

---

# Etude du frottement pour des problèmes de contact en grandes déformations

Olivier Chertier — Patrick Chabrand

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique  
CNRS 31, Chemin Joseph-Aiguier  
F-13402 Marseille cedex 20

---

*RÉSUMÉ.* Dans le contexte de l'emboutissage, on présente la modélisation de problèmes de contact avec frottement entre plusieurs corps déformables dans un cadre cinématique non linéaire. Ces non-linéarités sont à la fois géométriques (grandes transformations, grands déplacements) et matérielles (plasticité). Le problème de contact est résolu par une méthode de programmation mathématique (la méthode de Lemke) dont l'extension au cas du contact entre solides déformables est donnée. Les modèles développés sont ensuite utilisés pour traiter deux problèmes de tribologie. Le premier concerne la caractérisation du frottement comme l'engrènement de deux micro-aspérités de surface. Dans le second, pour un essai classique de frottement plan/plan, on analyse l'influence d'un coefficient de frottement évolutif avec les conditions locales de contact.

*ABSTRACT.* In the context of metal forming, we present the modelling of multibody frictional contact problems in a non-linear kinematic frame. Non-linearities arise from the large displacements, the finite deformations and from material behaviour (plasticity). The contact problem is set as a linear complementarity problem solved by the Lemke method. The extension of the Lemke method to the multibody contact problem is given. These models are used to solve two tribological problems. The first one deals with the characterisation of friction as shearing off of two microscopic surfacic asperities. The second example concerns the modelling of a classical test. We analyse the influence of a variable friction coefficient depending on local contact conditions on the restraining forces.

*MOTS-CLÉS :* contact unilatéral, frottement de Coulomb, grandes déformations, grands déplacements, contact entre solides déformables, éléments finis, programmation mathématique, méthode de Lemke.

*KEY WORDS:* unilateral contact, Coulomb friction, large deformations, large displacements, multibody frictional contact, finite elements, mathematical programming, the Lemke method.

---

## 1. Introduction

En emboutissage, le frottement joue un rôle crucial car il conditionne la qualité du produit fini. Dans une loi de frottement de Coulomb à coefficient constant, le coefficient de frottement représente une valeur moyenne caractérisant différents paramètres tels que la rugosité de surface, le lubrifiant et les pressions de serrage. Les résultats présentés ici correspondent à une étape préliminaire d'une étude ayant pour but de prendre en compte, pour caractériser le frottement, l'état réel de surface (répartition et hauteur des aspérités, usure,...), la présence et la viscosité du lubrifiant ainsi que les vitesses de glissement relatives entre les outils et la tôle. L'objectif envisagé est d'introduire dans notre code de calcul un coefficient de frottement dynamique dont les variations seront calculées en fonction des évolutions de ces paramètres.

Le problème à résoudre doit être posé comme un problème de contact avec frottement entre solides déformables dans un cadre cinématique non linéaire (non linéarités géométriques et matérielles). Cette classe de problèmes de contact soulève des difficultés qu'on ne trouve pas dans le cas des contacts entre solides déformables et outils rigides ou dans le cas de petits glissements. Il s'agit, en particulier, des difficultés de définition des distances de contact, de détection des éventuelles zones d'auto-contact et de définition des vitesses de glissement.

La première partie de cet article contient la description de la modélisation géométrique du contact en utilisant les notions de coordonnées matérielles pour la description des lignes ou des surfaces de contact ce qui permet de réduire la dimension de l'espace de paramétrisation. Cette description est suivie par la formulation des problèmes en vitesse en respectant les notions d'objectivité incrémentale ([KLA 95], [LAU 93], [WRI 94]). Le contact avec frottement est résolu comme un problème de complémentarité linéaire et est résolu par une méthode de Lemke qui est une méthode remarquablement performante pour traiter des problèmes de contact avec frottement entre corps déformables et obstacles rigides ([CHA 97], [DUB 94]). Nous présentons ici l'extension de cette méthode au cas du contact entre plusieurs solides déformables dans le contexte d'une formulation de type maître/esclave. L'idée de base d'une telle approche, sur laquelle repose ensuite l'algorithme numérique de vérification des conditions de non-pénétration, a été introduite par [BAT 85] [CHA 86]. Un des solides antagonistes est désigné comme le solide esclave, l'autre devient le solide maître. L'analyse du contact se fait à partir des conditions de non-pénétration écrites sur les noeuds esclaves par rapport à des segments maîtres.

Nous illustrons les capacités des algorithmes développés à traiter des situations sévères de contact sur un exemple de l'écrasement d'un cylindre élastoplastique conduisant à des zones d'autocontact. Cet exemple et les résultats obtenus sont présentés dans le paragraphe 2.3.

Notre objectif lors du développement de modèles de contact avec frottement en grandes transformations était en particulier de développer un outil numérique permettant la simulation de problèmes relevant de la tribologie. Dans ce papier, deux exemples plutôt académiques de tels problèmes sont présentés.

