

---

# Une approche intégrée pour le calcul adaptatif par éléments finis

Denis Aubry — Damien Lucas — Bing Tie

LMSSM (URA 850, CNRS)

Ecole Centrale Paris, Grande Voie des Vignes

F-92295 Châtenay-Malabry cedex

{aubry, lucas, tie}@mss.ecp.fr

---

*RÉSUMÉ.* Cet article présente une approche des éléments finis adaptatifs qui vise à intégrer dans un seul logiciel l'estimation d'erreurs a posteriori, l'adaptation de maillage et les opérateurs de transfert et de résolution multi-maillages. Une méthode des résidus est proposée pour l'estimation d'erreur a posteriori, dont le principe s'avère être suffisamment général en vue de l'application aux divers problèmes mécaniques. Deux techniques d'adaptation de maillage sont considérées : la h-méthode développée dans le cadre des éléments hiérarchiques ; la r-méthode qui s'appuie sur un maillage de Delaunay intégré et couplé à une description CAO exacte. Plusieurs exemples numériques traitant divers problèmes mécaniques sont présentés et soulignent l'efficacité et l'intérêt de notre approche.

*ABSTRACT.* This paper presents an adaptive finite element approach, which aims to integrate in a single software the a posteriori error estimates, the mesh adaptation and the multi-mesh transfer operators and solvers. The proposed residual method for the error estimates proves to be sufficiently general to treat a large class of mechanical problems. Two techniques of mesh adaptation are considered: the h method which takes advantage of the h hierarchical FEs; the remeshing technique coupled with an exact CAD description of structures. Several numerical examples are presented and emphasise the efficiency of our approach.

*MOTS-CLÉS :* éléments finis adaptatifs, méthodes des résidus, estimation d'erreur a posteriori, éléments finis h-hiérarchiques, remaillage.

*KEY WORDS:* adaptive finite elements, residual methods, a posteriori error estimates, h-hierarchical finite elements, remeshing.

---

## 1. Introduction

Le premier souci d'intégrer dans un seul logiciel l'estimation d'erreur *a posteriori*, l'adaptation de maillage et les opérateurs de transfert et de résolution multi-maillages, est d'automatiser le calcul des structures par éléments finis. Cette automatisation permet aux ingénieurs de se libérer du souci de maillage, ce qui est plus que nécessaire lorsqu'ils ont à résoudre en un temps limité une grande quantité de problèmes réels de grande taille, d'autant plus que ces derniers ont tendance à devenir de plus en plus complexes incluant les non-linéarités de divers types ou/et la dépendance en temps.

Le deuxième souci est de ne pas décomposer artificiellement une méthode adaptative en deux parties complètement indépendantes : le mailleur et le solveur. Les coupler intelligemment dans une seule approche globale permet de développer conjointement des stratégies d'adaptation judicieuses et des nouveaux solveurs robustes, qui sont mieux adaptés les uns aux autres. Il est clair qu'un tel couplage est essentiel à la réussite des méthodes adaptatives.

L'approche intégrée adaptative présentée dans cet article était développée dans le but d'apporter quelques réponses à ces soucis. Son implantation a conduit au développement des outils numériques d'EFs adaptatifs qui fonctionnent comme une « boîte noire » : à partir d'un maillage EF initial, les résultats numériques avec une qualité contrôlée sont obtenus sur des maillages adaptatifs quasi optimaux, et ceci de manière complètement automatique. Le couplage entre l'une des techniques d'adaptation de maillage ( $h$  subdivision hiérarchique) et les solveurs itératifs classiques a permis le développement des solveurs hiérarchiques multi-maillages. Ces solveurs possèdent une très bonne performance numérique puisqu'ils récupèrent certains des avantages des méthodes multigrilles en ce qui concerne la propriété de convergence.

La méthode pour l'estimation d'erreur *a posteriori* proposée dans cet article est basée sur l'analyse résiduelle locale des équations fortes de conservation mécanique. Les résidus locaux qui définissent parfaitement l'*erreur de discrétisation*, sont obtenus en injectant les solutions EF dans les équations fortes de conservation ; puis, les estimateurs d'erreur locale sont calculés en fonction de ces résidus. L'avantage de cette méthode est que son principe est indépendant des propriétés matérielles et géométriques des problèmes mécaniques, et donc suffisamment général pour être appliqué aux divers problèmes.

