

---

# Modélisation des transferts thermiques conjugués par méthode multigrille

Jean-Bernard Saulnier

Laboratoire d'Etudes Thermiques (LET UMR 6608)

ENSMA - BP 109

86960 Futuroscope cedex

---

*RÉSUMÉ. Cet article est consacré à une présentation détaillée de la méthode dite multigrilles appliquée aux transferts conjugués dans les cartes de composants électroniques. Une grille donnée filtre rapidement les composantes de l'erreur dont la période spatiale est inférieure ou au plus du même ordre de grandeur que le pas de cette grille. L'idée des multigrilles consiste une fois ces hautes fréquences éliminées à aller opérer sur une grille de maille plus faible : les basses fréquences de la précédente y deviennent des moyennes, voire des hautes fréquences et y sont à leur tour rapidement éliminées. Ceci constitue le fondement des multigrilles dont la mise en œuvre nécessite quelques précautions supplémentaires qui seront exposées en détail.*

*ABSTRACT. This paper is devoted to the presentation of multigrids and to their application to conjugate heat transfer in electronic boards. A given grid quickly damps out the components of the error, the space period of which is of the same order or less than the grid step. In a multigrid procedure once these high frequencies have vanished, one has to operate on a second and coarser grid: the low frequencies of the previous one become then mean and even high frequencies and are easier to eliminate on the second grid. The complete procedure of multigrid involves a series of embedded grids, the size of which becomes coarser and coarser. Details about the management of the grids will be provided and examples of application to electronic boards presented and discussed.*

*MOTS-CLÉS : multigrilles, volumes finis, Navier-Stokes, thermique, transferts conjugués, conduction, convection, cartes de composants électroniques.*

*KEYWORDS : multigrids, finite volumes, Navier-Stokes, conjugate heat transfer, conduction, convection, electronic boards.*

---

## PRINCIPALES NOTATIONS

### Lettres latines :

A	surface ( $m^2$ )
B	hauteur du composant
e	erreur
f	résidu
H	hauteur du canal
h	pas spatial
i, j	indice du nœud discrétisé dans les deux directions x, y
L	opérateur de lissage
Lx	longueur de la carte (sens de l'écoulement)
Lz	largeur de la carte
LE	dimension de la "zone amont" sans composant (entrée)
LS	dimension de la "zone aval" sans composant (sortie)
LL	dimension longitudinale des composants (sens de l'écoulement)
LT	largeur des composants (direction y perpendiculaire à l'écoulement, dans la largeur de la carte)
$l_x$	longueur de la puce
$l_z$	largeur de la puce
M	matrice d'itération
NI	nombre d'itérations
P	opérateur de prolongation
p	pression ( $N/m^2$ )
Q	dissipation de l'énergie du composant (W)
q	flux surfacique de chaleur ( $W/m^2$ )
R	opérateur de restriction
r	résidu normé
$r_\phi$	valeur résiduelle associée à la variable $\phi$
$S_\phi$	terme de source associée à la variable $\phi$
T	température
u	vitesse selon l'axe x (m/s)
V	vecteur propre
v	vitesse selon l'axe y (m/s)
w	vitesse de l'axe z (m/s)
x,y,z	axes de coordonnées

### Lettres grecques :

$\Gamma_\phi$	coefficient de diffusion	$\phi$	variable scalaire quelconque
$\Delta$	différentiel	$\gamma, \epsilon, \alpha$	facteurs de sous-relaxation, ou de réglage des cycles adaptatifs
$\lambda$	valeur propre		
$\rho$	masse volumique ( $kg/m^3$ )		

## 1. Introduction

### 1.1. La nature des problèmes abordés

Précisons que les applications envisagées concernent des phénomènes stationnaires de **transfert de chaleur conjugués** complexes, alliant d'une part la **conduction** dans des structures multiples, de caractéristiques thermophysiques éventuellement différentes, avec des **dissipations localisées** et d'autre part des **écoulements** avec de nombreux **obstacles**. Nous traitons ici le seul cas de la convection forcée en régime laminaire, mais la méthodologie s'adapte sans difficultés majeures à la convection naturelle, ou au régime turbulent.

Une telle étude systématique présente un intérêt certain, non seulement d'un point de vue théorique, mais également en raison des nombreuses applications pratiques : citons tout d'abord la thermique les problèmes des cartes de composants électroniques qui constitue l'objet principal de nos travaux, mais également celle des machines électrotechniques, des turbomachines, des échangeurs...

### 1.2. Pourquoi faut-il une méthode numérique efficace pour simuler ces problèmes ?

Le problème physique est formulé, à l'aide d'équations aux dérivées partielles, à partir de bilans classiques (masse, quantité de mouvement, énergie...). Les équations phénoménologiques sont celles de la diffusion de la chaleur avec distribution de densité de flux générée, dans le solide, et celles de Navier-Stokes, dans le fluide. La discrétisation s'effectue quant à elle en variables primitives selon une méthode des volumes finis. Enfin le système des équations aux différences finies sera résolu itérativement à l'aide de la méthode des **multigrilles**. La motivation de ce choix des multigrilles réside dans la taille singulièrement élevée des modèles nécessaires, pour le problème traité, taille engendrant de faibles performances des méthodes usuelles à grille unique.

En effet l'une des premières caractéristiques du problème traité réside dans sa géométrie : apparemment simple, cartésienne, assimilable à un canal plan (les cartes) avec des obstacles (les composants), ce type de configuration est cependant très consommateur de nœuds. La petite taille des composants, dans lesquels est implantée la pastille de silicium, elle-même encore plus réduite, la conductivité parfois faible des matériaux constitutifs de boîtier (résine époxy par exemple) conduit à des gradients relativement élevés, à l'origine d'un maillage resserré dans ces zones. La multiplicité des composants disposés sur une carte (usuellement de l'ordre de la dizaine) va amplifier rapidement la taille du modèle. De plus, côté fluide, la présence de décollements et recirculations divers qui apparaissent périodiquement au voisinage des composants contribuent eux aussi à accroître cette taille.

Rappelons qu'avec les méthodes usuelles à grille unique, le temps de calcul d'une méthode itérative classique (Gauss-Seidel, Jacobi...) augmente de façon polynomiale avec le nombre de nœuds : en résumé, la complexité de la thermique locale dans le fluide autour des composants, liée à la multiplicité de ces composants ne peut alors que conduire à des difficultés de taille mémoire et de temps CPU, lors de sa simulation.

