

---

# Une méthode d'éléments finis pour les écoulements internes compressibles : application aux éjecteurs

Ali Rebaine\*<sup>\*\*,\*</sup> — Azzeddine Soulaïmani\* — Yves Mercadier\*\*  
Nacer-Eddine Elkadri Elyamani\*

\*Ecole de Technologie supérieure, Département de génie mécanique  
1100 Notre Dame Ouest, Montréal (Québec) H3C 1K3, Canada

\*\*Université de Sherbrooke, Département de génie mécanique  
Sherbrooke, (Québec) J1K 2R1, Canada

---

**RÉSUMÉ.** Cet article présente une méthode d'éléments finis pour la simulation des écoulements internes compressibles bidimensionnels. Les équations de Navier-Stokes sont résolues en termes de variables dites enthalpiques : la pression statique  $p$ , la quantité de mouvement par unité de volume  $U$  et l'enthalpie totale massique  $h$ . La formulation variationnelle est une variante de la méthode SUPG. La stabilité, due à cette méthode, est renforcée à l'aide d'un opérateur de capture des forts gradients. Un modèle de turbulence algébrique, pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs, est mis au point. Il consiste à séparer l'écoulement en deux régions : une proche de la paroi solide, où le modèle de Baldwin et Lomax est utilisé et l'autre, loin de la paroi, où une formulation nouvelle, basée sur le modèle de Schlichting pour les jets, est proposée. La technique de calcul de la viscosité turbulente, sur un maillage non structuré, est une variante de la technique de Rostand. La discrétisation de la formulation variationnelle se fait sur un élément P1/P2 et utilise un schéma implicite. Le système algébrique est résolu à l'aide de l'algorithme GMRES avec un préconditionnement diagonal. Les validations numériques ont été menées sur plusieurs types de tuyères. La principale application est la simulation de l'écoulement turbulent dans un éjecteur. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

**ABSTRACT.** This paper presents a finite element method for the simulation of two-dimensional internal compressible flows. The Navier-Stokes equations are solved in terms of the so-called enthalpic variables: the static pressure  $p$ , the momentum per unit volume  $U$  and the total specific enthalpy  $h$ . The variational formulation is a variante of the SUPG method. The stability of this method is reinforced by the use of a discontinuity capturing operator. A turbulence algebraic model for the simulation of flows in ejectors is built. It consists in separating the flow into two regions: one near the wall where the Baldwin-Lomax model is applied and the other, far from the wall, where a new formulation, based on the Schlichting model for free jets, is proposed. The turbulent viscosity evaluation, on an unstructured grid, is a variante of the Rostand's technic. The discretization of the variational form is done on a P1/P2 element and uses an implicit scheme. The algebraic system is solved using the GMRES algorithm with diagonal preconditioning. Numerical tests were carried on several nozzles. The main application is the simulation of the turbulent flow in an ejector. The obtained results are compared with those of other authors.

**MOTS-CLÉS :** équations de Navier-Stokes et d'Euler, variables enthalpiques, capture de choc, SUPG, turbulence, modèle algébrique, tuyères, éjecteurs.

**KEY WORDS :** Navier-Stokes and Euler equations, enthalpic variables, shock capturing, SUPG, turbulence, algebraic model, nozzles, ejectors.

---

## 1. Introduction

Cet article concerne la simulation des écoulements internes compressibles. On s'intéresse en particulier aux écoulements dans les éjecteurs. Les éjecteurs sont utilisés dans diverses applications industrielles telles que le pompage, le brassage, l'entraînement de fluides, l'augmentation de poussée et la recompression de vapeurs. Comme il s'agit d'appareils sans pièces mobiles, ils présentent de nombreux avantages tels que: fabrication simple, flexibilité d'emploi, faible poids, grande sécurité et possibilité d'absorber n'importe quel fluide dans n'importe quelle condition. Le principe de fonctionnement des éjecteurs consiste en deux écoulements: un dit primaire de niveau énergétique très élevé qui entraîne un autre écoulement dit secondaire de niveau énergétique très faible. Les deux écoulements entrent en contact et interagissent dans une conduite constituant la zone de mélange où l'écoulement secondaire est ré-énergisé pour une utilisation ultérieure.

Les écoulements compressibles sont gouvernés par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces équations peuvent être résolues numériquement sous deux formes distinctes:

- La forme dite non conservative où les équations de conservations sont simplifiées et transformées de manière à faire apparaître les variables indépendantes dites primitives: la pression statique  $p$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  et la température  $T$ .
- La forme dite conservative où les équations sont résolues telles qu'elles dérivent des lois de conservations, sans aucune transformation, et où la densité  $\rho$ , la quantité de mouvement par unité de volume  $\mathbf{U}$  et l'énergie totale par unité de volume  $E$ , apparaissant dans ces équations, forment les variables indépendantes appelées aussi variables conservatives.

Souvent, pour simuler les écoulements internes, en particulier dans les éjecteurs, on désire appliquer des conditions aux limites de Dirichlet sur la pression statique  $p$ , la pression totale  $P_0$  ou la température totale  $T_0$ . Cependant, dans la forme conservative ci-dessus, les conditions aux limites concernent à priori les variables conservatives ( $\rho, \mathbf{U}, E$ ) qui sont couramment utilisées en écoulements compressibles. Par conséquent, les valeurs désirées de la pression et de la température ne seront pas facilement imposées [1]. Par contre, ceci peut être possible, tout en gardant la forme conservative des équations, en utilisant, comme variables indépendantes, les variables dites enthalpiques: la pression statique  $p$ , la quantité de mouvement par unité de volume  $\mathbf{U}$  et l'enthalpie totale massique  $h$ .

Les équations de Navier-Stokes et d'Euler sont respectivement de type convection-diffusion et convection pure. L'approximation par éléments finis de type Galerkin de ces équations peut engendrer des solutions présentant des oscillations non physiques. De la diffusion supplémentaire devient alors nécessaire pour stabiliser la solution. Cette diffusion peut être engendrée à l'aide de la méthode SUPG (*Streamline Upwinding Petrov-Galerkin*). Cette méthode a été introduite par Hughes et al. [2,3]. C'est une variante de la

méthode de Petrov-Galerkin basée sur le concept de la diffusion artificielle optimale. Elle a été utilisée initialement pour résoudre les équations de Navier-Stokes et d'Euler en termes de variables dites entropiques [4,5,6,...]. La méthode a été ensuite exploitée et étendue aux variables conservatives [7, 8, 9, 10, 11, 12,...]. Cette dernière approche a pour avantage d'être plus simple à mettre en œuvre numérique et à appliquer facilement les conditions aux limites physiques que celle utilisant les variables entropiques. Dans ce travail, nous montrons la possibilité d'étendre la méthode *SUPG* à n'importe quel type de variables indépendantes, en particulier les variables enthalpiques. En présence de forts gradients, nous renforçons la stabilité due à la méthode *SUPG* en ajoutant à la méthode un opérateur de capture des forts gradients qui consiste en une viscosité artificielle à ajouter à la viscosité du fluide sans aucune modification de l'équation de conservation de la masse.

De nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été menés sur les éjecteurs [13,14,15,16,17,18]. Cependant, les effets induits par l'interaction des deux écoulements, primaire et secondaire, tels que les effets visqueux, la turbulence, la formation d'ondes de chocs et leur interactions avec les frontières ou les zones de cisaillement, font que de telles études, basées sur la théorie des écoulements unidimensionnels, restent limitées surtout quand on veut les utiliser pour la conception. Ainsi, il devient nécessaire d'utiliser le système complet d'équations de Navier-Stokes afin de pouvoir capter proprement les phénomènes complexes mentionnés précédemment. En effet récemment, certains chercheurs ont considéré les équations de Navier-Stokes avec une modélisation de la turbulence pour simuler les écoulements dans les éjecteurs. Lund et al. [19] supposent qu'à partir d'une certaine distance de la sortie de la tuyère, le jet primaire se détend complètement jusqu'à la paroi de la zone de mélange et reste collé à cette paroi jusqu'à la sortie de l'éjecteur. Ils distinguent alors deux régions: une région visqueuse constituée par le jet complètement détendu et une région non visqueuse à l'extérieur du jet. Ils modélisent la turbulence, dans la zone visqueuse, à l'aide d'un modèle pour le jet basé sur le modèle de Schlichting [20]. Ce modèle est sans doute incomplet car, il ignore complètement la couche limite turbulente formée sur la paroi de la zone de mélange et par conséquent ne peut pas modéliser proprement l'écoulement dans l'éjecteur. En s'inspirant des travaux de Lund et al. [19], Deese et Agarwal [21] utilisent le même modèle pour le jet combiné avec la partie interne du modèle de Baldwin et Lomax [22] pour modéliser la couche limite turbulente sur la paroi de l'éjecteur. Ils définissent alors la viscosité turbulente à injecter dans l'écoulement comme étant le minimum des viscosités données par le modèle du jet et la partie interne du modèle de Baldwin et Lomax. Cette procédure est intéressante car elle met en évidence l'effet de la paroi sur l'écoulement. Cependant, utiliser seulement la partie interne du modèle de Baldwin et Lomax peut engendrer une viscosité énorme qui peut faire diffuser complètement l'écoulement et par conséquent faire disparaître les caractéristiques de l'écoulement dans l'éjecteur telles que les structures de chocs. De plus, numériquement rien ne peut garantir

que ce modèle vire, à chaque fois, vers le modèle interne de Baldwin et Lomax proche de la paroi et vers le modèle du jet loin de cette paroi. Malecki et al. [23] ont comparé le modèle de Baldwin et Lomax [22] et le modèle  $k - \varepsilon$ , [24]. Ils montrent alors que la dimension transversale de la couche de cisaillement, à la sortie de l'éjecteur, est beaucoup plus grande dans le cas du modèle  $k - \varepsilon$  que dans le cas du modèle de Baldwin et Lomax. D'où un mélange plus important qui est, bien sûr, une caractéristique du modèle  $k - \varepsilon$  [25]. De plus, les auteurs montrent les structures de chocs à partir des lignes de nombre Mach, pour des rapports de pressions totales (primaire/secondaire) différents, obtenues par le modèle  $k - \varepsilon$  seulement et ceci sans aucun détail ni aucune information quant à la structure de l'écoulement sur la paroi de l'éjecteur. Il est sûr que le modèle  $k - \varepsilon$  favorise le mélange des écoulements primaire et secondaire cependant, son intégration proche de la paroi reste toujours un problème à résoudre. En effet, utiliser la loi de paroi logarithmique pour compléter le modèle  $k - \varepsilon$  [26, 27] peut ne pas garantir une modélisation correcte de l'écoulement particulièrement dans les éjecteurs où, sur la paroi, on assiste à des problèmes de recirculations [28, 29]. Choi et Soh [29] ont utilisé le modèle de Baldwin et Lomax basé sur la formulation de Thomas [30]. Les résultats obtenus par ces auteurs, pour différents rapports de sections, pour un rapport de pressions totales (primaire/secondaire) fixé, et vice versa, sont intéressants et constituent une référence de comparaison pour les travaux sur les éjecteurs. Finalement, El-Omari [31], a utilisé seulement le modèle de Baldwin et Lomax. Les résultats obtenus par cet auteur ne présentent pas de structures de chocs. Ceci est dû, ou bien parce que le modèle n'est pas adéquat dans la zone centrale du jet et par conséquent se trouve incapable de capter ces structures, ou bien parce que la viscosité artificielle introduite est probablement très élevée.

Excepté Lund et al. [19] qui ont utilisé la méthode des panneaux dans la zone non visqueuse (à l'extérieur du jet) et une méthode intégrale dans la zone visqueuse (dans le jet), le reste des auteurs cités précédemment ont résolu les équations de Navier-Stokes en termes de variables conservatives: la densité, la quantité de mouvement par unité de volume et l'énergie totale par unité de volume, à l'aide d'une méthode de volumes finis sur un maillage structuré [21, 23, 29, 31]. Dans ce travail, on se propose de modéliser les écoulements dans les éjecteurs en résolvant les équations de Navier-Stokes, sous la forme conservative, en utilisant d'autres variables indépendantes dites variables enthalpiques: la pression statique, la quantité de mouvement par unité de volume et l'enthalpie totale massique, à l'aide d'une méthode d'éléments finis moderne et très robuste et d'une formulation nouvelle pour la modélisation de la turbulence dans ces écoulements.

La présentation de cet article est structurée comme suit: après cette introduction, nous présentons les équations gouvernant les écoulements compressibles et nous discutons des conditions aux limites, souvent, utilisées pour la simulation des écoulements internes. Dans une troisième section, nous présentons la formulation variationnelle de type *SUPG* qui sera suivie par

l'opérateur de capture des forts gradients utilisé pour renforcer la stabilité due à la méthode *SUPG*. Dans la section 5, nous discutons de la discrétisation et de la résolution numérique du problème variationnel. La section 6 est consacrée aux équations moyennes gouvernant les écoulements compressibles turbulents. Dans la section 7, nous présentons le modèle de turbulence que nous proposons pour la simulation des écoulements turbulents dans les éjecteurs. Ceci sera suivi par la technique utilisée pour le calcul numérique de la viscosité turbulente sur un maillage non structuré. La section 9 est réservée aux différents tests numériques pour la simulation des écoulements internes compressibles bidimensionnels non visqueux, laminaire et turbulent. Enfin, nous clôturons cet article par une conclusion générale.