Deux techniques d'adaptation de maillage sont considérées ici : par la première technique, les maillages sont raffinés par subdivision successive des éléments et les espaces d'interpolation EF sont enrichis par l'ajout progressif des fonctions de base hiérarchiques en version  $h$  [TIE 93] ; par la deuxième technique, les structures étudiées sont remaillées indépendamment des anciens maillages, cette technique de remaillage, étant couplée à une description CAO exacte des structures, respecte la géométrie exacte de celles-ci [LUC96].

L'article est organisé de la manière suivante : la section 2 présente la méthode résiduelle pour l'estimation d'erreur *a posteriori* et son application aux divers problèmes mécaniques (élasto-plastiques, couplés hydrauliques-mécaniques et des coques) ; la section 3 présente le schéma numérique global de notre approche adaptative, ainsi qu'un bref aperçu des avantages et des inconvénients des deux techniques d'adaptation de maillage ; la section 4, suivie d'une conclusion (la section 5), est consacrée aux exemples numériques. On remarquera, d'une part, l'efficacité des éléments finis adaptatifs et hiérarchiques pour capter des phénomènes locaux fortement non linéaires et, d'autre part, l'intérêt de coupler l'adaptation de maillage avec une description CAO exacte, en vue de pouvoir suivre fidèlement la géométrie des pièces mécaniques, telles que les coques et plaques avec des bords courbes.

## 2. Méthode des résidus pour l'estimation d'erreur *a posteriori*

L'estimateur d'erreur présenté ici a été initialement proposé dans le cadre de l'élasticité linéaire, puis généralisé aux problèmes élastoplastiques, couplé mécanique-hydrauliques et des coques. En élasticité linéaire, il a été démontré que cet estimateur donne des bornes supérieure et inférieure de l'erreur sur l'énergie élastique [TIE 93]. Il a l'avantage d'un très faible coût numérique et sa fiabilité est démontrée théoriquement et numériquement. Nous ne donnons ici qu'une brève présentation de cet estimateur et nous nous référons à [TIE 93, TIE 96b] pour plus de détails.

### 2.1. Élasticité linéaire

Considérons une structure  $\Omega$  soumise à des sollicitations  $\mathbf{f}$  et des conditions aux limites appropriées. Nous définissons un opérateur d'équilibre local pour le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{L}^{\text{eq}}(\mathbf{u}; \mathbf{f}) = \text{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}$$

A l'équilibre, on a les équations fortes suivantes :

$$\mathbf{L}^{\text{eq}}(\mathbf{u}; \mathbf{f}) = \mathbf{0} \quad [1]$$

et sa formulation faible s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{W}(\Omega) \text{ tel que, } \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}(\Omega) \\ (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_{\Omega} = \mathbf{F}(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad [2]$$

avec :

$\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  : tenseur des contraintes et des déformations d'ordre 2

$W(\Omega)$  : sous-espace de Sobolev contenant la solution exacte  $\mathbf{u}$

$(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  : intégration sur  $\Omega$  du produit scalaire de deux champs vectoriels ou tensoriels

$F$  : opérateur linéaire des chargements externes subis par  $\Omega$

### 2.1.1. Définition des résidus locaux

Comme  $\mathbf{u}_H$  la solution EF ne vérifie [2] que dans un sous-espace  $W_H(\Omega)$  de  $W(\Omega)$ , en l'injectant dans [1], nous obtenons dans chaque élément  $E$  du maillage  $M_H$  un résidu local interne  $\mathbf{r}_{uH} = \mathbf{L}^{eq}(\mathbf{u}_H; \mathbf{f})$  et des résidus locaux de frontières  $\mathbf{t}_{uH} = [\sigma_H \cdot \mathbf{v}]$  venant des discontinuités de  $\sigma_H = \sigma(\mathbf{u}_H)$  d'un élément à l'autre.  $\mathbf{v}$  désigne le vecteur normal unitaire sortant aux arêtes des éléments et  $[\cdot]$  représente le saut de part et d'autre d'une surface d'un champ discontinu défini sur  $\Omega$ . Sur  $\Gamma_{\sigma}$  la partie de la frontière  $\partial\Omega$  où les forces externes surfaciques  $\mathbf{g}$  sont imposées, nous récupérerons également des résidus locaux qui sont :  $\mathbf{t}_{uH} = -\mathbf{g} + \sigma_H \cdot \mathbf{n}$ .

