

---

# Une approche parallèle et multi-échelles en calcul des structures : exemples et performances

David Dureisseix — Pierre Ladevèze

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS de Cachan/Université Paris 6/CNRS  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex

---

*RÉSUMÉ.* Parmi les méthodes de calcul de structures bien adaptées aux ordinateurs à architecture parallèle, que ce soit mémoire distribuée ou partagée, les méthodes de décomposition de domaine peuvent être classées en approches primales, duales ou « mixtes », comme celle qui est utilisée ici : les inconnues sont à la fois les déplacements et efforts aux interfaces. Un inconvénient de ces méthodes est la diminution du taux de convergence lorsque le nombre de sous-domaines croît. L'utilisation d'un mécanisme global de propagation d'information parmi tous les sous-domaines peut y remédier. Nous proposons ici de prendre en compte deux échelles introduites lors d'une décomposition en sous-structures et interfaces. Le problème à grande échelle est alors utilisé pour permettre l'échange global d'information et ainsi améliorer les performances. De plus, nous comparons cette approche à différentes autres méthodes de décomposition de domaine, dont plusieurs variantes de la méthode FETI.

*ABSTRACT.* In the structural analysis field, domain decomposition methods for algorithms are well suited to parallel architecture computers. Several approaches related with these methods have been designed; for instance, primal approaches, dual ones or "mixed" ones, such as the approach used here: unknowns are both displacements and efforts to interfaces. A general drawback of these methods is the decrease in convergence when increasing the number of substructures. Using a global mechanism to propagate information amongst all the substructures can avoid this drawback. We propose here to take into account two scales introduced when decomposing the structure into substructures and interfaces. The large scale problem is then used to build a global exchange of information and therefore improving performance. Moreover, comparisons with other decomposition methods, and in particular with several variants of the FETI method, are proposed.

*MOTS-CLÉS :* décomposition de domaine, approche non-incrémentale, multi-échelles.  
*KEY WORDS :* domain decomposition, non-incremental approach, multi-level.

---

## 1. Introduction

Les ordinateurs les plus performants sont aujourd'hui construits autour d'une architecture parallèle [NOO 97]. Pour utiliser de telles architectures, la construction d'algorithmes adaptés n'est pas immédiate et de nombreuses recherches sont en cours pour bâtir des algorithmes « parallèles ».

Pour le calcul de structures, les techniques de décomposition de domaine sont bien adaptées à ces multi-processeurs, avec une mémoire partagée ou distribuée, [YAG 93]. Parmi ces techniques, on peut distinguer les méthodes directes où un opérateur condensé sur l'ensemble des interfaces est explicitement construit, comme les méthodes multi-frontales ([DUF 86], [ESC 94]), et les méthodes itératives, souvent basées sur un algorithme de type gradient conjugué. Pour ces dernières, et dans le cas où la décomposition en sous-domaines se fait sans recouvrement, l'accent peut être porté sur la continuité du déplacement aux interfaces, comme pour la méthode de Schur primale ([Le 94], par exemple), ou sur l'équilibre des efforts aux interfaces, comme pour la méthode de Schur duale ([FAR 91], [FAR 94b]).

L'approche qui sert de base à cette étude, est construite à partir d'une technique de sous-structuration et de l'approche à grand incrément de temps (LATIN). La structure est décomposée en sous-structures et interfaces, et ces dernières jouent un rôle majeur pour cette approche. En particulier, efforts et déplacements aux interfaces sont traités à égalité; c'est pourquoi, il s'agit ici d'une approche « mixte » en décomposition de domaine. Ses principes sont décrits dans [LAD 96], sa faisabilité a été montrée dans [LAD 92], et [COG 96], [CHA 97] proposent des exemples significatifs lorsque les sous-structures ont un comportement élastique linéaire.

Sur cette décomposition en sous-structures et interfaces, nous introduisons une approche parallèle et multi-échelles où le problème à grande échelle est utilisé pour permettre un échange global et donc rapide d'informations. Les approches LATIN ont été initialement développées pour les problèmes non linéaires d'évolution, aussi l'écriture de l'approche parallèle, qui est l'objet de ce travail, ne poserait pas de difficultés dans un tel cadre. Toutefois, pour simplifier la présentation et donner les idées forces, nous nous restreignons ici au cas de l'élasticité linéaire. Dans ce cas, le temps n'intervient plus et seule la configuration finale nous intéresse.

L'approche ainsi proposée est ensuite comparée à d'autres techniques de décomposition de domaine, en particulier à plusieurs versions de la méthode FETI.

## 2. Formulation du problème

Dans le but de procéder au traitement en parallèle du problème, la structure est décomposée en sous-structures  $\Omega^E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , et en interfaces  $L^{EE'}$ . Chacune est une entité mécanique à part entière avec ses propres variables et ses propres équations.

