
Sur une stratégie adaptative pour les calculs non linéaires. Application aux calculs en viscoplasticité

Jean Pierre Pelle — David Ryckelynck

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS de Cachan, CNRS, Université Paris 6
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex

ryckelyn@lmt.ens-cachan.fr

RÉSUMÉ. Nous présentons une stratégie adaptative pour les calculs non linéaires fondée sur l'utilisation d'une méthode non incrémentale et sur des estimateurs d'erreurs en relation de comportement qui permettent de contrôler la qualité des calculs et de piloter les différents paramètres de l'algorithme. Des exemples d'applications pour des structures à comportement viscoplastique sont présentés.

ABSTRACT. We present an adaptive strategy for non-linear computations based on a non-incremental method and on constitutive error estimators which allow to control the quality of computations and to pilot the parameters of the algorithm. Some examples in the case of viscoplastic structures are presented.

MOTS-CLÉS : calcul non linéaire, erreur en relation de comportement, estimation d'erreur, adaptativité, méthode non incrémentale, viscoplasticité.

KEY WORDS : non-linear simulation, error in constitutive relation, error estimation, adaptivity, non incremental method, viscoplasticity.

1. Introduction

La simulation de structures complexes en non linéaires (comportement non linéaire, grandes déformations, contacts unilatéraux...) induit des coûts très importants, aussi bien en temps de calcul, qu'en place mémoire et qu'en temps-homme. En effet, ces problèmes sont généralement traités par la méthode incrémentale qui nécessite, en plus de la discrétisation en espace de la structure étudiée, un découpage fin de l'intervalle de temps $[0, T]$ sur lequel on veut conduire l'analyse. Il en résulte que ce type de simulations est aujourd'hui encore peu utilisé en site industriel.

Depuis quelques années, diverses approches ont été proposées, en non linéaire, pour adapter le maillage et la taille des pas de temps en cours de calcul de façon à réduire les coûts tout en maintenant un niveau de qualité raisonnable [LAD 86], [PER 94], [GAL 96], [GAL 97], [BAR 97]. Ces approches, qui sont toutes basées sur la méthode incrémentale, permettent de faire évoluer en cours de calcul le maillage et le découpage en temps en se basant sur des estimateurs ou des indicateurs d'erreur. Cependant, le comportement de la structure à l'instant t dépendant de l'histoire suivie depuis le début du chargement, si les erreurs de discrétisation associées à la partie histoire sont trop importantes, elles ne peuvent plus être corrigées par une poursuite du calcul aux instants supérieurs à t . Pour améliorer la qualité de la simulation, il faut généralement effectuer au moins deux résolutions : la première dégage les phénomènes significatifs des solutions cherchées sur tout l'intervalle de temps étudié et permet d'évaluer les erreurs de discrétisation et la seconde, après avoir adapté les paramètres du calcul en temps et en espace, doit fournir une solution de qualité satisfaisante. Dans les cas complexes, cette procédure doit être réitérée ce qui augmente encore les coûts.

L'objet de cet article est de proposer, pour des comportements non linéaires en petites perturbations, une méthodologie qui intègre complètement le contrôle de qualité et d'adaptation des différents paramètres de la simulation. Elle est basée sur :

- une méthode de résolution non incrémentale [LAD 96],
- une mesure d'erreur en relation de comportement adaptée au comportement non linéaire [LAD 96] qui permet d'évaluer globalement les erreurs de discrétisation,
- des indicateurs d'erreur permettant de séparer dans l'erreur globale la part des erreurs dues au maillage, à la représentation en temps et aux autres approximations,
- une stratégie de pilotage, en cours de calcul, de la taille des mailles, de la finesse des représentations en temps et des principaux paramètres de l'algorithme.

L'algorithme non incrémental que nous utilisons, fournit à chaque itération une solution complète (déplacement, contrainte et variables internes) en temps et en espace. Si la qualité de la solution est suffisante, l'algorithme est stoppé ; sinon il suffit de poursuivre le calcul sans aucun retour en arrière comme avec la méthode incrémentale. Ainsi, pour les premières itérations, le maillage et les représentations en temps sont grossiers, puis, en fonction des indications fournies par nos estimateurs d'erreur, ils sont raffinés au fur et à mesure que la prise en compte des non linéarités s'améliore.

Un point important est que l'utilisateur doit seulement décrire la géométrie et définir les données mécaniques du problème (chargements, coefficients de la loi de comportement) ; tout le reste de la procédure est entièrement automatisé. Ainsi, le choix, souvent délicat, des paramètres de la méthode non incrémentale, le choix et la réalisation des maillages, le choix des représentations en temps ne sont plus à la

charge de l'utilisateur. Il en résulte une diminution importante des coûts de calcul proprement dit (temps CPU, volume d'informations à stocker) mais aussi des coûts en temps-homme ce qui, du point de vue industriel, est fondamental.

La méthode est présentée ici pour des comportements viscoplastiques en petites perturbations, mais elle peut être étendue à de nombreuses autres situations. La procédure a été entièrement programmée dans l'environnement CASTEM 2000 et elle utilise le mailleur automatique ARAIGNEE et les logiciels d'estimation d'erreur développés au LMT. L'utilisation d'un autre code Éléments Finis ou d'un autre mailleur est possible moyennant quelques modifications relativement mineures.