### 1.3. *Quelles réponses peut-on apporter aux modèles de grande taille ?*

Cette inflation de la taille des modèles n'est pas propre à la thermique, et on la rencontre aussi bien en mécanique ou en aérodynamique, de même que dans de nombreux problèmes ouvrant sur les phénomènes naturels (géophysique, météorologie, pollution...). On a tenté d'y apporter jusque là divers types de réponse parmi lesquels nous mentionnerons :

- les techniques de réduction, issues de l'automatique, limitées jusqu'à aujourd'hui aux problèmes linéaires [MER 86] et qui partent de l'étude de la structure même du modèle.
- l'abaissement de la dimensionnalité du problème lui-même, en remplaçant, par exemple, le domaine d'intégration, par la frontière qui le limite : c'est ce que mettent en œuvre les méthodes dites d'intégrales de frontières, mais qui à notre connaissance n'ont guère vu de prolongement en direction des problèmes conjugués [WRO 81].
- l'exploitation des nouvelles architectures de machines (calcul vectoriel et parallèle), mais c'est là une démarche qui, se greffant sur les autres voies évoquées ici, seront de toute façon en mesure d'apporter leur propre contribution à l'amélioration des temps de calcul.

Nous nous intéressons plutôt ici au développement de techniques purement numériques, susceptibles en particulier d'apporter en elles-mêmes un gain substantiel face aux problèmes non linéaires des transferts conjugués : il s'agit d'une extension apportée aux différences, aux volumes, ou aux éléments finis classiques et nous nous sommes pour cela appuyés essentiellement sur les travaux [BRA 77 et BRA 80] et [HAC 85] cités plus particulièrement au paragraphe 1.5. consacré à la bibliographie sur ce sujet des multigrilles.

### 1.4. *Le principe des multigrilles et quelques exemples de stratégies usuelles*

Très sommairement, et nous y reviendrons au paragraphe suivant, le principe des multigrilles consiste, partant d'un maillage (ou grille) donné, à effectuer les calculs en utilisant une séquence de grilles déduites du maillage initial en en restreignant successivement le pas spatial. Des procédures adéquates permettent un dialogue cyclique entre les différents niveaux de grilles (prolongations, restrictions). L'analyse fréquentielle (au sens des fréquences spatiales) de l'erreur de calcul a permis de mettre en évidence l'efficacité de cette procédure.

#### 1.4.1. *Procédures à cycles fixés [HAC 85]*

Dans ce premier cas la trajectoire dans le plan (niveau de grille NG, nombre d'itérations NI) est parfaitement déterminée, avant tout calcul, tant en ce qui concerne le nombre des itérations à chaque niveau de grille que l'évolution des prolongations (passage d'une grille grossière à la grille fine la plus proche, symbole P), des restrictions (passage inverse, symbole R) et du lissage (résolution approchée de l'ensemble des équations du modèle sur un niveau de grille donné, symbole L).

A titre d'illustration, la figure 1 schématise une procédure connue d'après la forme en V de sa trajectoire sous le nom de "cycle en V". Ici le nombre des itérations est fixé comme uniforme sur chaque grille et l'enchaînement des prolongations et des restrictions y est défini *a priori*.

Observons qu'en opérant ainsi les "retours" vers les niveaux les plus élevés

peuvent générer des perturbations (cf. § 2), du fait des interpolations ou prolongations nécessaires. Pour remédier à ces défauts des variantes ont été proposées, destinées à améliorer les approximations fournies par les grilles intermédiaires, telle celle dite de "cycle en W" (cf. figure 2).

#### 1.4.2. Procédures à cycles adaptatifs [BRA 77]

A la différence des précédentes, la trajectoire associée à ces procédures n'est pas déterminée à l'avance. Au contraire, elle résulte d'une gestion interne (cf. figure 3) qui est contrôlée par l'avancée même du calcul :

- sur le plan du nombre d'itérations à un niveau de grille donné,
- sur le plan du choix, au départ d'un niveau de grille en direction d'une restriction ou d'une prolongation.

Le détail de cette gestion, et des choix des critères mis en jeu est présenté dans le paragraphe 2.

#### 1.4.3. Traitement des problèmes linéaires et non linéaires

Une distinction qui sera expliquée en détail ultérieurement (cf. § 2) portera sur la gestion du transfert des informations d'un niveau de grille à l'autre. Retenons, en nous référant à la dénomination anglo-saxonne, l'existence de deux procédures suivantes :

- CS ("correction storage") pour les problèmes linéaires,
- FAS ("Full Approximation Storage") pour les problèmes non linéaires.

### 1.5. Rappels bibliographiques sur les multigrilles

Indiquons tout d'abord que la méthode des multigrilles n'est certes pas nouvelle en soi : elle a été décrite systématiquement par les mathématiciens au début des années 60 et elle a constitué le point de départ du développement d'une méthode efficace pratiquée dans de nombreux domaines de la physique au cours des dix dernières années [HAC 85].

Nous allons maintenant brosser succinctement, et sans prétendre atteindre une classification universelle, un tableau des principaux travaux portant sur des multigrilles et en direction des équations différentielles partielles de type elliptique.

#### 1.5.1. Algorithmes des multigrilles à cycles fixés

W. Hackbusch semble avoir été le premier auteur [HAC 85] à étudier dans la fin des années 70 le principe du schéma de correction linéaire (CS), allié à une procédure de type cycle fixé (en V ou en W) et à l'appliquer à des problèmes non linéaires mais linéarisés.

D'après son principe exposé schématiquement au § 2.2.3, la procédure (nombre d'itérations, basculements vers les prolongations et restrictions entre les grilles emboîtées) est en quelque sorte contrôlée "extérieurement" en ce sens que l'utilisateur fixe à l'avance le nombre des itérations locales et l'époque des basculements de grille à grille. Dans l'approche de Hackbusch, un problème non linéaire doit au préalable avoir été linéarisé par un moyen convenable. L'expérience

montre que cette technique ne pouvait toutefois être très performante que sur un problème purement linéaire voire sur un problème légèrement non-linéaire et concernait de ce fait un nombre d'applications très restreint.

De plus, pour que le gain de temps de calcul soit substantiel, il lui fallait envisager de rechercher la séquence de cycles optimisée : le positionnement optimum de la trajectoire évoquée plus haut (cf. fig. 1) est en effet loin d'être aisé, et toute la difficulté réside dans la recherche de cette séquence optimisée.

Face à un problème *a priori* inconnu et compliqué, le véritable gain en temps de calcul peut, du fait de cette recherche nécessaire, s'avérer surestimé.

U. Trottenberg [TRO 80] a développé un logiciel connu sous le nom de MGOO et destiné à la résolution de l'équation elliptique linéaire du second ordre suivante :

$$-A(x,y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - B(x,y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + C(x,y) \cdot f = F(x,y)$$

avec des conditions aux limites données pour une configuration de géométrie rectangulaire.