## 2. Équations gouvernantes et conditions aux limites

Les équations, sous la forme adimensionnelle, de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie gouvernant les écoulements de fluides compressibles newtoniens s'écrivent respectivement comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{u}] = \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} + r \quad (2.3)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{U}}{\rho} \\ T &= \frac{E}{\rho} - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} \\ p &= (\gamma - 1) \left[ E - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho} \right] \\ \mathbf{q} &= -\frac{\gamma\mu}{RePr} \nabla \left[ \frac{E}{\rho} - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} \right] \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\mu}{Re} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\underline{\underline{I}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $E$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\rho \mathbf{f}$  et  $r$  sont respectivement le vecteur de quantité de mouvement par unité de volume, le vecteur vitesse, la densité, la pression statique, la température, l'énergie totale par unité de volume, le tenseur des

contraintes visqueuses, le flux de chaleur, les forces volumiques et la source de chaleur. Aussi  $t$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $Re$ ,  $Pr$  et  $I$  sont respectivement le temps, la viscosité dynamique, le rapport des chaleurs spécifique à pression constante ( $c_p$ ) et à volume constant ( $c_v$ ), le nombre de Reynolds, le nombre de Prandlt et le tenseur unité.

**Remarque 2.1**

Les équations de conservation (2.1 à 2.3) peuvent se mettre sous la forme vectorielle suivante:

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{conv}(\mathbf{V}) = \mathbf{F}_{i,i}^{diff}(\mathbf{V}) + \mathcal{F} \tag{2.5}$$

où  $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{U}, E)^t$  est le vecteur des variables dites conservatives. Les vecteurs  $\mathbf{F}_i^{conv}$ ,  $\mathbf{F}_i^{diff}$  et  $\mathcal{F}$  sont respectivement les vecteurs flux de convection, flux de diffusion et le vecteur source. L'indice répété, dans les équations (2.5), désigne une sommation. Une forme quasi-linéaire du système (2.5) s'écrit:

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}_{,i} = (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} + \mathcal{F} \tag{2.6}$$

où  $\mathbf{A}_i$  sont les matrices jacobiennes de transformation du vecteur flux de convection telles que:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{F}_{i,\mathbf{V}}^{conv} = \frac{\partial \mathbf{F}_i^{conv}}{\partial \mathbf{V}} \tag{2.7}$$

et  $\mathbf{K}_{ij}$  sont les matrices de diffusion définies telles que :

$$\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j} = \mathbf{F}_i^{diff} \tag{2.8}$$

**Remarque 2.2**

La modélisation des écoulements non visqueux se fait à l'aide des équations d'Euler obtenues à partir des équations de Navier-Stokes en annulant les termes visqueux. Les équations d'Euler s'écrivent alors, sous la forme vectorielle et quasi-linéaire respectivement comme suit:

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{conv}(\mathbf{V}) = \mathcal{F} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}_{,i} = \mathcal{F} \tag{2.10}$$



Les écoulements étudiés dans ce travail s'effectuent dans des domaines confinés c'est-à-dire des écoulements internes. On a souvent à appliquer quatre types de conditions aux limites à savoir:

- A l'entrée, l'écoulement est subsonique et parallèle alors, trois conditions sont nécessaires:

- Pression totale ou de stagnation;  $P_0$ .
- Température totale ou de stagnation;  $T_0$ .
- Vitesse transversale nulle;  $u_2 = 0$ .

- Pour un écoulement subsonique à la sortie, une seule condition de Dirichlet est imposée. En général, pour les écoulements internes, cette condition correspond à la pression statique à la sortie. Dans le cas d'un écoulement supersonique à la sortie, aucune condition de Dirichlet n'est imposée.

- Les écoulements étudiés sont des écoulements bidimensionnels à symétrie plane. Seule la moitié du domaine fluide est alors considéré et la condition de symétrie est assurée en imposant la vitesse transversale nulle:  $u_2 = 0$  le long du plan de symétrie.

- Les conditions aux parois solides sont différentes selon que l'écoulement est visqueux ou non. Dans le cas d'un écoulement non visqueux, la condition de glissement est assurée grâce à la condition d'imperméabilité de la paroi qui se traduit par une vitesse normale du fluide nulle le long de cette paroi:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire extérieur. Si l'écoulement est visqueux, la vitesse du fluide est alors nulle sur la paroi:  $\mathbf{u} = 0$ . De plus, la paroi est considérée adiabatique:  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$  dans le cas visqueux ou non, ou isotherme:  $T_w = T_0$  dans le cas visqueux.

Cependant, dans la formulation conservative précédente, les conditions aux limites concernent à priori les variables conservatives ( $\rho$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $E$ ). Par conséquent, les valeurs désirées de la pression et de la température ne seront pas imposées de manière exacte [1]. Par contre, ceci peut être possible, tout en gardant la forme conservative des équations, en utilisant, comme variables indépendantes, les variables dites enthalpiques: la pression statique  $p$ , la quantité de mouvement par unité de volume  $\mathbf{U}$  et l'enthalpie totale massique  $h$  définie telle que:

$$h = i + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} = \frac{E}{\rho} + \frac{p}{\rho} \quad (2.11)$$

En effet, en utilisant les variables enthalpiques, la pression statique devient une variable indépendante. Aussi, imposer la température totale  $T_0$  revient directement à imposer l'enthalpie totale correspondante:

$$h = \gamma T_0 \quad (2.12)$$

De plus, la pression totale désirée  $P_0$  est assurée en imposant la pression statique correspondante telle que:

$$p = P_0 - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho} \tag{2.13}$$

où la densité  $\rho$  est donnée comme suit:

Pour un gaz parfait, on montre:

$$h = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} \tag{2.14}$$

La résolution de l'équation du second degré en  $\rho$  (2.14) donne:

$$\rho = \frac{\gamma p}{2(\gamma - 1)h} + \left( \left[ \frac{\gamma p}{2(\gamma - 1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h} \right)^{1/2} \tag{2.15}$$

**Remarque 2.3**

La pression statique telle qu'exprimée dans (2.13) constitue une condition aux limites non linéaire. Elle est alors actualisée tout le long des calculs de manière à garantir la valeur désirée de la pression totale. ■

En adoptant le changement de variables (2.11, 2.14 et 2.15), les équations de conservation (2.1 à 2.3) s'écrivent alors, en termes de variables enthalpiques, comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{U}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} + \rho r \tag{2.18}$$



avec

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma p}{2(\gamma - 1)h} + \left( \left[ \frac{\gamma p}{2(\gamma - 1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h} \right)^{1/2} \\ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{U}}{\rho} \\ T &= h - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} - \frac{p}{\rho} \\ \mathbf{q} &= -\frac{\gamma\mu}{RePr} \nabla \left[ h - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} - \frac{p}{\rho} \right] \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\mu}{Re} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

**Remarque 2.4**

Les formes vectorielle et quasi-linéaire du système (2.16 à 2.18) peuvent être obtenues respectivement à partir de la forme vectorielle et quasi-linéaire (2.5) ou (2.6), de la formulation en variables conservatives, en adoptant le changement de variables suivant:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_{,t} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} \\ \mathbf{V}_{,i} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,i} \\ \mathbf{F}_i^{conv}(\mathbf{V}) &= \tilde{\mathbf{F}}_i^{conv}(\mathbf{Y}) \\ \mathbf{F}_i^{diff}(\mathbf{V}) &= \tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}(\mathbf{Y}) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{V}_{,\mathbf{Y}}$  est la matrice jacobienne de transformation du vecteur des variables conservatives  $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{U}, E)^t$  en le vecteur des variables enthalpiques  $\mathbf{Y} = (p, \mathbf{U}, h)^t$ . La forme explicite de  $\mathbf{A}_0$  est donnée en annexe.

Les formes vectorielle et quasi-linéaire du système (2.16 à 2.18) seront alors respectivement:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) = \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{diff}(\mathbf{Y}) + \tilde{\mathcal{F}} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} = (\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j})_{,i} + \tilde{\mathcal{F}} \quad (2.22)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_i &= \tilde{\mathbf{F}}_{i,\mathbf{Y}}^{conv} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ij} &= \mathbf{K}_{ij} \mathbf{A}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Dans le cas des écoulements non visqueux, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations d'Euler et les formes vectorielle (2.21) et quasi-linéaire (2.22) se réduisent respectivement à:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) = \tilde{\mathcal{F}} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} = \tilde{\mathcal{F}} \tag{2.25}$$

■

### 3. Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème (2.22), selon la méthode *SUPG* [7, 8, 9, 10, 11, 12, ...], consiste à trouver  $\mathbf{Y}$  tel que pour toute fonction de pondération  $\mathbf{W}$ , nous ayons:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \mathbf{W} \cdot \left( \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} - \tilde{\mathcal{F}} \right) + \mathbf{W}_{,i} \cdot \left( \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right) \right) d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega_e} \left( \tilde{\mathbf{A}}_i^t \cdot \mathbf{W}_{,i} \right) \tilde{\tau} \left( \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} - \left( \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right) \mathbf{Y}_{,j} - \tilde{\mathcal{F}} \right) d\Omega_e \\ & = \oint_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \left( \left( \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right) \cdot \mathbf{n}_i \right) d\Gamma \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec  $\tilde{\tau}$  est la matrice de stabilisation donnée par:

$$\tilde{\tau} = A_0^{-1} \tau \tag{3.2}$$

et  $\Omega_e$  est un élément du maillage du domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ .

La formulation variationnelle ci-dessus se distingue par deux propriétés importantes [7, 8, 9, 10,...]:

- c'est une méthode de résidus pondérés au sens qu'une solution exacte régulière du problème physique original reste encore une solution du problème variationnel. Ceci assure, non seulement une bonne précision de l'approximation, mais aussi une stabilité spatio-temporelle.
- la stabilité est assurée grâce au terme elliptique:

$$\sum \int_{\Omega_e} \left( \tilde{\mathbf{A}}_i^t \cdot \mathbf{W}_i \right) \tilde{\tau} \left( \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_i \right) d\Omega_e \tag{3.3}$$

Ainsi, cette stabilité dépend énormément de la structure de la matrice  $\tilde{\tau}$  donc de la structure de la matrice  $\tau$ . Le choix de cette matrice est alors fondamental pour le bon comportement de la méthode *SUPG*. Soulaïmani et Fortin [7] ont proposé et validé numériquement la définition de la matrice  $\tau$  [10, 11] telle que:

$$\tau = \left( \sum |c_{ij} \mathbf{A}_j| \right)^{-1} \tilde{\xi}(Pe) \quad (3.4)$$

avec

$$\tilde{\xi}(Pe) = \min\left(1, \frac{Pe}{3}\right) \quad (3.5)$$

où  $c_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$  sont les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne de transformation géométrique et  $Pe = \frac{u\ell}{2\nu}$  est le nombre de Peclet local où  $\ell$  est la taille de l'élément et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

### Remarque 3.1

Une condition de Neuman  $(\sigma \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0$ , à la sortie de l'écoulement, sera implicitement imposée. Avec cette condition et les conditions aux limites énumérées dans la section 2, les termes de contour dans la forme variationnelle (3.1) s'annulent. ■

## 4. Opérateur de capture des forts gradients

La méthode *SUPG* telle que conçue, consiste en un décentrage (une dissipation supplémentaire) selon la direction des lignes de courant. Cette méthode se trouve donc très efficace pour des solutions suffisamment régulières, en contrôlant les oscillations non physiques le long des lignes de courant. Cependant, cette direction n'est pas toujours la direction la plus appropriée pour permettre la dissipation désirée. En effet, cette situation peut se manifester en présence de chocs où certaines oscillations persistent au voisinage des discontinuités à cause de l'absence de contrôle des gradients dans des directions autres que les lignes de courant. Ainsi, il devient nécessaire de renforcer la méthode *SUPG* en lui ajoutant un autre terme, appelé capteur des forts gradients, permettant de favoriser d'avantage la dissipation et par conséquent d'amortir les oscillations au voisinage des discontinuités. L'opérateur de capture des forts gradients utilisé ici a été développé par Soulaïmani et Fortin [7]. Il consiste en une viscosité artificielle  $\mu_{cc}$  à ajouter à la viscosité réelle du fluide définie telle que:

$$\mu_{cc} = \min \left( C_k \frac{\ell}{2} \|\tilde{\tau} \mathbf{R}\| \tilde{\xi}(Pe), \frac{\ell}{2} \|\mathbf{u}\| \tilde{\xi}(Pe) \right) \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{R}$  est le résidu local:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} - \left( \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right)_{,i} - \tilde{\mathcal{F}}$$

$C_k$  est un coefficient qui peut être ajusté selon l'intensité du gradient,  $\ell$  est la taille de l'élément et  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne. Cette viscosité en fonction du résidu local et de la taille de l'élément permet une dissipation supplémentaire de la quantité de mouvement et de l'énergie sans aucune modification de l'équation de continuité, alors que les opérateurs de capture de chocs développés par d'autres auteurs [4], [12], [32] agissent aussi sur l'équation de continuité. De plus, cet opérateur de capture des forts gradients est plus simple à mettre en œuvre numériquement et semble moins diffusif [1] comparativement à celui développé par Mallet [4].