2. Problème de référence

Nous nous plaçons dans la cadre des calculs en viscoplasticité en petites perturbations quasistatiques. On considère une structure Ω . Sur une partie $\partial_1\Omega$ du bord le déplacement \underline{U}_d est donné. Sur la partie complémentaire $\partial_2\Omega$ la densité surfacique d'effort \underline{F}_d est donnée. Enfin, Ω est soumis à une densité volumique de force \underline{f}_d donnée. A $t = 0$ la structure n'est pas sollicitée et se trouve dans son état naturel. Le problème de référence peut être formulé de la façon suivante :

Trouver $\underline{U}(M,t)$, $\underline{\sigma}(M,t)$, définis sur $\Omega \times [0, T]$ et vérifiant les équations :

– liaisons cinématiques

$$\forall t \in [0, T], \underline{U} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \quad [1]$$

– équations d'équilibre

$$\forall t \in [0, T], \forall \underline{U}^* \text{ nul sur } \partial_1\Omega \text{ (+ conditions de régularité)} \quad [2]$$

$$- \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma} \underline{\mathcal{E}}(\underline{U}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS = 0$$

– relation de comportement

$$\forall t \in [0, T], \underline{\sigma}|_t = \mathcal{A}(\underline{\mathcal{E}}(\underline{U})|_{\tau} \tau \leq t) \quad [3]$$

La relation de comportement viscoplastique [3] retenue est une version standard [HAL 75] et normale [LAD 96] du modèle de Chaboche qui est couramment utilisée, par exemple, pour le calcul des aubes de turbines [LES 89].

Les variables internes sont : la déformation plastique $\underline{\mathcal{E}}^P$, l'opérateur $\underline{\mathcal{A}}$ associé à l'écroutissage cinématique $\underline{\beta}$, la variable p associée à l'écroutissage isotrope R .

En utilisant les notations condensées $\underline{X} = (\underline{\mathcal{A}}, p)$, $\underline{Y} = (\underline{\beta}, R)$ et $s = (\underline{\mathcal{E}}^P, \underline{X}, \underline{\sigma}, \underline{Y})$, où chaque quantité est définie sur $\Omega \times [0, T]$, on a les équations :

– lois d'état :

$$\underline{\mathcal{E}}^e = \underline{K}^{-1} \underline{\sigma} ; \underline{X} = \underline{\Lambda}^{-1} \underline{Y} \quad [4]$$

où \mathbf{K} et $\mathbf{\Lambda}$ sont des opérateurs caractéristiques du matériau.

- lois d'évolution :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P|_{t=0} = 0 \text{ et } \dot{\mathbf{X}}|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \varphi^* \text{ et } -\dot{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{Y}} \varphi^* \text{ avec } \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) = \frac{k}{m+1} (z)_+^{m+1} \tag{6}$$

et :

$$z = \|\boldsymbol{\sigma}_D - \boldsymbol{\beta}\| + \frac{1}{2c} \|\boldsymbol{\beta}\|^2 - \ell(R) - R_0 ; \|\cdot\|^2 = \text{Tr}[(\cdot)^2]$$

$$\ell(R) = Q \frac{R}{R_s} \left(2 - \frac{R}{R_s} \right) \text{ pour } R \leq R_s \text{ et } \ell(R) = -\infty \text{ pour } R > R_s$$

où $\boldsymbol{\sigma}_D$ est le déviateur de $\boldsymbol{\sigma}$.

Nous noterons s_{ex} la solution exacte du problème de référence.

3. Erreur en relation de comportement

On dit que : $s = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})$ est *admissible* si et seulement si il vérifie toutes les équations linéaires du modèle de référence, c'est-à-dire les équations [1], [2], [4]. On note alors : $s \in A_d$. Un élément $s \in A_d$ vérifie donc toutes les équations du problème de référence à l'exception des lois d'évolution.

Si $s = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})$ vérifie les lois d'évolution non linéaires [6], on note : $s \in \Gamma$.

On a donc : $s_{ex} = \Gamma \cap A_d$.

Pour $s \in A_d$, en général, les lois d'évolution ne sont pas vérifiées ; $s \in A_d$ est donc une solution approchée du problème de référence. La qualité de cette solution approchée est évaluée par la façon dont les lois d'évolution sont vérifiées. De façon précise, on utilise l'erreur en dissipation, introduite dans [LAD 96], définie par :

$$e(s) = \int_0^T \int_{\Omega} \eta(s) \, d\Omega \, dt \tag{7}$$

avec :

$$\eta(s) = \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, -\dot{\mathbf{X}}) + \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) - \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) + \mathbf{Y} \circ \dot{\mathbf{X}} \tag{8}$$

Rappelons que la dissipation est définie par :

$$\Phi = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) - \mathbf{Y} \circ \dot{\mathbf{X}} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) - \text{Tr}(\boldsymbol{\beta} \dot{\boldsymbol{\alpha}}) - R \dot{p}$$

Il résulte des propriétés des potentiels conjugués φ et φ^* que :

$$e(s) \geq 0 \text{ et } (s \in A_d \text{ et } e(s) = 0) \text{ si et seulement si : } s = s_{ex}.$$

$e(s)$ permet donc de quantifier la qualité de $s \in A_d$ en tant qu'approximation de s_{ex} .

