
Analyse non linéaire de coques minces élastoplastiques avec l'élément DKT12

Jean-Louis Batoz * — Ying-Qiao Guo *
Hossein Shakourzadeh **

* Université de Technologie de Compiègne, LG2mS, UPRES A 6066 du CNRS
MNM, CR, Membres du Pôle Modélisation de la Région Picardie
BP 20529, F-60205 Compiègne cedex

** Pôle Universitaire Léonard de Vinci, Direction d'Enseignement et Recherche
Département Mécanique-Structure-Matériaux & Procédés
F-92916 Paris La Défense cedex

RÉSUMÉ. Un élément fini de coque mince appelé DKT12 est présenté pour l'analyse non linéaire en grands déplacements et élastoplasticité. L'élément, de type facette plane triangulaire à 12 degrés de liberté est obtenu par superposition de l'élément de membrane T3 (ou CST) et de l'élément de plaque mince de type Kirchhoff discret DKT6. Une Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI) permet de simplifier considérablement la prise en compte des non linéarités en décomposant le mouvement global en un mouvement de corps rigide et en un mouvement associé à des petits déplacements. Les comportements élastoplastiques sont pris en compte en considérant un critère global. Les systèmes d'équations non linéaires sont résolus par différentes techniques basées sur la méthode de Newton. Différents exemples sont présentés pour montrer l'efficacité et la précision du modèle et des algorithmes utilisés.

ABSTRACT. A shell element called DKT12 is presented for non-linear analysis which includes large displacements and elasto-plasticity. The triangular facet shell element with 12 degrees of freedom is obtained by the superposition of the membrane element T3 (or CST) and the Discrete Kirchhoff plate bending element DKT6. An Updated Lagrangian Formulation at each Iteration (ULFI) greatly simplifies the non-linear analysis by considering the global deformation as a superposition of a rigid body motion and a movement involving small displacements and rotations. A global criterion is taken into account to consider the elasto-plastic behaviour. The non-linear systems of equations are solved by using various algorithms and strategies based on the Newton method. Several examples are presented to demonstrate the efficiency and precision of the formulation and algorithms.

MOTS-CLÉS : coque mince, élément fini DKT12, grands déplacements, élastoplasticité.

KEY WORDS : thin shell, DKT12 finite element, large displacements, elasto-plasticity.

1. Introduction

De grands progrès ont été faits en analyse non linéaire des coques (différentes formulations et approches, différents types d'éléments, représentation des grandes rotations non commutatives, prise en compte des degrés de liberté de rotation autour de la normale... [IBR 97], [NOO 89], [SIM 88], [ZIE 91], [WUN 92]). Pour les applications industrielles comme la simulation de la ruine ou de la mise en forme de produits à parois minces (crash, emboutissage, soufflage et thermoformage de plastiques), l'utilisation d'éléments triangulaires à facettes planes impliquant un faible nombre de DDL peut constituer un atout important.

Cet article concerne la formulation et l'évaluation d'un élément de coque triangulaire simple appelé DKT12 pour l'analyse non linéaire des coques minces élastoplastiques. Cet élément résulte de la superposition de l'élément de membrane CST et de l'élément de plaque DKT6 [BAT 92]. Trois translations à chaque sommet et une rotation autour de chaque côté sont utilisées comme variables nodales. Les déformations de membrane et les courbures sont constantes par élément, ainsi les matrices de rigidité linéaire et géométrique et le vecteur des charges équivalentes sont calculés explicitement sans intégration numérique. L'influence des déformations de cisaillement transversal est négligée.

Pour l'analyse non linéaire, une formulation lagrangienne actualisée à chaque itération (FLAI) est utilisée [BAT 88], [BAT 89], [GUO 87], [POL 92], [SHA 94]. L'actualisation à chaque itération permet de simplifier d'une manière considérable les termes de la matrice tangente et du vecteur des forces internes dans la mesure où l'on considère une discrétisation systématique par facettes planes. Comme les degrés de liberté de rotation de l'élément représentent les rotations des côtés, le traitement de grandes rotations dans l'espace évoqué dans [SHA 96] pour les poutres 3D ne pose aucune difficulté grâce à l'actualisation successive des repères. La plasticité est intégrée dans l'élément en utilisant un algorithme explicite avec le critère global d'Ilyushin [GUO 97].

L'élément de coque DKT12 a été développé et utilisé à l'Université de Technologie de Compiègne depuis 1991 [ROE 91] mais n'a pas fait l'objet de publications détaillées relatives à l'analyse non linéaire par la FLAI. D'autres auteurs ont également formulé et utilisé des éléments de coques du même type (mêmes variables nodales). Crisfield et Peng [PEN 92], [CRI 92] ont adapté l'élément de plaque dit de Morley [MOR 71] pour l'analyse non linéaire en considérant une formulation dite corotationnelle cohérente (les matrices de rigidité linéaire de DKT6 et de Morley sont identiques). Onate et al. [ONA 94] ont également présenté quelques résultats d'analyses non linéaires de coques avec des non linéarités géométriques modérées en utilisant un élément appelé DKTL qui est identique à l'élément DKT12. Un élément de coque courbe à 12 ddl où la flexion est représentée par l'élément de plaque DKT6 a été formulé pour l'analyse linéaire des coques en [PAL 97].