## 5. Discrétisation et résolution numérique

Les simulations numériques effectuées dans ce travail visent à obtenir des solutions stationnaires (régime permanent). Cependant, les équations de conservation stationnaires sont de nature mixte hyperbolique-elliptique dans le cas des équations de Navier-Stokes et de nature différente: elliptique, parabolique ou hyperbolique, dans le cas des équations d'Euler, selon que le nombre de Mach local est subsonique, sonique ou supersonique respectivement. Ce changement de nature rend alors la résolution des équations de conservation stationnaires difficile. Pour éviter cette difficulté, nous résolvons alors les équations de Navier-Stokes ou d'Euler instationnaires où la solution évolue dans le temps jusqu'à convergence correspondant au régime permanent. La discrétisation temporelle est effectuée à l'aide d'un schéma implicite. Les variables et leurs dérivées spatiales sont discrétisées à l'aide de la méthode des éléments finis sur des éléments triangulaires avec une approximation quadratique (six nœuds) pour les composantes de la vitesse et de la quantité de mouvement et linéaire (trois nœuds) pour les autres variables. Le système variationnel (3.1) se transforme alors en un système algébrique qui est résolu à l'aide de la méthode *GMRES* [33] utilisant un préconditionnement diagonal.

## 6. Modélisation de l'écoulement turbulent

En écoulement turbulent de fluides compressibles, non seulement la vitesse et la pression fluctuent, mais aussi la densité  $\rho$ , la température  $T$ , etc. Les moyennes pondérées par la masse, couramment utilisées dans le cas de fluides compressibles, ont été développées par Favre et al. [34]. Dans ce cas, les

moyennes pondérées par la masse de la vitesse, de l'enthalpie totale et de la température sont définies respectivement par:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_i &= \frac{\overline{\rho \mathbf{u}_i}}{\bar{\rho}} \\ \tilde{h} &= \frac{\overline{\rho h}}{\bar{\rho}} \\ \tilde{T} &= \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Les fluctuations de la densité, de la vitesse et de la pression sont données respectivement par:

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \rho - \bar{\rho} \\ \mathbf{u}'_i &= \mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i \\ p' &= p - \bar{p} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

#### Note

- désigne la moyenne d'ensemble ou de Reynolds.
- ~ désigne la moyenne pondérée par la masse.
- ' désigne la fluctuation.

En prenant la moyenne d'ensemble des équations de conservation, en termes de variables enthalpiques (2.16 à 2.18) et en utilisant les définitions (6.1 et 6.2) et, bien sûr, en utilisant l'approximation de Boussinesq et l'analogie avec la loi de Fourier [35], les équations moyennes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent respectivement comme:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \bar{\Sigma} &= \bar{\rho} \mathbf{f} \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{h})}{\partial t} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{U}}) - \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \bar{\Sigma}) + \nabla \cdot \bar{\Phi} &= \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\Sigma} &= \left( \frac{\mu}{Re} + \frac{\mu_t}{Re} \right) \left[ (\nabla \tilde{\mathbf{u}}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\Phi} &= -\frac{\gamma}{Re} \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla \tilde{T} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

où  $Pr_t$  est le nombre de Prandtl turbulent et  $\mu_t$  est la viscosité turbulente qui sera modélisée dans ce qui suit.

## 7. Modèle de turbulence pour les éjecteurs

A cause de la multiplicité des modèles de turbulence, le choix s'impose alors. En général, un bon modèle de turbulence doit répondre aux critères suivants:

- Domaine de validité assez large
- Précision élevée
- Temps de calcul économique
- Simplicité

Les modèles algébriques et à deux équations ont été largement utilisés. Les modèles à une équation refont surface. Ces derniers semblent être un bon compromis entre les modèles algébriques, pour une certaine amélioration de la précision et d'extension du domaine de validité, et à deux équations, pour une résolution moins ardue. Le modèle  $k - \varepsilon$  est très adéquat pour les écoulements libres tels que les couches de mélange, les jets et le sillage. Cependant, son intégration proche de la paroi de l'éjecteur reste toujours un problème. En effet, utiliser la loi de paroi logarithmique, pour compléter le modèle  $k - \varepsilon$ , peut ne pas garantir une modélisation correcte de l'écoulement dans l'éjecteur à cause des zones de recirculation sur la paroi [28, 29]. Le modèle  $k - \omega$  s'adapte facilement dans la zone proche de la paroi. Cependant, il est très sensible aux écoulements loin de la paroi en particulier, les jets, les couches de mélange et le sillage [36]. Souvent, pour les applications industrielles, l'utilisateur ne s'intéresse pas aux détails de la turbulence mais, plutôt se voit concerné seulement par les effets moyens de cette turbulence. Ainsi, le choix du modèle serait sûrement basé sur les critères d'économie et de simplicité. En général, dans les applications industrielles, on s'intéresse particulièrement aux coefficients de frottement et de pression le long des parois solides. Dans ce cas, un modèle algébrique peut être suffisant. On peut même dire qu'il est peut être plus efficace, pour prédire la distribution de la pression et du frottement sur les parois solides, qu'un modèle à une ou à deux équations de transport. De plus, il est simple et économique. L'écoulement dans les éjecteurs constitue une application industrielle. Le modèle de turbulence utilisé ici, pour la modélisation de cet écoulement, est alors un modèle algébrique.

### Remarque 7.1

En adoptant un modèle algébrique, le problème revient alors à déterminer une viscosité turbulente algébrique qu'il faut ajouter tout simplement à la viscosité moléculaire du fluide. Par conséquent, toute la théorie développée

précédemment, pour la modélisation des écoulements laminaires, reste applicable pour la simulation de l'écoulement turbulent. ■

En analysant l'écoulement dans un éjecteur, on constate qu'il est constitué d'au moins deux couches de cisaillement: une couche de cisaillement interne formée par le jet et une couche de cisaillement externe formée par l'écoulement externe au jet. De plus, l'écoulement externe est limité par une paroi solide d'où la présence d'une couche limite le long de cette paroi. Ainsi, un seul modèle de longueur de mélange, telle que le modèle de Baldwin et Lomax, serait insuffisant voire même incapable de modéliser l'écoulement dans un éjecteur. En effet, le modèle de Baldwin et Lomax a été conçu principalement pour les cisaillements simples tels que les écoulements de couches limites. De plus, comme il s'agit d'un écoulement interne, à proximité du maximum de vitesse tel que l'axe ou plan de symétrie, le gradient de vitesse moyenne  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  peut être très petit ou nul alors que la viscosité turbulente peut être très importante, contrairement à la longueur de mélange qui implique une viscosité turbulente très faible ou nulle.

En se basant sur ces constatations physiques et sur des considérations de simplicité et d'économie, nous proposons un modèle de turbulence algébrique, basé sur une formulation nouvelle, pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs. Notre modèle consiste en la combinaison du modèle de Baldwin et Lomax [22] et d'un autre pour le jet basé sur le modèle de Schlichting [20]. Chacun des modèles agit dans sa propre couche (Fig. 7.1):

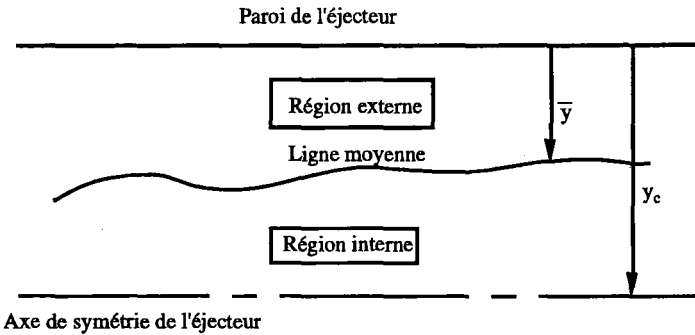


Figure 7.1. Définition du modèle proposé

Dans la couche interne (Fig. 7.1), proche de l'axe de symétrie, constituée principalement par le jet, la viscosité turbulente est prise comme:

$$\mu_t = ReK\rho b(x)\tilde{u}_c(x) \quad (7.1)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds,  $K$  est une constante et  $\tilde{u}_c(x)$  est la vitesse sur l'axe de symétrie à la position  $x$ .

Selon Schlichting [20],  $b(x)$  est la distance, à la position  $x$ , à partir de l'axe jusqu'au point où la vitesse est égale à la moitié de la vitesse  $\tilde{u}_c(x)$ . Cependant, comme le profil des vitesses le long d'une station perpendiculaire à la paroi solide, à une position  $x$  donnée, n'est pas lisse, il peut exister alors plusieurs points, sur cette station, où la vitesse est égale à la moitié de la vitesse  $\tilde{u}_c(x)$ . De plus, ce point peut être proche de la paroi solide, en dehors de la zone du jet, ce qui donnera une valeur de  $\mu_i$  incompatible. De manière à éviter cette difficulté numérique, nous déterminons la distance  $b(x)$  telle que:

$$b(x) = y_c(x) - \bar{y}(x) \tag{7.2}$$

où  $y_c(x)$  est la distance, à partir de la paroi solide, jusqu'à l'axe de symétrie et  $\bar{y}(x)$  est la distance moyenne, à partir de la paroi solide, définie comme étant le barycentre des vitesses le long de la station à une position  $x$  donnée:

$$\bar{y}(x) = \frac{\sum y_i(x) \tilde{u}_i(x, y_i)}{\sum \tilde{u}_i(x, y_i)} \tag{7.3}$$

où  $y_i(x)$  et  $\tilde{u}_i(x, y_i)$  sont respectivement la distance, à partir de la paroi solide, et la vitesse du point  $i$  sur la station à une position  $x$  donnée.

**Remarque 7.2**

Avec les définitions (7.2) et (7.3), le point de localisation de la distance  $b(x)$  se trouvera toujours proche de l'axe donc proche du point du maximum de vitesse dans le jet. ■

Dans la couche externe au jet, proche de la paroi solide (Fig. 7.1), définie par la distance  $\bar{y}(x)$  à partir de la paroi solide, la viscosité turbulente sera évaluée à l'aide du modèle de Baldwin et Lomax tel que:

$$\mu_i(x) = \min(\mu_{ii}(x), \mu_{io}(x)) \tag{7.4}$$

où

$$\mu_{ii}(x) = Re\rho l^2 |\omega| \tag{7.5}$$

et

$$\mu_{io}(x) = \alpha b_1 Re\rho F_{sill} F_{Kleb} \tag{7.6}$$



avec

$$\left. \begin{aligned}
 l &= \kappa y D \\
 D &= 1 - \exp(-y^+ / A^+) \\
 y^+ &= Re \frac{\rho_w u_\tau y}{\mu_w} \\
 u_\tau &= \left( \frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2} \\
 |\omega| &= \left| \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right| \\
 F_{sill} &= \min \left\{ \begin{array}{l} y_{max} F_{max} \\ b_2 y_{max} \tilde{u}_D^2 / F_{max} \end{array} \right. \\
 F_{Kleb} &= \left[ 1 + 5.5 \left( \frac{b_3 y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1} \\
 F &= y |\omega| D \\
 \tilde{u}_D &= |\tilde{u}|_{max} - |\tilde{u}|_{min} \\
 \alpha &= 0.0168, \quad b_1 = 1.6, \quad b_2 = 0.25, \quad b_3 = 0.3
 \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

où

$l$  est la longueur de mélange.

$\kappa = 0.41$  est la constante de von Karman.

$y$  est la distance normale à partir de la paroi.

$D$  est le facteur d'amortissement de Van Driest.

$A^+ = 26$  est la constante de Van Driest.

$u_\tau$  est la vitesse de frottement.

$\tau$  est la contrainte de cisaillement.

$\omega$  est la vorticité.

$F_{max}$  est la valeur maximale de la fonction vorticité  $F$ .

$F_{Kleb}$  est le facteur d'intermittence de Klebanoff.

$y_{max}$  est la distance normale à partir de la paroi où la fonction  $F$  est maximale.

**Note**

L'indice  $w$  fait référence à la paroi.

Finalement, le modèle de turbulence que nous proposons pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs se résume comme suit:

$$\mu_t(x) = \begin{cases} \min(\mu_{ti}(x), \mu_{to}(x)) & \text{si } 0 \leq y(x) \leq \bar{y}(x) \\ K Re \rho b(x) \tilde{u}_c(x) & \text{si } \bar{y}(x) \leq y(x) \leq y_c(x) \end{cases} \quad (7.8)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} b(x) &= y_c(x) - \bar{y}(x) \\ \bar{y}(x) &= \frac{\sum y_i(x) \tilde{u}_i(x, y_i)}{\sum \tilde{u}_i(x, y_i)} \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

où  $\mu_{i_i}(x)$  et  $\mu_{i_o}(x)$  sont respectivement les viscosités turbulentes interne et externe données par le modèle de Baldwin et Lomax (Eq. 7.5 à 7.7).  $K$  est une constante qui sera choisie selon que l'écoulement est bidimensionnel ou axisymétrique [20, 36].

### Remarque 7.3

Le modèle proposé ci-dessus (Eq. 7.8 et 7.9) reste valable aussi bien pour un écoulement bidimensionnel qu'un écoulement axisymétrique. L'originalité de ce modèle se résume comme suit:

- C'est un modèle à deux couches distinctes; il permet de séparer de manière très efficace la région proche de la paroi et loin de celle-ci.
- Il permet d'introduire la bonne valeur de la viscosité turbulente au bon endroit de l'écoulement.
- Il reste valable pour un jet libre (sans frontière solide) en considérant seulement la partie pour le jet (Eq. 7.1 à 7.3).
- Il peut être appliqué aussi bien à un écoulement interne bidimensionnel que axisymétrique en ajustant simplement la constante  $K$ .