A l'erreur absolue [7] on associe l'erreur relative :

$$\varepsilon(s) = e(s)/D$$

où D est défini par [MOE 96] :

$$D = \text{Sup}_{t \in [0, T]} [\text{diss}(t) + \text{ener}(t)]$$

avec :

$$\text{diss}(t) = 2 \int_0^t \int_{\Omega} \text{Sup} \left[\varphi(\dot{\mathbb{E}}^p, -\dot{\mathbb{X}}) + \varphi^*(\sigma, \mathbb{Y}) - \text{Tr}(\sigma \dot{\mathbb{E}}^p), \|\sigma_D\|^{-1} R_0 \text{Tr}[\dot{\sigma} \mathbf{K}^{-1} \sigma] \right] d\Omega dt$$

$$\text{ener}(t) = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\text{Tr}[\sigma \mathbf{K}^{-1} \sigma + \mathbb{Y} \circ \Lambda^{-1} \mathbb{Y}] \right] d\Omega dt$$

4. La méthode non incrémentale mise en œuvre

La méthode non incrémentale que nous utilisons est une version de la méthode dite « à grand incrément de temps » introduite par Ladevèze [LAD 96], appelée aussi « LATIN method ». A chaque itération, on construit une solution approchée dans A_d puis une solution approchée dans Γ . Supposons connu $s_n \in A_d$ et $\hat{s}_n \in \Gamma$; l'itération n consiste à déterminer s_{n+1} et \hat{s}_{n+1} en résolvant les deux problèmes suivants :

– Problème global mais linéaire : trouver $s_{n+1} \in A_d$ tel que :

$$\forall (t, M) \in [0, T] \times \Omega, \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{E}}_{n+1}^p \\ -\dot{\mathbb{X}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{E}}_n^p \\ -\hat{\mathbb{X}}_n \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \hat{\sigma}_n \\ \mathbb{Y}_{n+1} - \hat{\mathbb{Y}}_n \end{bmatrix} \quad [9]$$

– Problème non linéaire mais local : trouver $\hat{s}_{n+1} \in \Gamma$ tel que :

$$\forall (t, M) \in [0, T] \times \Omega, \left(\hat{\sigma}_{n+1}, \hat{\mathbb{Y}}_{n+1} \right) = \left(\sigma_{n+1}, \mathbb{Y}_{n+1} \right) \quad [10]$$

où l'opérateur H est la différentielle seconde de φ^* en $(\hat{\sigma}_n, \hat{\mathbb{Y}}_n)$ [LAD 96].

Un calcul élastique et une étape locale permettent d'initialiser l'algorithme en donnant (s_0, \hat{s}_0) .

4.1. Résolution de l'étape locale

Cette étape est extrêmement simple car elle est explicite. En effet, compte tenu de [6] et [10], on a :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_{n+1}^p &= \partial_{\sigma} \varphi^*(\sigma_{n+1}, Y_{n+1}); & \hat{\mathcal{C}}_{n+1} &= \mathcal{C}_{n+1} \\ \hat{X}_{n+1} &= -\partial_Y \varphi^*(\sigma_{n+1}, Y_{n+1}); & \hat{Y}_{n+1} &= Y_{n+1} \end{aligned} \quad [11]$$

De plus, au cours de l'algorithme, $\hat{\mathcal{E}}_{n+1}^p$ et \hat{X}_{n+1} n'interviennent que par leurs dérivées en temps; il est donc inutile d'intégrer les deux équations différentielles [11] sauf à la fin du calcul pour déterminer les variables \mathcal{E}_{n+1}^p et X_{n+1} .

4.2. Résolution du problème global

Cette étape est plus complexe. Il s'agit de trouver s_{n+1} vérifiant [1], [2], [4], [5] et [9]. Pour cela, on introduit la formulation variationnelle en (σ_{n+1}, Y_{n+1}) suivante dont la démonstration est donnée dans [LAD 96] :

Trouver $(\sigma_{n+1}(t, M), Y_{n+1}(t, M))$ défini $[0, T] \times \Omega$ sur tel que :

$$(\sigma_{n+1}, Y_{n+1}) = (\sigma_n, Y_n) + (\Delta\sigma, \Delta Y) \quad [12]$$

$$(\Delta\sigma, \Delta Y)|_{t=0} = 0 \quad [13]$$

$$\forall t \in [0, T], \Delta\sigma \in \mathcal{S}_0^{[0, T]} \quad [14]$$

$$\forall \sigma^* \in \mathcal{S}_0^{[0, T]}, \forall Y^*,$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^* K^{-1} \dot{\Delta\sigma} + Y^* \circ \Lambda^{-1} \dot{\Delta Y}) d\Omega dt + \\ &\int_0^T \int_{\Omega} H \begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta Y \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \sigma^* \\ Y^* \end{bmatrix} d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{E}}_n^p - \hat{\mathcal{E}}_n^p \\ -\dot{X}_n + \hat{X}_n \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \sigma^* \\ Y^* \end{bmatrix} d\Omega dt \end{aligned} \quad [15]$$

où $\mathcal{S}_0^{[0, T]}$ désigne l'ensemble des champs de contrainte qui, à tout instant, sont en équilibre avec des charges données nulles.

Une solution approchée de ce problème est recherchée sous la forme :

$$\Delta\sigma = \sum_{k=1}^{N_{\sigma}} \beta_k(t) \mathcal{B}_k(M); \quad \Delta Y = \sum_{k=1}^{N_Y} \gamma_k(t) \mathcal{C}_k(M) \quad [16]$$

où $\beta_k(t)$ et $\gamma_k(t)$ sont des fonctions scalaires du temps, \mathcal{B}_k est une famille libre de champs statiquement admissibles à 0 (SA à 0) et \mathcal{C}_k une famille libre de champs de même nature que Y .