Dans la première application, nous étudions, à partir de résultats expérimentaux obtenus sur un tribomètre plan/plan pour des éprouvettes d'aluminium, l'influence des évolutions du coefficient de frottement sur les forces de

retenues développées par des outils en acier. Nos objectifs au travers de cette étude phénoménologique, où les variations du coefficient de frottement en fonction des conditions locales de contact sont prises en compte, sont de discuter de l'influence de tels modèles sur les forces de retenues développées par les outils et de l'intérêt de leur implémentation dans des codes de calcul spécifiques pour l'emboutissage.

Dans la deuxième application, en l'absence de frottement, nous étudions les déformations élastoplastiques de deux aspérités face à face et se déplaçant dans deux directions opposées. C'est une tentative de caractérisation du frottement comme l'engrènement de micro-aspérités de surface.

## 2. Contact et frottement entre solides déformables

### 2.1. Généralités

Dans ce paragraphe, nous présentons les différentes variables nécessaires à la modélisation de l'action résultant du contact entre solides déformables.

Les équations constitutives du contact et du frottement doivent traduire à la fois la non-pénétration de tout point d'un solide dans un autre solide (ou dans lui-même) et aussi la possible nécessité de fournir une certaine contrainte de cisaillement pour provoquer le glissement relatif des deux corps. Les équations constitutives utilisées pour décrire ce comportement sont nombreuses et souvent liées à une approche phénoménologique du contact. La cinématique des grandes déformations ajoute une difficulté supplémentaire à la description de ce problème. En effet, les conditions de contact sont implicites (la surface de contact actuelle n'est pas connue *a priori*) et les équations constitutives du frottement sont liées à la vitesse relative des différents solides. Cette vitesse qui doit vérifier le principe d'objectivité, est donc construite à partir de dérivées temporelles objectives comme par exemple les dérivées convectives justifiant ainsi l'utilisation de bases convectives. La formulation des équations constitutives du contact et frottement en grandes déformations dans le cas 2D que nous présentons ici, est déduite de la formulation générale 3D présentée dans [CHE 97]. Nous allons aussi faire le choix de paramétrer les surfaces de contact ce qui nous permet de construire et de justifier l'approximation éléments finis des surfaces de contact.

On note  $\Omega^{(i)}$ , un solide déformable ( $i$ ) dans une configuration de référence  $C_0$ . L'indice  $i$  prend pour valeur  $s$  pour un solide esclave et  $m$  pour un solide maître. La représentation du solide ( $i$ ) dans une configuration déformée  $C_t$  est notée  $\omega^{(i)}$  à l'instant  $t$  (voir figure 1).

On introduit l'application  $\varphi^{(i)}$  entre  $C_0$  et  $C_t$  définie par :

$$\varphi_t^{(i)} : \Omega^{(i)} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad [1]$$

et on a

$$\omega^{(i)} = \varphi_t^{(i)}(\Omega^{(i)}) \quad [2]$$

Les zones de contact potentielles sont notées  $\Gamma_c^{(i)}$  dans  $C_0$  et  $\gamma_c^{(i)} = \varphi_t^{(i)}(\Gamma_c^{(i)})$  dans  $C_t$  pour les corps maître et esclave.

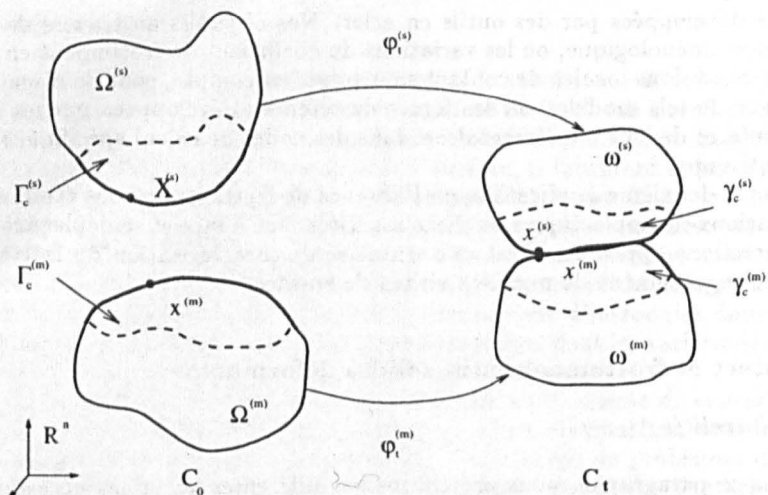


Figure 1. Définitions des configurations

La position d'une particule matérielle  $P$  d'une zone de contact d'un solide ( $i$ ) peut être repérée par une coordonnée curviligne  $\xi$ . On introduit une paramétrisation des surfaces de contact :

$$\phi^{(i)} : A^{(i)} \in \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma_c^{(i)} \quad [3]$$

telle que  $X^{(i)} = \phi_0^{(i)}(\xi)$  sur la zone  $\Gamma_c^{(i)}$  et  $x^{(i)} = \phi_t^{(i)}(\xi) = \varphi_t^{(i)}(\phi_0^{(i)}(\xi))$  sur  $\gamma_c^{(i)}$ . L'introduction de cette paramétrisation permet de réduire l'espace de définition des grandeurs cinématiques (voir figure 2) et de construire une base tangente locale naturelle. A un instant  $t$ , on choisit d'étudier la position relative d'une particule "esclave"  $x^{(s)}$  du solide ( $s$ ) par rapport à la surface "maître"  $\gamma_c^{(m)}$  du solide ( $m$ ) dans un espace à deux dimensions (voir figure 2). La projection de la particule  $x^{(s)}$  sur la surface maître  $\gamma_c^{(m)}$  est notée  $\bar{x}^{(m)} = x^{(m)}(\bar{\xi})$ . En ce point, le vecteur tangent naturel à la surface maître est défini par la dérivée du vecteur position  $\bar{x}^{(m)}$  par rapport à la coordonnée réduite  $\xi$  :

$$g_1^{(m)} = \frac{\partial \phi_t^{(m)}(\bar{\xi})}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{x}^{(m)}}{\partial \xi} \quad [4]$$

