
Eléments diffus pour frontières absorbantes locales en espace-temps

Hormoz Modaressi — Philippe Aubert

BRGM, Direction de la Recherche
Avenue Claude Guillemin, BP 6009
45060 Orléans cedex

h.modaressi@brgm.fr

RÉSUMÉ. Dans cet article, la construction de l'impédance spectrale pour les frontières absorbantes, dans le cadre d'une approximation paraxiale jusqu'à l'ordre deux, est présentée pour un milieu linéaire isotrope élastique. Elle fait apparaître des termes dérivés d'ordre élevé, ce qui nous conduit à utiliser la méthode des éléments diffus pour l'approximation du champ de déplacements.

ABSTRACT. In this paper, spectral impedance for absorbing boundaries using second-order paraxial approximation is presented for a linear elastic isotropic media. High-order derivatives then appear which yields to employ the diffuse element method for discretize the displacement field in the weak form.

MOTS-CLÉS : méthode des éléments diffus, frontières absorbantes, approximation paraxiale.
KEY WORDS : diffuse element method, absorbing boundaries, paraxial approximation.

1. Introduction

La propagation des ondes occupe une place importante dans le domaine de l'ingénierie sismique puisqu'il s'agit du mode de transport de l'énergie libérée au cours d'un tremblement de terre. L'un des problèmes rencontrés dans ce domaine par les ingénieurs et les chercheurs porte sur la modélisation du sol. En effet, lors de l'étude numérique du comportement d'une liaison sol-structure soumise à une sollicitation dynamique, il est nécessaire de modéliser le sol comme un milieu semi-infini. Cette approche engendre, dans le cadre d'une modélisation par éléments finis, des problèmes de réflexions d'ondes parasites à la frontière du maillage. Ces ondes perturbent les résultats des calculs et doivent être supprimées. Sous la condition d'un comportement linéaire du sol, plusieurs méthodes ont été proposées dans la

littérature pour modéliser le milieu non borné. Pour les problèmes transitoires, la technique des frontières absorbantes a été introduite pour répondre à la problématique. Celles-ci sont définies à partir de l'approximation paraxiale ([ENG 77], [ENG 79], [MOD 87], [AUB 89], [MOD 94], [MOD 96a]). Il s'agit de construire une impédance dynamique sur la frontière du maillage qui soit locale en espace et en temps.

Pour une approximation paraxiale d'ordre élevé, la présence de dérivées spatiales pose problème lorsque la formulation variationnelle est discrétisée par la méthode des éléments finis de type C^0 . C'est pourquoi nous proposons d'utiliser, comme alternative, la méthode des éléments diffus ([NAY 91] [NAY 92] [BEL 94]) qui permet de mieux rendre compte de ces dérivées.

2. Propagation d'ondes dans les milieux élastiques

2.1. Hypothèses

Considérons un milieu dont le comportement est élastique linéaire isotrope. Pour étudier la propagation des ondes dans ce milieu, nous décomposons le domaine semi-infini Ω intéressé par la modélisation en deux sous domaines : le sous domaine intérieur borné Ω_s , dans lequel est écrit l'équilibre dynamique ; et le sous domaine extérieur non borné Ω_e , qui n'est pas modélisé directement.

Ces deux zones sont séparées par la frontière Σ , sur laquelle l'impédance spectrale et l'action spectrale seront calculées. Celles-ci correspondent à l'action exercée par Ω_e sur Ω_s , respectivement dans le domaine de Fourier et dans le domaine physique.

2.2. Conditions aux limites, conditions initiales et formulation variationnelle

Le comportement du milieu dans le domaine Ω_s étant supposé élastique linéaire isotrope, l'équilibre dynamique est donné par l'équation de Navier. Par ailleurs, les conditions initiales, qui vérifient l'équilibre mécanique à $t = 0$, sont :

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0(\underline{x}) \\ \underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x}) \end{cases} \quad \underline{x} \in \Omega_s$$

Pour les conditions aux limites, qui sont définies sur l'intervalle de temps $]0, T]$, la frontière du domaine intérieur Ω_s se divise en trois parties distinctes :

- Γ_u sur laquelle est imposée une condition de Dirichlet pour le vecteur déplacement, soit traditionnellement $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$;

- Γ_σ sur laquelle est imposée une condition de Neumann, soit $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{t}}$;
- Σ sur laquelle il apparaît une double condition (qui assure la continuité des déplacements et des vecteurs contraintes) pour tenir compte du domaine non borné, $\underline{u} = \underline{u}'$ et $\underline{t} + \underline{t}'(\underline{u}') = 0$.

Dans ces conditions, la formulation variationnelle s'écrit :

$$\int_{\Omega} \rho \underline{\underline{u}} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) ; \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Sigma} \underline{t} \cdot \underline{v} d\Sigma = \int_{\Omega} \rho \underline{g} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{v} d\Gamma \quad [1]$$

où \underline{u} est le champ de déplacement, \underline{v} le champ test associé, ρ représente la densité du matériau, \underline{g} est l'accélération de la pesanteur, $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur d'élasticité.

2.3. Frontières absorbantes et approximation paraxiale

L'objectif du développement des frontières absorbantes est alors de permettre l'évaluation du troisième terme de l'équation [1].

2.3.1. Transformée de Fourier de l'équation de Navier

Pour cette évaluation, il est nécessaire de calculer au préalable dans le domaine de Fourier, l'impédance spectrale \hat{t} . La démarche consiste dans un premier temps à projeter le champ de déplacement sur le plan tangent à Σ et sur sa normale \underline{e}_3 (figure 1).