4.2.1. Détermination des fonctions $\beta_k(t)$ et $\gamma_k(t)$

Supposons connues les bases de fonctions d'espace \mathbb{B}_k et \mathbb{C}_k . Alors en utilisant [15] et [16], on obtient le système différentiel :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \mathbf{G} g(t) + \mathbf{M}(t)g(t) = \mathbf{N}(t) \end{cases} \quad [17]$$

avec : $g(t)^T = (\beta_1(t), \dots, \beta_{N_\sigma}(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_{N_Y}(t))$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_Y \end{bmatrix} \quad (\mathbf{G}_\sigma)_{km} = \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{B}_k \mathbf{K}^{-1} \mathbb{B}_m] d\Omega \quad (\mathbf{G}_Y)_{km} = \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{C}_k \Lambda^{-1} \mathbb{C}_m] d\Omega$$

et où $\mathbf{M}(t)$ est un opérateur et $\mathbf{N}(t)$ un vecteur connus (voir annexe).

La dimension des bases est petite : N_σ et N_Y en pratique de l'ordre de 1 à 10. Le système [17] est donc un petit système différentiel. Il est intégré par la Θ -méthode.

4.2.2. Construction des bases de fonctions d'espace \mathbb{B}_k et \mathbb{C}_k

La construction est itérative. Plaçons-nous à la fin de l'étape n où l'on a déjà construit, au cours des itérations précédentes les champs $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p$ et $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots, \mathbb{C}_q$. On construit \mathbb{B}_{p+1} et \mathbb{C}_{q+1} tels que :

Trouver \mathbb{B}_{p+1} SA à 0 défini sur tel que :

$$\forall \mathbb{B}^* \text{ SA à } 0, \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{B}_{p+1} \mathbf{K}^{-1} \mathbb{B}^*] d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{B}_m \mathbb{B}^*] d\Omega \quad [18]$$

$$\mathbb{C}_{q+1} = \Lambda \mathbb{X}_m \quad [19]$$

avec :

$$\mathbb{B}_m(t) = \int_0^t (\hat{\mathbb{B}}_n^p - \hat{\mathbb{B}}_n) \delta(\tau) d\tau; \quad \mathbb{X}_m(t) = -\int_0^t (\hat{\mathbb{X}}_n - \hat{\mathbb{X}}_n) \delta(\tau) d\tau$$

où $\delta(\tau)$ est une contribution instantanée à l'erreur $e(s_n)$.

Le problème [19] est local et explicite. Pour résoudre le problème [18], on utilise la formulation duale en déplacement :

Trouver \underline{U}_{p+1} CA à 0 tel que :

$$\forall \underline{U}^* \text{ CA à } 0, \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{B}(\underline{W}_{p+1}) \mathbf{K} \mathbb{B}(\underline{U}^*)] d\Omega = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbb{B}_m \mathbf{K} \mathbb{B}(\underline{U}^*)] d\Omega \quad [20]$$

puis :

$$\mathbb{B}_{p+1} = \mathbf{K} [\mathbb{E}(\underline{W}_{p+1}) + \mathbb{E}_m]$$

Le problème [20] est résolu par une méthode d'Éléments Finis classique. Si les nouveaux champs \mathbb{B}_{p+1} et \mathbb{C}_{q+1} construits sont indépendants des précédents, ils sont ajoutés à la base de fonctions d'espace, sinon ils sont ignorés.

Une fois $\Delta\sigma$ et ΔY calculés, on détermine \mathbb{X}_{n+1} par :

$$\dot{\mathbb{X}}_{n+1} = \Lambda^{-1} \dot{Y}_{n+1}$$

Pour déterminer la vitesse de déformation plastique \mathbb{E}'_{n+1} il n'est pas possible d'utiliser directement [9] qui fournit une vitesse de déformation \mathbb{E}^r_{n+1} telle que :

$$\dot{\mathbb{E}} = \dot{\mathbb{E}}^p_{n+1} + \mathbf{K}^{-1} \dot{\sigma}_{n+1}$$

ne vérifie pas nécessairement les conditions de compatibilité. On commence donc par chercher le champ de déplacement \underline{U}_{n+1} sous la forme :

$$\underline{U}_{n+1} = \underline{U}_n + \Delta \underline{U} \quad \text{avec : } \Delta \underline{U} = \sum_{k=1}^{N_U} \alpha_k(t) \underline{W}_k$$

où les \underline{W}_k sont les champs de déplacement construits au cours des itérations par [20], et les $\alpha_k(t)$ sont déterminés en résolvant le problème :

$$\underset{\alpha_k}{\text{Min}} \left\| \mathbb{E}(\dot{\underline{U}}_n + \Delta \dot{\underline{U}}) - \dot{\mathbb{E}} \right\|_{\mathbf{K}}$$

($\| \cdot \|_{\mathbf{K}}$ désigne la norme en énergie).

On a alors :

$$\dot{\mathbb{E}}^p_{n+1} = \mathbb{E}(\dot{\underline{U}}_n + \Delta \dot{\underline{U}}) - \mathbf{K}^{-1} \dot{\sigma}_{n+1}$$

Cette technique revient à construire s_{n+1} , non pas rigoureusement dans A_d , mais dans un ensemble approché A_d^{app} . Du point de vue pratique les éléments de $s_{n+1} = (\mathbb{E}^p_{n+1}, \mathbb{X}_{n+1}, \sigma_{n+1}, Y_{n+1}) \in A_d^{app}$ sont des quantités discrètes définies aux points de Gauss en espace et aux points d'intégration en temps. En particulier, les contraintes calculées σ_{n+1} ne vérifient les équations d'équilibre qu'au sens faible des éléments finis.

Pour estimer l'erreur en fin d'itération, il faut donc reconstruire à partir de $s_{n+1} \in A_d^{app}$ un élément $s^*_{n+1} \in A_d$. L'étape essentielle est de reconstruire à partir de σ_{n+1} et des données du problème, un champ de contrainte σ^*_{n+1} qui vérifie rigoureusement les équations d'équilibre [2] du modèle de référence. Cette construction est effectuée en post-traitement en utilisant les techniques développées à Cachan depuis plus de 15 ans [LAD 91].