### 2.1. Comportement des sous-structures

Chaque sous-structure  $\Omega^E$  est soumise à l'action de son environnement (les interfaces voisines): une répartition d'efforts  $\underline{F}^E$  et un champ de déplacement  $\underline{W}^E$  sur sa frontière  $\partial\Omega^E$ . Éventuellement,  $\underline{f}_d$  est une densité de charge volumique imposée (figure 1). Pour tout  $E \in \mathbf{E}$ ,  $(\underline{W}^E; \underline{F}^E)$  doit vérifier:

- les équations de liaison :

$$\exists \underline{U}^E \in \mathcal{U}^E, \quad \varepsilon^E = \varepsilon(\underline{U}^E) \quad \text{et} \quad \underline{U}^E|_{\partial\Omega^E} = \underline{W}^E \quad [1]$$

où  $\mathcal{U}^E$  est l'ensemble des champs de déplacement définis sur  $\Omega^E$  qui possèdent une énergie finie, et où  $\varepsilon^E$  est la déformation associée.

- les équations d'équilibre :

il existe un champ de contraintes  $\sigma^E$  qui équilibre  $\underline{f}_d$  et  $\underline{F}^E$ , i.e.

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^E,$$

$$\int_{\Omega^E} \text{Tr}[\sigma^E \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* dS + \int_{\partial\Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{U}^*|_{\partial\Omega^E} dS \quad [2]$$

- la relation de comportement :

ici, le comportement est celui de l'élasticité linéaire ( $\mathbf{K}$  est le tenseur de Hooke) et

$$\sigma^E = \mathbf{K}\varepsilon^E \quad [3]$$

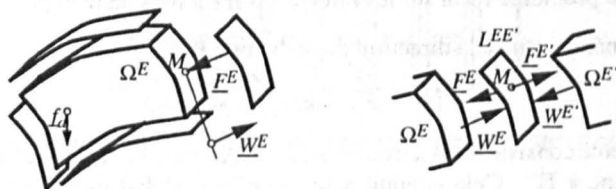


Figure 1. Sous-structure et interface

L'ensemble des inconnues  $(\underline{W}^E, \underline{F}^E, \underline{U}^E, \sigma^E)$ , pour  $E \in \mathbf{E}$ , qui caractérisent l'état des sous-structures, est noté  $s$ .

### 2.2. Comportement des interfaces

L'état de la liaison entre deux sous-structures  $\Omega^E$  et  $\Omega^{E'}$  est défini à partir des déplacements et des efforts  $(\underline{W}^E; \underline{F}^E)$  et  $(\underline{W}^{E'}; \underline{F}^{E'})$  (figure 1). Par exemple, pour une liaison parfaite, ils doivent vérifier :

$$\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{W}^E = \underline{W}^{E'} \quad [4]$$

D'autres types de liaison peuvent être envisagés : liaisons à effort imposé, à déplacement imposé, liaisons de contact unilatéral avec ou sans frottement..., [LAD 96], [CHA 97]. Nous ne considérerons ici que le cas des interfaces parfaites.

### 2.3. Description de l'algorithme mono-échelle

La structure est maintenant considérée comme un assemblage de sous-structures et d'interfaces. Les inconnues du problème sont à la fois les déplacements et les efforts sur les interfaces ; c'est pourquoi l'approche utilisée est qualifiée de mixte.

En suivant la trame des approches à grand incrément de temps (LATIN en anglais) [LAD 92], les équations sont réparties en deux groupes pour séparer les difficultés :

- $\Gamma$  est l'ensemble des inconnues  $s$  qui vérifient le comportement de chaque interface [4] ;
- $A_d$  est celui des  $s$  qui vérifient le comportement de chaque sous-structure [1], [2], [3].

La solution cherchée  $s_{ex}$  est alors l'intersection de  $A_d$  et  $\Gamma$ . Un algorithme à deux étapes construit alors successivement un élément de  $A_d$  puis de  $\Gamma$  (figure 2). Chaque étape nécessite une direction de recherche ; elles sont les paramètres de la méthode :

- l'étape locale utilise la direction de recherche  $E^+$  :

$$(\hat{F} - F) - k(\hat{W} - W) = 0 \quad [5]$$

Trouver  $\hat{s} \in \Gamma$  de façon à ce que  $\hat{s} - s_n$  appartienne à la direction de recherche  $E^+$  est un problème local sur les interfaces. Il est trivialement parallélisable.

- l'étape linéaire utilise la direction de recherche  $E^-$  :

$$(F - \hat{F}) + k(W - \hat{W}) = 0 \quad [6]$$

Le problème consiste alors à trouver  $s_{n+1} \in A_d$  de telle façon à ce que  $s_{n+1} - \hat{s}$  appartienne à  $E^-$ . Cela conduit à un problème global uniquement par sous-structure, qui peut donc être traité en parallèle une fois les sous-structures distribuées parmi les processeurs disponibles, de la même manière que leurs interfaces voisines.

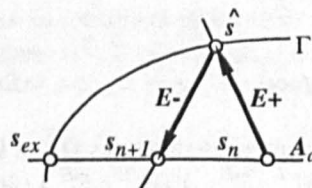


Figure 2. L'algorithme LATIN à deux étapes

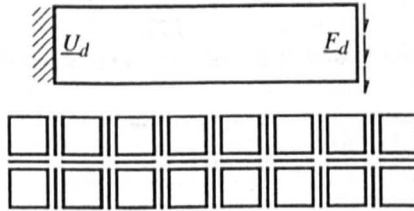
Un indicateur de convergence peut ainsi être bâti à partir de  $\|\hat{s} - s_n\|$ .

Dans le cas de l'élasticité linéaire, cet algorithme est similaire à celui proposé dans [LAD 85], [LIO 90], [GLO 90]. D'un point de vue « milieu continu », il converge vers la solution du problème de référence sans décomposition. Des conditions précises de convergence peuvent être trouvées dans [LAD 96].