Grâce à la linéarité du problème, l'erreur de discrétisation  $\mathbf{e}_H = \mathbf{u} - \mathbf{u}_H$  est la solution du problème résiduel suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{e}_H \in W(\Omega) \text{ tel que } \forall \mathbf{w} \in W(\Omega) \\ (\sigma(\mathbf{e}_H), \varepsilon(\mathbf{w}))_{\Omega} = R^u(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad [3]$$

qui est le même problème que le problème d'origine [2] mais avec un second membre dû aux forces résiduelles :

$$R^u(\mathbf{w}) = \sum_E (\mathbf{w}, \mathbf{r}_{uH})_E - \sum_{\gamma} \langle \mathbf{w}, \mathbf{t}_{uH} \rangle_{\gamma}$$

avec :

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma}$  : intégration sur  $\gamma$  du produit scalaire de deux champs vectoriels

$\sum_E$  et  $\sum_{\gamma}$  : sommations prises sur tous les éléments  $E$  et sur toutes les interfaces d'éléments  $\gamma$

On montre facilement par intégration par parties que :

$$R^u(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w}) - (\sigma(\mathbf{u}_H), \varepsilon(\mathbf{w}))_{\Omega}$$

donc, le calcul du second membre du problème résiduel [3] ne fait pas intervenir les termes non classiques à un code EF standard, tels que  $\text{Div}(\sigma_H)$  ou  $[\sigma_H \cdot \mathbf{n}]$ .

2.1.2. Estimation d'erreur dans un espace enrichi hiérarchiquement

L'espace  $W_H(\Omega)$  dans lequel la solution  $u_H$  est calculée, ne peut rien apporter pour l'analyse des résidus locaux, puisque  $R^u(w_H) = 0, \forall w_H \in W_H(\Omega)$ . Il faut donc avoir recours à un espace EF plus riche. Un choix naturel consiste à calculer une solution approchée de  $e_H$  dans l'espace  $W_{h^*}(\Omega)$ , défini sur le maillage  $M_{h^*}$  uniformément raffiné en subdivisant par bisection tous les éléments de  $M_H$ . Cette solution approchée est en fait  $e_{Hh} = u_h - u_H$ , dite l'erreur de transition entre deux maillages successifs  $M_H$  et  $M_{h^*}$ .

Pour accepter  $e_{Hh}$  comme une bonne estimation de  $e_H$  (modulo une constante multiplicative indépendante de  $H$ ) on utilise l'orthogonalité des erreurs et leur taux de convergence donné par la théorie de l'estimation d'erreur a priori :

$$\|e_H\|_{\Omega}^2 = \|e_{Hh}\|_{\Omega}^2 + \|e_h\|_{\Omega}^2 \tag{4}$$

où  $\|\cdot\|_{\Omega}$  est la norme liée à l'énergie élastique. L'équation [4] nous permet de donner une estimation de cette constante multiplicative [TIE 96b].

2.1.3. Estimateurs locaux par la résolution des problèmes résiduels locaux

Dans la logique d'une stratégie du raffinement local de maillage, il faut éviter la construction réelle du maillage  $M_{h^*}$ . Dans ce but, le problème résiduel global est éclaté en problèmes résiduels locaux, dont la résolution ne nécessite pas la construction de  $M_{h^*}$ . Pour cela, le problème [3] défini dans  $W_{h^*}(\Omega)$  est d'abord projeté dans le sous-espace hiérarchique complémentaire  $W_{h^*}(\Omega) \setminus W_H(\Omega)$ . Ceci implique que seuls les nœuds ajoutés au maillage  $M_{h^*}$  pour raffiner  $M_H$  sont concernés par l'analyse d'erreur. Enfin, le problème projeté est encore simplifié en découplant ces nœuds. On ne résout alors que des problèmes locaux définis sur des groupes d'éléments autour de chacun de ces nœuds (patches). Chaque problème résiduel local est du type Dirichlet et de petite taille. Par exemple, pour l'élément triangulaire à trois nœuds en déformations planes, il s'agit d'un problème avec deux degrés de liberté. Les mesures locales avec la norme d'énergie  $\|\cdot\|$  des solutions des problèmes locaux donnent des estimateurs locaux d'erreur, dont on montre que leur somme  $\Sigma$  borne l'erreur de discrétisation :

$$C_1 \Sigma \|e_H\|_{\Omega} \leq C_2 \Sigma \tag{5}$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  deux constantes indépendantes du pas de maillage  $H$ .

Il est important d'indiquer que, dans la définition de l'estimateur d'erreur, le maillage  $M_{h^*}$  uniformément raffiné de  $M_H$  et les EFs hiérarchiques ne sont utilisés que pour définir les problèmes résiduels locaux. Par conséquent,  $M_{h^*}$  n'est jamais réellement construit lors d'un calcul adaptatif et un logiciel qui n'utilise pas les bases hiérarchiques, peut utiliser cet estimateur d'erreur.