5. Adaptation des paramètres de l'algorithme

5.1. Principe

A la fin de l'itération courante, le calcul de $\epsilon(s_{n+1}^*)$ permet d'apprécier la qualité globale de la solution approchée obtenue. Si le niveau d'erreur désiré ϵ_0 n'est pas atteint, il faut poursuivre le calcul pour améliorer la solution soit en augmentant la base des fonctions d'espace utilisée pour représenter les inconnues, soit en adaptant le maillage, soit en adaptant la partition de $[0, T]$ utilisée dans l'intégration des équations différentielles en temps.

Pour développer une stratégie adaptative, nous avons défini des indicateurs d'erreur permettant de séparer dans l'erreur globale, les différentes sources d'erreurs :

I_{esp} : indicateur caractérisant la qualité du maillage

I_{tem} : indicateur prenant en compte toutes les autres sources d'erreur

De même, nous avons défini les indicateurs suivants :

I_{int} : indicateur caractérisant la qualité de la représentation en temps

I_{base} : indicateur caractérisant la qualité des bases de champs en espace qui permettent de séparer les différentes sources d'erreur mesurées par I_{tem} .

5.2. Indicateurs I_{esp} et I_{tem}

Considérons le problème de référence ([1] à [6]) et notons globalement \mathbf{p}_{app} le problème numérique effectivement résolu qui fournit la solution $s_{n+1} \in A_d^{app}$ à la fin de l'itération n . Considérons le problème intermédiaire \mathbf{p}_h obtenu en recherchant les déplacements de type éléments finis et en remplaçant les équations d'équilibre exactes [2] par les équations d'équilibre au sens des Éléments Finis. Le problème obtenu est un problème « discrétisé en espace » mais « continu en temps ».

Comme précédemment, il est facile de construire, à partir de la solution numérique $s_{n+1} \in A_d^{app}$, un élément s_{n+1}^h qui vérifie toutes les équations du problème \mathbf{p}_h à l'exception des lois d'évolution.

En calculant l'erreur en dissipation $\epsilon(s_{n+1}^h)$, il est donc possible d'évaluer la qualité de la solution calculée $s_{n+1} \in A_d^{app}$ en tant qu'approximation de la solution de \mathbf{p}_h . Cette mesure d'erreur prend en compte toutes les approximations à l'exception des approximations dues à la discrétisation en espace de type éléments finis. En revenant au problème de référence, $\epsilon(s_{n+1}^h)$ permet donc d'estimer les erreurs de discrétisation autres que celles dues à la discrétisation en espace.

Nous posons donc :

$$I_{tem} = \epsilon(s_{n+1}^h) \quad [21]$$

De plus, on montre [RYC 97] que :

$$\varepsilon(s_{n+1}) = I_{tem} + I_{esp} + C_{tem-esp} \quad [22]$$

où I_{esp} est un indicateur qui caractérise les erreurs de type éléments finis et $C_{tem-esp}$ un terme de couplage entre les différentes sources d'erreur.

Les indicateurs I_{int} et I_{base} sont construits de manière analogue à partir du concept d'erreur en relation de comportement, en définissant des sous-problèmes de référence hiérarchiques [RYC 97].

5.3. Pilotage de l'algorithme

Après avoir décrit les données du problème, choisi un premier maillage (qui peut être très grossier) et une représentation en temps minimale qui permet de décrire correctement les charges appliquées, l'utilisateur précise le niveau ε_0 de l'erreur globale qu'il désire. Toute la simulation est alors entièrement pilotée par les mesures d'erreurs et les indicateurs d'erreurs introduits ci-dessus.

Les critères de pilotage mis en place sont simples. Leur fonction principale est de régler automatiquement le déroulement de la simulation. Ils consistent essentiellement à obtenir, au cours du calcul, une répartition équilibrée des différents niveaux d'erreurs.

Par exemple, tant que $I_{esp} < 1.5 I_{tem}$, le maillage n'est pas modifié ; par contre si $I_{esp} \geq 1.5 I_{tem}$ à la fin d'une itération, un nouveau maillage est construit. Bien entendu, les différents champs de type éléments finis sont alors projetés sur ce nouveau maillage (voir figure 1).

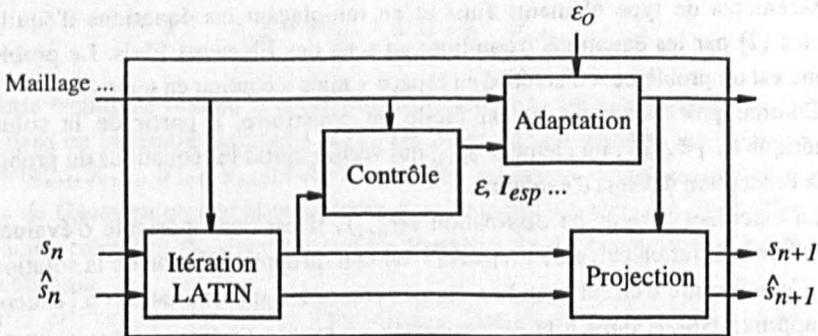


Figure 1. Schéma d'une itération de la stratégie adaptative

Ces critères sont complétés par les deux règles suivantes :

R1 : après l'initialisation, si la plasticité n'est pas négligeable (en pratique le critère retenu est : $2 I_{tem} > e_0$), alors une itération est effectuée sur le maillage pauvre, sinon le maillage est adapté pour calculer une meilleure initialisation.

