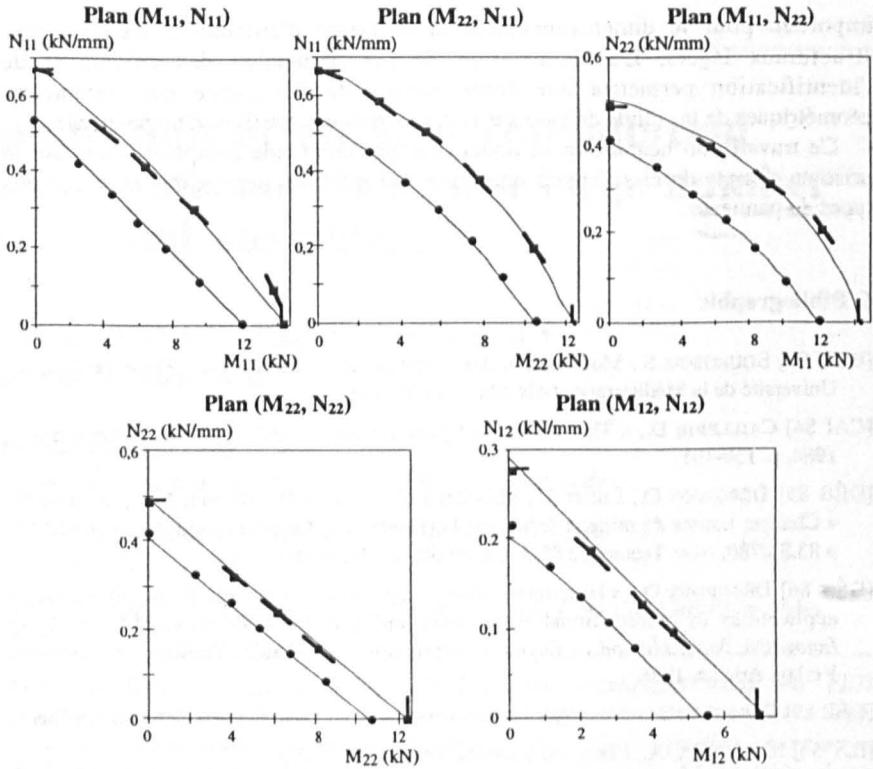


Figure 6. Résultats d'identification des termes de couplage

Dans les plans d'identification, on constate donc que les critères proposés rendent compte assez fidèlement des points numériques obtenus. Des études complémentaires ont été menées dans des plans autres que ceux d'identification, confortant l'adéquation des critères proposés avec les points numériques [BOU 97].

## 5. Conclusions

L'approche proposée est validée sur une plaque homogène isotrope par la comparaison des résultats numériques avec le critère exact d'Ilyushin. Pour une plaque périodique, elle permet d'estimer le domaine de plasticité macroscopique en termes de contraintes généralisées, en résolvant des problèmes d'évolution élastoplastique uniquement posés sur la cellule de base. Pour l'exemple d'application, l'identification des paramètres du critère de charges limites proposé donne des résultats très satisfaisants. Nous avons aussi montré que ce critère pouvait être appliqué à la détermination des limites d'élasticité macroscopique. Ainsi, l'obtention de critères réalistes et néanmoins assez faciles à utiliser est un résultat

important pour le dimensionnement et la limite d'utilisation des panneaux structuraux légers. L'automatisation de l'enchaînement des calculs et de l'identification permettra une étude simple de l'influence des paramètres géométriques de la cellule de base sur le comportement plastique d'un panneau.

Ce travail doit néanmoins se poursuivre par une étude complémentaire sur la prise en compte du cisaillement transverse qui n'est pas négligeable pour certains types de panneaux.

## 6. Bibliographie

- [BOU 97] BOURGEOIS S., Modélisation des panneaux structuraux légers, Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), 1997.
- [CAI 84] CAILLERIE D., « Thin elastic and periodic plates », *Math. Meth. in Appl. Sci.* 6, 1984, p. 159-191.
- [DÉB 85] DÉBORDES O., LICHT C., MARIGO J.-J., MIALON P., MICHEL J.-C., SUQUET P., « Charges limites de milieux fortement hétérogènes », Rapport de fin de contrat M.I.R. n 83.S.0780, Note Technique 85-3, Université de Montpellier.
- [DÉB 86] DÉBORDES O., « Homogenization computations in the elastic or plastic range; applications to unidirectional composites and perforated sheets », *4<sup>th</sup> Int. Symp. Innovative Num. Method in Engng*, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Atlanta, 1986.
- [DÉB 89] DÉBORDES O., « Homogénéisation périodique », cours, Université Laval (Québec).
- [ILY 56] ILYUSHIN A.-A., *Plasticité*, Eyrolles, Paris, 1956, 375 p.
- [MAR 87] MARIGO J.-J., MIALON P., MICHEL J.-C., SUQUET P., « Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision des charges limites d'une structure hétérogène périodique », *Journal of theoretical and applied mechanics*, Vol. 6, n° 1, 1987, p. 47-75.
- [MOU 96] MOUFTAKIR L., Homogénéisation des structures ondulées, Thèse de doctorat, Université de Metz, 1996.
- [OWE 83] OWEN D.R.J., FIGUEIRAS J.A., « Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semi-loof element », *International journal for numerical methods in engineering*, 1983, Vol. 9, p. 521-539.
- [SAN 80] SANCHEZ-PALENCIA E., « Non homogeneous media and vibration theory », Lecture Notes In Physics, n° 127, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [SUQ 82] SUQUET P., Plasticité et homogénéisation, Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [WEI 84] WEIL F., Application de la théorie de l'homogénéisation à l'étude élastique et à la rupture de composites résine-fibre de verre, Thèse D.I., Nantes, 1984.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The Finite Element Method*, quatrième édition, volume 1 : Basic Formulation and Linear Problem, volume 2 : Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity, Ed. McGraw-Hill, 1991.