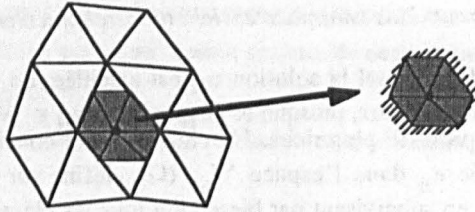


Figure 1. Exemple de problème local pour l'estimation d'erreur

La généralisation de cet estimateur aux problèmes élastoplastiques est assez directe et simple. Les résidus locaux sont définis de la même manière, mais on utilise la matrice de rigidité d'élasticité linéaire auxiliaire pour définir les problèmes résiduels locaux. Les indicateurs locaux d'erreur des *patches* ainsi obtenus peuvent être considérés comme une mesure linéarisée du travail des résidus locaux sur l'espace EF enrichi. On ne dispose plus toutefois de véritable résultat mathématique permettant de lier ces indicateurs à l'erreur exacte. Cependant, l'expérience montre qu'ils continuent à fournir des informations judicieuses pour le raffinement local du maillage. Ainsi, les phénomènes non linéaires localisés, tels que les zones de localisations des déformations, sont systématiquement captés par ces indicateurs et en conséquence par le raffinement de maillage [TIE 93, TIE 95].

## 2.2. Problème couplé hydraulique-mécanique

A l'origine, le problème d'équilibre hydraulique-mécanique dans un milieu poreux élastique  $\Omega$  saturé d'un fluide, dépend du temps. En effet, l'équation de la conservation de masse contient des termes de dérivation en temps ( $\partial_t \mathbf{u}$ ,  $\partial_t p$ ). Ce problème est traité classiquement par une discrétisation en différences finies en temps et en éléments finis en espace. Dans ce travail, le schéma d'Euler rétrograde est utilisé pour la discrétisation en temps. On obtient ainsi un problème incrémental, qui est défini par deux opérateurs couplés bilinéaires et est à traiter par la méthode d'EF :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\text{eq}}(\mathbf{u}, p; \mathbf{f}) &= \mathbf{0} && \text{(équilibre mécanique)} \\ \mathbf{L}^{\text{ms}}(\mathbf{u}, p; \mathbf{g}) &= \mathbf{0} && \text{(conservation de masse)} \end{aligned} \quad [6]$$

avec :

$$\mathbf{L}^{\text{eq}}(\mathbf{u}, p, \mathbf{f}) = \text{Div} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) - \text{grad} p + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{L}^{\text{ms}}(\mathbf{u}, p, \mathbf{g}) = \text{div} \mathbf{u} - \Delta t \text{div}(\mathbf{k} \cdot \text{grad} p) + \text{cp} + \mathbf{g}$$

et :

$\mathbf{k}$  : tenseur d'ordre 2 de perméabilité du milieu poreux

- c : compressibilité du fluide
- p : pression interstitielle du fluide
- $\sigma'$  : contraintes effectives
- g : apport de masse généralisée qui peut dépendre des solutions de l'étape de temps précédente
- $\Delta t$  : pas de discrétisation en temps

Ici, nous nous limitons à étudier les erreurs dues à la discrétisation spatiale EF. Le formalisme du paragraphe 2.1 se généralise [TIE 97a]. Comme en élasticité linéaire, le problème résiduel global est projeté dans un espace hiérarchiquement enrichi, puis éclaté en problèmes locaux couplés dont les solutions nous donnent les estimateurs locaux d'erreurs. La norme d'énergie utilisée pour mesurer l'erreur est définie comme suit :

$$\|(\mathbf{u}, p)\|_{\Omega}^2 = (\sigma'(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_{\Omega} + \Delta t (\mathbb{k} \cdot \mathbf{grad} p, \mathbf{grad} p)_{\Omega} + (c p, p)_{\Omega}$$

Grâce aux résidus locaux qui tiennent compte à la fois des déséquilibres mécaniques et des défauts de conservation de masse, les effets de couplage sont présents de manière simple et complète dans les estimateurs d'erreur.

Il est à noter que les deux opérateurs couplés définis dans [6] deviennent non linéaires dans un milieu saturé d'un mélange air-fluide, puisque le degré de saturation du fluide, une fonction de la pression  $p$ , intervient dans ces opérateurs. On peut toutefois, comme dans le cas élastoplastique, généraliser la méthode des résidus décrite auparavant [TIE 97b].