R2 : après chaque adaptation du maillage au moins une itération est effectuée avant une nouvelle modification du maillage.

L'algorithme est stoppé lorsque l'on considère que l'objectif est atteint, c'est-à-dire en pratique lorsque : $\epsilon(s_{n+1}^*) \leq 1.2 \epsilon_0$

6. Exemples

Nous donnons deux exemples de calculs automatiques de structures complexes. L'état de contraintes est supposé plan. Les éléments finis utilisés sont des triangles à 6 nœuds. L'objectif est d'obtenir $\epsilon_0 = 5 \%$.

La première structure étudiée est représentée avec son chargement figure 2, les zones plastifiées à l'instant final y sont représentées plus foncées que la zone élastique. Le calcul est effectué pour les données suivantes : module d'Young $E = 200\,000$ MPa, coefficient de poisson $\nu = 0,3$, $R_0 = 150$ MPa, $Q = 80$ MPa, $R_S = 53$ MPa, $c = 24\,800$ MPa, $a = 300$, $m = 2$, $k = 4 \cdot 10^{-6}$ MPa $^{-2}$ s $^{-1}$, $F_d(t) = F \sin(\pi t/T)$, $F = 200$ MPa. L'intervalle $[0, T]$ est découpé en 4 pas de temps.

La qualité désirée est obtenue en 14 itérations avec une erreur globale ϵ égale à 5,5 %. Les évolutions de ϵ et de l'indicateur I_{esp} au cours de la résolution itérative sont données figure 3. Les maillages utilisés sont notés M1, M2, M3 et M4 (figure 4). Seul le maillage M1 a été choisi, les trois autres ont été construits par l'algorithme adaptatif.

Le calcul s'est déroulé de la façon suivante. L'initialisation élastique sur $[0, T]$ a été réalisée avec le maillage pauvre M1 (75 éléments). Une première mesure d'erreur a permis d'évaluer $\epsilon = 51 \%$, $I_{esp} = 44 \%$, $I_{tem} = 10 \%$. La plasticité n'étant pas négligeable ($I_{tem} > 2,5 \%$), une itération a été réalisée avec le maillage pauvre (règle R1) pour obtenir une solution prenant mieux en compte de la plasticité. Puis, les erreurs ont été évaluées : $\epsilon = 46 \%$, $I_{esp} = 45 \%$, $I_{tem} = 8 \%$. La répartition des erreurs entre I_{esp} et I_{tem} n'étant pas équilibrée, les approximations en espace ont été adaptées.

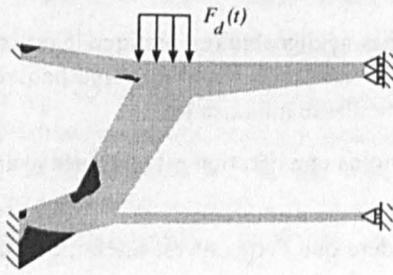


Figure 2. Chargement, Zones plastiques

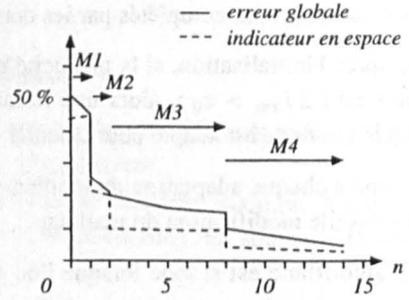
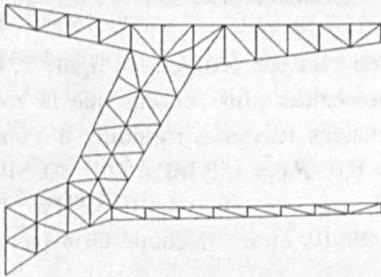
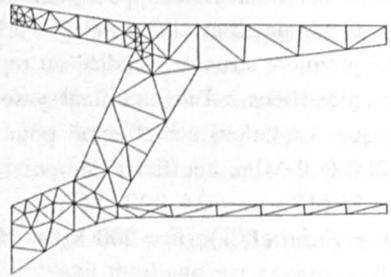


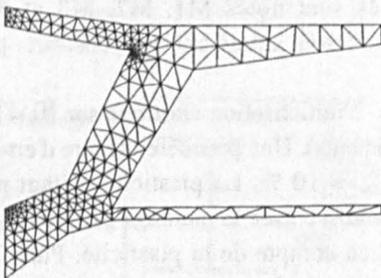
Figure 3. Evolutions de l'erreur globale et de l'indicateur en espace au cours des itérations