V. Pau et E. Lewis [PAU 86] ont appliqué la procédure du cycle fixé en schéma de correction linéaire (CS) à l'algorithme SIMPLE bien connu dans les problèmes d'écoulement. L'un des problèmes de cet algorithme réside dans l'équation de correction de pression et la convergence globale dépend en particulier de la qualité de la solution de cette équation de pression. Il est à noter que ces auteurs appliquent ici le schéma CS avec des cycles en V à la seule équation de correction de pression considérée comme une équation linéaire. Les autres équations liées à la quantité de mouvement sont découplées de la précédente et demeurent quant à elles justiciables d'une grille unique. Selon leurs constatations, pour le problème bidimensionnel traité le gain de temps\*, à précision égale de calcul, de cette version "multigrilles" est de l'ordre de 3 à 5 vis à vis de la méthode de grille unique.

U. Brockmeier, N.K. Mitra et M. Fiebig (1985) [BRO 86] ont effectué la résolution de l'écoulement tridimensionnel, incompressible et stationnaire en utilisant le schéma de correction linéaire avec cycle en V. Ils ont retenu l'algorithme SOLA [HIR 75] conduisant à transformer l'équation de continuité en une équation du type de Poisson pour la pression. Là encore, la technique de multigrilles est seulement appliquée à cette équation de pression. Le gain de temps de calcul est rapporté comme de l'ordre de 5 à 10.

Remarquons que dans les quatre références évoquées plus haut, le travail exposé a pour but essentiel, non pas de résoudre entièrement en tant que telles les caractéristiques non-linéaires de l'écoulement, mais plutôt de présenter une méthode pour dégager une équation linéaire justiciable des multigrilles.

#### *Algorithme de multigrilles à cycles adaptatifs*

Brandt [BRA 77] a fait porter son analyse non seulement sur le schéma de correction linéaire CS (*Correction Storage*), mais aussi sur le schéma de correction non-linéaire FAS (*Full Approximation Storage*) en utilisant l'algorithme des multigrilles à cycles adaptatifs.

---

\* c'est-à-dire par convention le rapport temps CPU en grille unique/ temps CPU en grille multiple

Mentionnons ici une distinction proposée par l'auteur selon que la procédure commence sur la grille la plus fine (FAS) ou sur la grille la moins fine (FAS-FMG pour "Full Approximation Storage - Full Multigrid").

Ce travail est intéressant : dans de nombreux cas d'écoulement d'intérêt pratique, cet algorithme FAS - FMG apparaît performant (gain d'un facteur 10 à 20) et le **temps de calcul y augmente linéairement en fonction du nombre des nœuds** et non plus selon une loi polynomiale.

Dans les applications de cet algorithme FAS-FMG, il convient également de citer le travail numérique de S.P. Vanka [VAN 86, VAN 88], portant plus particulièrement sur les écoulements bi ou tri-dimensionnels en régime laminaire et ce dans des coordonnées soit orthogonales, soit curvilignes. Il a utilisé pour cela une relaxation de Gauss-Seidel symétrique, bloc par bloc.

S. Sivaloganathan et G.J. Shaw ont été les premiers [SIV 88] et [SHA 88] à décrire une procédure de relaxation des multigrilles alliant globalement l'équation de correction de pression et celle de quantité de mouvement de l'algorithme SIMPLE proposé par Patankar et Spalding. D'après une analyse théorique [SHA 88], ils ont développé une équation générale de correction de pression permettant de lisser toutes les erreurs de haute fréquence dans tous les niveaux de grilles emboîtées. Il s'avère qu'un tel couplage entre les équations de quantité de mouvement et l'équation générale de correction de pression - dans tous les niveaux de grilles emboîtées - peut accélérer considérablement la convergence.

Plus récemment enfin M.C. Thompson et J.H. Ferziger ont développé [THO 89] une procédure plus performante fondée sur la combinaison de la méthode des multigrilles et de la technique de raffinement local à caractère adaptatif afin de garantir des résultats indépendants de la finesse de grille optimisée et ce dans de nombreux cas d'écoulements complexes. Ces auteurs ont conclu à un avantage remarquable de cette nouvelle extension vis à vis des multigrilles à raffinement fixé : le gain se situe dans un rapport 2 à 5.

Il est à remarquer que, dans l'ensemble des travaux cités plus haut, la motivation essentielle résidait dans la mise en place d'une procédure performante pour résoudre globalement le problème non-linéaire d'écoulements isothermes impliquant le couplage entre l'équation de continuité et celle de quantité de mouvement.

Reste à introduire l'équation de l'énergie pour aller vers l'objectif essentiel de notre étude : la thermique des transferts conjugués, dans les systèmes de cartes électroniques.

### ***1.6. Etude bibliographique de la modélisation des cartes de composants électroniques***

Nous ne mentionnerons pas tous les travaux plus classiques où l'on ne tenait pas compte du caractère conjugué du transfert, ou de la présence des composants en tant qu'obstacles à l'écoulement. Les études évoquées ne font pas nécessairement appel aux multigrilles, ce qui montre en particulier que leur application à ce sujet est relativement récente, et par ailleurs la plupart des configurations traitées sont bidimensionnelles.

S. Habchi et S. Acharya ont mené une étude numérique [HAB 86] par différences finies à grille unique, portant sur l'écoulement mixte dans un canal vertical supportant un composant rectangulaire, et avec des conditions aux limites très simples (température imposée ou paroi adiabatique). Ils ont constaté que les champs

thermique et dynamique sont fortement sensibles au type d'écoulements, à la géométrie, et aux conditions aux limites.

G.S. Barozzi et E. Nobile ont été à notre connaissance, les premiers à simuler moins approximativement le problème des cartes de composants électroniques [BAR 88].

La qualité de leur étude provient en particulier d'un meilleur degré de réalisme : le problème traité est celui d'un canal en convection forcée laminaire, canal dont les parois présentent une certaine épaisseur (d'où la nature conjuguée du problème) ; les composants au nombre de 3 sont de nature hétérogène et seule une petite zone de ces composants est le siège d'une dissipation. Les matériaux présentent des conductivités thermiques nettement différentes (de 0,025 W/m.K pour l'air à près de 250 W/mK dans la zone des composants). Les conditions aux limites sont de type cyclique, ce qui permet de simuler l'empilement des cartes côte à côte.

Sur le plan numérique ces travaux utilisent la version SIMPLEC de l'algorithme SIMPLE, et résolvent la seule équation de la correction de pression par voie de multigrille. Les autres équations sont résolues par une technique de relaxation par lignes zébrées alternées, lesquelles se prêtent bien à un calcul sur machine à processeur parallèle.

Au-delà de la performance numérique l'apport de ces travaux réside dans la visualisation des champs thermique et dynamique de cette configuration complexe, ainsi que dans l'accès à l'évaluation des flux pariétaux locaux.