### 2.3. Estimateur pour les coques

Pour les coques de Mindlin, la cinématique est représentée par  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ , les champs de déplacement et de rotation définis sur la surface moyenne. Les équations fortes sont données par trois opérateurs bilinéaires (on a omis les charges externes) :

$$\mathbf{L}^m(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \text{Div}_T \mathbf{N}(\mathbf{u}_0) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = 0 \quad (\text{équilibre membranaire})$$

$$\mathbf{L}^s(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \mathbf{N}(\mathbf{u}_0) : \mathbf{b} - \text{div}_T \mathbf{Q}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = 0 \quad (\text{équilibre tranchant})$$

$$\mathbf{L}^b(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \text{Div}_T \mathbf{M}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) - \mathbf{Q}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = 0 \quad (\text{équilibre de flexion}) \quad [7]$$

avec :

$\text{div}_T$  et  $\text{Div}_T$  : divergence surfacique de la coque pour un vecteur et un tenseur

$\mathbf{b}$  : tenseur de courbure

Les résidus locaux internes  $\mathbf{r}_{uH} = (\mathbf{r}_{mH}, \mathbf{r}_{sH}, \mathbf{r}_{bH})$  sont définis en injectant les solutions EF dans les équations [7] et les résidus de frontières  $\mathbf{t}_{uH} = (\mathbf{t}_{msH}, \mathbf{t}_{bH}) = ((\mathbf{N}_H \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}), [\mathbf{M}_H \cdot \mathbf{v}])$  viennent des discontinuités de  $(\mathbf{N}_H, \mathbf{Q}_H, \mathbf{M}_H)$  entre les éléments.  $\mathbf{v}$  est le vecteur unitaire normal sortant aux arêtes et tangent à la surface et  $\mathbf{n}$  est vecteur unitaire normal à la surface de la coque.

Les problèmes résiduels locaux peuvent ainsi être définis et donnent les indicateurs d'erreur locale. Tout comme précédemment, le cadre linéaire permet d'utiliser le formalisme du paragraphe 2.1.

### 3. Procédure adaptative globale

La procédure adaptative globale mise en œuvre peut être décrite comme trois boucles emboîtées : l'incrémentation en temps, les itérations de maillage et les itérations de la résolution du système non linéaire. Pour chaque étape de temps, la procédure d'adaptation de maillage itère sur plusieurs niveaux de maillages jusqu'à l'obtention de la précision exigée. Sur chaque niveau de maillage adaptatif, le solveur itère sur le système d'équations non linéaires jusqu'à la convergence. Ici, la non-linéarité peut être matérielle (élastoplasticité), ou couplée (saturation partielle du milieu poreux), ou encore géométrique (coques).

#### 3.1. Indicateurs locaux de raffinement

Les indicateurs locaux de raffinement sont définis en fonction des indicateurs d'erreur locale en respectant le principe d'équidistribution d'erreurs par élément, qui permet de calculer un seuil d'erreur au-dessus duquel le raffinement local doit être fait [TIE 96b]. Ce principe assure l'obtention d'un maillage quasi optimal pour une précision exigée. Utilisant les indicateurs locaux de raffinement, soit on subdivise les éléments par bissection (à chaque itération de raffinement, les éléments voient leur taille inchangée ou divisée par deux), soit on construit une carte de tailles (par nœuds) et on l'utilise dans un mailleur de Delaunay intégré en vue de générer un nouveau maillage respectant au mieux les tailles locales souhaitées.

#### 3.2. Avantages des éléments finis hiérarchiques

L'introduction des bases hiérarchiques a d'abord permis de définir l'estimateur d'erreur qui a un faible coût numérique grâce à la décomposition hiérarchique des espaces EF raffinés [TIE 96b]. Elle offre également une grande souplesse pour traiter les nœuds irréguliers. La contribution la plus importante des EFs hiérarchiques est la possibilité de développer des solveurs multi-maillages hiérarchiques qui peuvent être considérés comme une variante de la méthode multigrille. Ces solveurs gardent donc une bonne convergence malgré le raffinement très localisé et très poussé du maillage.



En revanche, l'utilisation des éléments finis hiérarchiques dans sa version actuelle présentée ici, oblige la conservation du maillage initial pendant le raffinement de maillage. Il est, en conséquence, difficile de suivre la vraie géométrie des pièces mécaniques si celle-ci comporte des parties courbes. Des nouvelles stratégies restent donc à développer afin de résoudre ce problème.