Le vecteur  $g_1^{(m)}$  est appelé vecteur covariant. On introduit un vecteur tangent contravariant  $g^{(m)1}$  tel que

$$g_1^{(m)} \cdot g^{(m)1} = 1 \quad [5]$$

La normale unitaire extérieure à la surface maître est alors déduite par l'expression :

$$n^{(m)} = \frac{(g_1^{(m)} \wedge e_z)}{\|g_1^{(m)} \wedge e_z\|} \quad [6]$$

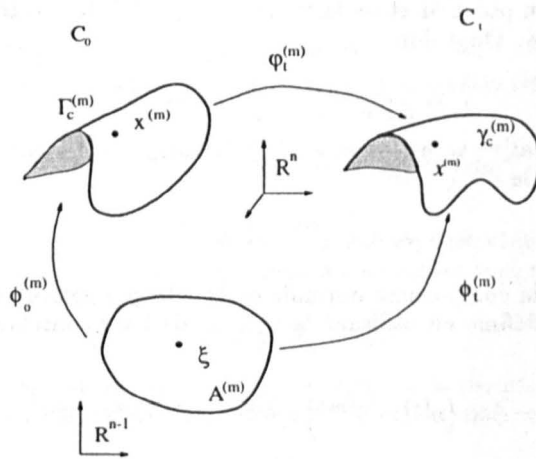


Figure 2. Paramétrisation de la zone de contact sur le solide (i)

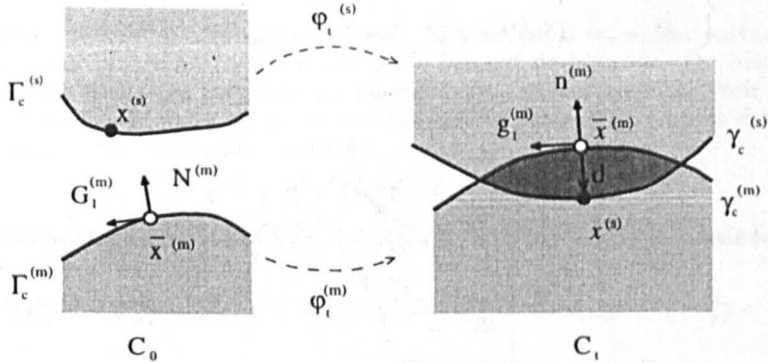


Figure 3. Définition du vecteur distance relative

Le vecteur distance relative (voir figure 3) entre la particule esclave et le solide maître s'écrit :

$$d(\bar{\xi}) = x^{(s)} - x^{(m)}(\bar{\xi}) = d_n n^{(m)} \quad [7]$$

La vitesse relative objective s'obtient en considérant la dérivée temporelle du vecteur distance relative :

$$\dot{d}(\bar{\xi}) = v^{(s)} - \bar{v}^{(m)} - \dot{\bar{\xi}} g_1^{(m)} = \dot{d}_n n^{(m)} + d_n \dot{n}^{(m)} \quad [8]$$

La vitesse relative  $v_r$  du point S esclave par rapport à la surface maître (voir figure 4) est l'expression de la vitesse absolue  $v^{(s)}$  du point S dans le repère global ( $\mathcal{R}$ ) moins la vitesse d'entraînement  $v_e$  du repère local ( $\mathcal{R}'$ ) dont l'origine est le point M de la surface maître  $\gamma_c^{(m)}$ . La vitesse  $v_e$  est la composition de la vitesse  $\bar{v}^{(m)}$  du point M et de la variation  $d_n \dot{n}^{(m)}$  des vecteurs de base par rapport au temps. On a donc :

$$v_r = v^{(s)} - \bar{v}^{(m)} - d_n \dot{n}^{(m)} \tag{9}$$

La vitesse relative  $v_r$  est aussi égale à la variation des coordonnées locales dans la base locale :

$$v_r = \dot{\xi} g_1^{(m)} + \dot{d}_n n^{(m)} \tag{10}$$

Ainsi  $\dot{d}_n$  est la composante normale de la vitesse relative et sa composante tangentielle est définie en utilisant le vecteur de base contravariant et la propriété [5] :

$$v_g = \dot{\xi} = (v^{(s)} - \bar{v}^{(m)}) \cdot g^{(m)1} - d_n \dot{n}^{(m)} \cdot g^{(m)1} \tag{11}$$