### 3. Une extension multi-échelles

Un comportement classique des méthodes de type décomposition de domaine est la dégradation du taux de convergence lorsque le nombre de sous-structures croît [BRA 86], [SMI 91]. Par exemple, pour le problème modèle d'une structure bidimensionnelle élancée soumise à un chargement de flexion parabolique (figure 3), la solution de référence  $(\underline{U}; \sigma)_{\text{ref}}$  éléments finis permet de définir le taux de convergence relatif à l'erreur en énergie :

$$\tau = -\log \frac{e_{n+1}}{e_n} \quad \text{où} \quad e_n^2 = \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[(\sigma_n - \sigma_{\text{ref}}) \mathbf{K}^{-1} (\sigma_n - \sigma_{\text{ref}})] d\Omega}{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma_{\text{ref}} \mathbf{K}^{-1} \sigma_{\text{ref}}] d\Omega}$$



**Figure 3.** Problème modèle avec une décomposition en 16 sous-structures et interfaces

Le paramètre de direction de recherche peut être ici choisi sous la forme  $k = E/L_0$ ,  $E$  étant le module d'Young du matériau et  $L_0$  une longueur qui caractérise donc la direction de recherche. Pour l'approche LATIN mono-échelle précédente, la valeur « optimale » de  $L_0$  est liée à la taille de la structure, [COG 96]. La figure 4 reporte alors le taux de convergence moyen pour atteindre une convergence poussée ( $e_n \leq 0.1\%$ ) en fonction du nombre de sous-structures. Il se dégrade effectivement lorsque le nombre de sous-structures croît. Une interprétation possible est de noter qu'à chaque itération de l'algorithme, l'information ne se propage que d'une couche de sous-structures à la fois et non pas globalement dans l'assemblage de sous-structures et d'interfaces.

Pour remédier à un tel inconvénient un mécanisme d'échange global d'information parmi toutes les sous-structures est en général efficace. Plusieurs algorithmes de décomposition de domaine en utilisent aujourd'hui un, comme la méthode FETI, [FAR

94b], ou la « Balancing Domain Decomposition method », [MAN 93]. Pour construire ce mécanisme, nous choisissons ici de représenter la solution cherchée sur différentes échelles :

$$(\underline{U}^E; \sigma^E) = (\underline{U}_1^E; \sigma_1^E) + (\underline{U}_2^E; \sigma_2^E) \quad [7]$$

où 1 et 2 sont respectivement utilisés pour les inconnues relatives à la grande échelle (grandeurs effectives) et aux corrections sur l'échelle fine. On choisit ici de conserver le problème sur la grande échelle global. Il va ainsi jouer le rôle de mécanisme d'échange d'information parmi les sous-structures. L'échelle fine est quant à elle traitée par la technique précédente de sous-structuration.

Chaque échelle peut provenir d'une modélisation différente de la structure, par exemple ici, de 2 maillages différents avec éléments emboîtés. Elles seront notées par la suite  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Les principes de cette technique ont été décrits dans [DUR 96]. Les transferts d'information entre les échelles sont alors réalisés avec un opérateur de prolongation  $\mathbb{P}$  et un opérateur de restriction  $\mathbb{R} = \mathbb{P}^T$ , suivant la terminologie des méthodes multigrilles, [HAC 81], [PAR 90]. La transposition est définie avec la forme symétrique en énergie :

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_2^E} \text{Tr}[\varepsilon(\mathbb{P}^E \underline{U}) \sigma^E] d\Omega = \int_{\Omega_1^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}) \sum_{E \in \mathbf{E}} \mathbb{R}^E \sigma^E] d\Omega \quad [8]$$

$(\underline{U}, \bar{\sigma})$  est la solution effective, c'est-à-dire la partie de la solution définie sur le maillage de  $\Omega_1$  (alors  $\underline{U}_1^E = \mathbb{P}^E \underline{U}$  et  $\bar{\sigma} = \sum_{E \in \mathbf{E}} \mathbb{R}^E \sigma_1^E$ ). Avec des maillages em-

boîtés, la prolongation peut être réalisée avec une projection de type éléments finis hiérarchiques, [ZIE 83].

L'équilibre peut maintenant être écrit sur chaque échelle :

– sur l'échelle fine 2, sur chaque sous-structure  $\Omega_2^E$ ,

$$\forall \underline{U}_2^* \in \mathcal{U}_2^E, \quad \int_{\Omega_2^E} \text{Tr}[\sigma_2^E \varepsilon(\underline{U}_2^*)] d\Omega = \int_{\Omega_2^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}_2^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_2^E} \underline{F}_2^E \cdot \underline{U}_2^* dS + \\ - \int_{\Omega_2^E} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}_1) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}_2^*)] d\Omega \quad [9]$$

$\mathcal{U}_2^E$  est la partie de  $\mathcal{U}^E$  correspondant à l'échelle fine 2, vérifiant des conditions aux limites homogènes. Sur l'échelle fine, le champ de contraintes  $\sigma_2^E$  doit aussi équilibrer  $-\sigma_1^E = -\mathbf{K} \varepsilon(\underline{U}_1|_{\Omega_2^E}) = -\mathbf{K} \varepsilon(\mathbb{P}^E \underline{U})$ .