2. Présentation de l'élément DKT6 pour l'analyse linéaire des plaques minces

Les variables nodales de l'élément DKT6 sont le déplacement normal w à chaque nœud sommet et la rotation θ_s autour de chaque côté (figure 6.4.5 de [BAT 92]). La formulation est basée sur les approximations semi- C^0 pour β_x et β_y (rotations autour de $-y$ et x respectivement) [BAT 92] :

$$\beta_x = \sum_{k=4,5,6} N_k \beta_{xk} ; \beta_y = \sum_{k=4,5,6} N_k \beta_{yk} \quad [1a]$$

$$N_4 = 1 - 2\eta ; N_5 = -1 + 2\xi + 2\eta ; N_6 = 1 - 2\xi \quad [1b]$$

En tenant compte des approximations ci-dessus et des transformations entre β_x , β_y et β_s , β_n sur chaque côté, nous pouvons exprimer les courbures $\{\chi\}$ en fonction des variables nodales $\{\beta_{sn}\}$:

$$\begin{aligned} \langle \chi \rangle &= \langle \beta_{x,x} \beta_{y,y} \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \\ \{\chi\} &= [B_{sn}] \{\beta_{sn}\} \quad \text{avec} \langle \beta_{sn} \rangle = \langle \beta_{s4} \beta_{s5} \beta_{s6} \beta_{n4} \beta_{n5} \beta_{n6} \rangle \end{aligned} \quad [2]$$

L'hypothèse de Kirchhoff est introduite sur chaque côté de la manière suivante :

$$\int_0^{L_k} \gamma_{sz} ds = \int_0^{L_k} (\beta_s + w_{,s}) dS = 0 \quad [3a]$$

$$\text{d'où : } \beta_{sk} = \frac{w_i - w_j}{L_k} \quad [3b]$$

Les déformations de cisaillement transversal sont négligées et la relation [3b] permet de faire apparaître les trois déplacements w_1 , w_2 , w_3 comme variables nodales pour définir le vecteur des courbures :

$$\{\chi\} = \left[[B_w] ; [B_\theta] \right] \{w_n\} = [B_f] \{w_n\} \quad [4]$$

$$\text{avec} \langle W_n \rangle = \langle w_1 \ w_2 \ w_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \rangle \quad (\theta_k = \beta_{nk})$$

La matrice $[B_f]$ est l'opérateur de déformation constant défini en fonctions coordonnées des trois nœuds de l'élément. La matrice de rigidité linéaire de DKT6 est donnée sous forme explicite par :

$$[k_f] = A_e [B_f]^T [H_f] [B_f] \quad [5]$$

où $[H_f]$ est la loi de comportement de flexion et A_e l'aire de l'élément.

La matrice de rigidité s'avère identique à celle de l'élément dit de Morley [MOR 71] et à celle de l'élément mixte hybride HSM6 [BAT 92]. Ces éléments passent les patch-tests de courbures constantes pour les plaques minces.

La superposition de l'élément de plaque DKT6 et de l'élément de membrane CST donne l'élément de coque DKT12 ayant uniquement 12 ddl :

$$\langle U_n \rangle = \langle U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ U_3 \ V_3 \ W_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \rangle \quad [6]$$

où U_i, V_i, W_i sont les déplacements globaux du nœud i (figure 1).

L'élément DKT12 apporte plusieurs avantages par rapport aux éléments de coques classiques (comme DKT18) : le nombre de DDL est largement réduit, l'intégration numérique est évitée, et il n'y a aucun mode parasite (à énergie nulle).

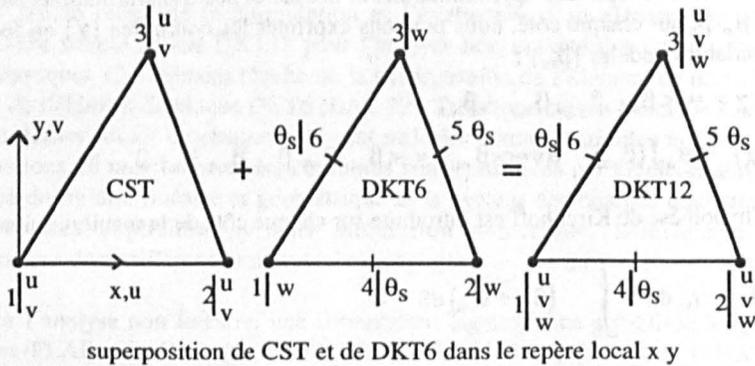


Figure 1. Élément de coque DKT12

3. La formulation FLAI et l'élément DKT12

La coque de forme quelconque est discrétisée par un ensemble des facettes planes triangulaires. Sous l'action des sollicitations la configuration initiale C^0 se transforme en une configuration C^2 que l'on cherche à déterminer (figure 2). Le vecteur position d'un point q de la facette courbe peut s'écrire sous la forme générale :

$$\vec{x}_q = \vec{x}_q^0 + \vec{u}_q = \vec{x}_q^R + \vec{u}_q^{def} \quad [7]$$

$$\text{avec } \vec{x}_q^R = \vec{x}_p^0 + \vec{u}_T + z \vec{n} \quad \text{avec } -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad [8]$$

où l'indice inférieur p traduit un point de la surface $z = 0$ et q un point quelconque à la distance z du point p ; l'indice supérieur R traduit la configuration C^R obtenue par mouvement de corps rigide de la configuration C^0 , \vec{u}_T représente la translation de corps rigide ; la rotation de corps rigide étant représentée par la matrice orthogonale Q telle que :

$$\vec{n} = Q \vec{n}^0 \quad [9]$$

où \bar{n}^0 et \bar{n} représentent les vecteurs unitaires normaux aux facettes en C^0 et C^R ; h est l'épaisseur de l'élément ; \bar{u}_q^{def} représente un déplacement relatif entre C^2 et C^R de la forme générale :

$$\bar{u}_q^{\text{def}} = \bar{u}_p - \bar{u}_r + z(\bar{n}' - \bar{n}) \quad [10]$$

où \bar{u}_p représentent le vecteur déplacement total du point p et \bar{n}' est le vecteur unitaire normal à la surface courbe de la configuration C^2 .

Si les déplacements et rotations relatives sont modérées voire petits (ce qui bien admissible avec l'hypothèse des petites déformations élastoplastiques) alors on peut écrire :

$$\bar{u}_q^{\text{def}} = \bar{u}_p^{\text{def}} + z\bar{\theta}^{\text{def}} \wedge \bar{n} = \bar{u}_p^{\text{def}} + z\bar{\beta}^{\text{def}} \quad [11]$$

où $\bar{\theta}^{\text{def}}$ (et $\bar{\beta}^{\text{def}}$) représente de petites rotations entre C^R et C^2 .