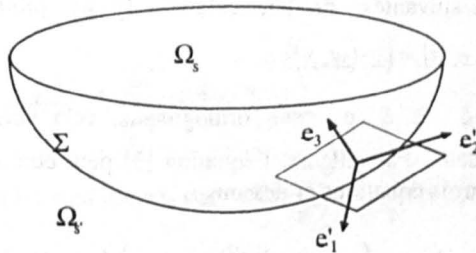


Figure 1. Découpage du domaine et système de référence rapporté à la frontière

Par la suite, le prime indique l'appartenance au plan tangent à Σ et l'indice 3 celle à la normale \underline{e}_3 . Dans un deuxième temps, il convient d'effectuer la transformée de Fourier de l'équation élasto-dynamique par rapport aux variables \underline{x}' et t . Ainsi en découpant les termes écrits suivant le plan tangent à Σ et suivant la normale \underline{e}_3 , nous aboutissons respectivement aux expressions suivantes :

$$-(C_p^2 - C_s^2) \left[(\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}') - i \partial_3 \hat{u}_3 \right] \underline{\xi}' + C_s^2 \left(-|\underline{\xi}'|^2 + \partial_{33} \right) \hat{\underline{u}}' + \omega^2 \hat{\underline{u}}' = 0 \tag{2}$$

$$(C_p^2 - C_s^2) \left[i \partial_3 (\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}') + \partial_{33} \hat{u}_3 \right] + C_s^2 \left(-|\underline{\xi}'|^2 + \partial_{33} \right) \hat{u}_3 + \omega^2 \hat{u}_3 = 0 \tag{3}$$

où $\hat{\underline{u}}'$ et \hat{u}_3 représentent les transformées de Fourier des composantes du déplacement, ω et $\underline{\xi}'$ désignent respectivement la pulsation associée à t et le vecteur d'onde associé à \underline{x}' , C_s et C_p sont les vitesses de propagation usuelles des ondes respectivement de cisaillement et de compression et dont les formules sont données en fonction des coefficients de Lamé :

$$C_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad C_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

A ce stade, nous procédons à une nouvelle décomposition, celle du vecteur $\hat{\underline{u}}'$ suivant les directions $\underline{\xi}'$ et $\underline{\xi}' \wedge \underline{e}_3$:

$$\hat{\underline{u}}' = \frac{(\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}')}{|\underline{\xi}'|^2} \underline{\xi}' - \frac{(\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}', \underline{e}_3)}{|\underline{\xi}'|^2} \underline{\xi}' \wedge \underline{e}_3$$

avec les notations suivantes : produit scalaire : $(\underline{v} \cdot \underline{w})$, produit vectoriel : $\underline{v} \wedge \underline{w}$, produit mixte : $(\underline{v}, \underline{w}, \underline{x}) = (\underline{v} \cdot (\underline{w} \wedge \underline{x}))$.

Les vecteurs $\underline{\xi}'$ et $\underline{\xi}' \wedge \underline{e}_3$ étant orthogonaux, cela nous autorise à scinder l'équation [2] en deux. Par ailleurs, l'équation [3] peut être simplifiée, finalement nous obtenons les trois équations ci-dessous :

$$\text{suivant la direction } \underline{\xi}' \wedge \underline{e}_3 : \left(\omega^2 - C_s^2 |\underline{\xi}'|^2 + C_s^2 \partial_{33} \right) (\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}', \underline{e}_3) = 0 \tag{4}$$

$$\text{suivant la direction } \underline{\xi}' : \left[\frac{\omega^2}{|\underline{\xi}'|^2} - C_p^2 + \frac{C_s^2}{|\underline{\xi}'|^2} \partial_{33} \right] (\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}') + i (C_p^2 - C_s^2) \partial_3 \hat{u}_3 = 0 \tag{5}$$

$$\text{suivant la direction } \underline{e}_3 : i (C_p^2 - C_s^2) \partial_3 (\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}') + \left(\omega^2 - C_s^2 |\underline{\xi}'|^2 + C_p^2 \partial_{33} \right) \hat{u}_3 = 0 \tag{6}$$

2.3.2. Recherche des solutions

Les trois équations précédentes forment un système différentiel en x_3 , diagonalisé selon $\underline{\xi}' \wedge \underline{e}_3$, $\underline{\xi}'$ et \underline{e}_3 . Les solutions de ce système sont supposées être harmoniques. Par conséquent, nous les cherchons sous la forme générale donnée par [MOD 87] :

$$\begin{cases} \left(\underline{\xi}', \underline{\hat{u}}', \underline{e}_3 \right) = \left| \underline{\xi}' \right| A \exp(-i S x_3) \\ \left(\underline{\xi}', \underline{\hat{u}}' \right) = \left| \underline{\xi}' \right| \left[A_s \exp(-i S_s x_3) + A_p \exp(-i S_p x_3) \right] \\ \hat{u}_3 = B_s \exp(-i S_s x_3) + B_p \exp(-i S_p x_3) \end{cases}$$

La recherche de ces solutions consiste donc à préciser les expressions des nombres d'ondes S , S_s et S_p . Par ailleurs, les coefficients A , A_s , A_p , B_s et B_p sont des constantes qu'il convient de déterminer grâce aux conditions aux limites du problème.