Torok et Gronseth ont traité un problème de thermique dans un canal supportant quatre composants identiques simulés par des blocs d'aluminium en utilisant le code d'éléments finis FIDAP à grille unique [TOR 88]. Avec ce code, ils retrouvent pratiquement - et ce pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 1800 - les résultats de mesure effectués par Hacoheh [HAC 85] et de corrélation expérimentale proposée par Wirtz et Dykshoorn [WIR 84].

Plus récemment M. Afrid et A. Zebib ont étudié dans le cas d'une plaque verticale en convection naturelle avec des conditions aux limites simples (flux imposé) la sensibilité à la dissipation d'énergie, au nombre, à la position et à la taille de composant [AFR 89].

Il a également fallu attendre 1989 pour voir aborder la simulation numérique du problème électronique conjugué conduction-convection dans un cas d'écoulement turbulent. A notre connaissance, C. Prakash (1989) a été dans les premiers à présenter pour une configuration simple (un composant) les résultats concernant la visualisation des champs thermique, dynamique et de viscosité turbulente à l'aide du logiciel PHOENICS [PRA 89]. Rappelons enfin, pour mémoire, qu'au LET, l'analyse des transferts conjugués dans cet environnement des cartes de composants électroniques a tout d'abord été menée à l'échelle du composant lui-même [MER 86], puis en prenant en compte l'interaction composant/carte/air, en convection naturelle ([HUC 84] : association méthode et volume de contrôle en grille unique) puis en convection forcée ([FER 87] : association méthode nodale et différences finies en grille unique). C'est dans le cadre des thèses plus récentes [WAN 92] et [FOU 97] que les multigrilles ont été adaptées à la thermique des cartes de composants.



$$D = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{h^2} I \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La représentation précédente conduit au processus itératif suivant :

$$T_j^{j+1} = D^{-1} (B T_j - q) \tag{3}, \text{ soit}$$

$$T_j^{j+1} = T_j - D^{-1} (L T_j + q) \tag{4}, \text{ ou encore :}$$

$$T_j^{j+1} = M T_j + N \tag{5}$$

Les matrices M (dite matrice d'itération) et N s'écrivent respectivement :

$$M = I - D^{-1} L = I - \frac{h^2}{2} L \quad \text{et} \quad N = -D^{-1} q = -\frac{h^2}{2} q I$$

Notant  $T_e$  la solution exacte, rappelons les définitions classiques concernant :

- le défaut  $d^j = L T_j + q$  à l'itération j,
- l'erreur  $e^j = T_j - T_e$  à l'itération j,
- le déplacement  $\delta_{j+1} = T_{j+1} - T_j$  des solutions approchées, de l'itération j à l'itération j+1.

Dès lors, une nouvelle expression de l'algorithme peut s'écrire :

$$T_j^{j+1} = T_j - D^{-1} d^j \tag{6}$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement à la version de l'algorithme de Jacobi dite avec amortissement, laquelle se déduit de (6) par l'introduction du facteur d'amortissement  $\omega \in (0, 1/2)$  selon :

$$T_j^{j+1} = T_j - 2\omega D^{-1} d^j$$

La nouvelle matrice d'itération devient dès lors

$$M = I - 2\omega D^{-1} L = I - h^2 \omega L \tag{7}$$

Observons maintenant l'évolution de l'erreur au cours des itérations. Compte tenu de ce que  $T_j^{j+1} = M T_j + N$ , et de  $T_e = M T_e + N$ , il vient par soustraction membre à membre :

$$e_j^{j+1} = M e^j, \tag{8}$$

$$\text{d'où nous pouvons déduire : } e_j^{j+1} = M^{j+1} e^0$$

Or les valeurs propres de L et M sont respectivement [HAC 85]

$$\text{pour L : } \lambda_i^L = 4 h^{-2} \sin^2 (i\pi h/2)$$

$$\text{pour M : } \lambda_i^M = 1 - 4 \omega \sin^2 (i\pi h/2)$$

Il leur correspond les vecteurs propres (communs à L et M) suivants : (l'indice v représente la composante du vecteur)

$$V^1 = [\sqrt{2h} \sin(v\pi h)]_{v=1,n} \quad V^i = [\sqrt{2h} \sin(vi\pi h)]_{v=1,n}$$

$$V^2 = [\sqrt{2h} \sin(v2\pi h)]_{v=1,n} \quad V^n = [\sqrt{2h} \sin(vn\pi h)]_{v=1,n}$$

La figure 1 montre les valeurs propres de la matrice d'itération  $M$  ( $\lambda_i^M = \cos^2 i\pi h/2$ ) dans le cas l'amortissement vaut  $\omega = 1/4$ .

La plus grande des valeurs propres de  $M$ , appelée le **rayon spectral**, est obtenue pour  $i = 1$  : le taux de convergence correspondant associé sera très faible, ainsi que le montre le raisonnement suivant.

On peut en effet décomposer l'erreur sur la base des vecteurs propres de  $M$ , qui

pour son estimation initiale vaut :  $e^\circ = T^\circ - T_e = \sum_i \alpha_i V^i$

Il vient donc pour  $e^1$ , compte tenu de la relation (8) :

$$e^1 = M e^\circ = \sum_i \alpha_i M V^i = \sum_i \alpha_i \lambda_i V^i$$

En conséquence, rendue à l'itéré  $j$ , l'erreur aura comme décomposition :

$$e^j = M^j e^\circ = \sum_i \alpha_i (\lambda_i)^j V^i \tag{9}$$

On convient alors de séparer en deux domaines l'ensemble des valeurs propres :

- celui dit basse fréquence associé aux valeurs propres correspondant à  $ih < 1/2$ ,
- celui dit haute fréquence associé aux valeurs propres correspondant à  $ih > 1/2$ .

L'équation (9) montre donc que, puisque pour les hautes fréquences (cf. fig. 4) les valeurs propres  $\lambda_i$  sont petites, les composantes hautes fréquences de  $e^j$  ont donc tendance à disparaître rapidement avec le nombre d'itérations. Ceci montre qu'une méthode itérative telle que celle que nous utilisons ici (Jacobi amorti  $\omega = 1/4$ ) constitue en fait, pour l'erreur, un filtre amortissant rapidement les hautes fréquences spatiales, ce qui peut encore se traduire (cf. fig. 5) en indiquant que l'erreur  $e^j$  est plus "lisse" que l'erreur  $e^\circ$ .

Cependant, les basses fréquences associées aux valeurs propres proches de l'unité demanderont de nombreuses itérations avant de s'évanouir.

La figure 6 schématise ces deux phases nettement distinctes du processus :

- phase a : filtrage rapide des hautes fréquences,
- phase b : élimination très lente des basses fréquences.