En utilisant la direction de recherche  $(\underline{F}_2 - \hat{\underline{F}}_2) + k(\underline{W}_2 - \hat{\underline{W}}_2) = 0$ , avec  $\underline{W}_2^E = \underline{U}_2^E|_{\partial\Omega_2^E}$ , la formulation en déplacement discrétisée de ce problème est

$$([K^E] + [k^E])[U_2^E] = [f_d^E] + [\hat{f}^E] - [B\sigma_1^E] \quad [10]$$

où  $[K^E]$  et  $[k^E]$  sont des rigidités constantes au cours des itérations, provenant du matériau et de la direction de recherche, [COG 96],  $[\hat{f}^E]$  est un terme de charge dû à  $\hat{\underline{F}}_2^E + k\hat{\underline{W}}_2^E$ , et  $B$  l'opérateur qui donne les forces généralisées équilibrant un champ de contrainte.

– sur la grande échelle 1,

$$\forall \underline{U}_1^* \in \mathcal{U}_1, \quad \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\sigma_1 \varepsilon(\underline{U}_1^*)] d\Omega = \int_{\Omega_1} \underline{f}_d \cdot \underline{U}_1^* d\Omega + \\ - \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}_1^*) \sum_{E \in \mathbf{E}} \mathbf{K}_E(\underline{U}_2^E)] d\Omega \quad [11]$$

$\mathcal{U}_1$  est relatif aux champs définis sur l'ensemble de la structure  $\Omega$ , vérifiant des conditions aux limites homogènes. On peut alors remarquer qu'il n'y a pas séparation des échelles : sur la grande échelle, le champ de contraintes  $\bar{\sigma}$  doit aussi équilibrer  $-\bar{\sigma}_2 = - \sum_{E \in \mathbf{E}} \bar{\sigma}_2|_{\Omega^E} = - \sum_{E \in \mathbf{E}} \mathbb{R}^E \mathbf{K}_E(\underline{U}_2^E)$ .

Toujours après discrétisation de la formulation en déplacement, on obtient

$$[K_1][U_1] = [B\bar{\sigma}_d] - [B\bar{\sigma}_2] \quad [12]$$

où  $\bar{\sigma}_d$  provient des charges extérieures :

$$\forall \underline{U}_1^* \in \mathcal{U}_1, \quad \int_{\Omega_1} \underline{f}_d \cdot \underline{U}_1^* d\Omega = \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\bar{\sigma}_d \varepsilon(\underline{U}_1^*)] d\Omega$$

La solution est alors recherchée successivement dans les deux échelles à chaque itération de la méthode LATIN sur l'échelle fine sous-structurée, [DUR 97]. La table 1 décrit cet algorithme. Les approches LATIN ont été implantées dans le code semi-industriel CASTEM 2000 développé au CEA de Saclay, [VER 88].

Pour l'exemple précédent, le gain en taux de convergence est illustré sur la figure 4 quand chaque sous-structure est maillée avec 2 048 éléments triangulaires isoparamétriques à 6 nœuds, et ceci pour chaque sous-structuration (4, 16 et 64 sous-structures). La grande échelle a été maillée avec un nombre d'éléments triangulaires à 3 nœuds égal à deux fois le nombre de sous-structures. Le problème de référence possède respectivement 33 400, 132 354 et 526 850 degrés de liberté.

La quasi-indépendance du taux de convergence vis à vis du nombre de sous-structures illustre l'extensibilité numérique de l'approche LATIN multi-échelles.

On peut aussi noter sur cet exemple que la nouvelle valeur optimale pour la direction de recherche, en utilisant deux échelles, est cette fois-ci relative à la longueur des interfaces ( $L_0$  a été choisi égal à 0,25 fois la longueur d'une sous-structure). Elle n'est donc cette fois plus caractérisée par le comportement global de toute la structure et devient une caractéristique de la sous-structuration, [DUR 97].

#### 4. Comparaisons

Avec l'approche proposée ici, on peut remarquer que ni le déplacement, ni les efforts de  $s_n$  ne sont continus au travers des interfaces mais que les deux sauts sont améliorés au cours des itérations.

D'autres approches privilégient la continuité du déplacement comme la méthode de Schur primale [Le 94]. À chaque itération, elle propose une solution qui vérifie la

Échelle globale — 1 processeur	Échelle fine — $n$ processeurs
<b>Initialisation</b> réception des $\bar{\sigma}_d^E$ ← assemblage des contributions <b>factorisation</b> de $[K_1]$ <b>montée-descente</b> : problème global envoi de $\bar{U}$ →	<b>Initialisation</b> calcul des contributions $\bar{\sigma}_d^E$ envoi de $\bar{\sigma}_d^E$ ← initialisation de $\hat{s}$ <b>factorisation</b> de $[K^E] + [k^E]$ réception de $\bar{U}$ → calcul du terme de couplage $\sigma_1^E$ <b>montée-descente</b>
<b>Boucle sur les itérations</b> réception des $\bar{\sigma}_{2 \Omega^E}$ ← assemblage des contributions <b>montée-descente</b> : problème global envoi de $\bar{U}$ →	<b>Boucle sur les itérations</b> calcul du terme de couplage $\bar{\sigma}_{2 \Omega^E}$ envoi de $\bar{\sigma}_{2 \Omega^E}$ ← <b>étape locale</b> , indicateur de convergence ↔ réception de $\bar{U}$ → calcul du terme de couplage $\sigma_1^E$ <b>montée-descente</b>