Dans ce travail, nous avons étudié le cas d'un écoulement bidimensionnel. La constante  $K$  est prise égale à celle utilisée par Lund et al. [19] et Deese et Agarwal [21]:  $K = 0.0283$ . ■

## 8. Calcul numérique de la viscosité turbulente

La viscosité turbulente, telle que donnée par le modèle (7.8 et 7.9), est définie le long d'une ligne perpendiculaire à la paroi solide et par conséquent, les paramètres tels que la distance normale à partir de la paroi, les valeurs de  $F_{max}$ ,  $y_{max}$ ,  $\tilde{u}_{max}$ ,  $\tilde{u}_{min}$ ,  $b$ , etc., intervenant dans le calcul de cette viscosité, doivent être évalués le long de chaque ligne perpendiculaire à la paroi solide. Cependant, en présence d'un maillage non structuré, le calcul de ces paramètres devient la difficulté numérique majeure des modèles algébriques; car presque chaque nœud du maillage définit une station propre à lui. Parmi les techniques de calcul de la viscosité turbulente, sur un maillage non structuré, on cite: la technique traditionnelle, la technique de Rostand [37] et la technique de Pan et Cheng [38]. La technique utilisée ici est une variante de la technique de

Rostand. A partir du maillage non structuré, nous construisons alors un maillage structuré fictif qui consiste en des lignes perpendiculaires (stations) issues du milieu de chaque arête sur la paroi solide. Chaque station est alors composée par un ensemble de points d'intersection avec les arêtes dans le domaine. En interpolant les différentes variables (densité, vitesse, etc.) du maillage non structuré vers le maillage structuré fictif, nous calculons alors la viscosité turbulente le long de chaque station. Cette viscosité est par la suite assignée au nœud réel, du maillage non structuré, par une interpolation entre les stations les plus proches à sa droite et à sa gauche. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux références [35], [37].

## 9. Résultats numériques

Cette section est consacrée à la validation numérique de la formulation conservative en variables enthalpiques, des techniques de stabilisation (*SUPG* et l'opérateur de capture des forts gradients) et du modèle de turbulence proposé. Dans ce but, plusieurs types d'écoulements compressibles bidimensionnels ont été étudiés. La robustesse du code a été validée à l'aide de l'étude de l'écoulement turbulent dans un éjecteur dont la géométrie et la physique de l'écoulement sont très complexes. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats des travaux antérieurs et sont présentés à la fin de cet article.

### 9.1. Écoulement dans les tuyères

Les validations numériques ont été menées sur trois types de tuyères pour simuler les écoulements laminaires et non visqueux. Les différents cas se présentent comme suit:

#### 9.1.1. Écoulement non visqueux

Deux types d'écoulements non visqueux ont été étudiés: l'écoulement subsonique-supersonique et l'écoulement supersonique avec choc.

##### 9.1.1.1. Écoulement subsonique-supersonique

L'étude de cet écoulement a été menée sur la tuyère bidimensionnelle convergente-divergente de type GPL [35, 39, 40]. Le maillage utilisé consiste en 1 545 éléments pour un nombre total de 3 220 nœuds (Fig. 9.1). Les conditions aux limites imposées sont:

- à l'entrée, l'écoulement est subsonique. La pression totale  $P_0 = 1$ , la température totale  $T_0 = 1$  et la vitesse transversale  $u_2 = 0$  sont imposées.
- sur la paroi solide, une condition de glissement est imposé:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ .
- sur l'axe de symétrie on impose  $u_2 = 0$ .

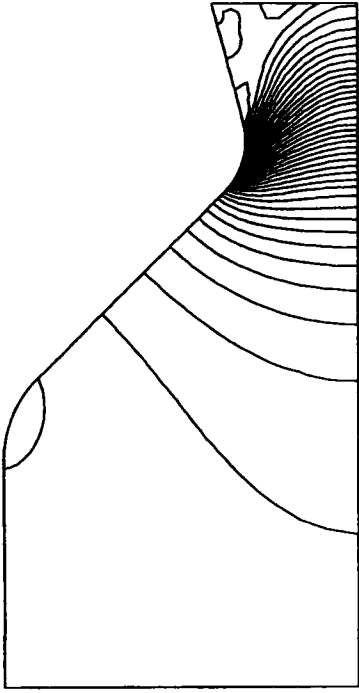


Figure 9.2. *Écoulement non visqueux, lignes isobares.*

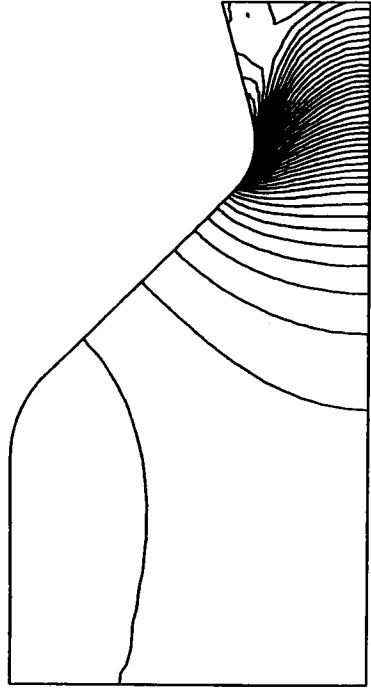


Figure 9.4. *Écoulement non visqueux, lignes iso-densité.*

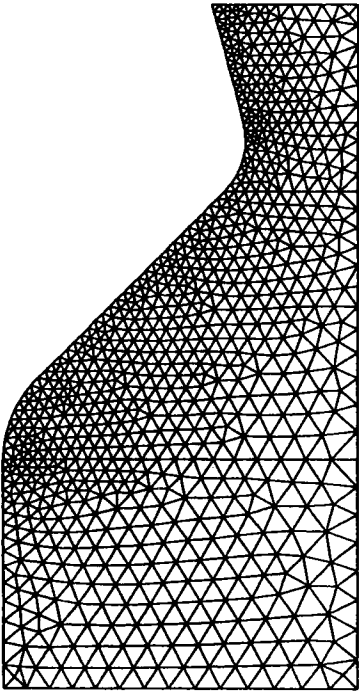


Figure 9.1. *Écoulement non visqueux, maillage.*

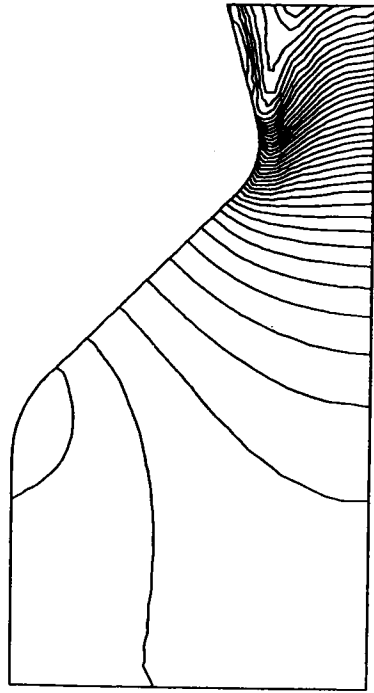


Figure 9.3. *Écoulement non visqueux, lignes iso-Mach.*

- la sortie de l'écoulement étant supersonique, aucune condition de Dirichlet n'est alors imposée.

Les figures 9.2 à 9.6 représentent respectivement les isobares, les isomachs, les isodensités, le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie et le nombre de Mach sur la paroi solide.

Le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie de la tuyère (Fig. 9.5) montre une très bonne comparaison avec le résultat donné à la référence [40]. Cependant, sur la paroi, le nombre de Mach se trouve inférieur vers la sortie comparativement à celui de la référence [40]. Ceci est dû probablement à la viscosité artificielle injectée pour stabiliser la solution. Une adaptation du maillage réduira considérablement cette viscosité et par conséquent améliorera nettement la solution.

#### 9.1.1.2. Écoulement supersonique avec choc

Ce type d'écoulement a été mené sur la tuyère traitée par van Leer [41]. La géométrie de cette tuyère est définie telle que:

$$y(x) = 1.75 - 0.75[\cos(x - 5)\pi/5] \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 5$$

$$y(x) = 1.25 - 0.25[\cos(x - 5)\pi/5] \quad \text{pour } 5 \leq x \leq 10$$

Les conditions aux limites imposées sont:

- à l'entrée, on impose  $P_0 = 1$ ,  $T_0 = 1$  et  $u_2 = 0$ .
- sur la paroi solide, une condition de glissement est imposée:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ .
- sur l'axe de symétrie, on impose  $u_2 = 0$ .
- à la sortie, on impose une pression statique  $P_a$  correspondant à un rapport  $P_a/P_0 = 0.84$  [41].

Les calculs ont été effectués sur un maillage initial de 2 000 éléments pour un nombre de nœuds de 4 191 (Fig. 9.7). La solution obtenue sur ce maillage a été améliorée à l'aide d'un adaptateur de maillages [42]. Le maillage adapté final consiste en 826 éléments et 1 841 nœuds (Fig. 9.8). Les isobares, les isomachs, les isodensités, le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie, avant et après l'adaptation du maillage, sont données aux figures (9.9 a,b), (9.10 a,b), (9.11 a,b) et (9.12) respectivement. En analysant les résultats, on constate une très bonne résolution particulièrement de la position et l'épaisseur de la discontinuité (onde de choc droite). L'adaptation du maillage a permis une réduction du coefficient de viscosité artificielle de capture des forts gradients de  $C_k = 50$  à  $C_k = 0.01$  qui donne une viscosité artificielle très faible (de l'ordre de  $10^{-3}$ ). Le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie obtenu sur le maillage adapté est pratiquement confondu avec la solution exacte (Fig. 9.12). Ceci confirme la robustesse de la méthode *SUPG* si le maillage est bien adapté

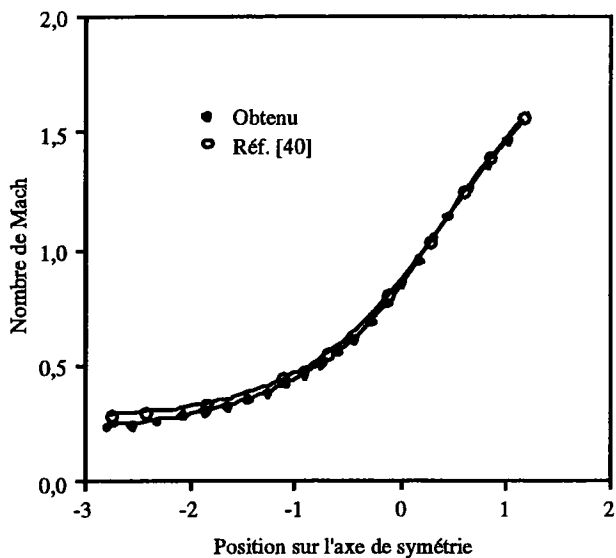


Figure 9.5. *Ecoulement non visqueux, nombre de Mach sur l'axe de symétrie.*

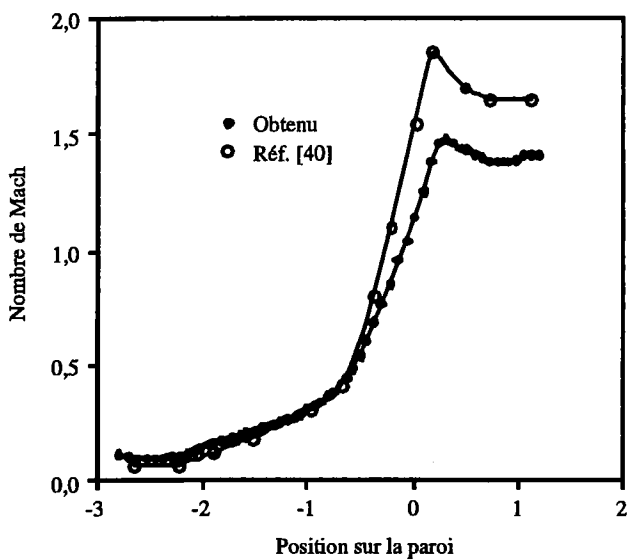


Figure 9.6. *Ecoulement non visqueux, nombre de Mach sur la paroi.*

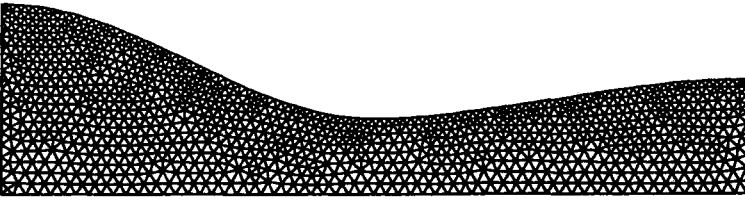


Figure 9.7. *Écoulement non visqueux, maillage initial.*

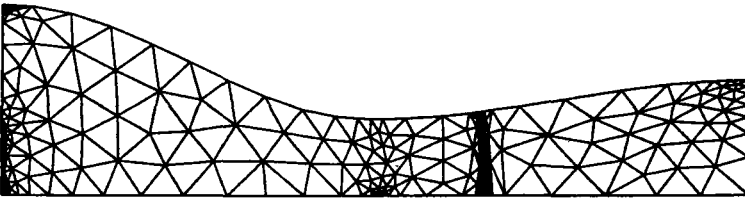
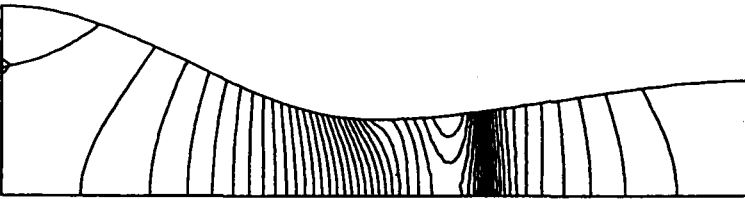
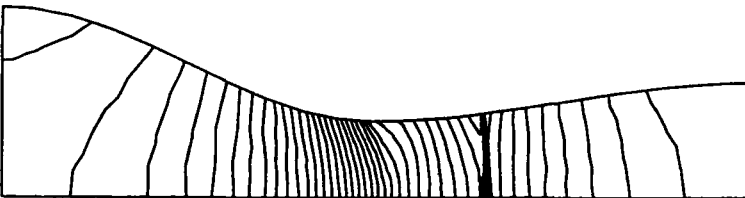