Le principe des travaux virtuels est retenu pour traduire l'équilibre de la configuration C^2 . Si l'équilibre est vérifié alors :

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \bar{u}_q^* \text{ C.A} \quad [12]$$

où \bar{u}_q^* représente le champ de déplacement virtuel ; W_{ext} représente le travail virtuel externe dû aux sollicitations statiques (ou dynamiques).

Le travail virtuel interne peut s'écrire sous différentes formes équivalentes faisant intervenir des déformations virtuelles et contraintes conjuguées.

En utilisant la configuration C^2 (courbe) comme référence [BAT 92] :

$$W_{\text{int}} = \int_{V^2} \langle \varepsilon_i^* \rangle \langle \sigma_i \rangle dV \quad [13]$$

avec $\langle \varepsilon_i^* \rangle = \langle e^* \rangle + z \langle \chi^* \rangle$ déformations virtuelles curvilignes
 $\langle \sigma_i \rangle$ contraintes de Cauchy (composantes curvilignes)

En utilisant la configuration C^R (plane) comme référence :

$$W_{\text{int}} = \int_{V^R} \langle E^* \rangle \langle S \rangle dV^R = \int_{V^R} \text{tr} \left([F^*] [S] [F^*]^T \right) dV^R \quad [14]$$

avec $\langle E^* \rangle$ (ou $[E^*]$) déformations virtuelles de Green-Lagrange (entre C^R et C^2) et $\langle S \rangle$ (ou $[S]$) contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espère (PK2)

$[F]$ et $[F^*]$ représentent les tenseurs gradient de déformation réel et virtuel par rapport à la configuration C^R , avec :

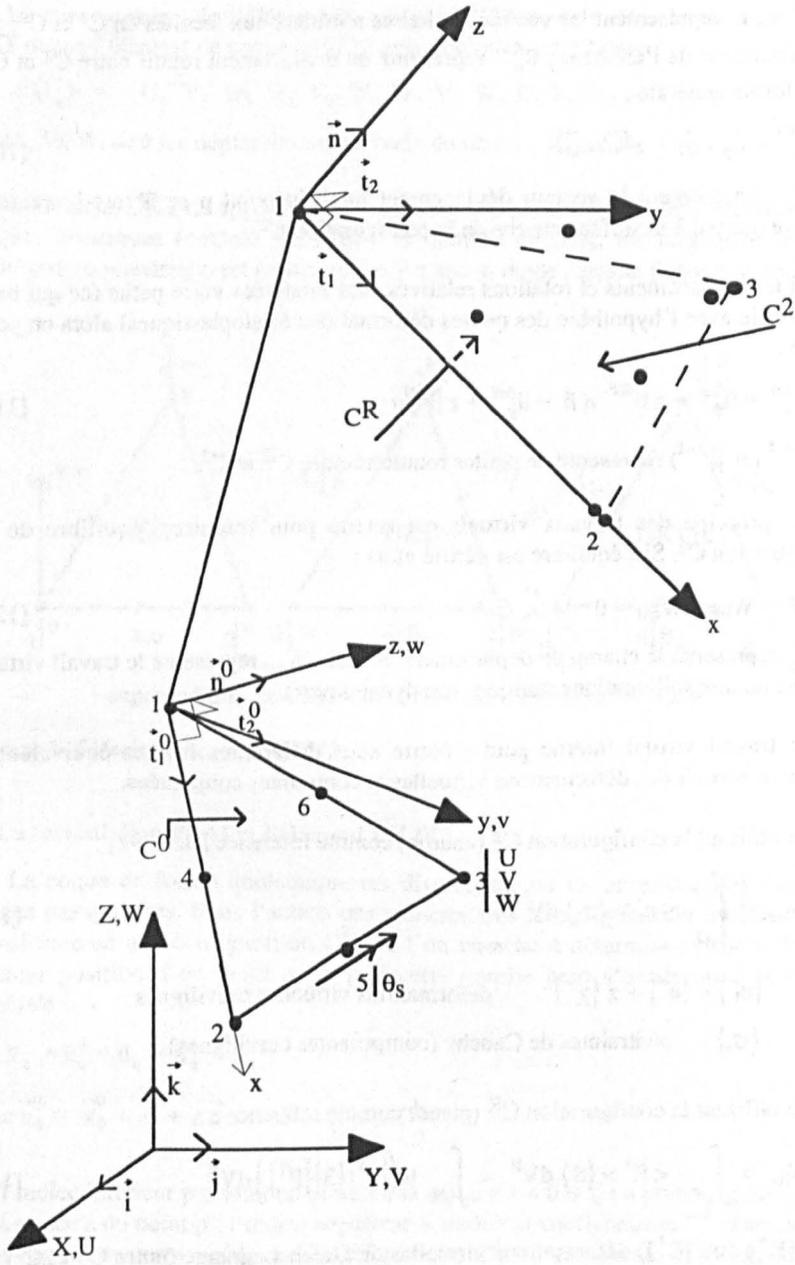


Figure 2. Configurations C^0 , C^R et C^2

$$2 [E^*] = [F^*]^T [F] + [F]^T [F^*] \quad [15]$$

$$\text{et } [F] = [I] + \left[\frac{\partial \bar{u}_q^{\text{def}}}{\partial \bar{x}_q^R} \right]; [F^*] = \left[\frac{\partial \bar{u}_q^{\text{def}}}{\partial \bar{x}_q^R} \right]$$

Avec l'hypothèse des petites déformations on peut établir l'équivalence (numérique) entre les quantités suivantes :

$$dV^0 \approx dV^R \text{ (noté } dV \text{ dans la suite)}$$

$$[E^*] \approx [\epsilon_i^*] \text{ (noté } [\epsilon^*]) ; [S] \approx [\sigma_i] \text{ (noté } [\sigma]) \quad [16]$$