Table 1. Algorithme à deux échelles

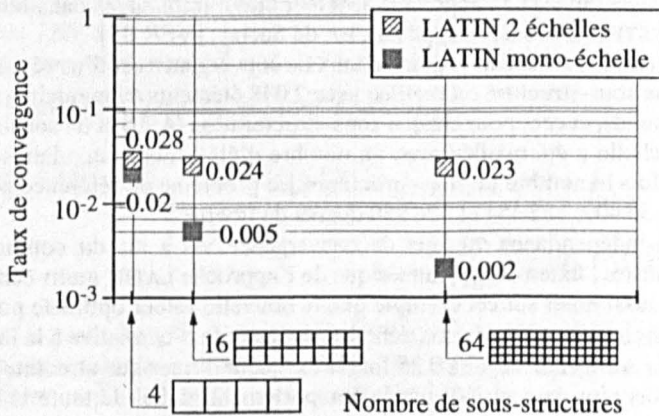


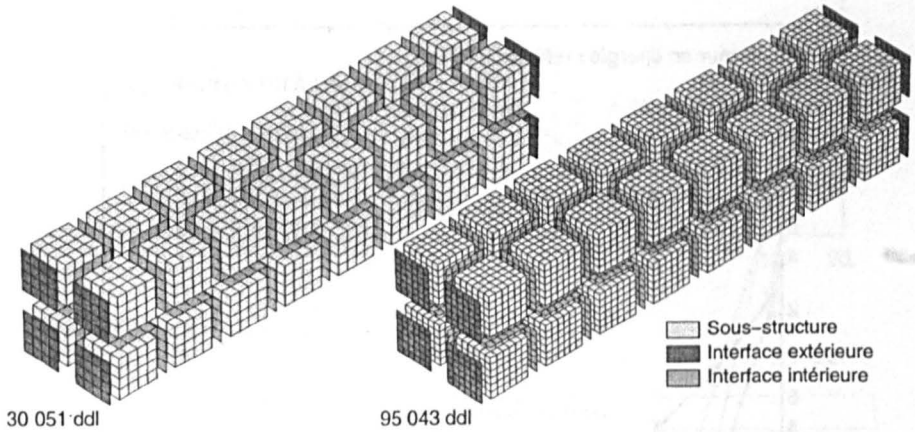
Figure 4. Taux de convergence fonction du nombre de sous-structures

continuité du déplacement et améliore le déséquilibre en effort avec un algorithme du gradient conjugué sur le problème condensé en déplacement. D'autre part, la méthode de Schur duale, [FAR 94a], propose une solution qui vérifie l'équilibre aux interfaces et améliore les sauts de déplacement au cours des itérations du gradient conjugué sur le problème condensé en effort. Plus précisément, avec la méthode FETI, la solution

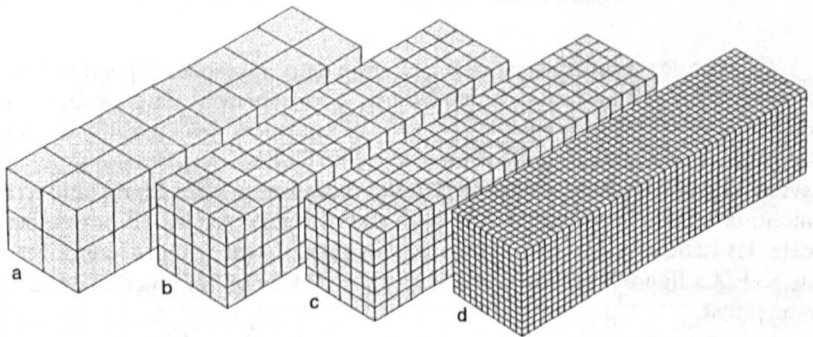


courante doit satisfaire à l'équilibre global sur chaque sous-domaine, et le déplacement est alors connu à un mouvement de solide rigide près par sous-domaine. Cela conduit à la résolution d'un problème global sur tous les sous-domaines pour tous ces mouvements de solide rigide. C'est l'analogie du problème à grande échelle.

L'exemple proposé est cette fois-ci une poutre tridimensionnelle avec une charge tranchante parabolique terminale. Deux discrétisations sont proposées, et présentées sur la figure 5, avec des éléments cubiques à 20 nœuds. Pour la grande échelle, l'influence de la discrétisation avec des éléments cubiques à 8 nœuds est étudiée comme l'illustre la figure 6.



**Figure 5.** Maillages du problème sous-structuré (assemblage de sous-structures et d'interfaces)



**Figure 6.** Maillages du problème à grande échelle

La figure 7 reporte quant à elle l'erreur en énergie  $e_n$  en fonction des itérations, pour la méthode de SCHUR primale, sans préconditionnement, pour la méthode FETI sans préconditionnement, puis avec un préconditionneur économique, et enfin le préconditionneur de Dirichlet. Ces trois derniers calculs ont été réalisés par F.-X. Roux sur le PARAGON de l'ONERA-Châtillon. L'ancien algorithme LATIN mono-échelle ainsi que l'extension multi-échelles pour les diverses discrétisations de la grande échelle sont aussi reportées. Ils ont été réalisés sur le CRAY-T3D de l'IDRIS à Orsay. Ces deux calculateurs ont été utilisés dans une configuration où 32 processeurs sont disponibles.