Avec cette hypothèse, l'équation [4] se résout directement, soit :

$$\left(\underline{\xi}', \underline{\hat{u}}', \underline{e}_3 \right) = \left| \underline{\xi}' \right| A \exp(-i \xi_s x_3) \quad \text{avec} \quad \xi_s^2 = \frac{\omega^2}{C_s^2} - \left| \underline{\xi}' \right|^2$$

La résolution simultanée des équations obtenues après avoir injecté la forme générale des solutions dans [5] et [6], fournit les solutions :

$$\left(\underline{\xi}', \underline{\hat{u}}' \right) = \left| \underline{\xi}' \right| \left[A_s \exp(-i \xi_s x_3) + A_p \exp(-i \xi_p x_3) \right]$$

$$\hat{u}_3 = A_s \frac{\left| \underline{\xi}' \right|}{\xi_s} \exp(-i \xi_s x_3) - A_p \frac{\xi_p}{\left| \underline{\xi}' \right|} \exp(-i \xi_p x_3)$$

où les nombres d'ondes sont donnés par : $\xi_s^2 = \frac{\omega^2}{C_s^2} - \left| \underline{\xi}' \right|^2$ et $\xi_p^2 = \frac{\omega^2}{C_p^2} - \left| \underline{\xi}' \right|^2$.

2.3.3. Impédance spectrale

L'impédance spectrale correspond à la transformée de Fourier du vecteur contrainte sur la frontière. Elle se décompose suivant les directions \underline{e}_3 , $\underline{\xi}'$ et $\underline{\xi}' \wedge \underline{e}_3$ selon la formule :

$$\hat{\underline{i}}(\underline{\xi}', 0, \omega) = a_0 \underline{e}_3 + b_0 \underline{\xi}' + c_0 \underline{\xi}' \wedge \underline{e}_3$$

où les coefficients a_0 , b_0 et c_0 sont donnés par :

$$a_0 = i \rho \left[\left(\frac{\omega^2}{|\underline{\xi}'|^2 + \xi_s \xi_p} - 2 C_s^2 \right) \left(\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}_0' \right) - \frac{\omega^2 \xi_s}{|\underline{\xi}'|^2 + \xi_s \xi_p} \hat{u}_{30} \right]$$

$$b_0 = \frac{i \rho}{|\underline{\xi}'|^2 + \xi_s \xi_p} \left[-\omega^2 \xi_p \frac{(\underline{\xi}' \cdot \hat{\underline{u}}_0')}{|\underline{\xi}'|^2} + C_s^2 (|\underline{\xi}'|^2 + 2 \xi_s \xi_p - \xi_s^2) \hat{u}_{30} \right]$$

$$c_0 = i \rho C_s^2 \xi_s \frac{(\underline{\xi}', \hat{\underline{u}}_0', \underline{e}_3)}{|\underline{\xi}'|^2}$$

2.3.4. Approximation paraxiale

L'approximation paraxiale repose alors sur l'hypothèse que le rapport norme du vecteur d'onde/pulsation est très petit devant l'unité [ENG 77], ce qui permet de faire un développement limité des nombres d'ondes :

$$\xi_\alpha = \frac{\omega}{C_\alpha} (1 - C_\alpha^2 \kappa^2)^{1/2} \approx \frac{\omega}{C_\alpha} \left[1 - \frac{1}{2} C_\alpha^2 \kappa^2 + \dots \right] \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{|\underline{\xi}'|}{\omega} \quad \text{et} \quad \alpha = s, p \quad [7]$$

La figure 2 illustre la différence entre la relation exacte $\xi_\alpha = f\left(\frac{\xi'}{\omega}\right)$ et diverses approximations. La relation exacte est représentée par le cercle de rayon ω / C_α ; les développements limités d'ordre zéro et d'ordre un correspondent respectivement à la droite $\xi_\alpha = \omega / C_\alpha$ et à la parabole $\xi_\alpha = \frac{\omega}{C_\alpha} - \frac{C_\alpha}{2 \omega} \left| \underline{\xi}' \right|^2$. La figure montre que ces

approximations sont correctes soit lorsque la norme du vecteur d'onde $\underline{\xi}'$ est faible, ce qui correspond aux ondes se propageant dans des directions voisines de la normale \underline{e}_3 , soit lorsque la pulsation ω est grande, ce qui correspond aux hautes fréquences.

Il est donc possible d'obtenir une approximation paraxiale de l'impédance spectrale à différents ordres en fonction de l'ordre des développements limités effectués.

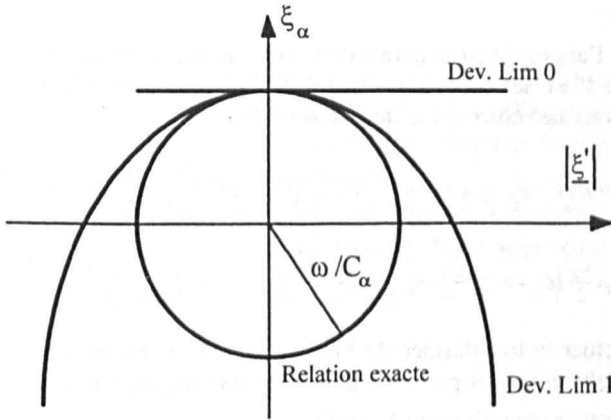


Figure 2. $\xi_\alpha = f\left(\left|\underline{\xi}'\right|\right)$ relation exacte et développements limités d'ordre zéro et un

Ordre zéro

Pour l'approximation paraxiale d'ordre zéro, seuls les termes en κ^{-1} sont conservés dans l'expression des coefficients a_0 , b_0 et c_0 , ce qui conduit pour l'impédance dynamique à :

$$\hat{i}\left(\underline{\xi}', 0, \omega\right) = -i \omega \rho \left(C_p \hat{u}_{30} \underline{e}_3 + C_s \hat{u}_0' \right)$$

et pour l'action spectrale (en revenant à l'espace physique par transformée de Fourier inverse) :

$$\underline{t}_0(t) = -\rho C_p \partial_t u_{30} \underline{e}_3 - \rho C_s \partial_t u_0'$$