L'accroissement de W_{int} permet de définir la matrice tangente (due aux forces internes) :

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{int}} &= \int_{V^R} \left(\langle \epsilon^* \rangle \langle \Delta \sigma \rangle + \text{tr} \left([F^*] [S] [\Delta F]^T \right) \right) dV^R \\ &= \int_{V^R} \left(\langle \epsilon^* \rangle \langle \Delta \sigma \rangle + \sum_{i=1}^3 \langle F_i^* \rangle [S] \langle \Delta F_i \rangle \right) dV^R \end{aligned}$$

$$\text{où } \langle F_i \rangle = \langle F_{i1} \ F_{i2} \ F_{i3} \rangle \quad [17]$$

La loi de comportement élastoplastique permet de définir :

$$\langle \Delta \sigma \rangle = [H_{ep}] \langle \Delta \epsilon \rangle \quad [18]$$

où $[H_{ep}]$ est l'opérateur tangent élastoplastique.

Considérons une résolution du problème non linéaire par une approche implicite statique et une discrétisation par facettes planes avec les éléments DKT12. A l'itération i on considère la configuration $C^R = C^i$ comme configuration de référence connue en géométrie et en contraintes. Nous pouvons alors calculer W^i [12] avec W_{int}^i donné par [14]. Comme on considère une approche par facettes planes, alors :

$$\left(\bar{u}^{\text{def}} \right)^i = \bar{0} \text{ et } [F^i] = [I] \quad [19]$$

La contribution d'un élément s'écrit ainsi simplement :

$$W_{\text{int}}^e = \langle U_n^* \rangle \langle f_{\text{int}}^i \rangle \quad [20]$$

$$\text{avec } \{F_{int}^i\} = A_e \left([B_m^i]^T \{N^i\} + [B_f^i]^T \{M^i\} \right)$$

$$\langle U_n^* \rangle = \langle U_i^* \quad V_i^* \quad W_i^* \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad \theta_k^* \quad k = 4, 5, 6 \rangle$$

où $[B_m^i]$ et $[B_f^i]$ sont les opérateurs de membrane relatifs à la configuration C^i . $\{N^i\}$ et $\{M^i\}$ sont les efforts résultants de membrane et de flexion obtenus par intégration (pondérée par 1 ou z) des contraintes planes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ sur l'épaisseur.

$$\text{Si } W^i = \langle U^* \rangle \{R^i\} \neq 0 \text{ avec } \{R^i\} = \{F_{int}^i\} - \{F_{ext}^i\} \tag{21}$$

alors on cherche $\{\Delta U\}$ tel que :

$$W(U^i + \Delta U) = W^i(U^i) + \Delta W^i(U^i, \Delta U) = 0 \tag{22}$$

Les expressions 11, 17, 18, 19 permettent d'écrire en négligeant la contribution possible des forces externes :

$$\Delta W^e = \langle U_n^* \rangle [k_t^i] \{\Delta U_n\} \tag{23}$$

avec $\langle \Delta U_n \rangle = \langle \Delta U_j \quad \Delta V_j \quad \Delta W_j \quad j = 1, 2, 3 \quad ; \quad \Delta \theta_k \quad k = 4, 5, 6 \rangle$

$$[k_t^i] = [k_{ep}^i] + [k_{\sigma}^i] \tag{24}$$

$$[k_{ep}^i] = A_e [B_m^i]^T \left([H_m^i] [B_m^i] + [H_{mf}^i] [B_f^i] \right) + A_e [B_f^i]^T \left([H_{mf}^i] [B_m^i] + [H_f^i] [B_f^i] \right) \tag{25}$$

$$[k_{\sigma}^i] = A_e [B_{\phi}^i]^T [\bar{N}^i] [B_{\phi}^i] \tag{26}$$

$$[H_m^i], [H_{mf}^i], [H_f^i] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [H_{ep}^i] (1, z, z^2) dz \tag{27}$$

La matrice $[k_{ep}^i]$ est la matrice de rigidité élastoplastique actualisée de l'élément et $[k_{\sigma}^i]$ est la matrice de rigidité géométrique. Pour les résultats numériques présentés plus loin, nous avons considéré uniquement les efforts normaux pour évaluer $[k_{\sigma}^i]$. Les approximations linéaires retenues pour \bar{u} et $\Delta \bar{u}$ permettent d'établir une matrice de rigidité géométrique directement dans le repère global (et qui est constante par élément).

Après assemblage, les relations 21 et 22 conduisent à :

$$[K_t^i] \{\Delta U\} = \{F_{ext}^i\} - \{F_{int}^i\} \tag{28}$$

La résolution fournit le vecteur $\langle U_n \rangle$ de chaque élément [23]. Ses composantes caractérisent à la fois un petit mouvement de corps rigide et un mouvement produisant de petites déformations. Après résolution on peut ainsi établir :

– une nouvelle configuration de référence $C^R = C^{i+1}$ en considérant simplement une actualisation des coordonnées des trois nœuds sommets de chaque élément :

$$\bar{x}_j^R = \bar{x}_j^{i+1} = \bar{x}_j^i + \Delta \bar{u}_j \quad j = 1, 2, 3 \quad [29]$$

L'hypothèse des petites déformations permet d'assimiler la matrice de rotation [R] de la décomposition polaire exacte de $[F] = [R][U]$ (entre C^0 et C^2) avec la matrice de rotation [Q] [9]. Cette actualisation des coordonnées permet de reféfinir les opérateurs $[B_m^{i+1}]$ et $[B_f^{i+1}]$ pour l'itération $i + 1$, les modifications proviennent des nouvelles orientations des vecteurs \vec{t}_1 , \vec{t}_2 et \vec{n} .

$$\vec{t}_1 = \frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_{21}|} ; \quad \vec{n} = \frac{\vec{X}_{21} \wedge \vec{X}_{31}}{|\vec{X}_{21} \wedge \vec{X}_{31}|} \quad [30]$$

$$\vec{t}_2 = \vec{n} \wedge \vec{t}_1 \quad \text{avec} \quad \vec{X}_{21} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1 \quad \text{etc...}$$

– les accroissements de déformations de membrane $\{\Delta e\}$ et de courbure $\{\Delta \chi\}$ entre C^i et C^{i+1} sont obtenus directement par :

$$\{\Delta e\} = [B_m^i] \{\Delta U_n\} ; \quad \{\Delta \chi\} = [B_f^i] \{\Delta U_n\} \quad [31]$$

Cette proposition est cohérente avec les relations 11 et 12.