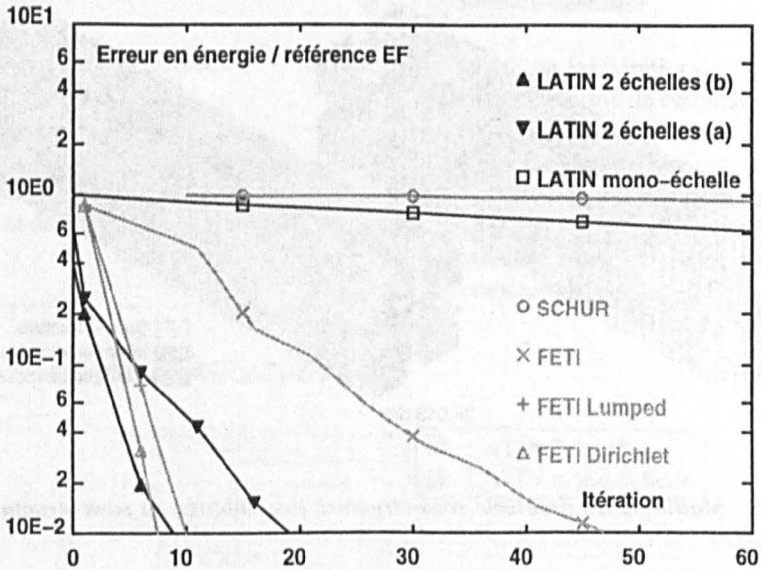


Figure 7. Comparaison des approches pour le premier cas

Comme des comparaisons en temps entre deux approches dépend des processeurs, réseaux de communication, compilateurs, environnement de programmation, accès disque..., nous avons retenus les principales tendances des algorithmes en pondérant les précédents résultats : après avoir analysé les parties coûteuses des simulations, nous avons identifié les coûts en temps CPU des initialisations des approches FETI et LATIN mono-échelle à 1, en temps CPU équivalent (cumulé sur les 32 processeurs). Après cela, les itérations FETI et LATIN 2-échelles pour le cas (a) sont identifiées en termes de coût. La figure 8 reporte alors l'évolution de l'erreur en fonction de ce temps CPU équivalent.

La même démarche a été adoptée pour la deuxième discrétisation envisagée du problème de référence. Elle conduit cette fois-ci aux évolutions de l'erreur au cours des itérations de la figure 9 et en fonction d'un deuxième temps équivalent sur la figure 10.

Les caractéristiques des problèmes traités sont reportées dans les tables 2 et 3.

Les coûts d'une approche éléments finis directe pour ces deux cas sont en temps

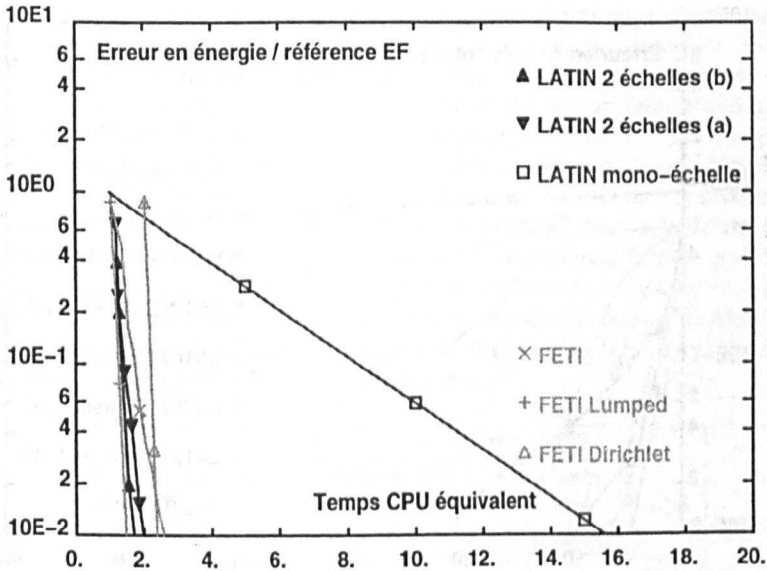


Figure 8. Comparaison des coûts pour le premier cas

cas	1 sous-structure				
	nombre de nœuds	nombre de ddl	nombre d'éléments	encombrement (Mo)	
				factorisée (semi-morse)	rigidités élémentaires
1	425	1275	64	2,1	0,96
2	1 225	3 675	216	12,8	3,1

Table 2. Caractéristiques des problèmes locaux aux sous-structures

CPU équivalent respectif de 6,5 pour le problème à 30 051 ddl et 18 pour le problème à 95 043 ddl (figure 5) : une approche par sous-structuration est d'autant plus efficace que la taille du problème croît. La table 4 reporte ces coûts ainsi que ceux obtenus par une approche multi-frontale.