Ordre un

Pour l'approximation paraxiale d'ordre un, les termes en κ^{-1} et κ^0 sont conservés. Notons toutefois que pour obtenir tous ces termes, un développement à l'ordre zéro de la relation [7] suffit. Nous avons ainsi :

$$\hat{i}\left(\underline{\xi}', 0, \omega\right) = -i \omega \rho \left(C_p \hat{u}_{30} \underline{e}_3 + C_s \hat{u}_0' \right) + i \rho C_s \left(C_p - 2 C_s \right) \left[\left(\underline{\xi}' \cdot \hat{u}_0' \right) \underline{e}_3 - \hat{u}_{30} \underline{\xi}' \right]$$

De nouveau, nous appliquons la transformée de Fourier inverse :

$$\underline{t}_0(t) = -\rho C_p \partial_t u_{30} \underline{e}_3 - \rho C_s \partial_t u_0' + \rho C_s \left(C_p - 2 C_s \right) \left[\text{div}'\left(\underline{u}_0'\right) \underline{e}_3 - \underline{\text{grad}}'\left(u_{30}\right) \right]$$

Ordre deux

Enfin, pour l'approximation paraxiale d'ordre deux, les termes en κ^{-1} , κ^0 et κ^1 sont conservés. Il est ici nécessaire de développer la relation [7] à l'ordre un pour obtenir tous les termes correspondants. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \hat{t}(\underline{\xi}', 0, \omega) = & -i \omega \rho (C_p \hat{u}_{30} \underline{e}_3 + C_s \hat{u}_0') + i \rho C_s (C_p - 2 C_s) \left[(\underline{\xi}' \cdot \hat{u}_0') \underline{e}_3 - \hat{u}_{30} \underline{\xi}' \right] \\ & - i \rho \frac{C_p^2}{2} (C_p - 2 C_s) \frac{|\underline{\xi}'|^2}{\omega} \hat{u}_{30} \underline{e}_3 + i \rho \frac{C_s^3}{2} \frac{|\underline{\xi}'|^2}{\omega} \hat{u}_0' - i \rho C_s^2 (C_s - C_p) \frac{(\underline{\xi}' \cdot \hat{u}_0')}{\omega} \underline{\xi}' \end{aligned}$$

Afin d'effectuer la transformée de Fourier inverse, il est nécessaire au préalable de multiplier cette équation par $i \omega$, nous déterminons alors la dérivée par rapport au temps du vecteur contrainte sur l'interface :

$$\begin{aligned} \partial_t t_0(t) = & -\rho C_p \partial_u u_{30} \underline{e}_3 - \rho C_s \partial_u u_0' + \rho C_s (C_p - 2 C_s) \left[\text{div}'(\partial_t u_0') \underline{e}_3 - \underline{\text{grad}}'(\partial_t u_{30}) \right] \\ & - \rho \frac{C_p^2}{2} (C_p - 2 C_s) \Delta' u_{30} \underline{e}_3 + \rho \frac{C_s^3}{2} \Delta' u_0' - \rho C_s^2 (C_s - C_p) \underline{\text{grad}}'(\text{div}' u_0') \end{aligned}$$

D'une façon générale, nous pouvons introduire des opérateurs symboliques pour résumer l'expression de l'action spectrale :

$$t_0(t) = A_0(\partial_t \underline{u}) \quad \text{à l'ordre zéro}$$

$$t_0(t) = A_1(\partial_t \underline{u}, \partial_{\underline{x}} \underline{u}) \quad \text{à l'ordre un}$$

$$\partial_t t_0(t) = A_2(\partial_u \underline{u}, \partial_{\underline{x}} \underline{u}, \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \underline{u}) \quad \text{à l'ordre deux}$$

pour le champ de déplacement \underline{u} de Ω_s rayonnant vers l'extérieur.

Ces opérateurs mettent en évidence la présence de dérivées intérieures par rapport aux directions \underline{e}_1' et \underline{e}_2' (à l'ordre un $\partial_{\underline{x}}$ et deux $\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}$) du champ de déplacements qu'il convient de bien représenter lors de la discrétisation spatiale de la formulation variationnelle. Ces dérivées posent problème lorsque la méthode des éléments finis est employée. Il est en effet nécessaire d'introduire des éléments d'ordre élevé pour avoir une bonne évaluation de ces termes. Une alternative consiste à approximer le champ \underline{u} par la méthode des éléments diffus qui semble particulièrement appropriée puisqu'elle offre la possibilité de construire une approximation continûment dérivable à l'ordre souhaité.

4. Méthode des éléments diffus

Nous rappelons dans cette partie l'essentiel de la méthode des éléments diffus. Le lecteur pourra trouver dans les références [NAY 92], [BEL 94], [LAN 81] et [MOD 96b] des explications plus précises sur la construction de la méthode et des discussions sur l'influence de certains paramètres.