On utilise l'équivalence entre les vitesses et les déplacements virtuels  $\delta u$  pour écrire :

$$\begin{cases} \delta d_n = (\delta u^{(s)} - \delta \bar{u}^{(m)}) \cdot n^{(m)} \\ \delta \dot{\xi} = (\delta u^{(s)} - \delta \bar{u}^{(m)}) \cdot g^{(m)1} - d_n \dot{n}^{(m)} \cdot g^{(m)1} \end{cases} \tag{12}$$

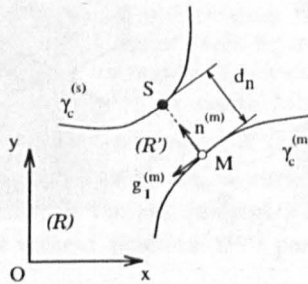


Figure 4. Définition de la vitesse relative

Dans un cadre quasi-statique, le principe des travaux virtuels sur la configuration actuelle s'écrit pour chaque solide  $G(\varphi^{(i)}, \delta u^{(i)}) = 0$ , quel que soit  $\delta u$  appartenant à l'espace des variations cinématiquement admissibles, avec :

$$\begin{aligned} G(\varphi^{(i)}, \delta u^{(i)}) &= \int_{\omega^{(i)}} \sigma^{(i)} : \nabla^s \delta u^{(i)} - f_v^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} dv - \int_{\gamma_f^{(i)}} f_s^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} da_f \\ &- \int_{\gamma_c^{(i)}} t^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} da_c \end{aligned} \tag{13}$$

Le vecteur contrainte de Cauchy du solide esclave  $\mathbf{t}^{(s)} = \sigma^{(s)} \mathbf{n}^{(s)}$  se décompose dans la base locale de la surface de contact du solide maître en :

$$\mathbf{t}^{(s)} = \mathbf{t}_n^{(s)} \mathbf{n}^{(m)} + \mathbf{t}_g^{(s)} \quad [14]$$

Avec le vecteur tangent  $\mathbf{t}_g^{(s)} = -\mathbf{t}_{g_1}^{(s)} \mathbf{g}^{(m)1}$ .

En utilisant le principe d'action et réaction :  $\mathbf{t}^{(s)} da_c^{(s)} = -\mathbf{t}^{(m)} da_c^{(m)}$ , la relation  $d_n \mathbf{t}_{g_1}^{(s)} = 0$  et les relations [12], on obtient une seule intégrale du terme des travaux virtuels sur la zone de contact du solide esclave :

$$G_c(\varphi^{(i)}, \delta u^{(i)}) = - \int_{\gamma_c^{(s)}} \left( \mathbf{t}_n^{(s)} \delta d_n - \mathbf{t}_{g_1}^{(s)} \delta \bar{\xi} \right) da_c^{(s)} \quad [15]$$

En posant  $\mathbf{t}_n^{(s)} = -\mathbf{t}_n^{(m)} = \mathbf{t}_n$ , la condition d'impenétrabilité de la matière et l'état de compression du matériau lorsqu'il y a contact sont mis sous la forme de relations de Kuhn-Tucker.

$$d_n \geq 0 \quad \mathbf{t}_n \geq 0 \quad d_n \mathbf{t}_n = 0 \quad [16]$$

La loi de frottement de Coulomb, par analogie à la théorie de la plasticité, peut s'écrire sous la forme de relations de complémentarité :

$$\psi = \|\mathbf{t}_g\| - \mu \mathbf{t}_n \leq 0 ; \quad v_g + \lambda \frac{\mathbf{t}_g \cdot \mathbf{g}^{(m)1}}{\|\mathbf{t}_g\|} = 0 ; \quad \lambda \geq 0 ; \quad \psi \lambda = 0 \quad [17]$$

où  $\mu$  représente le coefficient de frottement de Coulomb et  $\mathbf{t}_g = -\mathbf{t}_g^{(m)} = \mathbf{t}_g^{(s)}$ .

Pour un incrément de temps  $k$  donné, le principe des travaux virtuels est linéarisé pour être résolu par un processus itératif de Newton. On discrétise par éléments finis. On introduit les éléments de contact linéaires (voir figure 5) où la position du point  $\bar{\mathbf{x}}(m)$  est une fonction linéaire des positions des deux nœuds extrémités du segment maître :

$$\bar{\mathbf{x}}^m = (1 - \bar{\xi}) \mathbf{x}^m + \bar{\xi} \mathbf{x}^{m-1} \quad [18]$$

Après assemblage, on obtient à chaque itération d'équilibre  $j$  le système linéaire suivant :

$$N^j (P_n^{j+1} - P_n^j) - T^j (P_g^{j+1} - P_g^j) - \bar{K}^j du^{j+1} = res(\Delta u^j, P_n^j, P_g^j) \quad [19]$$

avec :

$$\bar{K}^j = K^j + [\nabla N(\Delta u^j) P_n^j - \nabla T(\Delta u^j) P_g^j \quad 0] \quad [20]$$