Il est fondamental d'observer que si l'on change de grille après le filtrage des hautes fréquences, et que l'on s'adresse alors à une grille plus fine, ce qui dans l'erreur demeurait basse fréquence, peut devenir haute fréquence sur la nouvelle grille. L'exploitation de cette remarque fait l'objet du paragraphe suivant.

2.1.2. Principe d'un algorithme à 2 grilles

Montrons tout d'abord l'amélioration du filtrage de l'erreur apportée par l'appel à 2 grilles.

Supposons qu'après avoir éliminé les hautes fréquences de l'erreur relative à la grille de départ ( $G^2$ ), on décide de poursuivre sur la grille ( $G^1$ ) déduite de la précédente en y éliminant un nœud sur deux (cf. fig. 7), les pas d'espace valant respectivement  $h_2$  et  $h_1 = 2h_2$ .

Le calcul des valeurs propres des opérateurs  $L_2$  (associé à la grille initiale  $G^2$ , où l'on a déjà éliminé les hautes fréquences associées à cette même grille) et  $L_1$  (associé à la nouvelle grille  $G^1$ ) est simple et conduit aux deux jeux de valeurs propres :

$$\lambda_{G^2} = 1 - \sin^2(i\pi h_2/2) \quad (\text{grille fine})$$

$$\text{et } \lambda_{G^1} = 1 - \sin^2(i\pi h_1/2) \quad (\text{grille moins fine})$$

Compte tenu de ce que  $h_1 = 2h_2$ , il vient :

$$\lambda_{G^1} = 1 - \sin^2(i\pi h_2)$$

L'allure des valeurs propres relatives aux grilles  $G^2$  et  $G^1$  est indiquée par la figure 8.

Ainsi les composantes résiduelles de l'erreur qui apparaissaient sur  $G^2$  comme des basses fréquences - difficiles à éliminer par les itérations effectuées sur cette grille  $G^2$  - deviennent maintenant, en partie des hautes fréquences susceptibles d'être efficacement filtrées (c'est-à-dire sur peu d'itérations) sur  $G^1$ .

En conclusion à la suite de cette étude sur l'analyse spectrale de l'erreur, il apparaît que :

- 1) Pour une grille - fine - donnée, les itérations filtrent rapidement les hautes fréquences spatiales.
- 2) Restent alors des basses fréquences associées à des valeurs propres très proches de l'unité et qui donc, si l'on reste sur cette grille, demanderont de très nombreuses itérations pour disparaître (cf. fig. 6).
- 3) Il apparaît donc opportun d'envisager d'associer au moins 2 grilles, l'une fine pour les premières itérations, l'autre plus grossière, de façon à accélérer la réduction de l'erreur.

Cependant, dans la pratique, se dégageront un certain nombre d'opérations élémentaires dont nous mentionnons ici seulement la nécessité, et qui seront précisées ultérieurement sur divers schémas de procédures multigrilles. Il s'agit en fait :

- du **lissage** (opération d'évacuation des hautes fréquences de l'erreur) constitué de l'algorithme itératif de base (ici Jacobi mais qui pourrait être selon des cas remplacé par Gauss-Seidel, ou tout autre "lisseur") appelé aussi bien sur la grille  $G^2$  que sur la grille  $G^1$  ;
- de 2 opérations de transfert d'information
  - l'une, dénommée **restriction**, permet de communiquer de  $G^2$  vers  $G^1$ .
  - l'autre, dénommée **prolongation** établit une liaison de  $G^1$  vers  $G^2$ .

2.1.3. Principe d'un algorithme à M grilles

Bien qu'ayant dans son principe contribué à améliorer la convergence, la procédure à 2 grilles n'est pas encore suffisamment efficace en ce sens sur la deuxième grille  $G^1$ , vont quand même subsister des basses fréquences. L'idée consiste alors à itérer le processus de décomposition en M grilles emboîtées dont la finesse va en décroissant :  $G^M, G^{M-1}, \dots, G^1$ .

Ayant résolu rapidement l'équation phénoménologique discrétisée sur  $G^1$ , on remontera par prolongations successives et éventuellement lissage (cf. fig. 9, suivie de fig. 3) jusqu'à la grille initiale : on aura alors amorcé ce que l'on appelle un cycle. On arrêtera ces cycles lorsque par exemple le résidu normé (cf. § 2.2) sera inférieur à un critère donné.

2.2. Quelques exemples d'algorithmes multigrilles

Nous allons maintenant entrer dans la présentation détaillée de quelques algorithmes de multigrilles en différenciant tout d'abord le cas des problèmes linéaires et non linéaires, puis en introduisant deux stratégies représentatives concernant la gestion des changements de grilles.

2.2.1. Algorithme de multigrilles sur les problèmes linéaires (CS)

Soit à résoudre l'équation en  $\phi$  :

$$L \phi = F \tag{10}$$

où L figure un opérateur continu et linéaire.

Considérons, dans la grille la plus fine  $G^M$ , l'équation originale de discrétisation :

$$L^M \phi^M = F^M \tag{11}$$

$L^M$  est bien entendu un opérateur linéaire discret et  $\phi^M$  représente la solution exacte du problème.

Tout d'abord, on recherche une première approche  $\overline{\phi^M}$  de la solution de l'équation discrétisée et ceci de façon classique, par une succession de relaxations sur  $G^M$ , jusqu'au moment où la vitesse de convergence se dégrade.

On dispose dès lors

- de la solution  $\overline{\phi^M}$
- des résidus (le résidu est ici l'opposé du "défaut" défini au § 2.1.1) correspondants :

$$r^M = F^M - L^M \overline{\phi^M} \tag{12}$$

En fait la solution exacte  $\phi^M$  diffère de son approche actuelle  $\overline{\phi^M}$ , l'écart étant représenté par la correction

$$v^M = \phi^M - \overline{\phi^M} \tag{13}$$

Donc améliorer la solution approchée  $\overline{\phi^M}$  passe par une "bonne estimation" de

la correction  $v^M$ , laquelle est au demeurant en principe déjà lissée, tout comme l'est  $\overline{\phi^M}$ .