Considérons le domaine Ω de frontière Γ dans lequel N de nœuds *non reliés* les uns aux autres sont donnés. Le champ inconnu $\underline{u}(\underline{x})$ est approximé par le champ $\underline{u}^h(\underline{x})$ qui s'exprime par le produit scalaire suivant :

$$\underline{u}^h(\underline{x}) = {}^T \underline{b}(\underline{x}) \cdot \underline{a}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^m b_j(\underline{x}) a_j(\underline{x}) \quad [8]$$

\underline{b} est une base formée des m premiers monômes du vecteur position $\underline{x} = (x, y)$; en 2D, il vient par exemple : ${}^T \underline{b}(\underline{x}) = \{1\}$ pour le cas constant, ${}^T \underline{b}(\underline{x}) = \{1, x, y\}$ pour le cas linéaire, ${}^T \underline{b}(\underline{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ pour le cas quadratique.

\underline{a} est un vecteur dont les coefficients minimisent la norme pondérée suivante :

$$J(\underline{a}(\underline{x})) = \sum_{I=1}^N w_I(\underline{x}) \left[u_I - {}^T \underline{b}(\underline{x}_I) \cdot \underline{a}(\underline{x}_I) \right]^2$$

où u_I représente la valeur nodale du champ u au nœud I et w_I est une fonction de pondération associée à ce nœud I de coordonnées \underline{x}_I . Elle est positive et définie en fonction de la distance $d = \|\underline{x} - \underline{x}_I\|$; elle est sensiblement en forme de cloche sur un voisinage, aussi appelé domaine d'influence, du nœud I (i.e. pour $d \leq d_{\max I}$) et nulle partout ailleurs. Nous employons couramment la fonction sinusoïdale :

$$w_I(\underline{x}) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{d}{d_{\max I}} \right) \right)$$

La stationnarité de J par rapport à chaque coefficient du vecteur \underline{a} conduit à :

$$\mathbf{A}(\underline{x}) \underline{a}(\underline{x}) = \mathbf{B}(\underline{x}) \underline{U}$$

où les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont données en annexe et où \underline{U} désigne le vecteur des valeurs nodales u_I . L'inversion de \mathbf{A} conduit à la détermination de \underline{a} , qui après substitution dans [8] permet d'écrire le champ \underline{u}^h avec des *fonctions de forme* ϕ_I :

$$\underline{u}^h(\underline{x}) = \underline{b}(\underline{x}) \cdot \left[\mathbf{A}^{-1}(\underline{x}) \mathbf{B}(\underline{x}) \underline{U} \right] = \sum_{I=1}^N \phi_I(\underline{x}) u_I$$

avec $\phi_I(\underline{x}) = \sum_{j=1}^m b_{j,I}(\underline{x}) \left[\mathbf{A}^{-1}(\underline{x}) \mathbf{B}(\underline{x}) \right]_{jI}$

L'un des atouts majeurs de la méthode des éléments diffus provient de ce que les propriétés de dérivabilité de w_I se transmettent directement aux fonctions de formes ϕ_I et au champ \underline{u}^h . Par la suite, il est possible d'expliciter pleinement les dérivées successives de \underline{u}^h , dont voici l'expression déjà complexe de la dérivée première :

$$\underline{u}_{,j}^h(\underline{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_{I,j}(\underline{x}) u_I \quad \text{avec} \quad \phi_{I,j} = \sum_{j=1}^m \left[b_{j,I}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{jI} + b_j(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,j}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,j})_{jI} \right]$$

Il est important de noter que les fonctions de forme ne vérifient pas la propriété d'interpolation, (i.e. $\phi_K(\underline{x}_L) \neq \delta_{KL} \quad K, L = 1, \dots, N$). Par conséquent, le champ approché ne satisfait pas aux conditions limites essentielles. Ces dernières sont alors introduites dans la formulation variationnelle au moyen d'un multiplicateur de Lagrange.

5. Formulation variationnelle et discrétisation

5.1. Formulation variationnelle

En tenant compte de l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange, la formulation variationnelle s'écrit en considérant les champs et les fonctions tests suivants :

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{x}, t), \underline{v}(\underline{x}, t) \in U & U = \left\{ \underline{u}(\cdot, t) / \underline{u}(\cdot, t) \in (H^1(\overline{\Omega}_s))^3 \right\} \\ \underline{\lambda}(\underline{x}, t), \underline{l}(\underline{x}, t) \in L & L = \left\{ \underline{u}(\cdot, t) / \underline{u}(\cdot, t) \in (H^0(\Gamma_u))^3 \right\} \end{cases}$$

où le multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}$ correspond au vecteur contrainte sur la frontière Γ_u . Il vient pour tout $\underline{v} \in U$ et pour tout $\underline{l} \in L$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{D} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Sigma} \underline{t} \cdot \underline{v} d\Sigma - \int_{\Gamma} \underline{\lambda} \cdot \underline{v} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho \underline{g} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \underline{\underline{t}} \cdot \underline{v} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \underline{u} \cdot \underline{l} d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{l} d\Gamma \end{cases}$$

5.2. Discrétisation en temps

Nous envisageons deux approches basées sur le schéma implicite de Newmark (dont les coefficients sont notés β et γ) pour l'intégration en temps. Dans la première, nous appliquons le schéma de Newmark sur le vecteur contrainte, puis nous utilisons la loi d'évolution donnée par l'opérateur A_2 pour exprimer le taux de contrainte introduit. Dans la seconde, nous procédons de façon inverse : le vecteur contrainte est d'abord déterminé en intégrant sa loi d'évolution, le schéma de Newmark est ensuite employé sur le déplacement. Ces deux techniques fournissent en définitive des expressions différentes (voir termes matriciels en annexe).