Pour un élément de contact constitué des nœuds  $\mathbf{x}^s$ ,  $\mathbf{x}^m$  et  $\mathbf{x}^{m-1}$ , on a :

$$\begin{cases} N^T = [n^m & -(1 - \xi^s) n^m & -\xi^s n^m] \\ T^T = [g^m & -(1 - \xi^s) g^m & -\xi^s g^m] \\ N_0^T = [0 & -n^m & n^m] ; \quad T_0^T = [0 & -g^m & g^m] \\ \nabla N = -\frac{1}{l} \left( T N_0^T + N_0 T^T + \frac{d_n}{l} N_0 N_0^T \right) \\ \nabla T = \frac{1}{l} \left( N N_0^T - T_0 T^T - \frac{d_n}{l} T_0 N_0^T \right) \end{cases} \quad [21]$$

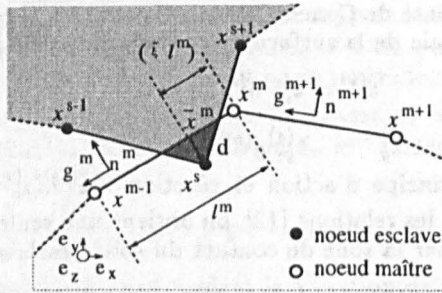


Figure 5. Définition d'un élément de contact

La matrice  $K^j$  est la matrice de rigidité standard. Les vecteurs  $P_n$  et  $P_g$  représentent les réactions aux D.D.L. (degrés de liberté) de contact et de frottement. La forme discrète et linéarisée des contraintes de contact pour un nœud esclave est :

$$\begin{cases} d_n^j + N^T du^{j+1} \geq 0 \\ P_n^{j+1} \geq 0 \\ \left( d_n^j + N^T du^{j+1} \right) P_n^{j+1} = 0 \end{cases} \quad [22]$$

Pour le frottement, on rajoute un degré de liberté pour chaque nœud esclave :

$$\begin{cases} v_g^j + \frac{1}{l} \left( T^T + \frac{d_n}{l} N_O^T \right) du^{j+1} = \lambda_1^{j+1} - \lambda_2^{j+1} \\ P_g^{j+1} = \frac{1}{2} \left( \phi_2^{j+1} - \phi_1^{j+1} \right) \\ \lambda_1^{j+1} \geq 0 ; \lambda_2^{j+1} \geq 0 \\ \phi_1^{j+1} \geq 0 ; \phi_2^{j+1} \geq 0 \\ \lambda_1^{j+1} \phi_1^{j+1} = 0 ; \lambda_2^{j+1} \phi_2^{j+1} = 0 \end{cases} \quad [23]$$

avec :

$$\begin{cases} \phi_1^{j+1} = -P_g^{j+1} + \mu P_n^{j+1} \\ \phi_2^{j+1} = P_g^{j+1} + \mu P_n^{j+1} \end{cases}$$

Les valeurs  $\phi_1$  et  $\phi_2$  forment l'enveloppe du cône de Coulomb en dimension 2. Le coefficient de frottement  $\mu$  peut être soit constant au cours du chargement, soit dépendre de variables locales (voir paragraphe 3) et sa valeur calculée en chaque nœud esclave.

### 2.2. Méthode de résolution

Les équations d'équilibre discrètes [19] sont condensées aux nœuds de contact. Le système non contraint est résolu par une méthode de Cholesky. La

linéarisation des équations de contact avec frottement sous forme de complémentarité présentées en [22] et [23] conduit au problème de complémentarité linéaire suivant :

Trouver  $W \in \mathbb{R}^q, R \in \mathbb{R}^q$  tels que :

$$\begin{cases} P - KW = F \\ W_i \geq 0 \\ R_i \geq 0 \\ W_i R_i = 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, q \quad [24]$$

où  $q$  représente le nombre de degrés de liberté de contact et de frottement.

Le vecteur  $W$  contient les valeurs  $d_n^{j+1}, \lambda_1^{j+1}$  et  $\lambda_2^{j+1}$  pour les nœuds esclaves et les variations itératives des déplacements des nœuds maîtres notées  $du^{M^{j+1}}$  qui doivent être éliminées par une nouvelle condensation statique. Le vecteur  $R$  contient la composante normale de la réaction  $P_n$  et les valeurs  $\phi_1$  et  $\phi_2$  pour chaque nœud esclave. Le développement complet de cette formulation est présenté dans [CHE 97].

On résout ce problème par une méthode de Lemke dont l'algorithme est présenté dans [CHA 97]. Avec cette méthode directe on vérifie exactement les conditions de non-pénétration [16] et de non-glissement lors d'un contact collant [17]. On trouve ainsi directement les inconnues nodales : les déplacements et les réactions. A titre de comparaison, nous avons développé aussi une méthode de régularisation des contraintes de contact et de frottement : la méthode du Lagrangien augmenté en se basant sur l'algorithme décrit par [SIM 92].