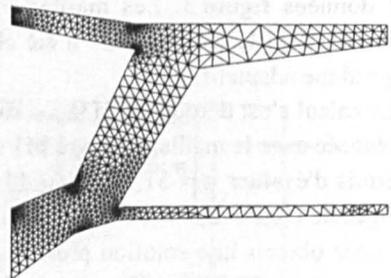
Maillage M1 - 75 éléments



Maillage M2 - 120 éléments



Maillage M3 - 406 éléments



Maillage M4 - 1553 éléments

Figure 4. Maillages déterminés et utilisés au cours du calcul itératif

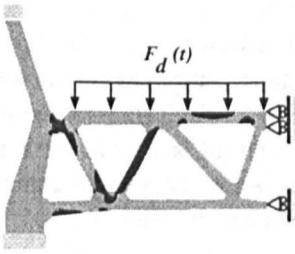


Figure 5. Chargement, Zones plastiques

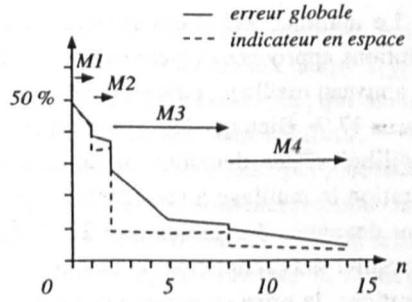
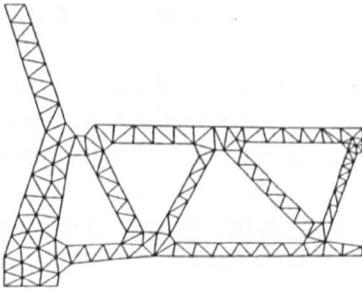
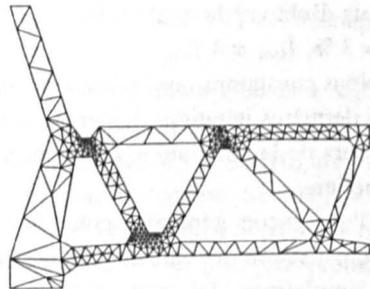


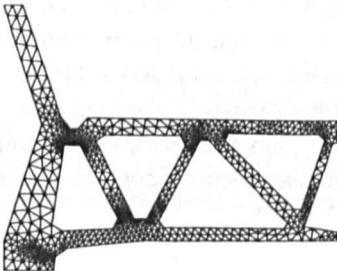
Figure 6. Evolutions de l'erreur globale et de l'indicateur en espace au cours des itérations



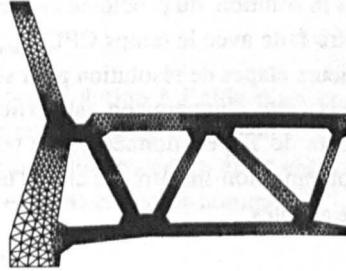
Maillage M1 - 186 éléments



Maillage M2 - 453 éléments



Maillage M3 - 1360 éléments



Maillage M4 - 5268 éléments

Figure 7. Maillages déterminés et utilisés au cours du calcul itératif

Le maillage M2 a été construit à partir des contributions locales à I_{esp} . Les solutions approchées obtenues à la fin de la première itération ont été projetées sur ce nouveau maillage, puis un contrôle d'erreur a été effectué : $\varepsilon = 26\%$, $I_{esp} = 21\%$, $I_{tem} = 17\%$. Bien que les erreurs en temps et en espace n'aient pas été suffisamment équilibrées, une deuxième itération a été effectuée (règle R2). A la fin de cette itération le maillage a été adapté (maillage M3) et les différentes sources d'erreur sont devenues équitables ($\varepsilon = 21\%$, $I_{esp} = 10\%$, $I_{tem} = 12\%$). Le calcul a été poursuivi sans adaptation du maillage jusqu'à la huitième itération. Au cours de ces itérations, la prise en compte des non-linéarités s'est améliorée, ce qui s'est traduit par une décroissance de I_{tem} . Cette décroissance de I_{tem} s'est elle-même traduite par une diminution de l'erreur globale (voir équation [22]). A la fin de la huitième itération le contrôle d'erreur a fourni les résultats suivants : $\varepsilon = 16\%$, $I_{esp} = 10\%$, $I_{tem} = 8\%$. Puis le maillage a été adapté (maillage M4) pour diminuer la contribution des erreurs en espace ($I_{esp} = 5\%$). Enfin, la décroissance de I_{tem} a permis d'obtenir la qualité désirée à la fin de la quatorzième itération ($\varepsilon = 5,5\%$, $I_{esp} = 3\%$, $I_{tem} = 4\%$).

Nous constatons que la discrétisation fine (maillage M4) n'a été utilisée que pour les 6 dernières itérations. La stratégie adaptative permet d'ajuster l'effort numérique au cours de la simulation, au fur et à mesure que la description des non-linéarités s'améliore.

D'une façon générale, grâce à l'adaptation des approximations numériques, l'automatisation des calculs permet une diminution du temps-homme en préparation des simulations. Ici, nous obtenons en plus une réduction du coût des calculs nonlinéaires à qualité contrôlée.

Pour quantifier ce coût, nous étudions le temps CPU T_{sr} mis par la stratégie pour fournir la solution du problème de référence à $\varepsilon_0\%$ près. Une première comparaison peut être faite avec le temps CPU T_{ada} mis par une stratégie adaptative incrémentale à plusieurs étapes de résolution pour réaliser le même objectif [LAD 86] [GAL 96].

Mais cette comparaison est difficile à mettre en œuvre. Cependant une borne inférieure de T_{ada} est donnée par le temps CPU T_{inc} mis pour effectuer la résolution du problème non linéaire à l'aide d'une méthode incrémentale dont les paramètres ont été adaptés.

$$T_{inc} < T_{ada}$$

La différence entre ces deux temps CPU est associée à la phase d'expertise (sur $\Omega \times [0, T]$) nécessaire pour déterminer les approximations numériques adaptées. Par ailleurs, il a été montré que la méthode non incrémentale était moins coûteuse qu'une méthode incrémentale [TAL 1998]. Posons T_{LAT} le temps CPU mis pour effectuer la résolution du problème non linéaire à l'aide d'une méthode nonincrémentale dont les paramètres ont été adaptés.

$$T_{LAT} < T_{inc}$$

Ainsi en comparant T_{str} et T_{LAT} nous obtenons une sous-estimation des gains apportés par la stratégie proposée. Notons que les calculs associés aux temps T_{LAT} et T_{inc} sont assimilables à des calculs effectués par un utilisateur-expert qui saurait déterminer *a priori* les paramètres optimaux permettant de respecter l'objectif.