5.3. Discrétisation en espace

Soient U^h et L^h les sous-espaces de dimension finie engendrés respectivement par la base des fonctions de forme éléments diffus et éléments finis. Nous cherchons les solutions approchées de la formulation variationnelle dans ces sous-espaces, ce qui correspond à la discrétisation suivante (par exemple pour l'étape n) :

$$\begin{cases} \underline{u}_n^h(\underline{x}) = \sum_I \phi_I(\underline{x}) \underline{e}_I u_{I,n} & \underline{x} \in \overline{\Omega}, \\ \underline{\lambda}_n^h(\underline{x}) = \sum_{\lambda} N_{\lambda}(\underline{x}) \underline{e}_{\lambda} \lambda_{\lambda,n} & \underline{x} \in \Gamma_u \end{cases}$$

Le champ de déplacements est approximé par la méthode des éléments diffus tandis que le multiplicateur de Lagrange est approximé par la méthode des éléments finis. Par conséquent, nous pouvons condenser les équations discrétisées sous la forme matricielle ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{M}} + \mathbf{K} + \mathbf{N} & \mathbf{G} \\ {}^T \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} \\ \mathbf{\Lambda}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{u_{n+1}} \\ \mathbf{F}_{\lambda_{n+1}} \end{bmatrix} \quad [9]$$

où \mathbf{U} est le vecteur des contributions nodales en déplacements, $\mathbf{\Lambda}$ est le vecteur des valeurs nodales en contraintes sur la frontière Γ_u (i.e., le multiplicateur de Lagrange). \mathbf{F}_u et \mathbf{F}_{λ} regroupent toutes les expressions du membre de droite de la formulation variationnelle (efforts extérieurs et termes provenant de l'intégration en temps). Les matrices de ce système sont, quant à elles, données en annexe. Nous distinguons naturellement, pour la sous matrice \mathbf{N} , les deux schémas envisagés pour la discrétisation en temps. En outre, il est important de noter que, dans chacun de ces cas, il est nécessaire d'introduire la matrice \mathbf{P} représentant le passage du repère local $(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$ au repère global $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

6. Applications numériques

6.1. Test mono-dimensionnel

Considérons deux colonnes de sol d'une hauteur de 10 m soumises à leur sommet à une charge transitoire (fonction de Heaviside et intensité $F = 200 \text{ N.m}^{-1}$). Les deux colonnes diffèrent par les conditions aux limites à la base : celle de la première colonne est considérée comme rigide, celle de la seconde est modélisée par une frontière absorbante (figure 3).

Les propriétés mécaniques du matériau considéré sont les suivantes : le module d'Young $E = 1 \text{ MPa}$; le coefficient de Poisson $\nu = 0,4$; la densité $\rho = 1820 \text{ kg.m}^{-3}$. Avec ces caractéristiques, les vitesses de propagation des ondes dans le milieu sont $C_p = 34 \text{ m.s}^{-1}$ et $C_s = 14 \text{ m.s}^{-1}$. La méthode des éléments diffus utilise 22 nœuds répartis régulièrement. Les fonctions de forme sont calculées à partir d'une base linéaire, de fonctions de pondération sinusoïdales et un rayon du domaine d'influence identique pour chaque nœud et valant $d_{\text{max}} = 0,12$. Enfin, en ce qui concerne l'intégration en temps, le pas de la discrétisation est $\Delta t = 0,005 \text{ s}$ et les coefficients du schéma de Newmark sont $\beta = 0,25$ et $\gamma = 0,5$. De plus, les deux schémas proposés conduisent pour ce cas aux mêmes résultats.

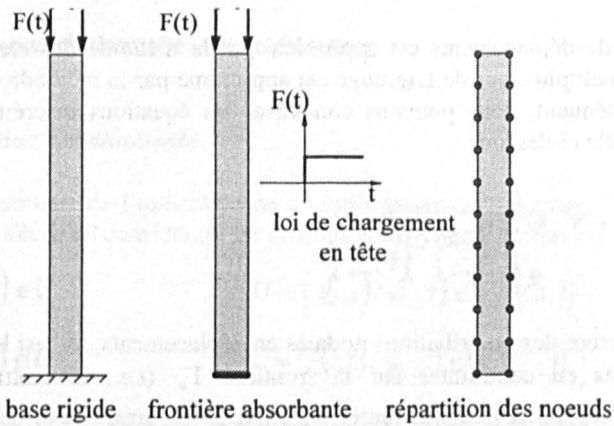


Figure 3. Géométrie, conditions aux limites et position des nœuds pour le test 1D

Les résultats de la figure 4 montrent que pour la colonne ayant une base rigide, l'onde se propage normalement vers le bas puis elle est successivement renvoyée par les frontières inférieure et supérieure du domaine. Le déplacement vertical à l'intérieur de la colonne est donc de nature périodique. Avec l'approximation paraxiale, l'onde quitte le domaine Ω_s sans réflexion : le déplacement vertical ne

cesse d'augmenter en tout point de la colonne. Dans cette configuration 1D les approximations d'ordre zéro, un et deux sont équivalentes et correspondent dans le cas présent, où la propagation est verticale, à l'impédance exacte.