### 2.3. Exemple

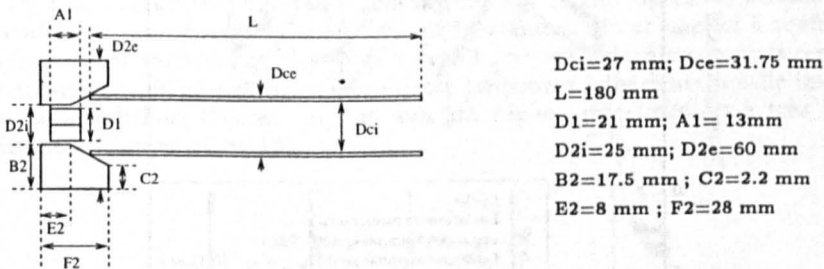


Figure 6. Géométrie du problème

Pour illustrer les possibilités des méthodes implantées, nous présentons, ci-dessous, un exemple d'écrasement d'un cylindre élastoplastique [LAU 93]. L'intérêt et les difficultés de cet exemple résident dans la nécessité de caractériser convenablement les grands déplacements et grandes rotations, ainsi que de prendre en compte les nombreuses zones d'auto-contact. Dans la figure 6, la géométrie de ce problème axisymétrique est présentée. Le cylindre en acier est déplacé vers un obstacle considéré comme rigide.

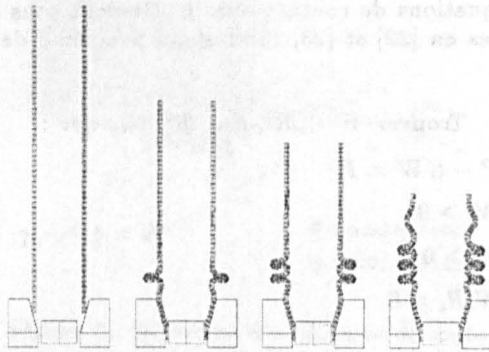


Figure 7. Déformées du cylindre avec zones d'auto-contact

L'acier a pour module d'Young  $E = 210\,070$  MPa et pour coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . L'écouissage est donné par une loi de Swift :  $A_0(\bar{\epsilon}_p) = 808 \cdot (0,866336 + \bar{\epsilon}_p)$ . Pour la discrétisation par éléments finis on utilise, 177 éléments bilinéaires (Q4/P0). Dans cet exemple, le cylindre, dont on déplace la partie supérieure, vient se bloquer dans l'outil. Lorsque le chargement axial atteint une valeur critique, il y a une formation de 3 plis (voir figure 7) pour un déplacement total de 110 mm.

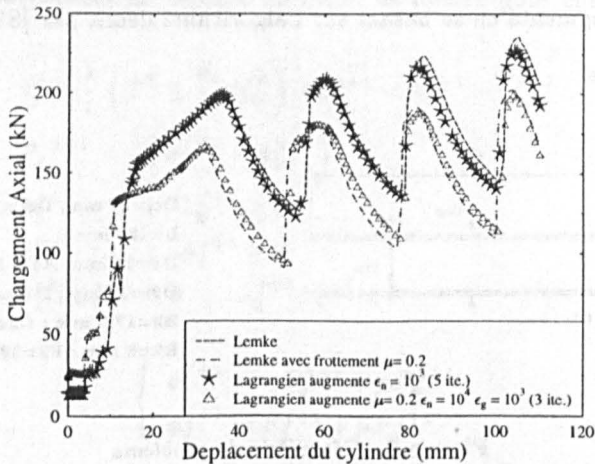


Figure 8. Comparaison du chargement axial entre Lemke et la Lagrangien augmenté

Nous avons étudié le cas sans frottement et le cas avec un frottement de  $\mu = 0,2$ . Nous utilisons, pour les calculs, la méthode de Lemke et la méthode du Lagrangien augmenté avec comme coefficients :  $\epsilon_n = 10^3$  et 5 augmentations maximum dans le cas sans frottement ;  $\epsilon_n = 10^4$ ,  $\epsilon_g = 10^3$  et 3 augmentations maximum dans le cas avec frottement. Dans le cas avec frottement, le cylindre

pénètre moins la matrice que dans le cas sans frottement. Ce résultat attendu a pour conséquence d'amorcer la première "boucle" plus tôt que dans le cas sans frottement. Le chargement axial (figure 8) confirme ce phénomène et les résultats entre les deux méthodes utilisées sont similaires. La méthode de Lemke est deux fois plus rapide que le Lagrangien augmenté, sur cet exemple.

### 3. Frottement variable

Les essais expérimentaux relatifs à l'exemple présenté ici ont été réalisés par Renault [BEL 94] pour analyser les évolutions du coefficient de frottement en fonction de la pression de serrage  $p_n$  et de  $v_g$  la vitesse de glissement (cf. figure 9). A partir des résultats expérimentaux, nous avons identifié l'expression analytique suivante caractérisant les variations du coefficient de frottement en fonction du rapport  $v_g$  sur  $p_n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_g/p_n \leq 8.10^{-9} \quad \mu = 0.18 \text{ (régime limite)} \\ 8.10^{-9} < v_g/p_n \leq 2.10^{-7} \quad \mu = -0.63 - 0.04 \ln(v_g/p_n) \text{ (régime mixte)} \\ v_g/p_n > 2.10^{-7} \quad \mu = 0.04 \text{ (régime hydrodynamique)} \end{array} \right.$$

Les figures 10 et 11 présentent respectivement les évolutions des efforts de contact le long de la surface de contact pour différentes valeurs de l'avalement. La vitesse tangentielle des essais est ici de 10 m/s. Dans la figure 10, dans une première phase, on peut distinguer trois états de contact entre les outils et l'éprouvette. La partie droite de la figure correspond à une zone sans transmission des efforts de contact, la partie centrale à une zone de contact sans glissement, la partie gauche à la zone bloquée. Lorsque l'avalement augmente la partie bloquée diminue jusqu'au glissement global (cf. figure 11).