Figure 9.8. *Écoulement non visqueux, maillage adapté.*

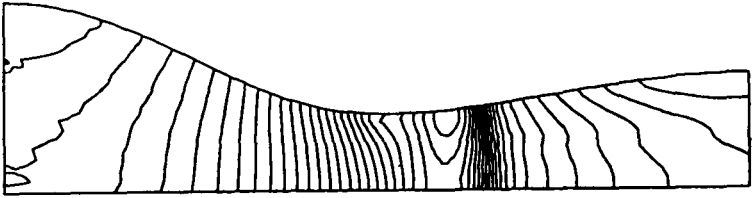


(a)

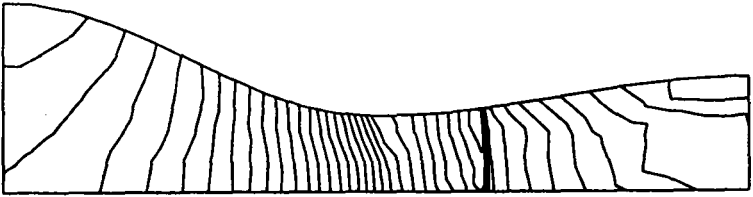


(b)

Figure 9.9. *Écoulement non visqueux, lignes isobares, a): maillage initial, b): maillage adapté.*

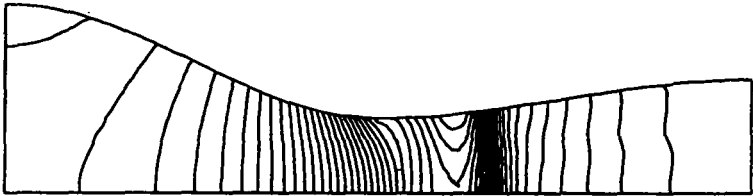


(a)

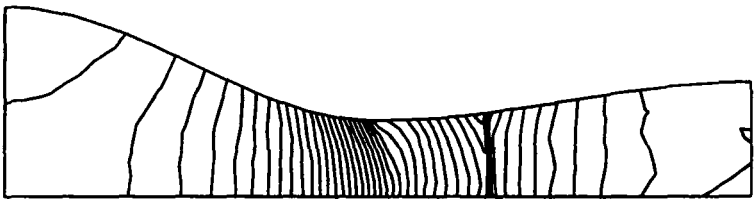


(b)

**Figure 9.10.** *Ecoulement non visqueux, lignes iso-Mach, a): maillage initial, b): maillage adapté.*



(a)



(b)

**Figure 9.11.** *Ecoulement non visqueux, lignes iso-densité, a): maillage initial, b): maillage adapté.*



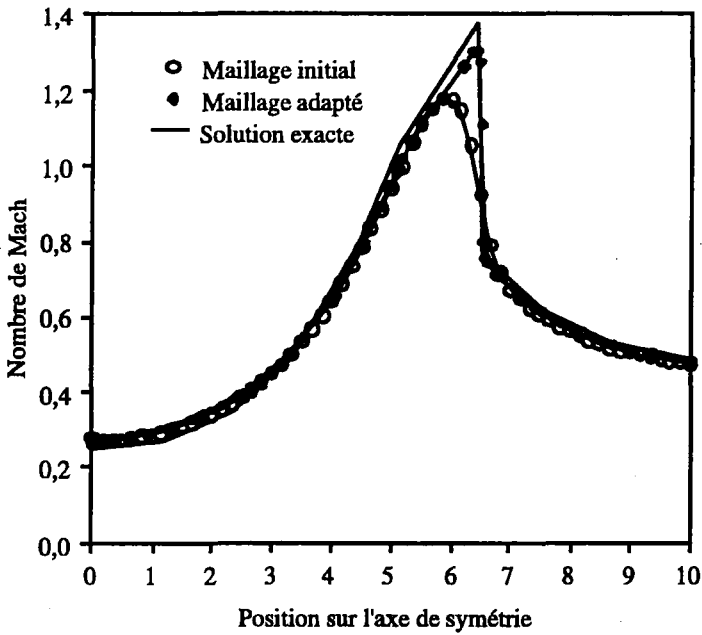


Figure 9.12. *Ecoulement non visqueux, nombre de Mach sur l'axe de symétrie.*



Figure 9.13. *Ecoulement laminaire, maillage.*

et aussi de l'opérateur de capture des forts gradients utilisé ici pour renforcer la stabilité due à l'opérateur *SUPG*.

### 9.1.2. Écoulement laminaire

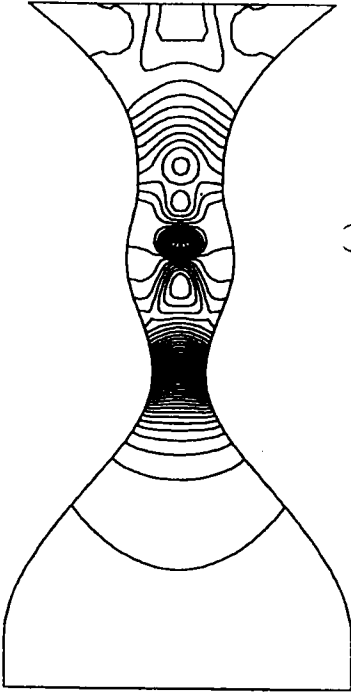
L'écoulement laminaire a été étudié dans la tuyère à deux cols, traitée par plusieurs auteurs dans le cadre de leur participation à l'atelier GAMM "GAMM WORKSHOP" [43]. Cette modélisation constitue un test de validation très efficace, d'une part à cause de la géométrie très complexe de la frontière de cette tuyère et d'autre part à cause des phénomènes physiques complexes engendrés par cet écoulement tels que la formation des ondes de chocs, les interactions ondes de choc-couche limite et aussi les recirculations. Cet écoulement a été étudié pour deux nombres de Reynolds, 100 et 400, sur un maillage de 4 049 éléments et 8 438 nœuds (Fig. 9.13). Les conditions aux limites adoptées sont:

- à l'entrée, on impose:  $P_0 = 1$ ,  $T_0 = 1$  et  $u_2 = 0$
- la paroi solide est considérée visqueuse et isotherme d'où les conditions aux limites:  $u_1 = u_2 = 0$  et  $T_w = T_0$
- sur l'axe de symétrie on impose  $u_2 = 0$
- la sortie étant supersonique, aucune condition de Dirichlet n'est alors imposée.

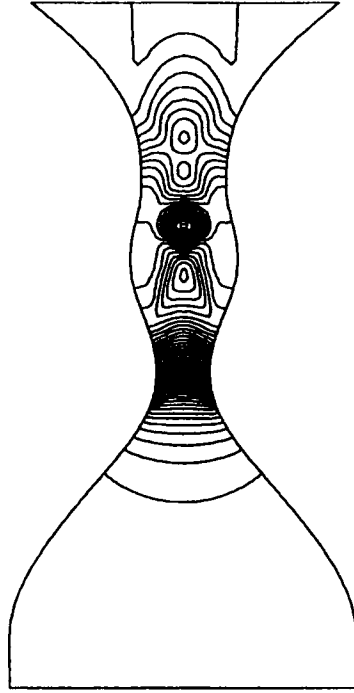
A Reynolds 100, l'écoulement est considéré très visqueux et la couche limite est épaisse. Ainsi, pour ce cas, seule la méthode *SUPG* est utilisée. Les lignes isomachs (Fig. 9.14a) montre la formation d'une zone de recirculation située entre les deux cols. Quoique les effets visqueux soient importants, la méthode *SUPG* a permis de capter une zone de choc droit et de recompression assez forte (Fig. 9.16a, 9.17a et 9.18a). Comparativement aux résultats présentés à l'atelier GAMM par Labbé [43], notre formulation semble moins diffusive. Ceci se traduit par une recompression plus forte et un coefficient de frottement inférieur (Fig. 9.16a, 9.17a, 9.18a et 9.19a).

A Reynolds 400, une viscosité de capture de choc de coefficient  $C_k = 10$  a été utilisée. Ici, le choc devient plus fort (Fig. 9.16b, 9.17b et 9.18b) et à cause de l'interaction de ce choc avec la couche limite, plus mince dans ce cas, le recollement de l'écoulement se fait plus loin, ce qui fait que la zone de recirculation devient plus large que dans le cas de Reynolds 100 (Fig. 9.14b). De même, la solution obtenue semble moins diffusive que celle donnée par Labbé (Fig. 9.16b, 9.17b, 9.18b et 9.19b).

Finalement, à cause de la grande divergence de la tuyère à la sortie, une zone de recirculation naturelle [44] est captée (Fig. 9.14, 9.20 et 9.21), chose qui n'est pas observée sur les résultats présentés à l'atelier GAMM [43]. Ceci est dû, sans doute, au type différent des conditions aux limites imposées à la sortie de la tuyère.

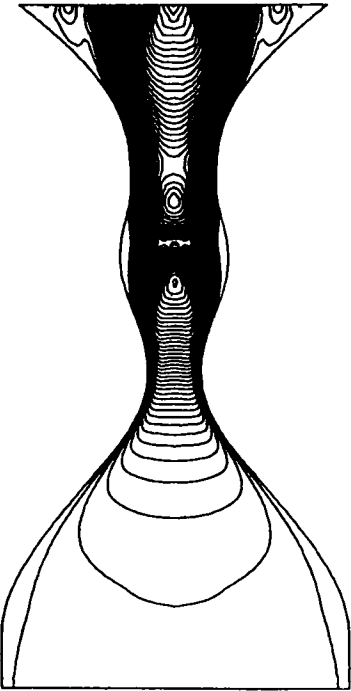


(a)

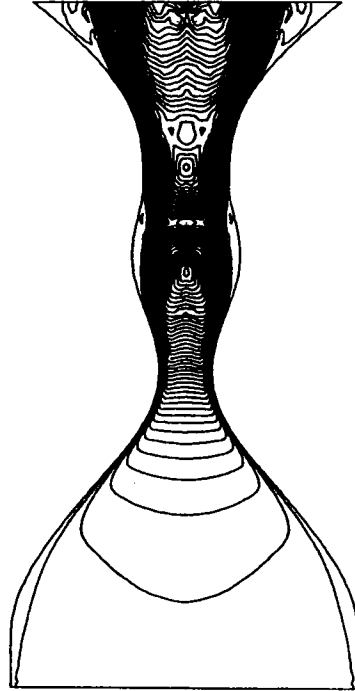


(b)

**Figure 9.15.** *Écoulement laminaire, lignes isobares, a):  $Re = 100$ , b):  $Re = 400$ .*



(a)



(b)