Les opérateurs $[B_m^i]$ et $[B_f^i]$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$[B_m^i] = [B_m]_{loc} [T^i] ; \quad [B_f^i] = [B_f]_{loc} [T^i] \quad [32]$$

où $[B_m]_{loc}$ (3×12) et $[B_f]_{loc}$ (3×12) sont les opérateurs de membrane et de flexion exprimés dans le repère local x, y, z (et qui sont constants au cours des itérations avec l'hypothèse des petites déformations). La matrice $[T^i]$ (12×12) change à chaque itération et s'écrit sous la forme diagonale :

$$[T^i] = \text{diag} ([t^i], [t^i], [t^i], [I]) \quad \text{avec} \quad [t^i] = [Q^0][Q^i] \quad [33]$$

Les accroissements d'efforts résultants sont pour un matériau élastique :

$$\{\Delta N\} = [H_m] \{\Delta e\} ; \quad \{\Delta M\} = [H_f] \{\Delta \chi\} \quad [34]$$

Ce qui permet de définir les efforts résultants actualisés :

$$\{N^{i+1}\} = \{N^i\} + \{\Delta N\} ; \quad \{M^{i+1}\} = \{M^i\} + \{\Delta M\} \quad [35]$$

Il est également possible de définir les déformations totales de membrane avec une plus grande précision en comparant directement les éléments dans leurs configurations locales C^0 et C^{i+1} .

Les relations 29 à 35 permettent de calculer $\{f_{int}^i\}$ [20] et $\{k_i^i\}$ [24] pour l'itération $i + 1$.

Pour rester cohérent avec la simplicité de la formulation de l'élément DKT12 et pour éviter une intégration numérique suivant l'épaisseur, un critère global est considéré. Il s'exprime en fonction des efforts résultants $\{N\}$ et $\{M\}$. Le critère utilisé est celui d'Ilyushin sous forme modifiée. La loi de normalité est utilisée pour définir les taux de déformations de membrane et de courbure. La méthode de rabattement [GUO 97] peut être ensuite utilisée afin de vérifier que les efforts internes $\{N^i\}$ et $\{M^i\}$ restent plastiquement admissibles. On peut également définir les matrices $[H_{ep}^i]$, $[H_m^i]$, $[H_{mf}^i]$, $[H_i^i]$ [18] et [26c].

4. Exemples numériques

Un très grand nombre d'exemples numériques ont été traités en utilisant différentes stratégies de résolution (pilotage en charge, en déplacement imposé ou en longueur d'arc) combinées à la méthode de Newton pour l'obtention de l'équilibre à chaque pas. Le critère d'arrêt des itérations d'équilibre est défini en fonction de la norme euclidienne des accroissements de variables nodales (avec une précision de 10^{-3}). les problèmes étudiés sont les exemples classiques reconnus par la communauté internationale (lame encadrée soumise à des charges concentrées, à des moments de flexion ou de torsion, hémisphère pincé, anneau circulaire en flexion/traction, cylindre pincé en compression ou en traction, etc.). Trois exemples sont présentés dans cet article.

4.1. Anneau plat avec ouverture

L'anneau circulaire de la figure 3 est coupé suivant AB. Une charge uniformément répartie d'intensité p est appliquée sur une lèvre. L'autre lèvre est encadrée. Les données sont : $E = 2,1 \times 10^8$ k N/m² ; $\nu = 0$; $h = 0,03$ m ; R (intérieur) = 6 m ; R (extérieur) = 10 m ; $F = 0,1$ λ k N/m. L'objectif est d'étudier le comportement non linéaire de l'anneau élastique quand le chargement augmente. Le traitement des grandes rotations dans l'espace joue un rôle important et plusieurs auteurs ont considéré ce problème comme un test sévère pour les éléments finis de coque en grandes rotations [BUE 92], [BAS 92], [JIA 94]... Nous modélisons l'anneau en utilisant 80 éléments (figure 3). La courbe charge-déplacement est comparée à celle de [JIA 94] (figure 4). Ces auteurs ont utilisé des éléments finis quadrilatéraux où la théorie des rotations finies est prise en compte. Avec les éléments finis DKT12, le problème des grandes rotations dans l'espace est traité d'une manière naturelle et ne pose aucune difficulté grâce à l'actualisation successive des repères locaux et nos résultats sont en bon accord avec ceux de [JIA 94]. La déformation de l'anneau au cours du chargement est présentée dans la figure 3.

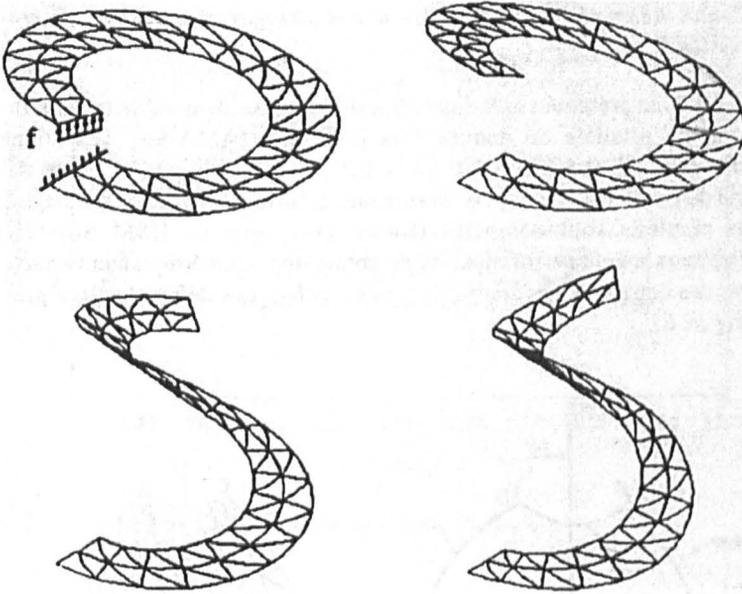


Figure 3. Déformée successive de l'anneau ($\lambda = 5, 10, 85, 235$)