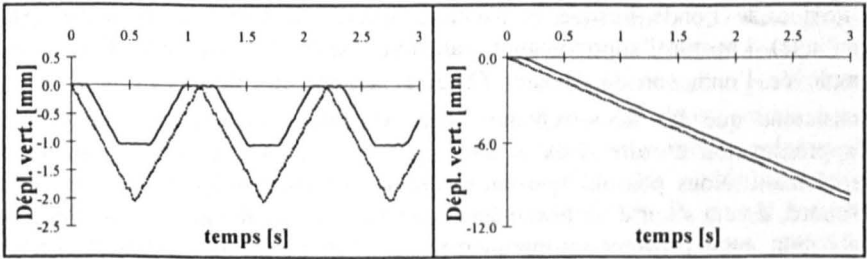


Figure 4. Déplacement vertical (en milieu de colonne : ligne continue ; en tête de colonne : ligne pointillée) pour le calcul sans frontière absorbante (à gauche) et pour le calcul avec frontière absorbante (à droite)

6.1. Test bi-dimensionnel

Considérons un domaine bi-dimensionnel de $10 \times 10 \text{ m}^2$, soumis à une charge ponctuelle verticale appliquée sur la surface libre au niveau de l'axe de symétrie (cette symétrie permet de ne modéliser qu'une moitié du domaine). Les surfaces inférieure et latérales sont modélisées par des frontières absorbantes. La charge appliquée a la forme d'un signal de Ricker transitoire d'ordre zéro avec $t_s = 0 \text{ s}$ et $t_p = 0,2 \text{ s}$ et son intensité maximale est $F_m = 500 \text{ N}$.

Les vitesses de propagation dans le milieu considéré sont : $C_p = 220 \text{ m.s}^{-1}$ et $C_s = 125 \text{ m.s}^{-1}$. L'approximation du déplacement est réalisé en utilisant 462 nœuds répartis régulièrement dans les deux directions de l'espace (sur une même ligne, deux nœuds voisins sont distants de 0,5 m), une base quadratique, des fonctions de pondération sinusoïdales et un rayon du domaine d'influence constant $d_{\max} = 0,85$. Pour la modélisation des frontières absorbantes, 31 multiplicateurs de Lagrange ont été introduits. Enfin, les paramètres employés lors de la discrétisation en temps sont $\Delta t = 0,005 \text{ s}$, $\beta = 0,25$ et $\gamma = 0,5$.

En ce qui concerne les schémas d'intégration en temps, les deux procédures envisagées ont conduit à des résultats fort différents. En effet, le premier schéma, bien qu'il soit implicite, n'a pas permis d'obtenir de solution satisfaisante. Au début du calcul, l'onde se propage normalement dans le milieu, mais lorsque la frontière absorbante devient active, de fortes oscillations apparaissent et entraînent la divergence de la solution. La figure 5, qui représente le déplacement vertical pour un point de l'axe de symétrie situé près de l'interface Σ , met en évidence cette instabilité. Nous avons ainsi mesuré l'importance du schéma d'intégration.

Les différentes approximations paraxiales (*ordre zéro, un et deux*) ont été appliquées lors de différents calculs. Le test a également été mené avec une base rigide à la place de la frontière absorbante. Le déplacement vertical au point situé sur l'axe à mi-hauteur du domaine est représenté sur la figure 6. Nous observons la réflexion de l'onde lorsque la frontière absorbante n'est pas modélisée (ligne continue). Lorsque l'approximation paraxiale d'ordre zéro ou celle d'ordre un est employée, l'onde sort du domaine Ω , sans parasiter la solution. Par ailleurs, nous constatons que les deux réponses sont très proches l'une de l'autre. Enfin, l'approximation d'ordre deux conduit, quant à elle, à une solution qui diverge rapidement. Nous pensons que deux raisons peuvent expliquer cette divergence. D'abord, il peut s'agir d'un phénomène numérique lié à l'intégration en temps, mais cela peut aussi provenir intrinsèquement de l'ordre de l'approximation. En effet, Engquist et Majda [ENG 77] remarquent que le développement de Taylor peut conduire à un problème mal posé. Ils préconisent alors d'utiliser le développement de Padé, qui dans notre cas est équivalent à celui de Taylor. Cette explication doit toutefois être nuancée, car les auteurs procèdent d'une façon légèrement différente à la nôtre : ils appliquent l'approximation paraxiale sur l'équation aux dérivées partielles initiale écrite sur l'interface et non sur l'impédance spectrale.

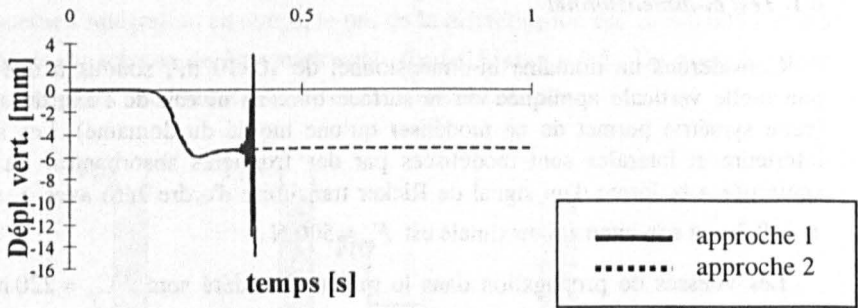


Figure 5. Observation de la divergence de l'approche 1

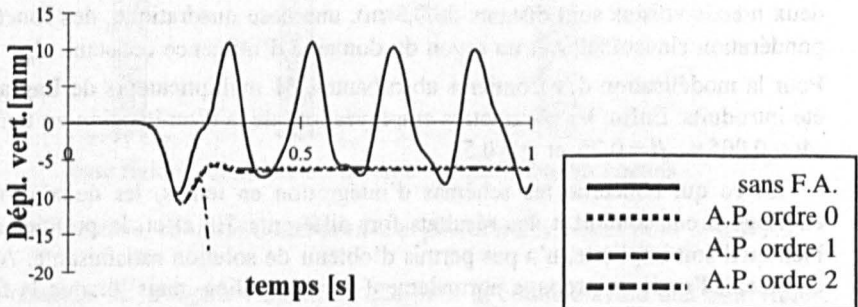


Figure 6. Déplacement vertical en fonction du temps pour différents ordres d'approximation paraxiale