Lors de l'utilisation d'une approche multi-frontale, [DUF 86], la condensation

cas	sous-structuration			calcul direct			complément de Schur		
	nb. ddl total	enc. total (Mo)		nb. élém.	nb. ddl	enc. (Mo)	nb. nœuds	nb. ddl	enc. (Mo)
		fact.	rig. élém.						
1	40 800	68,4	31	2 048	30 051	184	2 977	8 931	68
2	117 600	410	102	18 449	95 043	1 252	6 625	19 875	329

Table 3. Caractéristiques des problèmes à résoudre

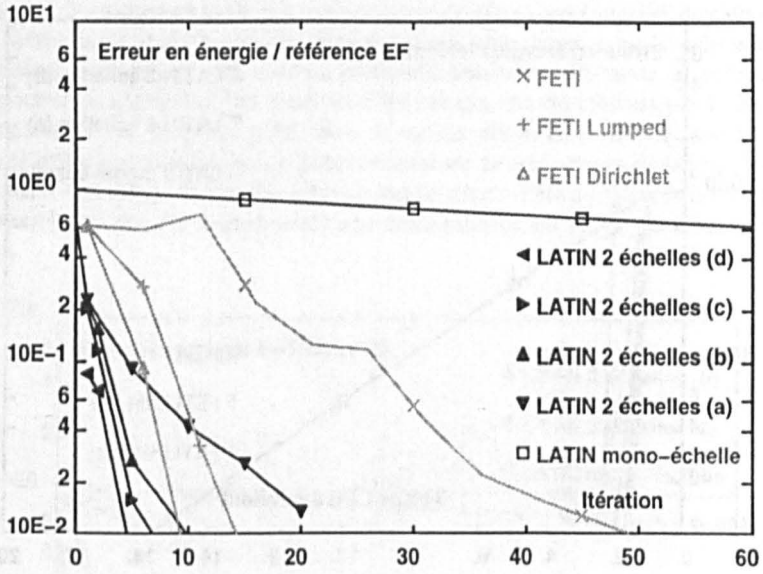


Figure 9. Comparaison des approches pour le second cas

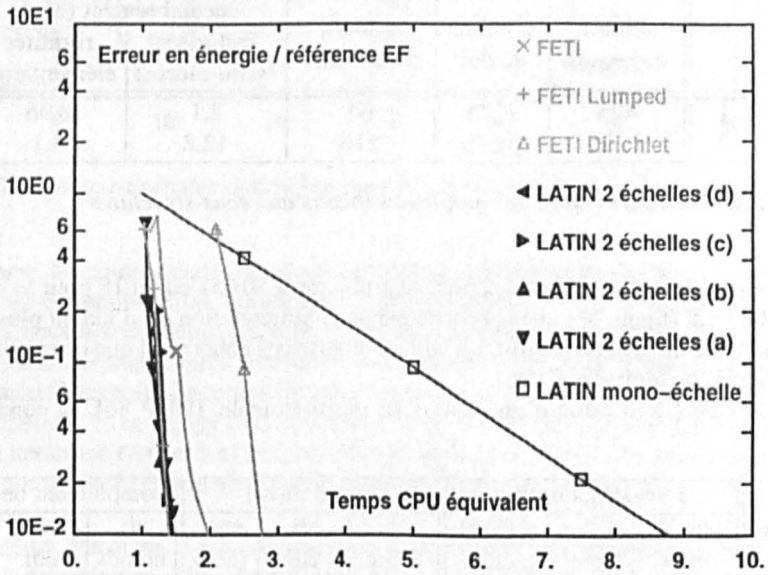


Figure 10. Comparaison des coûts pour le second cas

coûte plus cher qu'une simple factorisation à cause du remplissage plus élevé de la matrice locale de rigidité, afin de traiter en dernier les nœuds d'interface. Lorsque, comme ici, le nombre de sous-structures est important, le grand nombre de nœuds sur l'ensemble des interfaces conduit à traiter explicitement un problème condensé (le complément de Schur) de grande taille, ce qui est pénalisant pour ce type d'approche.

De plus, pour l'approche LATIN, le taux de convergence semble peu dépendre de la taille de la maille : il en dépend moins que la version Dirichlet de l'approche FETI, (figures 7 et 9). On peut aussi remarquer de façon générale deux effets dans les approches LATIN 2-échelles lorsque la taille du problème à grande échelle croît : le niveau d'erreur est de plus en plus faible à la première itération car la solution à grande échelle est utilisée pour initier l'algorithme ; le taux de convergence est de plus en plus grand, mais comme le coût d'une itération est de plus en plus important, l'ensemble se compense sur les exemples présentés (figures 8 et 10).

cas	direct (séquentiel)	multi-frontal (*)		
		condensation + remontée (parallèle)	résolution condensée (séquentiel)	total
1	6,5	2,1	2,4	4,5
2	18	3	2,6	5,6

(\*) avec une renumérotation non optimisée

**Table 4.** Coûts de calcul relatifs suivant la taille du problème

## 5. Conclusions

L'originalité de l'utilisation conjointe d'une approche à grand incrément de temps avec une technique de sous-structuration réside dans le rôle majeur joué par les interfaces qui sont considérées comme des structures particulières avec leurs propres variables et leurs propres équations.

Cela conduit à un algorithme « purement » parallèle qui peut être amélioré par l'introduction d'un schéma à deux échelles. La conséquence est l'émergence d'un problème global sur toute la structure à résoudre à chaque itération. L'algorithme en résultant est numériquement extensible ; il présente de plus une faible dépendance vis à vis du raffinement du maillage.