**Figure 9.14.** *Écoulement laminaire, lignes iso-Mach, a):  $Re = 100$ , b):  $Re = 400$ .*

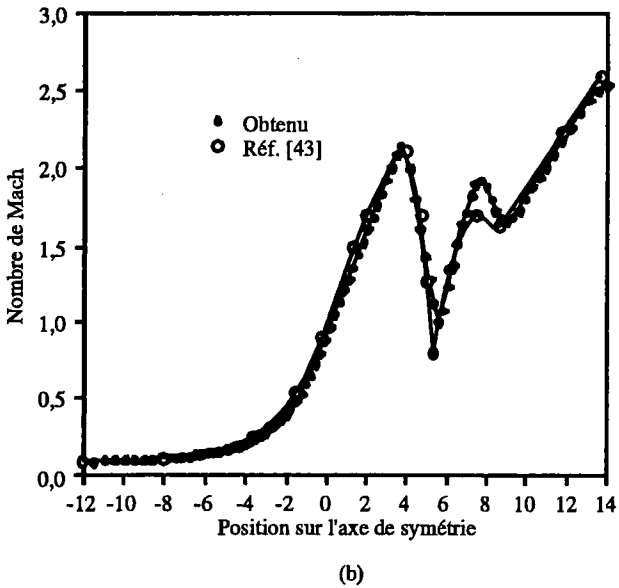
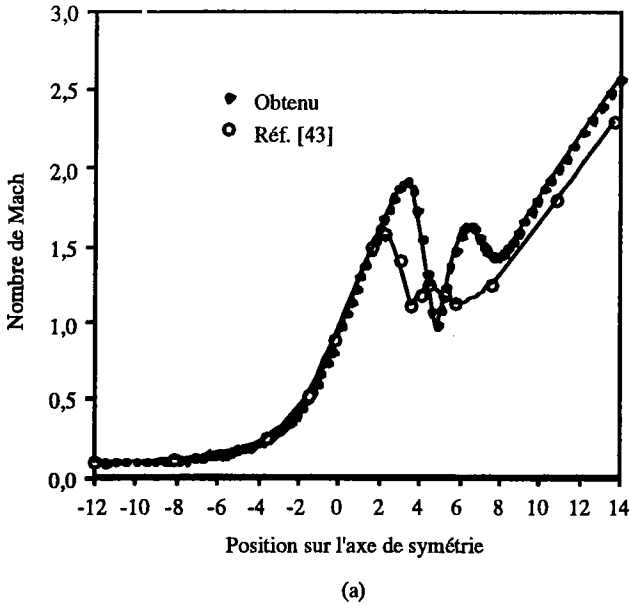
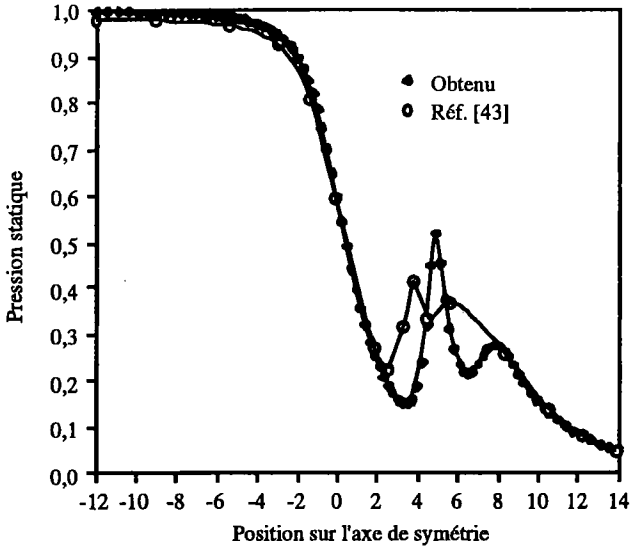
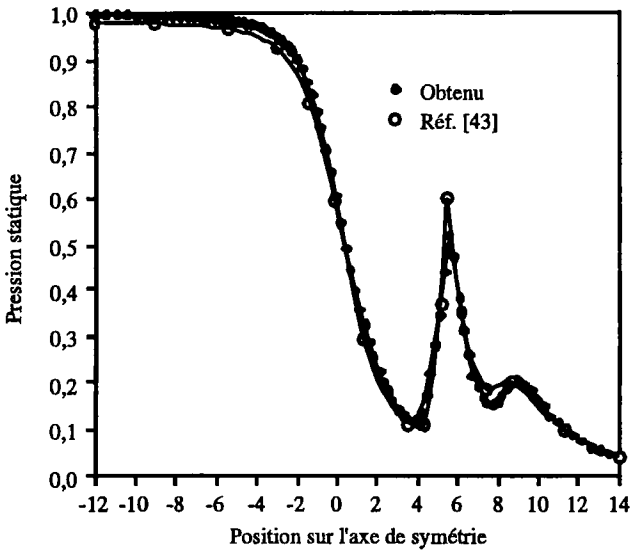


Figure 9.16. *Ecoulement laminaire, nombre de Mach sur l'axe de symétrie, a):  $Re = 100$ , b):  $Re = 400$ .*

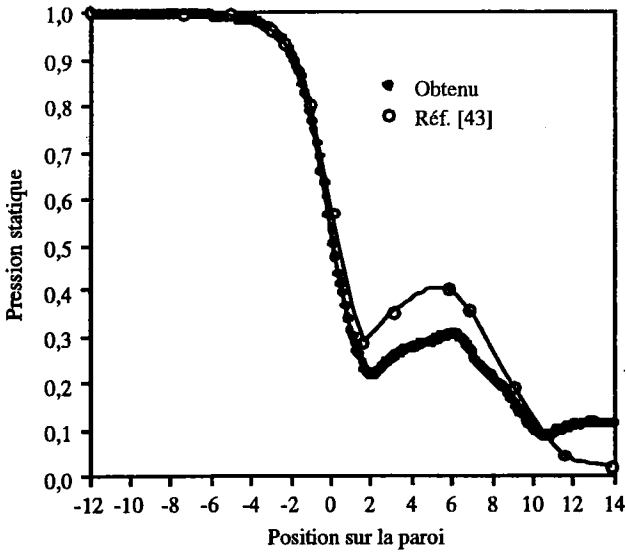


(a)

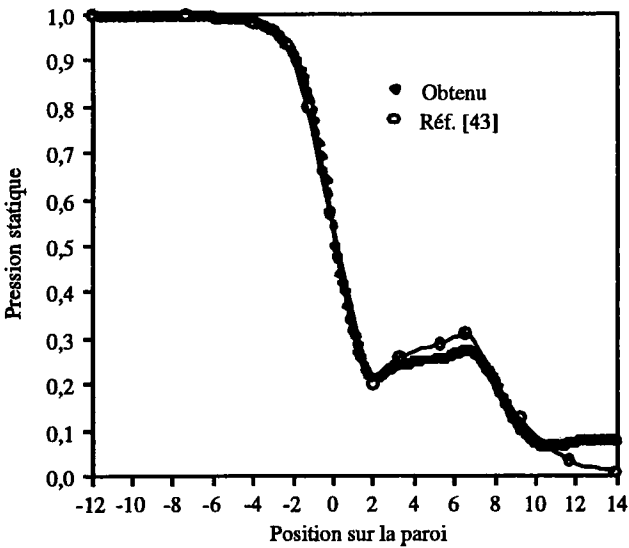


(b)

**Figure 9.17.** *Ecoulement laminaire, pression statique sur l'axe de symétrie, a):  $Re = 100$ , b):  $Re = 400$ .*

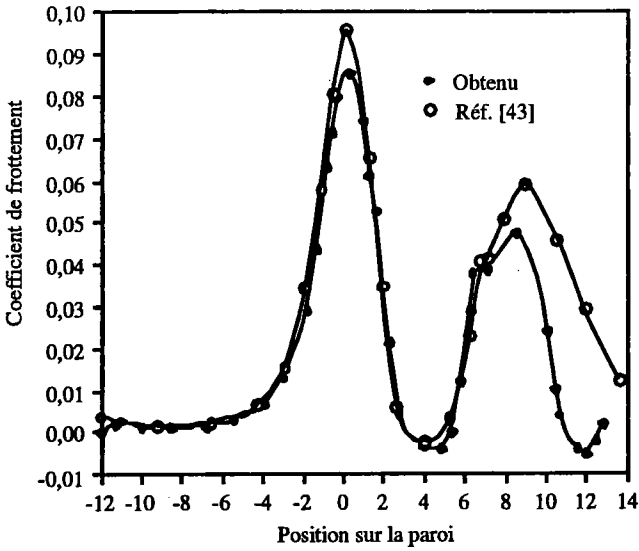


(a)

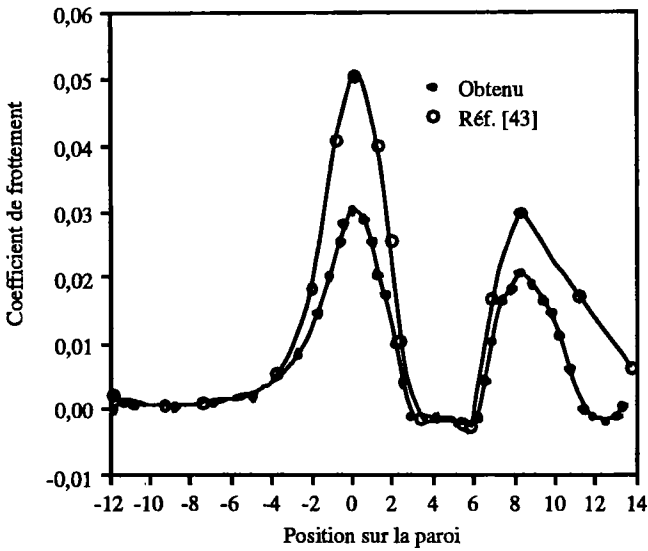


(b)

**Figure 9.18.** *Ecoulement laminaire, pression statique sur la paroi, a):  $Re = 100$ , b):  $Re = 400$ .*



(a)



(b)

Figure 9.19. *Ecoulement laminaire, coefficient de frottement sur la paroi, a):  $Re = 100$ , b):  $Re = 400$ .*

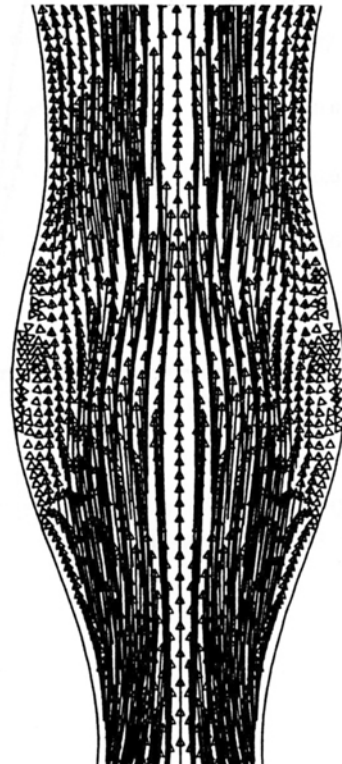
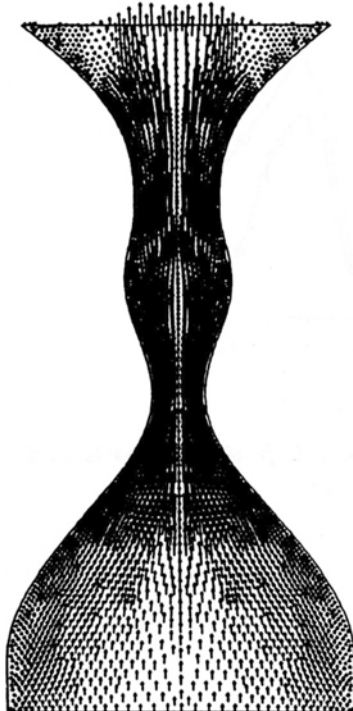
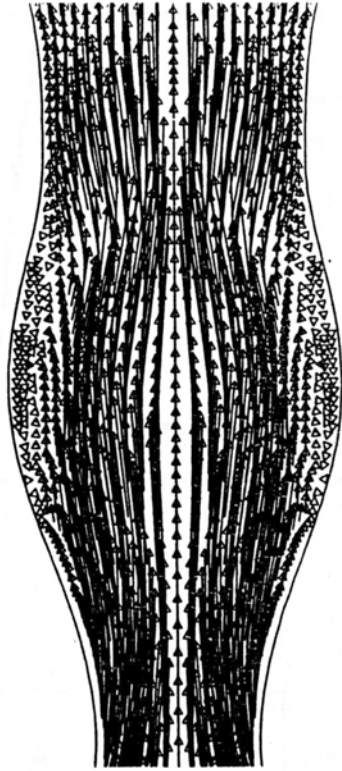
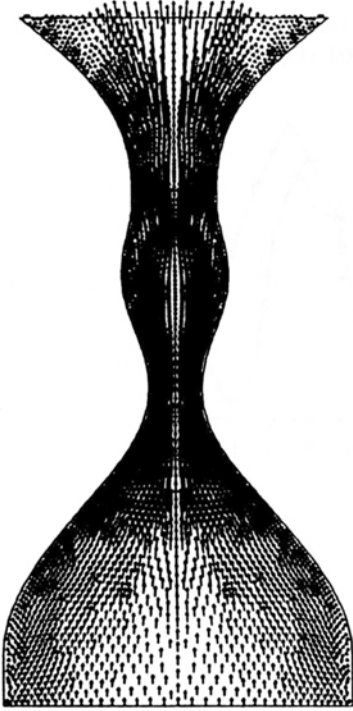


Figure 9.21. *Écoulement laminaire, champ de vitesse,  $Re = 400$ .*

Figure 9.20. *Écoulement laminaire, champ de vitesse,  $Re = 100$ .*



## 9.2. Écoulement turbulent dans un éjecteur

L'étude de l'écoulement dans cet éjecteur constitue un meilleur cas de validation pratique de notre modèle de turbulence. C'est un éjecteur bidimensionnel testé au centre de recherche NASA Lewis. La géométrie de cet éjecteur est présentée à la figure (9.22). Choi et Soh [29] ont étudié plusieurs rapports de sections  $A_s/A_p$  pour un rapport de pressions totales  $P_{0p}/P_{0s}$  fixé et vice versa dans le but de mettre en évidence l'influence des deux rapports sur l'écoulement du mélange. Ici, seulement, le cas  $A_s/A_p = 1.5$  et  $P_{0p}/P_{0s} = 3.5$  est considéré. Selon Choi et Soh, les conditions aux limites adoptées ici sont:

- $P_{0p} = 3.5$  atm et  $T_{0p} = 505$  K au primaire.
- $P_{0s} = 1.0$  atm et  $T_{0s} = 300$  K au secondaire (donc du fluide ambiant).
- A la sortie loin de l'éjecteur, une pression statique  $P_a = 0.9723$  atm, correspondant au nombre de Mach du courant libre  $M_\infty = 0.2$ , est imposée.