Avec un modèle à coefficient constant, l'état de glissement de l'ensemble de la zone de contact est un état stable (figure 12) atteint après un certain seuil d'avalement qui dépend du coefficient de frottement. Pour une loi à coefficient de frottement variable, ce n'est plus le cas. Lorsque les derniers noeuds rentrent en glissement, ils glissent avec une vitesse largement supérieure à celle imposée par les conditions d'essai. Il s'en suit un régime de *stick/slip* à très haute fréquence (figures 12 et 13).

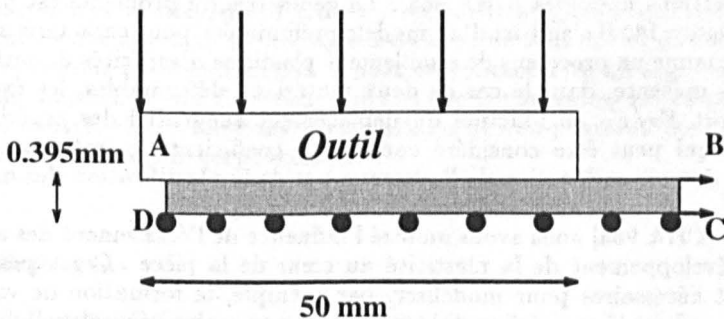


Figure 9. Géométrie de l'essai de frottement

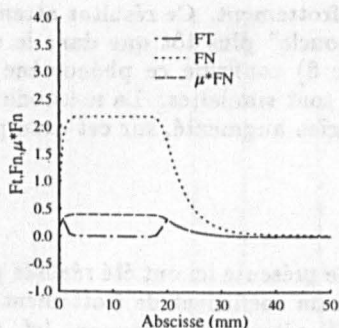


Figure 10. Forces de contact, avalement  $u_t = 4, 10^{-03} \text{ mm}$

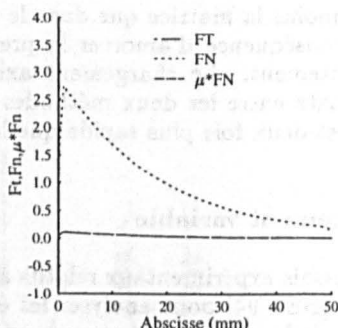


Figure 11. Forces de contact, avalement  $u_t = 1, 10^{-02} \text{ mm}$

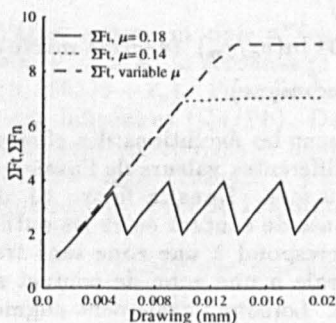


Figure 12. Forces de frottement

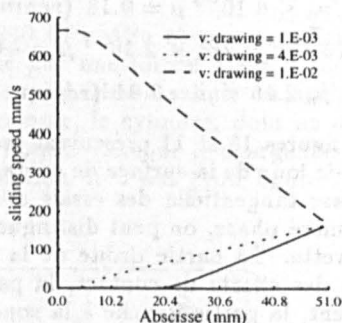


Figure 13. Vitesses de glissement

#### 4. Cisaillement d'aspérités de surface

Nous considérons ici deux aspérités identiques face à face se déplaçant dans deux directions opposées [CHA 96a]. La géométrie du problème est présentée dans la figure 14. Il s'agit ici d'un modèle préliminaire pour caractériser le frottement comme un processus de cisaillement plastique d'aspérités de surface. La figure 15 présente, dans le cas de deux matériaux déformables, les évolutions du rapport  $F_T/F_N$  en fonction du déplacement tangentiel des aspérités. Ce rapport, qui peut être considéré comme un coefficient de frottement global évolutif, décroît en fonction de l'arasement et de la plastification des aspérités.

Dans [CHA 96a] nous avons montré l'influence de l'écrasement des aspérités sur le développement de la plasticité au cœur de la pièce. Ces types d'analyses sont nécessaires pour modéliser, par exemple, la formation de vagues de matériaux observées expérimentalement et apporter plus généralement une contribution numérique pour la compréhension de différents phénomènes mis en évidence par les tribologues.