### 3.3. Remaillage couplé à une description CAO exacte des structures

La technique de remaillage rejette complètement le maillage initial et offre donc une possibilité pour que l'adaptation de maillage suive de manière exacte la géométrie des pièces mécaniques. Pour ce faire, le remaillage doit se référer toujours à la description CAO exacte des pièces et ceci exige que l'intégration de la description CAO dans un code EF soit plus poussée que celle qui existe classiquement.

Dans notre implémentation informatique utilisant un langage orienté objet, le problème mécanique (les types de ddls, leur direction, les conditions aux limites, les charges externes, etc.) est strictement défini sur la géométrie, indépendamment de tout maillage. C'est le rôle de trois objets « gestionnaires » de générer à la demande ddls, blocages et charges sur n'importe quel maillage qui s'appuie sur ces géométries. Pour permettre au mailleur de Delaunay de remailler de manière géométriquement exacte, une hiérarchie simple de classes d'entités géométriques a été développée (point, lignes paramétrées, surfaces paramétrées).

Une difficulté liée à la technique de remaillage, surtout dans le cas des problèmes non linéaires ou non stationnaires, réside dans la définition d'un opérateur de transfert consistant pour les variables mécaniques entre les maillages qui sont complètement indépendants, alors que le cadre hiérarchique offre des choix tout à fait naturels pour un tel opérateur. Par ailleurs, la mise en œuvre des nouveaux solveurs itératifs multimaillages semble plus difficile et moins naturelle que celle effectuée dans le cadre du raffinement hiérarchique.

## 4. Exemples numériques

Cette section montre quelques applications de notre méthode. Le premier exemple présente la capture fine des bandes de localisation des déformations par le raffinement hiérarchique local de maillage. Alors qu'il est bien connu que le caractère multi-échelle du phénomène de la localisation le rend particulièrement sensible au maillage et par conséquent difficile à traiter par une méthode EF classique. Le deuxième exemple illustre le suivi de la géométrie exacte par la technique de remaillage. Le dernier exemple traite un problème de plaque.

**4.1. Simulation numérique de la localisation des déformations**

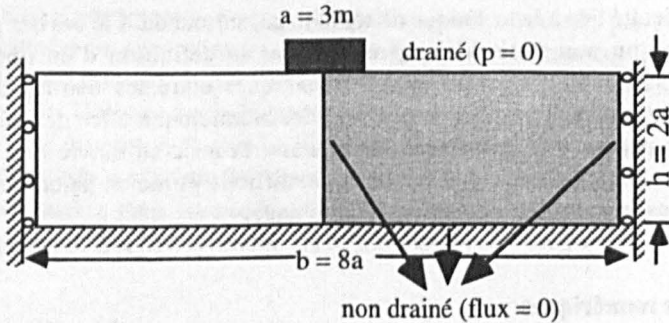
Cet exemple considère la formation des bandes de localisation dans un massif de sol élastoplastique saturé d'eau, soumis à un processus de consolidation par la charge d'une fondation rigide perméable (figure 2). Seule la moitié du massif est maillé. Le maillage initial est uniforme et comporte 244 éléments carrés à quatre nœuds. Le poinçonnement de la fondation rigide est simulé par un déplacement verticalement imposé. Le pas de chargement  $\Delta d$  est de 2,5 mm par pas de temps qui est égal à 0,165 ms, ce qui correspond à un chargement assez rapide vis-à-vis de la perméabilité du milieu poreux. La loi de comportement non associée de Drucker-Prager est utilisée pour la modélisation. Les propriétés hydrauliques et élastoplastiques du massif sont les suivantes :

---

module d'Young $E = 210,0 \text{ Mpa}$	coefficient de Poisson $\nu = 0,3$
cohésion $c = 0,07 \text{ MPa}$	angle de frottement $\phi = 20^\circ$
angle de dilatance $\psi = 0^\circ$	perméabilité $k = 0,01 \text{ m/s}$
compressibilité de l'eau $Q = 2140 \text{ Mpa}$	$(K = k/\rho_f g = 10^{-6})$

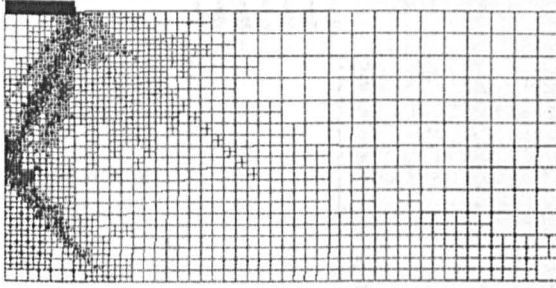
---

**Tableau 1. Propriétés hydrauliques et élastoplastiques du massif**



**Figure 2. Modèle de massif poreux saturé chargé par une fondation rigide**

Les résultats adaptatifs obtenus par le  $h$  raffinement hiérarchique sont présentés sur les figures 3 et 4 : le maillage raffiné, les surfaces d'isovaleurs des incréments de distorsion dont la concentration caractérise les bandes de localisation. Ces résultats mettent en évidence l'intérêt des EFs adaptatifs pour traiter ce type de phénomènes physiques localisés.