En normalisant les conditions aux limites ci-dessus par les données totales de l'écoulement primaire, on obtient:

- $P_{0p} = 1$  et  $T_{0p} = 1$  au primaire.
- $P_{0s} = 0.2857P_{0p}$  et  $T_{0s} = 0.5940T_{0p}$  au secondaire (donc du fluide ambiant).
- A la sortie loin de l'éjecteur, une pression statique  $P_a = 0.2778P_{0p}$

Les nombres de Reynolds, de Prandtl et de Prandtl turbulent sont respectivement  $1.3 \times 10^7$ , 0.72 et 0.9. Le nombre de Reynolds est basé sur la hauteur et la vitesse à la sortie de la tuyère primaire, correspondant à une expansion isentropique.

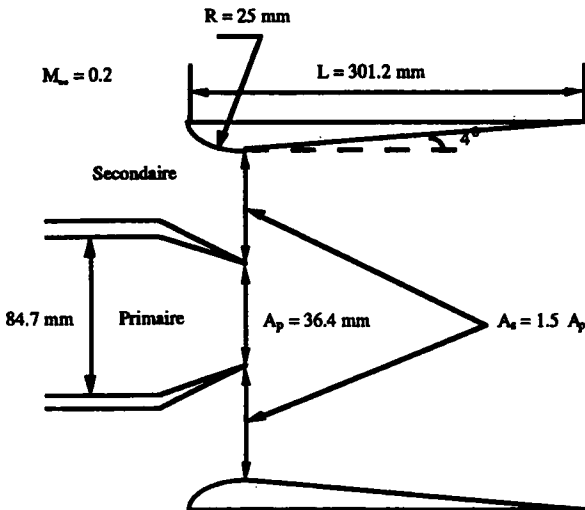


Figure 9.22. Écoulement turbulent dans un éjecteur, géométrie.

Les calculs ont été effectués sur un maillage de 23 374 éléments et 48 648 nœuds (Fig. 9.23) engendrant ainsi 115 348 équations à résoudre. Tel que constaté par Choi et Soh [29], à la sortie de la tuyère primaire, le rapport de pressions  $p/P_{0p} \approx 0.543$  est supérieur au rapport de pressions critique:  $p/P_{0p} = 0.528$  ainsi, l'écoulement à partir de la sortie de la tuyère primaire devient supersonique. A l'entrée de la zone de mélange, le jet supersonique s'accélère davantage et se détend jusqu'à ce que sa pression devienne inférieure à celle de son voisinage de manière qu'il subira une compression. La frontière du jet constitue une frontière de pression constante sur laquelle les ondes de détente se réfléchissent en des ondes de compression. Ce phénomène de détente-compression se répète plusieurs fois et il en résulte la formation d'une série de cellules de détente-compression appelées cellules de chocs (Fig. 9.24, 9.25, 9.26 et 9.27). Comparativement aux résultats de Choi et Soh, nos résultats montrent que l'écoulement primaire, à sa sortie de la tuyère, subit une détente

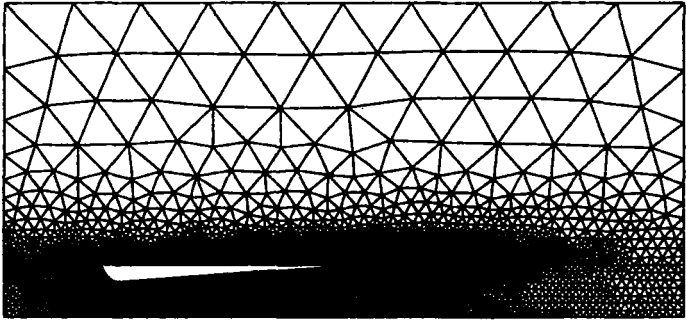


Figure 9.23. *Écoulement turbulent dans un éjecteur, maillage.*

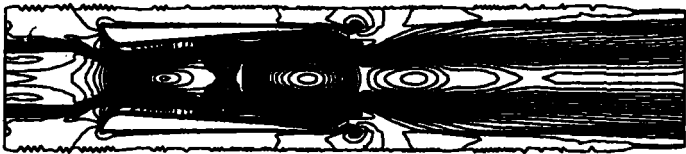


Figure 9.24. *Écoulement turbulent dans un éjecteur, lignes iso-Mach.*

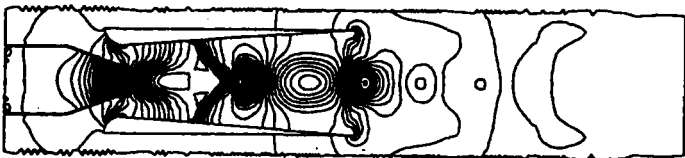
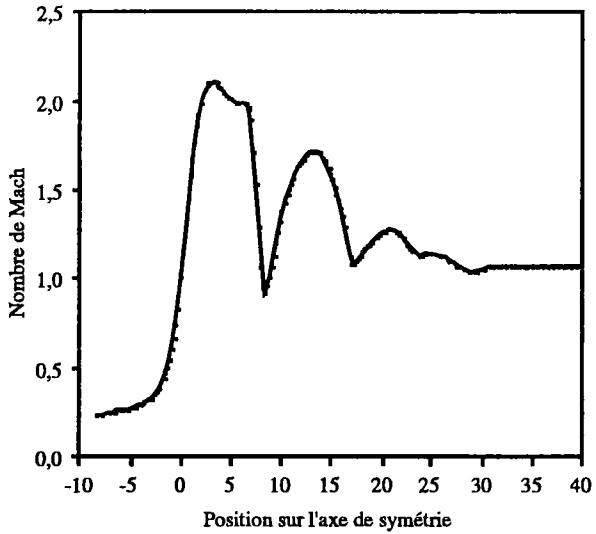


Figure 9.25. *Écoulement turbulent dans un éjecteur, lignes isobares.*

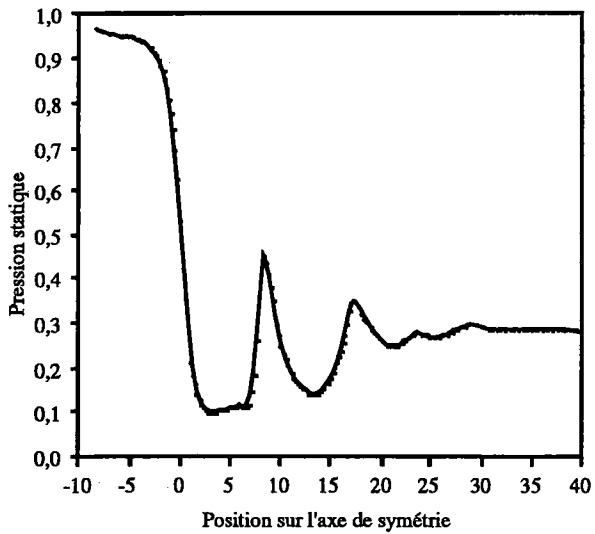
assez importante. Ceci se traduit par une onde de détente assez forte qui se réfléchit en une onde de compression aussi assez forte (Fig. 9.24, 9.25, 9.26 et 9.27). De ce fait, la section de passage pour le secondaire se trouve réduite davantage engendrant la formation d'une ligne sonique (une onde de choc normale) permettant un pompage (aspiration) d'un débit du secondaire (ambiance):  $\dot{m}_s/A_s = 207.5$  plus important que celui obtenu par Choi et Soh [29]:  $\dot{m}_s/A_s = 157.5$ . La figure (9.28 a,b,c) montre l'évolution du profil de vitesse longitudinale ( $u^* = u/u_r$  où  $u_r = 0.68313$ ) le long de la zone de mélange qui traduit l'évolution du mélange des deux courants, primaire et secondaire, le long de cette zone. En comparaison avec les résultats de Choi et Soh notre cas montre un mélange meilleur qui résulte en un profil de vitesse mieux développé à la sortie de la zone de mélange (Fig. 9.28c). La figure (9.29) montre les isolignes de viscosité turbulente  $\mu_t$ . Cette viscosité se trouve bien répartie, où le maximum se trouve bien localisé dans les zones critiques de turbulence intense c'est-à-dire dans les cellules de chocs. Aussi, en évoluant le long de la zone de mélange (Fig. 9.30), cette viscosité diminue au centre et augmente proche de la paroi, ce qui suit logiquement l'évolution naturelle du mélange le long de cette zone. Le champ de vitesse est montré à la figure 9.31.

## 10. Conclusion

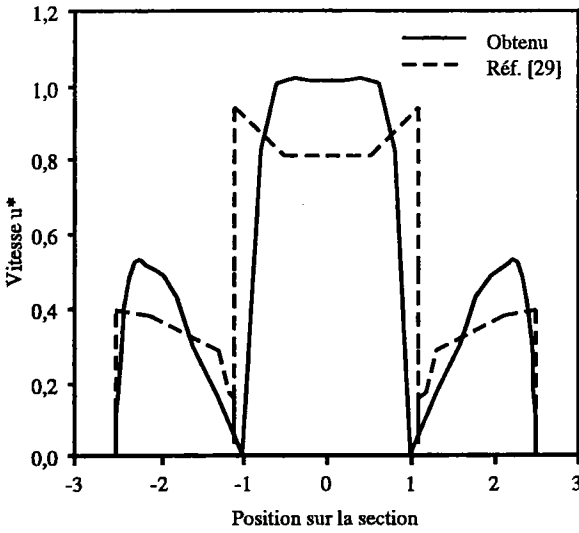
Nous avons développé une méthode d'éléments finis pour la simulation des écoulements internes compressibles bidimensionnels. Nous résolvons les équations de Navier-Stokes (resp. d'Euler), sous la forme conservative, en termes de variables dites enthalpiques: la pression statique  $p$ , la quantité de mouvement  $\mathbf{U}$  par unité de volume et l'enthalpie totale massique  $h$ . Avec l'utilisation de ces variables, les conditions aux limites de Dirichlet sur la pression statique ou totale et la température totale, souvent imposées pour la simulation des écoulements internes, sont appliquées de manière directe et exacte, contrairement à la formulation standard utilisant les variables conservatives: la densité  $\rho$ , la quantité de mouvement  $\mathbf{U}$  par unité de volume et l'énergie totale  $E$  par unité de volume. La formulation variationnelle, de type *SUPG*, développée ici, peut utiliser, en principe, n'importe quel type de variables indépendantes. En présence de forts gradients, nous avons renforcé la stabilité à l'aide d'un opérateur de capture des forts gradients. Les modèles mathématique et numérique, présentés dans cet article, ont été validés sur plusieurs types de tuyères pour simuler l'écoulement interne compressible bidimensionnel visqueux et non visqueux. La robustesse de la méthode *SUPG* et du capteur des forts gradients a été confirmée, particulièrement, si le maillage est adapté. Les résultats obtenus sont très comparables aux résultats des travaux antérieurs. Aussi, nous avons développé un modèle de turbulence algébrique très adéquat pour la simulation des écoulements turbulents dans les éjecteurs. La validité et l'efficacité de notre modèle ont été confirmées par les résultats obtenus comparativement aux résultats de Choi et Soh [29].