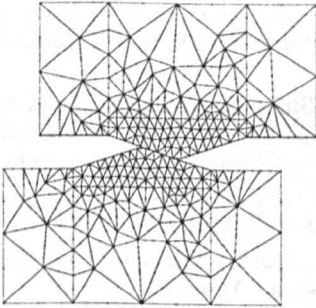


Figure 14. Cisaillement d'aspérités

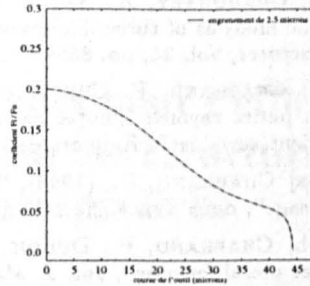


Figure 15. Coefficient de frottement

## 5. Conclusion

Nous avons présenté, dans cet article, un traitement de problèmes de contact avec frottement en grandes transformations. Les notions de vitesses relatives au contact objectives ont été introduites en détail. Si la loi de frottement, que nous avons généralement considérée, est une loi de Coulomb à coefficient constant, nous avons montré la possibilité de prendre en compte dans notre modélisation une loi à coefficient variable. Toutefois, l'analyse de l'influence de ce type de loi dans le contexte de l'emboutissage nécessite d'autres développements. Il s'agira de prendre en compte les conditions réelles d'interface. C'est-à-dire de considérer localement l'écrasement d'aspérités et la plastification en surface et au cœur de la pièce, de prendre en compte un éventuel lubrifiant et enfin, dans une analyse plus poussée, de considérer les effets de la température qui peuvent être considérable en particulier sur la viscosité du lubrifiant. L'étape présentée ici est une étape préliminaire qui a permis d'obtenir des informations qualitatives sur ce type de lois.

Les problèmes de contact traités par la méthode de Lemke que nous avons étendue au cas du contact entre solides déformables, ont permis d'en illustrer les performances dans des situations complexes avec des non-linéarités géométriques et de l'auto-contact.

Ces exemples ont permis de montrer les limites d'une formulation maître/esclave classique et la nécessité d'utiliser d'autres stratégies. Nous développons actuellement une approche symétrique dans laquelle tout noeud de contact sera considéré comme un noeud esclave venant en contact avec un segment maître. Une telle approche évite les choix *a priori* des corps antagonistes comme esclaves et maîtres et les violations des conditions de non-pénétrations des noeuds du corps maître dans le corps esclave.

## 6. Bibliographie

- [BAT 85] BATHE, K. CHAUDHARY, A., (1985), "A solution method for planar and axisymmetric contact problem", *Int. J. numer. methods eng.*, Vol. 21, pp. 65-88.
- [BEL 94] BELLARD, P., (1994), "Note interne", Rapport Tech. 94/0317, Renault.

- [CHA 86] CHAUDHARY, A. BATHE, K., (1986), "A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction", *Computers & Structures*, Vol. 24, pp. 855-873.
- [CHA 94] CHABRAND, P. CHERTIER, O., (1994), "Prise en compte du frottement sur les petits rayons: comparaison numérique expérimental. loi de frottement à coefficient variables", Rapport de contrat H5.12.51, CNRS/Renault.
- [CHA 96a] CHABRAND, P., (1996), "Modélisation d'effets locaux de surface en emboutissage", dans *Tribologie et Ingénierie des surfaces* (Sirpe, ed.).
- [CHA 96b] CHABRAND, P., DUBOIS, F., GELIN, J., (1996), "Modelling drawbeads in sheet metal forming", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 38, no. 1, pp. 59-77.
- [CHA 97] CHABRAND, P., DUBOIS, F., RAOUS, M., (1997), "Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction", à paraître dans *Computer Modeling*.
- [CHE 97] CHERTIER, O., (1997), "Contact et frottement en grandes déformations élastoplastiques entre solides déformables", Thèse, Université de la Méditerranée, (1997).
- [DUB 94] DUBOIS, F., (1994), "Contact, frottement, grandes déformations élastoplastiques : application à l'emboutissage", Thèse, Université de la Méditerranée, (1994).
- [EMM 90] EMMENS, W. MONTFORD, G., (1990), "The influence of process conditions and surface characteristics on friction at low pressure", dans *Proceedings of the 3rd ICTP*.
- [HE 93] HE, Q.-C. CURNIER, A., (1993), "Anisotropic dry friction between two orthotropic surfaces undergoing large displacements", *Eur. J. Mech., A/Solids*, Vol. 12, no. 5, pp. 631-66.
- [IKE 90] IKE, H. MAKINOCHI, A., (1990), "Effect of lateral tension and compression on plane strain flattening asperities lying over a plastically deformable bulk", *wear*, Vol. 140, pp. 17-38.
- [KLA 95] KLARBRING, A., (1995), "Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization", *Eur. J. Mech., A/Solids*, Vol. 14, no. 2, pp. 237-253.
- [LAU 93] LAURSEN, T. SIMO, J., (1993), "A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody large deformation frictional contact problems", *Int. J. numer. methods eng.*, Vol. 36, pp. 3451-3485.
- [MAR 98] MARTINET, F., (1998), "Formulation lagrangienne/eulérienne pour un problème couplé de fluide structure en emboutissage", Thèse, Université de la Méditerranée, (en cours), (1998).
- [SID 82] SIDOROFF, F., (1982), "Les grandes déformations", Rapport Tech. 29, Rapport Gréco GDE.
- [SIM 92] SIMO, J. LAURSEN, T., (1992), "An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction", *Computers & Structures*, Vol. 42, pp. 97-116.
- [WRI 94] WRIGGERS, P. MIEHE, C., (1994), "Contact constraints within coupled thermomechanical analysis - a finite element model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 113, pp. 301-319.