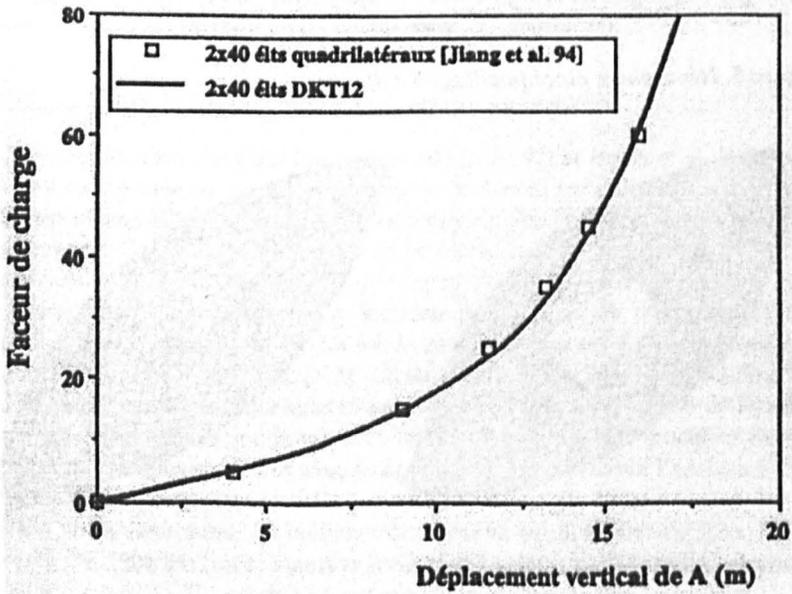


Figure 4. Courbe charge-déplacement pour l'anneau circulaire

4.2. Coque hémisphérique soumise à des charges ponctuelles de traction-compression

Le problème présenté sur la figure 5 a été traité par de nombreux auteurs et une bibliographie détaillée est donnée dans [POL 92], [AMA 96]. Les données du problème sont : $E = 6,825 \times 10^7$; $\nu = 0,3$; $R = 10$; $h = 0,04$. Etant donné la symétrie du problème, un quart de la structure est discrétisé avec un maillage 8×8 .

Nos résultats sont comparés (figure 7) à ceux de [SIM 88] (éléments quadrilatéraux avec une formulation de coque dite géométriquement exacte). Les résultats des deux modèles coques sont très proches. Les déformées sont présentées sur la figure 6.

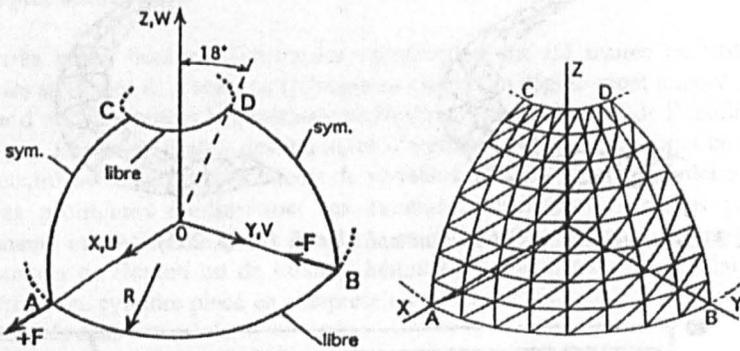


Figure 5. Hémisphère pincé (maillage 8×8)

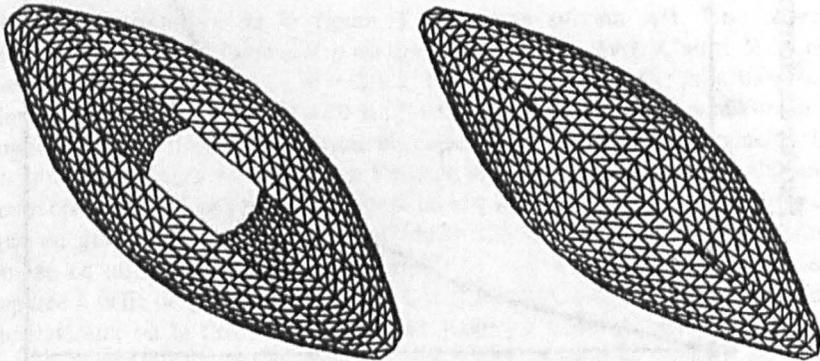


Figure 6. Déformée de la coque hémisphérique trouée ($F = 200, 400$)