Pour évaluer la performance de la stratégie adaptative sur l'exemple précédent, nous utilisons le maillage M4 pour effectuer un calcul non incrémental sans adaptation en repartant d'une initialisation élastique. Nous obtenons ainsi un temps T_{LAT} (sur une station HP 700) 1,5 fois supérieur à T_{str} obtenu par la stratégie adaptative.

Pour estimer l'influence de la taille du problème sur les gains en temps de calcul, nous avons étudié une structure plus complexe que la précédente. La structure est représentée avec son chargement figure 5. Le calcul est effectué pour les données suivantes : module d'Young $E = 200\ 000$ MPa, coefficient de poisson $\nu = 0,3$, $R_0 = 150$ MPa, $Q = 80$ MPa, $R_S = 53$ MPa, $c = 24\ 800$ MPa, $a = 300$, $m = 2$, $k = 4 \cdot 10^{-6}$ MPa $^{-2}$ s $^{-1}$, $F_f(t) = F t / T$, $F = 25$ MPa. L'intervalle $[0, T]$ est découpé en 4 pas de temps.

La qualité désirée est obtenue en 14 itérations avec une erreur globale ϵ égale à 5,3 %. L'évolution de ϵ et de l'indicateur I_{esp} au cours de la résolution itérative est donnée figure 6. Les maillages utilisés sont notés M1, M2, M3 et M4 (figure 7). Le calcul s'est déroulé de façon similaire au calcul adaptatif précédent. Seul le maillage M1 a été choisi, les trois autres ont été construits par l'algorithme adaptatif à la fin de la première, de la deuxième et de la huitième itération. Sur ce plus gros problème, nous obtenons des gains en temps de calcul plus importants, T_{LAT} est 2 fois supérieur à T_{str} .

7. Conclusion

En ajustant l'effort numérique en cours de résolution à l'aide d'un contrôle d'erreur, la stratégie adaptative proposée permet de réduire fortement le coût des calculs non linéaires à qualité imposée. De plus, cette procédure étant entièrement automatisée, elle réduit de façon considérable les coûts en temps-homme.

8. Annexe : expressions de $M(t)$ et de $N(t)$

En posant : $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{\sigma} & H_{\sigma Y} \\ H_{\sigma Y}^T & H_Y \end{bmatrix}$, on a : $\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} M_{\sigma} & M_{\sigma Y} \\ M_{\sigma Y}^T & M_Y \end{bmatrix}$

avec :

$$M_{\sigma, ij} = \int_{\Omega} Tr[B_i H_{\sigma} B_j] d\Omega; \quad M_{Y, ij} = \int_{\Omega} Tr[C_i H_Y C_j] d\Omega; \quad M_{\sigma Y, ij} = \int_{\Omega} Tr[B_i H_Y C_j] d\Omega$$

$$\text{et : } \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} N_{\sigma} \\ N_{\gamma} \end{bmatrix},$$

avec :

$$N_{\sigma, i} = \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\dot{\hat{x}}_n^p - \hat{x}_n^p) \mathbb{B}_i \right] d\Omega ; \quad N_{\gamma, i} = - \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\dot{\hat{X}}_n - \hat{X}_n) \circ \mathbb{C}_i \right] d\Omega$$

9. Bibliographie

- [BAR 97] BARTHOD F.J., SCHMIDT M., STEIN E., « Error estimation mesh adaptivity for elastoplastic deformations », *Complas V, Computational Plasticity : Fundamentals and applications*, Owen - Oñate - Hinton Editors, CIMNE, Barcelona, 597-602, 1997.
- [GAL 96] GALLIMARD L., LADEVEZE P., PELLE J.P., « Error estimation and adaptivity in elastoplasticity », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.* 39, 189-217, 1996.
- [GAL 97] GALLIMARD L., LADEVEZE P., PELLE J.P., « Error estimation and time-space parameters optimization for FEM non linear computations », *Computer and structures*, vol. 64, 145-156, 1997.
- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN Q.S., « Sur les matériaux standards généralisés », *Journal de Mécanique* 14, 39-63, 1975.
- [LAD 86] LADEVEZE P., COFFIGNAL G., PELLE J.P., « Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis », Chap. 11, in *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computation*, 181-203, Editors Babuska I., Zienkiewicz O.C., Gago J.P., Olivera A.E., J. Wiley, London, 1986.
- [LAD 91] LADEVEZE P., PELLE J.P., ROUGEOT P., « Error estimation and mesh optimization for classical finite elements », *Engrg. Computation* 8, 69-80, 1991.
- [LAD 96] LADEVEZE P., « Mécanique non linéaire des structures. Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales », *Hermès*, 1996
- [LES 89] LESNE P. M., SAVALLE S., « An efficient cycles jump technique for viscoplastic structure calculations involving large number of cycles », *2nd Int. Conf. on Computational Plasticity : Models Software and Applications*, Owen - Oñate - Hinton Editors, CIMNE, Barcelona, 591-602, 1989.
- [MOE 96] MOËS N., Une méthode de mesure d'erreur a posteriori pour les modèles de matériaux décrits par variables internes, Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [PER 94] PERIC D., YU J., OWEN D. R. J., « On error estimates and adaptivity in elasto-plastic solids : applications to the numerical simulation of strain localisation in classical and Cosserat continua », *Int. Jour. for Num. Meth. in Engrg.* 37, 1351-1379, 1994.
- [RYC 97] RYCKELYNCK D., Sur l'analyse des structures viscoplastiques : stratégie adaptative et contrôle de qualité, Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1997.
- [TAL 9 8] TALBOT P., Une approche à grand incrément de temps des problèmes thermomécaniques, Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, à paraître.