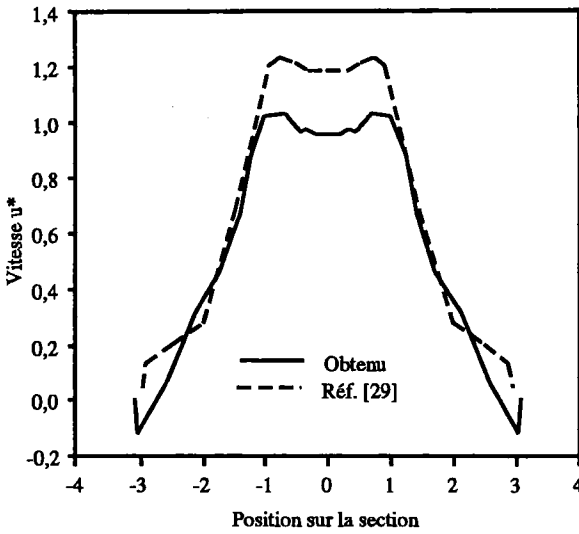
**Figure 9.26.** *Ecoulement turbulent dans un éjecteur, nombre de mach sur l'axe de symétrie.*



**Figure 9.27.** *Ecoulement turbulent dans un éjecteur, pression statique sur l'axe de symétrie.*



**Figure 9.28a.** *Écoulement turbulent dans un éjecteur, vitesse longitudinale à l'entrée de la zone de mélange.*



**Figure 9.28b.** *Écoulement turbulent dans un éjecteur, vitesse longitudinale au milieu de la zone de mélange.*

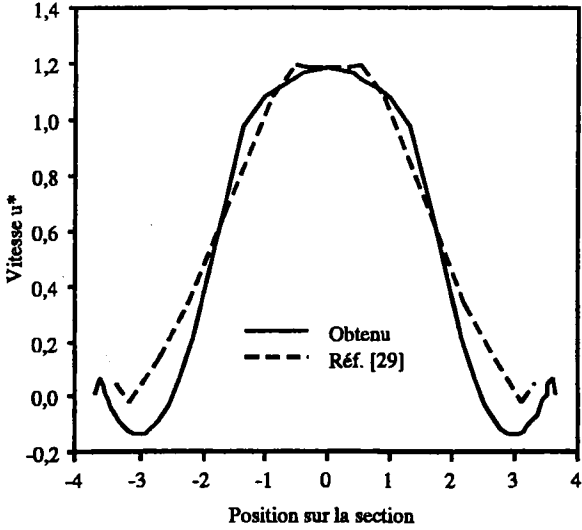


Figure 9.28c. *Ecoulement turbulent dans un éjecteur, vitesse longitudinale à la sortie de la zone de mélange.*

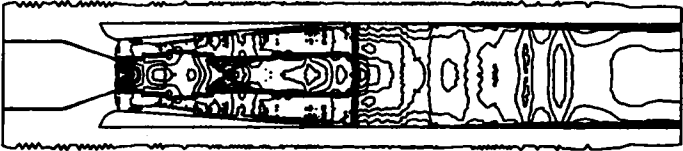


Figure 9.29. *Ecoulement turbulent dans un éjecteur, lignes de viscosité turbulente.*

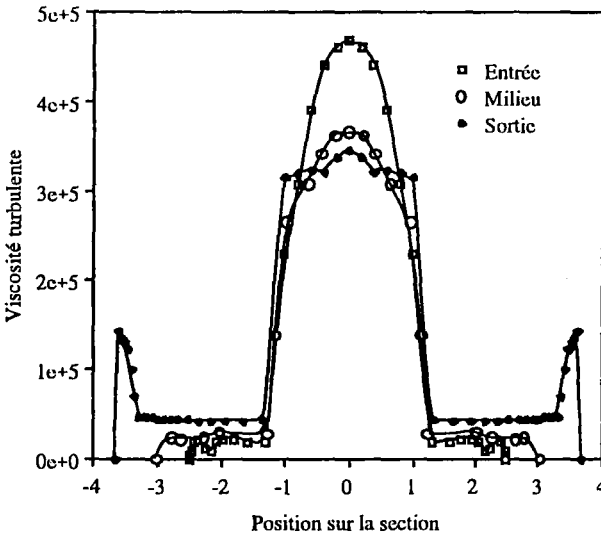


Figure 9.30. *Ecoulement turbulent dans un éjecteur, viscosité turbulente le long de la zone de mélange.*

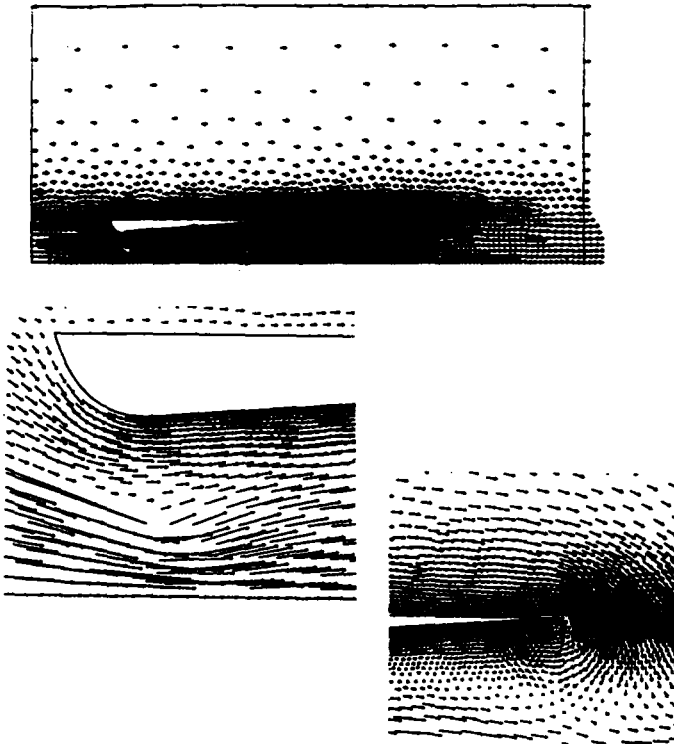


Figure 9.31. *Ecoulement turbulent dans un éjecteur, champ de vitesse.*

## 11. Bibliographie

- [1] A. Soulaïmani, A. Rebaine and Y. Mercadier, "Numerical Evaluation of a New Shock Capturing Operator for Compressible Flows," *The Third World Congress on Computational Mechanics, IACM, Chiba, Japan*, Vol. 1, pp. 200-201, 1994.
- [2] A. N. Brooks and T. J. Hughes, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows," *Proc. Third Internat. Conf. on Finite Element Methods in Fluid Flow*, Banff, Canad, 1980.
- [3] A.N. Brooks, T.J.R. Hughes, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- [4] M. Mallet, "A finite element method for computational fluid dynamics," *Ph.D. Thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, CA*, 1985.
- [5] T. J. R. Hughes and T. E. Tezduyar, "Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 45, pp. 217-284, 1984.
- [6] L. Franca, S. L. Frey and T. J. R. Hughes, "Stabilized finite element methods : I. Application to the advective-diffusive model," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, pp. 253-276, 1992.
- [7] A. Soulaïmani and M. Fortin, "Finite element solution of compressible viscous flows using conservative Variables," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 118, pp. 319-350, 1994.
- [8] P. Hansbo and C. Johnson, "Adaptive streamline diffusion methods for compressible flow using conservative variables," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 87, pp. 267-280, 1991.
- [9] G. Hauke and T.J.R. Hughes, "A unified approach to compressible and incompressible flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, pp. 389-395, 1994.
- [10] A. Soulaïmani, N.E.E. Elkadri et C. Deschênes, "Une méthode d'éléments finis pour le calcul des écoulements de fluides compressibles utilisant les variables conservatives et la méthode SUPG," *la Revue européenne des éléments finis*, Vol. 3 (2), pp. 211-245, 1994.
- [11] N. E. Elkadri Elyamani, "Une Méthode d'Elements Finis pour la Dynamique des Gaz et Conception Orienté Objet du Code de Calcul," *Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, Canada*, 1995.
- [12] F. Shakib, "Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations," *Ph.D. Thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, CA*, 1989.
- [13] J. Fabri and Siestrunck, "Supersonic air ejectors," *Advances in Applied Mechanics, Academic Press*, 5, 1-34, 1958.
- [14] J. Porter and R. A. Squyer, "A Summary/Overview of Ejector Augmenter



Theory and Performance," *Vought Corporation Advanced Technology Center, Dallas, Texas*, ATC Report No. R-91100/CR-47A, 1981.

[15] J. C. Dutton, C. D. Mikkelson and A. L. Addy, "A Theoretical and Experimental Investigation of the constant-area Supersonic-Supersonic Ejector," *AIAA Journal* 20, 1392-1400, 1982.

[16] J. C. Dutton and B. F. Carroll, "Limitation of Ejector Performance Due to Exit Chocking," *Journal of Fluid Engineering* 110, 91-93, 1988.

[17] J. Jr. Der, "Improved Methods of Characterizing Ejector Pumping Performance," *Journal of Propulsion and Power* 7, (3), 412-419, 1991.

[18] Ting-Hsien Lan and Hong-Sen Kou, "Non-uniform Velocity Effect in a Constant-Area Ejector Without a Diffuser," *Applied Energy*, vol. 38, pp. 181-198, 1991.

[19] T. S. Lund, D. A. Tavella and L. Roberts, "A Zonal Computational Approach to Thrust Augmenter Optimization," *AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, AIAA-85-0110, 1985.

[20] H. Schlichting, "Boundary-Layer Theory," *McGraw Hill, Inc.*

[21] J. E. Deese and R. K. Agarwal, "A Numerical Study of Viscous Flow in Inlets and Augmenters," *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, AIAA-88-0187, 1988.

[22] B. S. Baldwin and H. Lomax, "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," *AIAA Paper 78-257*, 1978.

[23] R. Malecki, S. Mityas and W. Lord, "Navier-Stokes Analysis of an Ejector and Mixer-Ejector Operating at Pressure Ratios in the Range 2-4," *AIAA/SAE/ASME/ASEE 26th Joint Propulsion Conference, Orlando, FL*, AIAA-90-2730, 1990.

[24] B. E. Launder and D. B. Spalding, "Mathematical Models of Turbulence," *Academic Press*, 1972.

[25] B. E. Launder, A. Morse, W. Rodi and D. B. Spalding, "Prediction of Free Shear Flows: A Comparison of the Performance of Six Turbulence Models," *Free Turbulent Shear Flows Conference Proceedings*, NASA-SP-321, 1972.

[26] H. Manouzi and M. Fortin, "A Treatment of Wall Boundaries for Turbulent Flows by the Use of A Transmission Finite Element Method," *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, pp. 113-126, 1991.

[27] B. Mohammadi, "Etude du Modèle K-EPSILON de La Turbulence pour les Ecoulements Compressibles," *Thèse de Doctorat, Université Paris VI, France*, 1991.

[28] L. P. Bernal and V. Sarohia, "Entrainment and Mixing in Thrust Augmenting Ejectors," *AIAA 21st Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, AIAA-83-0172, 1983.

[29] Y. H. Choi and W. Y. Soh, "Computational Analysis of the Flowfield of a Two-Dimensional Ejector Nozzle," *AIAA/SAE/ASME/ASEE 26th Joint Propulsion Conference, Orlando, FL*, AIAA-90-1901, 1990.

[30] P. D. Thomas, "Numerical Method for Predicting Flow Characteristics and Performance of Nonaxisymmetric Nozzles, Theory," *NASA CR-3147*, 1979.

- [31] M. EL Omari, "Contribution à l'Etude des Ecoulements de Fluides Compressibles dans un Ejecteur," *Thèse de Doctorat, Université de Sherbrooke, Québec, Canada*, 1992.
- [32] A. C. Galeao and E. G. Dutra do Carmo, "A Consistent Approximate Upwind Petrov-Galerkin Method for Convection-Dominated Problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 68, pp. 83-95, 1989.
- [33] Y. Saad and M. H. Schultz, "GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems," *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 7 (3), pp. 856-869, 1986.
- [34] A. Favre et al., "La Turbulence en Mécanique des Fluides," *Ed. Gauthier Villars*, 1976.
- [35] A. Rebaine, "Simulation d'écoulements internes compressibles laminaires et turbulents par une méthode d'éléments finis," *Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, Québec, Canada*, 1997.
- [36] D. C. Wilcox, "Turbulence Modeling for CFD," *DCW Industries, Inc.*, 1993.
- [37] P. Rostand, "Algebraic Turbulence Models for the Computation of Two-Dimensional High Speed Flows Using Unstructured Grids," *Institute for Computer Applications in Science and Engineering Report No. 88-63*, 1988.
- [38] D. Pan and J. C. Cheng, "Upwind Finite-Volume Navier-Stokes Computations on Unstructured Triangular Meshes," *AIAA Journal*, vol. 31, No. 9, pp. 1618-1625, 1993.
- [39] R. F. Cuffel, L. H. Back and P. F. Massier, "Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature," *AIAA Journal*, vol. 7, No. 7, pp. 1364-1366, 1969.
- [40] M. EL Omari, Y. Mercadier et G. Degrez, "Etude Numérique Comparative de l'Écoulement d'un Fluide Compressible dans les Tuyères Bidimensionnelles et Axisymétriques," *CSME Transactions*, vol. 17, No. 3, pp. 351-368, 1993.
- [41] Meng-Sing Liou and B. van Leer, "Choice of Implicit and Explicit Operators for The Upwind Differencing Method," *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, 1989.
- [42] J. Dompierre, M. G. Vallet, M. Fortin, W. G. Habashi, D. Ait Ali Yahia, S. Boivin, Y. Bourgault and A. Tam, "Edge-Based Mesh Adaptation for CFD," *Presented at the Conference on Numerical Methods for Euler and Navier-Stokes Equations, Montreal*, Report CERCA R95-73, 1995.
- [43] M. O. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux and H. Viviani, "Numerical Simulation of Compressible Naviers-Stokes Flows," *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, A GAMM-Workshop, Vol. 19.
- [44] S. Candel, "Mécanique des Fluides," *Bordas, Paris*, 1990.

## ANNEXE

Forme explicite de la matrice  $A_0$ .

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ha_{11} - 1 & ha_{12} & ha_{13} & a_{44} \end{bmatrix}$$

où

$$a_{11} = \left( \frac{\gamma}{2(\gamma-1)h} \right) + \frac{p \left( \frac{\gamma}{2(\gamma-1)h} \right)^2}{\left( \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right)^2 + \frac{|U|^2}{2h} \right)^{1/2}}$$

$$a_{12} = \frac{U_1}{2h \left( \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right)^2 + \frac{|U|^2}{2h} \right)^{1/2}}$$

$$a_{13} = \frac{U_2}{2h \left( \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right)^2 + \frac{|U|^2}{2h} \right)^{1/2}}$$

$$a_{14} = - \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right) - \frac{\frac{1}{h^3} \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right)^2 + \frac{|U|^2}{4h^2}}{\left( \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right)^2 + \frac{|U|^2}{2h} \right)^{1/2}}$$

$$a_{44} = ha_{14} + \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right) + \left( \left( \frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right)^2 + \frac{|U|^2}{2h} \right)^{1/2}$$