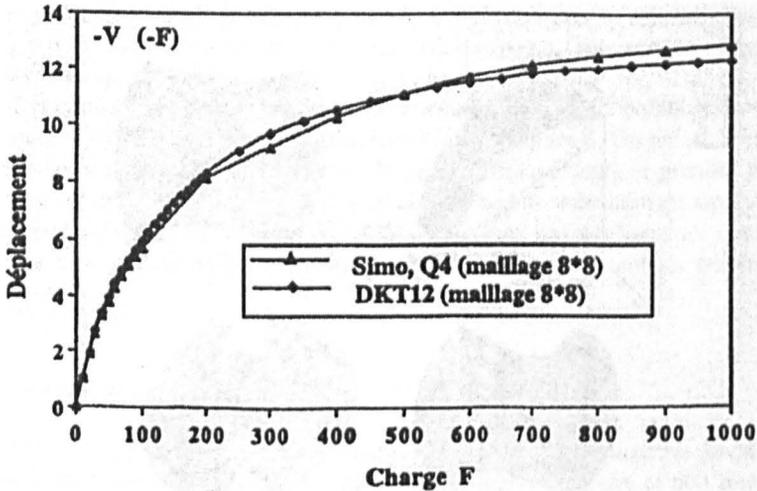


Figure 7. Courbe charge-déplacement de l'hémisphère pincé

Deux stratégies de pilotage différentes ont été utilisées : l'une implique 11 pas de chargement (jusqu'à la fermeture) ; l'autre impliquant 22 pas de chargement. La moyenne du nombre d'itérations par pas est de 6,8 pour le premier cas et de 5,5 pour le deuxième cas. Les résultats s'avèrent très peu sensibles au nombre de pas et aux techniques/stratégies de résolution (automatiques ou contrôlées).

4.3. Pincement d'une coque cylindrique en élasto-plasticité

Cet exemple a été traité par Simo, Kennedy [SIM 92] et Brank et al. [BRA 97]. La coque cylindrique est remplacée aux deux extrémités par deux anneaux (rigides dans leurs plans). Elle est soumise à deux forces de pincement opposées, au milieu de la longueur (figure 8). Les données du problème sont : $E = 3\ 000$; $\nu = 0,3$; σ_Y (limite élastique) = 24,3 ; E_p (module plastique) = 300 ; $R = 300$; L (totale) = 600 ; $h = 3$. En raison de la symétrie, un huitième de la coque est étudié en utilisant 32×32 éléments quadrilatéraux. La loi de comportement est élastoplastique avec écrouissage isotrope. Simo et al. [SIM 92] ont utilisé un modèle d'élément de coque quadrilatéral dit « géométriquement exact » avec le critère de plasticité de Ilyushin-Shapiro généralisé tandis que Brank et al. [BRA 97] ont utilisé un modèle d'élément de coque en rotations modérées avec intégration plastique suivant l'épaisseur et un paramètre d'écrouissage un peu différent.

Dans notre simulation, un huitième de la coque est discrétisé en $32 \times 32 \times 2$ éléments DKT12. Le calcul est effectué en 510 pas et 4,5 itérations par pas en moyenne. Le temps CPU est de 13 h sur une station de travail DEC Alpha.

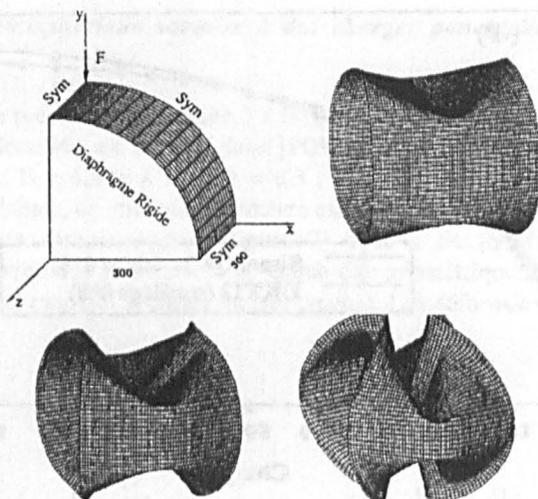


Figure 8. Géométrie et déformée de la coque pincée

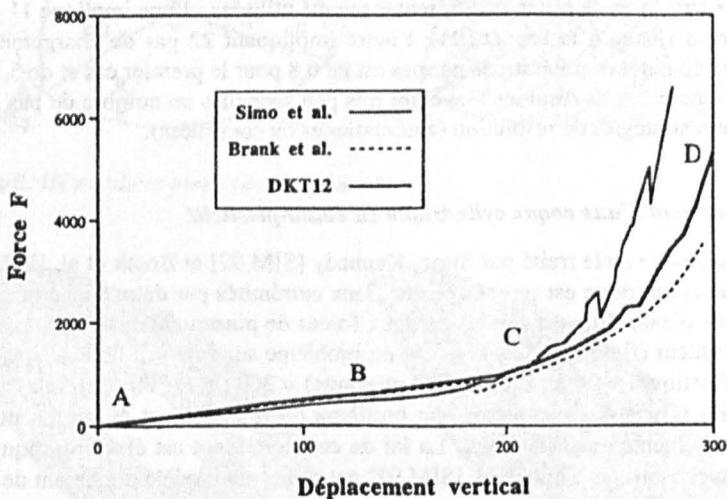


Figure 9. Courbe charge-déplacement pour la coque cylindrique pincée

La comparaison des courbes charge-déplacement est présentée dans la figure 9. La réponse au pincement peut être divisée en deux phases. La première est caractérisée par un comportement de flexion dominant à faible rigidité. La deuxième phase est caractérisée par un comportement de membrane dominant rigidifiant la coque. Les trois courbes de résultats sont très proches dans la première phase et

divergent un peu dans la deuxième phase. Un phénomène de flambement localisé peut être observé dans les trois modèles utilisés (petits sauts sur la courbe charge déplacement).

Les configurations initiale et déformées correspondant aux points A, B, C, D sur la courbe DKT12 (figure 9) sont présentées dans la figure 8. On notera le caractère fortement non linéaire du problème. De grands déplacements et grandes rotations sont observés jusqu'au contact des deux charges diamétralement opposées. La plasticité est localisée le long des zones de pliage qui évoluent au cours de la déformation et une bonne simulation implique nécessairement un nombre élevé d'éléments.