Appliquons à  $v^M$  l'opérateur  $L^M$  :

$$L^M v^M = L^M (\phi^M - \overline{\phi^M}), \tag{14}$$

ce qui du fait du **caractère linéaire** de  $L^M$  se transforme en :

$$L^M v^M = L^M \phi^M - L^M \overline{\phi^M}, \text{ soit}$$

$$L^M v^M = f^M - L^M \overline{\phi^M}, \text{ ou encore :}$$

$$L^M v^M = \hat{f}^M \tag{15}$$

Estimer la correction  $v^M$  passe donc par la résolution de l'équation (15) qui est formellement analogue à l'équation (11) initiale en  $\phi$ . Comme  $v^M$  est déjà purgée des hautes fréquences, nous allons en rechercher une approximation  $v^{M-1}$  sur la grille  $G^{M-1}$ . Pour cela il nous faut **transférer l'équation (15) vers  $G^{M-1}$** . C'est ici qu'intervient **l'opération de restriction**,  $R_M^{M-1}$ , laquelle permet de déduire par élimination les caractéristiques ( $f, \phi, \dots$ ) aux nœuds de  $G^{M-1}$  à partir de celles, maintenant connues aux nœuds de  $G^M$ . Nous transférerons aussi les résidus par :

$$\hat{f}^{M-1} = R_M^{M-1} (\hat{f}^M) \tag{16}$$

Dès lors le même solveur qui a été utilisé sur  $G^M$  peut, sur  $G^{M-1}$  nous servir à lisser :

$$L^{M-1} v^{M-1} = \hat{f}^{M-1} \tag{17}$$

et nous fournit en peu d'itérations et en partant systématiquement de l'estimation initiale  $v^{M-1} = 0$  une solution approchée  $\overline{v^{M-1}}$  de la correction à apporter à  $\overline{\phi^M}$  mais estimée seulement sur les points de  $G^{M-1}$ .

Reste donc à effectuer une **opération du style interpolation** permettant de transférer  $\overline{v^{M-1}}$  sur la grille  $G^M$ , ce que nous réalisons avec l'opération de **prolongation**  $P_{M-1}^M$ .

Dès lors une amélioration  $\overline{\overline{\phi^M}}$  de la solution en  $\phi$  peut s'écrire :

$$\overline{\overline{\phi^M}} = \overline{\phi^M} + P_{M-1}^M \overline{v^{M-1}} \tag{18}$$

La procédure que nous venons d'exposer a mis en jeu les 2 grilles  $G^M$  et  $G^{M-1}$ . Cependant l'un de ses défauts provient (cf. équation 17) de ce que nous nous sommes contentés d'un simple lissage de  $v^{M-1}$ . La solution finale  $\overline{\overline{\phi^M}}$

contient donc encore, tout comme  $V^{M-1}$  un taux de basses fréquences non éliminées. L'extension vers les multigrilles consiste à itérer l'appel aux grilles emboîtées et à calculer ainsi de grille en grille des corrections successivement apportées aux corrections primaires elles-mêmes.

La figure 10 schématise le cœur même du processus évoqué plus haut.

Une particularité de cette procédure, liée au demeurant au caractère linéaire, réside dans le fait que mise à part la grille la plus fine, sur chaque niveau de grille, on n'opère pas sur la fonction primaire  $f$ , mais les différents niveaux de correction ( $V^{M-1}, V^{M-2}, \dots$ ), lesquels font en général l'objet d'un stockage provisoire d'où l'appellation "correction storage" (CS).

Nous renvoyons au § 2.2.3 pour préciser la stratégie décidant des époques de commutation entre grilles, ce qui ouvrira, vers les algorithmes dits soit à cycles "fixés", soit à cycles "adaptatifs", cette remarque s'appliquant dans son principe tant aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non-linéaires.

### 2.2.2. Algorithme de multigrilles pour les problèmes non-linéaires (FAS)

L'algorithme de multigrilles présenté ici est spécifié aussi sous le nom FAS (*Full Approximation Storage*) dans la littérature.

L'un des points qui le distingue du précédent (CS) réside, ainsi que nous allons le voir, dans le fait qu'au lieu d'opérer - tout en les stockant - sur les corrections  $V^k$  destinées à améliorer les approximations  $V^{k+1}, V^{k+2}, \dots$  et finalement la fonction  $\phi^M$ , dans la grille la plus fine, on opère ici à tous les niveaux de grille sur la fonction "primaire"  $\phi$  elle-même.

Supposons que l'équation originale

$$L \phi = F \quad (10)$$

ait tout d'abord été lissée sur la grille  $G^M$ , fournissant ainsi l'approximation  $\overline{\phi^M}$

C'est dire alors que :

$$L^M \overline{\phi^M} = F^M - f^M \quad (19)$$

Compte tenu de ce que  $L^M \phi^M = F^M$ , il vient alors par soustraction membre à membre :

$$L^M \phi^M - L^M \overline{\phi^M} = f^M \quad (20)$$

Contrairement au paragraphe précédent, le caractère non linéaire de l'opérateur  $L$  ne permet plus ici de faire apparaître simplement la correction  $V^M = \phi^M - \overline{\phi^M}$

L'étape suivante va consister à transférer les opérations sur la grille  $G^{M-1}$  où l'on va, par lissage, filtrer une nouvelle séquence de hautes fréquences. L'équation que nous cherchons à résoudre sur  $G^{M-1}$  sera précisément la **restriction** de l'équation (16) :

$$L^{M-1} \phi^{M-1} - L^{M-1} R_M^{M-1} \overline{\phi^M} = R_M^{M-1} f^M \quad (21)$$

$$\text{soit encore} \quad L^{M-1} \phi^{M-1} = F^{M-1} \quad (22)$$

avec 
$$F^{M-1} = R_M^{M-1} f^M + L^{M-1} R_M^{M-1} \overline{\phi^M}$$

L'estimation initiale de la solution de (22) pourra être  $R_M^{M-1} \overline{\phi^M}$

Le lissage de (22) nous ayant fourni l'approximation  $\overline{\phi^{M-1}}$ , le problème est alors de la **prolonger** vers la grille  $G^M$ .

La **procédure de prolongation** va consister à considérer pour correction :

$$\overline{\phi^{M-1}} - R_M^{M-1} \overline{\phi^M},$$

vue sur la grille  $G^{M-1}$ , à la prolonger en direction de  $G^M$  selon

$$P_{M-1}^M (\overline{\phi^{M-1}} - R_M^{M-1} \overline{\phi^M})$$

et à en déduire :

$$\overline{\phi^M} = \overline{\phi^M} + P_{M-1}^M (\overline{\phi^{M-1}} - R_M^{M-1} \overline{\phi^M}) \tag{23}$$

Notons, à titre de remarque que :

$$P_{M-1}^M R_M^{M-1} \overline{\phi^M} \neq \overline{\phi^M}$$

La procédure se généralise au cas de M grilles, la motivation résidant dans le fait que la solution approchée  $\overline{\phi^{M-1}}$  peut elle-même résulter d'un lissage par plusieurs niveaux de grilles.

Mentionnons ici que selon A. Brandt [BRA 77] cette procédure s'avère plus efficace en cas de maillage hétérogène et ce y compris dans le cas de problèmes linéaires.