**Figure 3.** Raffinement local hiérarchique de maillage dans un massif poreux saturé de l'eau



**Figure 4.** Formation de bandes de localisation dans un massif poreux saturé de l'eau

#### 4.2. Remaillage sur la géométrie courbe

Le suivi de la géométrie exacte est illustré par l'exemple d'une éprouvette mince sous traction simple possédant un amincissement de forme circulaire au centre. L'épaisseur passe de 4,25 à 1 dans le disque central. La forme de l'éprouvette est définie pour obtenir un champ de contraintes quasi uniforme au centre avec un déplacement uniforme imposé sur la partie haute. [FAR 97]. Un quart de l'éprouvette est modélisée en contraintes planes avec des éléments triangulaires linéaires.

La figure 6 montre le maillage initial et le maillage obtenu après 5 étapes de remaillage pour une précision demandée est de 5 %. Le remaillage suit bien les lignes géométriques exactes. Un effet de concentration de contraintes sur le bord de l'amincissement est observé ainsi que dans certaines zones de bordure. Au centre, les contraintes étant effectivement uniformes, le maillage est composé d'éléments de grande taille puisque les erreurs y sont faibles.

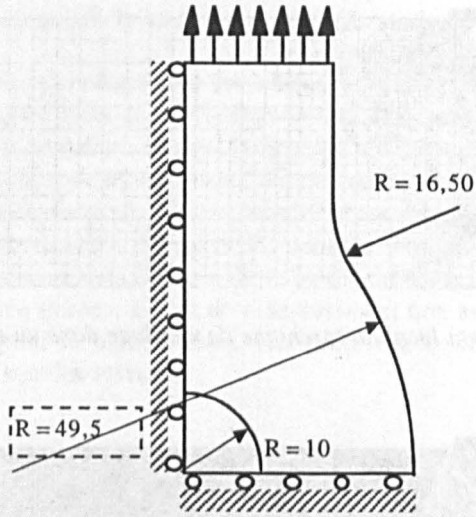


Figure 5. *Quart d'éprouvette en déplacement imposé*

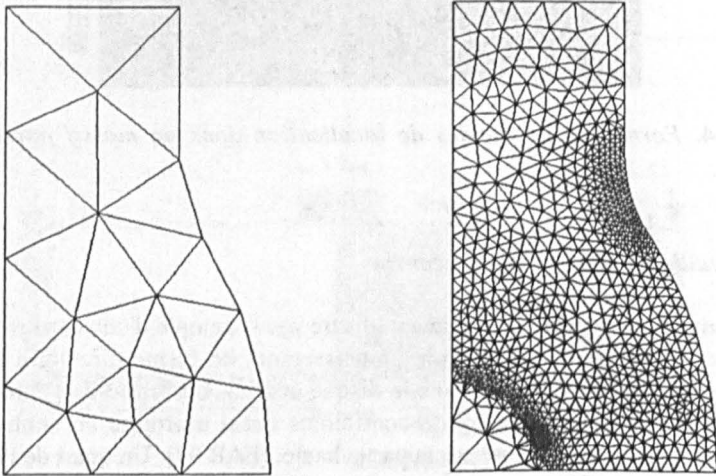
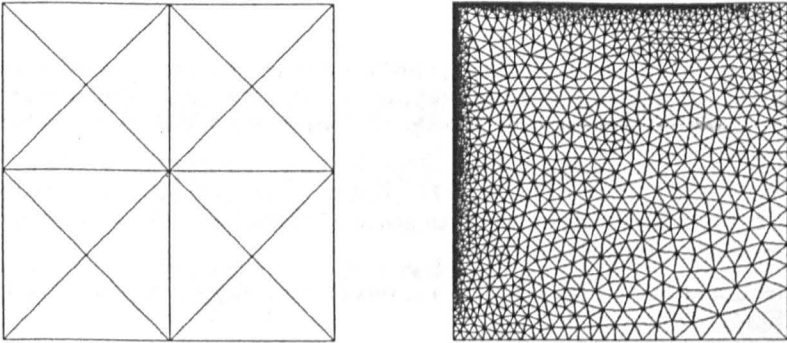


Figure 6. *Adaptation par remaillage en suivant le contour exact*

### 4.3. Remaillage d'une plaque

La figure 7 montre les résultats adaptatifs concernant un quart de plaque en appuis simples faibles ( $U_z = 0$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  libres) sur son bord et soumise à une pression verticale uniforme. Les éléments sont des éléments de plaque de Mindlin à trois nœuds avec un traitement ANS [BOI 93].