5. Conclusion

Un élément de coque mince triangulaire avec approximations linéaires des déplacements et rotations a été formulé pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques minces élastoplastiques. L'introduction des hypothèses de Kirchhoff sous forme discrète conduit à un élément à 12 DDL sans effet de CT et sans mode parasite. Une formulation lagrangienne actualisée à chaque itération rend cet élément très simple dans sa mise en œuvre et efficace dans l'analyse incrémentale non linéaire. A chaque itération, le mouvement est décomposé en un mouvement de corps rigide et en un mouvement associé à des déplacements et rotations modérées produisant de petites déformations. Le traitement de grandes rotations dans l'espace ne pose aucune difficulté grâce à l'actualisation successive des repères. De nombreux exemples ont montré l'efficacité et les performances du modèle. Sur tous les problèmes traités, les résultats montrent que le modèle DKT12/FLAI permet de reproduire les résultats obtenus par des modèles beaucoup plus complexes sur le plan théorique (comme la théorie des coques dite « géométriquement exacte » [SIM 88], [IBR 97] avec traitement des rotations finies par différentes paramétrisations). Il est également possible d'étendre la validité du modèle au cas des grandes déformations (élastoplastiques ou hyperélastiques).

6. Bibliographie

- [AMA 96] AMMAR S., Méthode asymptotique perturbée appliquée à la résolution de problèmes non linéaires en grandes rotations et grands déplacements, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1996.
- [BAS 92] BASAR Y., DING Y., « Finite-rotation shell elements for the analysis of finite rotation shell problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 165-169, 1992.
- [BAT 88] BATOZ J.L., GUO Y.Q., POL P., « Grands déplacements de coques minces élastoplastiques (modèles et exemples) », *Proc. StruCoMe 88*, Paris, Ed. Hermès, pp. 81-94, 1988.

- [BAT 89] BATOZ J.L., DUROUX P., ROELANDT, J.M., POL P., « A membrane bending finite element model for sheet forming », *Proceedings 3rd Int. Conf. in Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM 89*, Fort Collins, Col., USA, 26-30 June 1989, Balkema Editeur, pp. 389-394.
- [BAT 92] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol. 3 « Coques », Ed. Hermès, Paris, 1992.
- [BRA 97] BRANK B., PERIC D., DAMJANIC F.B., « On large deformations of thin elasto-plastic shells : implementation of a finite rotation model for quadrilateral shell element », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 689-726, 1997.
- [BUE 92] BUCHTER N., RAMM E., « Shell theory versus degeneration : A comparison in large rotation shell problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 39-59, 1992.
- [CRI 92] CRISFIELD M., PENG X., « Efficient non-linear shell formulations with large rotations and plasticity », *Computational plasticity : Models, Software and Applications*, Ed. D.R.J. Owen et al. Part 1, Pineridge Press, Swansea, pp. 1979-1997, 1992.
- [GUO 87] GUO Y.Q., *Analyse non linéaire statique et dynamique des poutres tridimensionnelles élastoplastiques*, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1987.
- [GUO 97] GUO Y.Q., SHAKOURZADEH H., « Comparaison de différents algorithmes de plasticité dans l'analyse non linéaire des structures de poutres 3D », *Revue Européenne des Elements Finis*, Vol. 6, n° 2, pp. 135-164, 1997.
- [IBR 97] IBRAHIMBEGOVIC A., « Stress resultant geometrically exact shell theory for finite rotations and its finite element implementation », *Appl. Mech. Review*, Vol. 50, n° 4, pp. 199-226, April 1997.
- [JIA 94] JIANG L., CHERNUKA M.W., PEGG N.G., « A co-rotational updated Lagrangian formulation for geometrically finite element analysis of shell structures », *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 18, pp. 129-140, 1994.
- [MOR 71] MORLEY L.S.D., « The constant moment plate bending element », *J. Strain Analysis*, Vol. 6, n° 1, pp. 20-24, 1971.
- [NOO 89] NOOR A.K., BELYTSCHKO T., SIMO J.C., Eds., « Analytical and computational models for shells », *ASME Publication CED*, Vol. 3, 1989.
- [ONO 94] ONATE, E., ZARATE F., FLORES F., « A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 2569-2582, 1994.
- [PAL 97] PALMA F.J., VILARINO A., « Analyse linéaire de coques minces élastiques par deux MEF non conformes », *Revue Européenne des Elements Finis*, Vol. 6, n° 1, pp. 7-22, 1997.
- [PEN 92] PENG X., CRISFIELD M.A., « A consistent co-rotation formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1829-1847, 1992.

- [POL 92] POL P., Simulation du comportement élastoplastique de coques minces par éléments finis, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1992.
- [ROE 91] ROELANDT J.M., BATOZ J.L. « Shell finite element for deep drawing problems : computational aspects and results », IUTAM Symposium on Finite Inelastic Deformations, Hannover, West Germany, 19-23 August 1991 (D. Besdo, E. Stein (Eds). Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications, IUTAM Symposium Hannover/Germany 1991, © Springer Verlag Berlin Heidelberg 1992).
- [SHA 94] SHAKOURZADEH H., Modélisation des structures-poutres tridimensionnelles à parois minces et simulation du comportement non linéaire géométrique et élasto-plastique, Thèse de Doctorat, 1994.
- [SHA 96] SHAKOURZADEH H., GUO, Y.Q., BATOZ J.L., « On the large displacements and instabilities of 3D elasto-plastic thin walled beam structures », *ECCOMAS 96*, Paris, pp. 197-203, 1996.
- [SIM 88] SIMO J.C., FOX D.D., RIFAI M.S., « Formulation and computation aspects of a stress resultant geometrically exact shell model - Computational mechanics 88 - Theory and applications », *Proc. Int. Conf. on Computational Eng. Science*, Atlanta, April 1988.
- [SIM 92] SIMO J.C., KENNEDY J.G., « On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V. Non-linear plasticity : formulation and integration algorithms », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 96, pp. 133-171, 1992.
- [VAN 93] VAN KEULEN F., On refined triangular plate and shell elements, PhD Thesis, Technische Universiteit, Delft, 1993.
- [WUN 92] WUNDERLICH W., Eds., « Modelling of shells with non-linear behavior », *EUROMECH 292*, TU, München, 1992.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O.C., Ed., Selected papers from WCCM II : « Modelling of plates and shells », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, 1991.