7. Conclusion

La construction de *frontières absorbantes* pour la modélisation des milieux élastiques en régime dynamique a été présentée. Nous nous sommes notamment attachés à développer l'*approximation paraxiale* de l'*impédance spectrale* jusqu'à l'ordre deux. Nous avons ainsi mis en évidence la présence de dérivées spatiales d'ordre élevé qui engendre certaines difficultés lors d'une discrétisation par éléments finis. Nous avons donc proposé d'approximer le champ des déplacements par la *méthode des éléments diffus*, dont nous avons rappelé les points principaux. La formulation variationnelle correspondante introduit alors des multiplicateurs de Lagrange pour imposer les conditions aux limites essentielles. En ce qui concerne l'intégration en temps des équations, nous avons envisagé deux approches différentes. Deux applications numériques ont été proposées pour mettre en évidence le comportement de ces frontières absorbantes. Le premier test a permis de confirmer le bon fonctionnement de telles frontières. Il a également montré l'aptitude de la méthode des éléments diffus pour la modélisation de problèmes dynamiques. Le deuxième test a révélé l'importance du schéma d'intégration en temps en mettant en défaut la première approche étudiée. L'étude complète d'un tel schéma pourrait être complétée dans un futur développement. En outre, les résultats de ce test, montrent que l'approximation paraxiale d'ordre zéro fournit une réponse très voisine de celle d'ordre un. Le calcul avec une approximation d'ordre deux a quant à lui divergé, pour une raison qui est liée soit à la discrétisation en temps, soit au développement de Taylor mal adapté comme cela est souligné dans [ENG 77].

8. Bibliographie

- [AUB 89] AUBRY D., MODARESSI H., « Un modèle de sols saturés en dynamique non linéaire » *Revue Française de Géotech.*, 46, p. 43-75, 1989.
- [BEL 94b] BELYTSCHKO T., LU Y.Y., GU L., « Element-free Galerkin methods » *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 37, p. 229-256, 1994.
- [ENG 77] ENGQUIST B., MAJDA A., « Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves » *Math. Computation*, 31, p. 629-651, 1977.
- [ENG 79] ENGQUIST B., MAJDA A., « Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations » *Comm. Pure Applied Math.*, XXXII, p. 313-357, 1979.
- [LAN 81] LANCASTER P., SALKAUSKAS K., « Surfaces generated by moving least squares methods » *Math. Comput.*, 37, p. 141-158, 1981.
- [NAY 91] NAYROLES B., TOUZOT G., VILLON P., « La méthode des éléments diffus » *C.R. Acad. Sci. Paris*, t313, Série II, p. 133-138, 1991.
- [NAY 92] NAYROLES B., TOUZOT G., VILLON P., « Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements » *Computational Mechanics*, 10, p. 307-318, 1992.
- [MOD 87] MODARESSI H., « Modélisation numérique de la propagation des ondes dans les milieux poreux anélastiques », Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1987.
- [MOD 94] MODARESSI H., BENZENATI I., « Paraxial approximation for poroelastic media » *Soils Dynamics and Earthquake Engrg.* 13, p. 117-129, 1994.

[MOD 96a] MODARESSI H., « Numerical modelling of saturated porous media subject to dynamic loading » *Mechanics of poroelastic media*, A.P.S. Selvadurai edn., Kluwer Academic Publishers, p. 143-156, 1996.

[MOD 96b] MODARESSI H., AUBERT Ph., « A diffuse element - finite element technique for transient coupled analysis », *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 39, p. 3809-3838, 1996.

Annexe

Expressions matricielles du système [9]

$$\hat{M}_{IiJj} = \int_{\Omega_i} \rho \phi_j \underline{e}_j \cdot \phi_l \underline{e}_l \, d\Omega \qquad K_{IiJj} = \int_{\Omega_i} \underline{\underline{D}} : \varepsilon(\phi_j \underline{e}_j) : \varepsilon(\phi_l \underline{e}_l) \, d\Omega$$

$$N_{IiJj} = \int_{\Sigma} P A_2 \left(\frac{1}{\gamma \Delta t} \phi_j \underline{e}_j, \partial_{\underline{x}} \cdot \phi_j \underline{e}_j, \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \partial_{\underline{x}\underline{x}} \cdot \phi_j \underline{e}_j \right) \cdot \phi_l \underline{e}_l \, d\Sigma \qquad 1^{ère} \text{ approche}$$

$$N_{IiJj} = \int_{\Sigma} P A_2 \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \phi_j \underline{e}_j, \partial_{\underline{x}} \cdot \phi_j \underline{e}_j, \gamma \Delta t \partial_{\underline{x}\underline{x}} \cdot \phi_j \underline{e}_j \right) \cdot \phi_l \underline{e}_l \, d\Sigma \qquad 2^{ème} \text{ approche}$$

$$G_{IiJj} = \int_{\Gamma_u} N_{\lambda l} \underline{e}_j \cdot \phi_l \underline{e}_l \, d\Gamma$$

Matrices **A** et **B** de la méthode des éléments diffus :

$$A(x) = \sum_I^n w_I(x) b_I(x) b_I^T(x) \qquad \text{et} \qquad B(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) b_1(x_1) & \dots & w_n(x) b_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(x) b_m(x_1) & \dots & w_n(x) b_m(x_n) \end{bmatrix}$$