**Figure 7.** Maillage adapté sur un problème de plaque en appui simple

Cinq étapes de remaillage ont été nécessaires pour une précision demandée de 5 %. Le raffinement local de maillage a bien capté l'effet de la couche limite au niveau de l'appui.

## 5. Conclusion

Une méthode adaptative intégrée et automatique a été présentée, dont l'efficacité est illustrée par les exemples numériques.

La méthode résiduelle proposée pour l'estimation d'erreur *a posteriori* montre une grande souplesse d'application aux divers problèmes mécaniques. Le cadre linéaire lui étant nécessaire en vue de la construction d'un modèle mathématique rigoureux, des études théoriques restent à effectuer dans le cadre non linéaire ou non stationnaire. Néanmoins, on peut noter qu'en pratique, sa généralisation directe aux problèmes non linéaires et non stationnaires continue à bien fonctionner. En effet, les indicateurs d'erreur locale qu'elle fournit captent bien des phénomènes non linéaires très localisés dans la plupart des cas [AUB 97, TIE 97].

On a également mis en évidence les avantages et les inconvénients des deux techniques d'adaptation de maillage proposées, à savoir : le raffinement hiérarchique couplant les solveurs multimallages et la technique de remaillage respectant la description CAO exacte des structures. Il serait intéressant de développer des nouvelles stratégies, probablement hybrides, en vue de bénéficier des atouts de chacune des techniques et d'éviter leurs points faibles.

## 6. Bibliographie

- [AUB 97] AUBRY D., LUCAS D., TIE B., (1997), « Adaptive strategy for transient/coupled problems : Applications to thermoelasticity and elastodynamics », *Proceedings of the Workshop « On New Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics »*, Cachan, France.
- [BOIS 93] BOISSE P., DANIEL J.L., GELIN J.C., (1993), « Élément fini de coque à trois nœuds pour le calcul des structures minces en grandes déformations », *Revue Européenne des éléments finis*, Vol. 2, pp. 179-209.
- [LUC 96] LUCAS D., (1996), « OOFE C++, version 2.0 », Rapport de Recherche LMSS-STRUC Ecole Centrale Paris.
- [FAR 97] FARRE M.T., ANDRIEU E., PILVIN P., VANÇOND., (1997), « Développement de géométries d'éprouvette sollicitées en traction pour l'étude de critères de fissuration en corrosion sous contraintes biaxiales », *Acte renc. transfrontalière sur la méc. et phy. des matériaux biphasiques*, Barcelone, pp 149-155.
- [TIE 93] TIE B., (1993), *Éléments finis adaptatifs et hiérarchiques pour le calcul des structures en élastoplasticité, Localisation des déformations*, PhD Thesis (Ecole Centrale de Paris).
- [TIE 95] TIE B., AUBRY D., (1995), « Localisation des déformations dans un milieu poreux biphasique », Rapport de Contrat GdR Géomécanique des Roches Profondes (CNRS).
- [TIE 96a] TIE B., AUBRY D., (1996), « Hierarchical and adaptive FE strategy for non-linear and coupled structural computation », *Proceedings of Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, Paris.
- [TIE 96b] TIE B., AUBRY D., (1996), « Integrated approach to a posteriori error estimate, adaptive mesh refinement and hierarchical multi-mesh solver », soumis.
- [TIE 97a] TIE B., AUBRY D., (1997), « Coupled effects on the local mesh refinement and the shear band formation in fluid-saturated porous media », en préparation.
- [TIE 97b] TIE B., AUBRY D., (1997), « Hierarchical and adaptive mesh refinement for FE computations in geomechanics », *Proceedings of the IACMAG97*, Wuhan, China.
- [TIE 97c] TIE B., AUBRY D., (1997), « Adaptive mesh refinement for phase-change effects capturing in thermoelasticity », *Proceedings of the IUTAM97*, Bochum, Germany.