Indiquons enfin que le démarrage de la procédure peut s'effectuer, tel que nous l'avons évoqué, c'est-à-dire au niveau de la grille la plus fine. Cependant, une variante [VAN 86] dite FAS-FMG (pour *Full Approximation Storage-Full Multigrid*) démarre au niveau de la grille la plus grossière : cette stratégie s'avère plus efficace en cas de problème fortement non linéaire.

### 2.2.3. Les stratégies de gestion des changements de grilles

En fait, que le problème demeure linéaire ou non linéaire, l'organigramme de l'algorithme, dans ses grandes lignes demeure analogue. Cependant, selon la stratégie du contrôle des époques auxquelles ont lieu les changements de grilles - et des opérations de prolongation ou de restriction associées - apparaissent plusieurs familles d'algorithmes, dont nous présentons ci-après deux exemples.

#### 2.2.3.1. Algorithme avec cycles fixés

Nous allons tout d'abord commenter en détail un exemple de tel algorithme à cycle "fixé", dans le cas d'une procédure FAS-FMG, qui démarre dans ses itérations au niveau de la grille la plus grossière ( $G_1$ ). Pour cela, nous allons nous appuyer sur la "trajectoire" de la procédure visualisée dans le plan (niveau de grille NG, itérations NI). L'idée essentielle réside ici dans le fait que sur chaque niveau de

grille, le nombre d'itérations est fixé *a priori* et la "trajectoire" évoquée plus haut est donc elle-même globalement fixée à l'avance.

On distingue, liée ici au choix de la procédure FAS-FMG, une phase de démarrage, suivie d'une séquence de cycles.

Partant de la grille  $G^1$ , où l'on opère un nombre *a priori* élevé d'itérations, la phase de démarrage "s'élève" progressivement vers les niveaux de grilles les plus fines. Cependant, chaque prolongation est susceptible d'engendrer des basses fréquences, en conséquence une prolongation vers un nouveau niveau de grille est suivi d'une série de filtrages de ses basses fréquences et donc de retours vers les grilles les plus grossières (cf. fig. 9).

Une fois la grille la plus fine atteinte, on entre alors dans une séquence de cycles, dont la forme de la trajectoire a été imposée ici sous forme de "V". Une variante possible consiste, dans la phase cyclique, à imposer une évolution en forme de W c'est-à-dire que l'on y conserve la stratégie de filtrage des basses fréquences - induites par une prolongation - par retour immédiat sur les niveaux de grilles inférieurs (cf. fig. 1 et 2).

Cependant, il reste à préciser que le choix optimum du nombre des itérations par niveau, et le nombre de cycles, ne peut pas se définir *a priori* : seule une série d'essais successifs pourront conduire à garantir la qualité de la solution en examinant par exemple l'évolution des résidus ainsi que leur valeur finale.

#### 2.2.3.2. Algorithme avec cycle adaptatif

Là encore, et en raison de l'application que nous mènerons ultérieurement au problème conjugué, nous allons analyser le principe du cycle adaptatif sur la procédure de type FAS-FMG.

A la différence du cas du cycle fixé, la trajectoire du plan (niveau de grille, itérations) n'est plus fixée à l'avance, mais se trouve contrôlée automatiquement par le calcul lui-même, lequel s'appuie dans ses choix, sur l'évolution du résidu :

- au cours des itérations sur une grille donnée,
- entre deux grilles.

Le choix du nombre des itérations et de la nature des changements de grilles (prolongation ou restriction) s'adapte spontanément aux difficultés locales du calcul : cela constitue un progrès en ce sens qu'il n'y a plus à rechercher une trajectoire optimale.

Examinons maintenant quelques détails concernant ce cycle adaptatif.

Définissons tout d'abord le résidu normé  $r$  [HAC 85], selon :

$$r = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} \left( \sum_e (f_{ij})_e^2 \right)}}{N_e * N_n} \quad (24)$$

$N_e$  et  $N_n$  figurent respectivement le nombre d'équations traitées (par exemple : conservation de la masse, des quantités de mouvement, de l'énergie...) et le nombre de nœuds. Les sommations du numérateur portent sur le résidu local  $(f_{ij})_e$  pour toutes les équations ( $e$ ) et pour tous les nœuds ( $i,j$ ).

Mentionnons qu'en cas de problème non linéaire, les coefficients de discrétisation font l'objet d'une mise à jour dynamique, c'est-à-dire après chaque itération, pour un niveau de grille donnée. De plus les procédures de prolongation et

de restriction (incluant le calcul du second membre F et celui de la correction) ont été déjà présentées au § 2.2.2.

Comment s'effectue la conduite automatisée du calcul ?

Elle s'appuie en particulier :

- sur l'évaluation de la vitesse de convergence, sur une grille donnée :

$r_{q+1}/r_q$ , q étant l'indice d'itération.

- sur l'évolution du rapport des résidus entre 2 grilles  $r^{l+1}/r^l$  (ou  $r^l/r^{l+1}$ ) l figurant l'indice de grille.

Tout comme pour le cas des cycles fixés, le diagramme (niveau, itération) présente une phase de démarrage, suivi d'une phase avec "cycles".

Détaillons tout d'abord la phase de démarrage, laquelle conduit du niveau l, au niveau M de la grille la plus fine.

On recherche tout d'abord sur la grille 1, une solution relativement précise ; les calculs y sont conduits jusqu'à ce que le résidu r y atteigne une valeur suffisamment faible (valeur choisie *a priori* mais dépendant du problème : par exemple  $10^{-5}$  en convection forcée, mais  $10^{-7}$  en convection naturelle), ou bien encore jusqu'à ce que soit épuisé le contingent d'itérations allouées (exemple 50 itérations).

Vient alors la prolongation vers le second niveau. Interviennent alors 2 critères, ainsi que le résume la figure 11 et qui concerne tous les changements de grille dans la phase de démarrage. La pratique nous a fait fixer les coefficients  $\alpha$  entre 1 et 10 et  $\eta$  de l'ordre de 0,6.

Arrive un moment où la phase de démarrage s'achève par le transfert au niveau de grille le plus élevé. Dès lors le schéma de contrôle est légèrement modifié, et devient celui de la figure 12. Le paramètre  $\eta$  reste ici de l'ordre 0,6 alors que nous avons utilisé une valeur de  $\epsilon$  de l'ordre de 0,3.

Le processus s'achève lorsque sur la grille la plus fine, le résidu normé est inférieur à une valeur affichée par l'utilisateur (un ordre de grandeur peut être de  $10^{-5}$ ).