Le but à long terme est l'extension à l'analyse de structures à comportement non-linéaire et à grand nombre de degrés de liberté. Les travaux en cours portent sur une version multi-échelles plus proche des techniques d'homogénéisation et qui s'insère complètement dans la trame des méthodes non-incrémentales LATIN.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier F.-X. Roux de l'ONERA-Châtillon, pour les comparaisons avec les approches FETI ainsi que l'IDRIS d'Orsay, pour avoir pu accéder au CRAY-T3D.

## 6. Bibliographie

- [BRA 86] BRAMBLE J. H., PASCIAK J. E., SCHATZ A. H., The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, I, *Math. Comp.*, vol. 47, n° 175, 1986, p. 103–134.
- [CHA 97] CHAMPANEY L., COGNARD J.-Y., DUREISSEIX D., LADEVÈZE P., Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method, *Computational Mechanics*, n° 19, 1997, p. 253–263.
- [COG 96] COGNARD J.-Y., DUREISSEIX D., LADEVÈZE P., LORONG PH., Expérimentation d'une approche parallèle en calcul de structures, *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 5, n° 2, 1996, p. 197–220.
- [DUF 86] DUFF I. S., Parallel implementation of multifrontal schemes, *Parallel Computing*, vol. 3, 1986, p. 192–204.
- [DUR 96] DUREISSEIX D., LADEVÈZE P., Parallel and multi-level strategies for structural analysis, *Proceedings of the Second European Conference on Numerical Methods in Engineering*, éd. par Désidéri J.-A., p. 599–604, Wiley, Septembre 1996.
- [DUR 97] DUREISSEIX D., Une approche multi-échelles pour des calculs de structures sur ordinateurs à architecture parallèle, Thèse, ENS de Cachan, Janvier 1997.
- [ESC 94] ESCAIG Y., TOUZOT G., VAYSSADE M., Parallelization of a multilevel domain decomposition method, *Computing Systems in Engineering*, vol. 5, n° 3, 1994, p. 253–263.
- [FAR 91] FARHAT C., ROUX F.-X., A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, p. 1205–1227.
- [FAR 94a] FARHAT C., MANDEL J., ROUX F.-X., Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 115, 1994, p. 365–385.
- [FAR 94b] FARHAT C., ROUX F.-X., Implicit parallel processing in structural mechanics, *Computational Mechanics Advances*, éd. par Oden J. Tinsley, North-Holland, Juin 1994.
- [GLO 90] GLOWINSKI R., LE TALLEC P., Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, éd. par Chan T. F., Glowinski R., Périaux J., Widlund O. B., p. 224–231, Philadelphia, 1990.
- [HAC 81] HACKBUSH W., TROTTEBERG U., Multigrid methods, Springer Verlag, 1981, Lecture Notes in Mathematics, volume 960.
- [LAD 85] LADEVÈZE J., Algorithmes adaptés aux calculs vectoriel et parallèle pour des méthodes de décomposition de domaines, *Actes du 3<sup>e</sup> colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, éd. par Grellier J. P., Campel G. M., p. 893–907, Bastia, Novembre 1985.
- [LAD 92] LADEVÈZE P., LORONG PH., A large time increment approach with domain decomposition technique for mechanical non linear problems, *Comput. Meths. Appl. Sc. Engng.*, éd. par Glowinski R., INRIA, p. 569–578, New York, 1992.
- [LAD 96] LADEVÈZE P., *Mécanique non-linéaire des structures — Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Paris, Hermès, 1996.
- [Le 94] LE TALLEC P., Domain decomposition methods in computational mechanics, *Computational Mechanics Advances*, North-Holland, 1994.
- [LIO 90] LIONS P.-L., On the Schwarz alternating method III: a variant for nonoverlapping subdomains, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, éd. par Chan T. F., Glowinski R., Périaux J., Widlund O. B., p. 202–223, Philadelphia, 1990.
- [MAN 93] MANDEL J., Balancing domain decomposition, *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 9, 1993, p. 233–241.

- [NOO 97] NOOR A. K., New computing systems and future high performance computing environment and their impact on structural analysis and design, *Computers & Structures*, vol. 64, n° 1-4, 1997, p. 1-30.
- [PAR 90] PARSONS I. D., HALL J. F., The multigrid method in solid mechanics: part I—algorithm description and behaviour, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, p. 719-737.
- [SMI 91] SMITH B. F., A domain decomposition algorithm for elliptic problems in three dimensions, *Num. Math.*, vol. 60, 1991, p. 219-234.
- [VER 88] VERPEAUX P., CHARRAS T., MILLARD A., CASTEM 2000: une approche moderne du calcul des structures, *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, éd. par Fouet J.-M., Ladevèze P., Ohayon R., p. 261-271, Pluralis, 1988.
- [YAG 93] YAGAWA G., YOSHIOKA A., YOSHIMURA S., SONEDA N., A parallel finite element method with a supercomputer network, *Computers & Structures*, vol. 47, 1993, p. 407-418.
- [ZIE 83] ZIENKIEWICZ O. C., DE S. R. GAGO J. P., KELLY D. W., The hierarchical concept in finite element analysis, *Computers & Structures*, vol. 16, n° 1-4, 1983, p. 53-65.