### 3. Application à la résolution des équations de Navier-Stokes et de l'énergie

L'algorithme des multigrilles combiné avec la technique des volumes finis est ici mis au point pour résoudre un problème stationnaire, traduit par un système d'équations aux dérivées partielles du type elliptique, impliquant en particulier les équations de Navier-Stokes. La méthode des volumes finis est présentée de façon détaillée en [PAT 80], et nous en rappellerons ici seulement les lignes générales.

Il est bien connu que chacune des équations phénoménologiques de conservation - relatives à la variable  $\phi$  - peut être écrite sous la forme générale continue, stationnaire et - pour alléger l'exposé - bidimensionnelle suivante (géométrie cartésienne ici) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_{\phi} \quad (25)$$

où  $\Gamma_{\phi}$  est un coefficient de diffusion qui peut être la conductivité thermique (équation de l'énergie) ou la viscosité (équation de conservation de la quantité de mouvement), et  $S_{\phi}$  un terme de source qui, dans l'équation de conservation dynamique, contient le gradient de pression et les forces volumiques éventuelles. La

fonction  $\phi$  représente quant à elle les composantes de vitesse,  $u$ ,  $v$ , ainsi que les autres grandeurs scalaires, telles que la température  $T$ , voire l'énergie cinétique de turbulence  $k$  et la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence  $\epsilon$ .

Suivant en cela Patankar, un jeu de deux maillages entrelacés est utilisé sur chaque niveau de grilles, l'un pour les variables scalaires ( $p, T, \dots$ ), l'autre pour les vitesses.

La méthode des volumes finis proprement dite consiste à écrire en un noeud la version discrétisée de l'équation (25), puis à l'intégrer sur le volume fini associé à ce noeud. Ceci conduit, pour la variable  $\phi$ , à une écriture du style :

$$\begin{aligned}
 & (\rho u \phi)_e A_e - (\rho u \phi)_w A_w + (\rho u \phi)_n A_n - (\rho u \phi)_s A_s = (\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x})_e A_e \\
 & - (\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x})_w A_w + (\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y})_n A_n - (\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y})_s A_s + S_\phi \Delta x \Delta y \quad (26)
 \end{aligned}$$

où  $A_i$  désigne l'aire de l'une des faces du volume fini (les notations  $e$  pour est,  $w$  pour ouest... sont classiques) et  $\Delta x$  et  $\Delta y$  les incréments en  $x$  et en  $y$ .

Reste alors à postuler une loi de variation de la variable  $\phi$  entre les noeuds, de façon à pouvoir évaluer les grandeurs à l'intérieur et à l'interface des volumes. Parmi plusieurs schémas de discrétisation existants (amont, Hybride, PL (Power Law)... etc.), nous avons choisi, pour les performances (précision, stabilité) le schéma connu sous le nom de "Power Law", dû à Patankar [PAT 80].

Après incorporation de ce schéma à l'équation précédente, on obtient pour chaque cellule du maillage et pour chaque équation de conservation, une équation algébrique de la forme suivante :

$$a_P \phi_P - a_N \phi_N - a_S \phi_S - a_E \phi_E - a_W \phi_W = S_\phi \Delta x \Delta y \quad (27)$$

où les  $a_i$  représentent des expressions contenant des vitesses, coefficients de diffusion et des données géométriques du maillage. De façon à relier notre représentation à celle utilisée précédemment lors de l'introduction des algorithmes des multigrilles, introduisons les notations suivantes :

$$L = [-a_W - a_E \quad a_P - a_S - a_N] \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_W \\ \phi_E \\ \phi_P \\ \phi_S \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad \text{et } F = S_\phi \Delta x \Delta y$$

Dès lors l'équation (27) peut être écrite :  $L \phi = F$  (28)

formulation maintenant justiciable des multigrilles. L'interaction pression-vitesse  $y$  sera traitée en utilisant pour lisseur la procédure de relaxation SIMPLEX [VAN 84] introduite dans l'algorithme des multigrilles de type FAS-FMG (cf. § 2).

Rappelons que cette procédure SIMPLEX retenue procède dans ses étapes élémentaires en 2 temps :

- un pré-lissage des vitesses  $u^*$  et  $v^*$  à partir des seules équations de quantité de mouvement et pour une pression estimée *a priori*  $p^0$ .

- une correction  $p'$  de la pression, induisant une correction  $u'$  et  $v'$  des vitesses. C'est ici l'équation dite de correction de pression qui est en jeu.

On obtient alors un nouveau champ ( $u^* + u'$ ,  $v^* + v'$ , et  $p^0 + p'$ ).

Pour ce qui est du calcul des températures, observons que dans le cas de la convection forcée, le découplage admis entre l'équation de l'énergie et les équations de la dynamique permet de résoudre en deux temps :

1. Une opération de type multigrille est conduite sur la seule recherche du champ dynamique

2. Ayant les vitesses on résout alors, toujours par multigrilles, l'équation de l'énergie.

Par contre, dans le cas de convection naturelle ou mixte, et dans le cas de convection forcée avec des propriétés physiques dépendant de température, le terme de poussée "thermique" et les propriétés physiques doivent être évalués dynamiquement dans les équations de quantité de mouvement : cela ne permet plus le découplage précédent et la procédure de résolution présente alors un caractère global à l'égard des équations de l'énergie et de quantité de mouvement.

Les opérations de restrictions s'obtiennent en prenant la moyenne des valeurs voisines, et les prolongations à l'aide d'interpolations bilinéaires. Les détails de ces opérations figurent par exemple en [WAN 92].

#### **4. Application à l'analyse des transferts conjugués dans les cartes**

##### **4.1. Introduction**

Il est commun aujourd'hui de constater que la durée de vie des circuits intégrés et composants électroniques les plus fréquents (régulation industrielle, micro-informatique, télécommunications,...), est très fortement liée à la température de fonctionnement de leur élément actif à base de silicium : leur "puce". Pour quantifier le rôle crucial de la thermique, remarquons qu'une augmentation de  $10^\circ\text{C}$  de cette température de puce réduit de 50 % la durée de vie d'un circuit intégré et double son taux de pannes. En vue de la maîtrise du contrôle thermique de ces systèmes électroniques, on conçoit dans ces conditions combien il est important d'étudier les transferts de chaleur qui sont supposés ici conjugués, de type conduction (à l'intérieur des structures) et convection (l'écoulement et l'interface structure/écoulement).

Nous utiliserons l'algorithme FAS-FMG exposé dans les paragraphes précédents. Nous schématiserons tout d'abord la configuration traitée, et illustrerons le fonctionnement des multigrilles. Nous présenterons enfin un exemple illustrant les résultats obtenus dans le cas d'un seul composant (écoulement laminaire, stationnaire).

##### **4.2. Description du problème 3D**

Le modèle physique qui sera étudié est représenté par la figure 13. Notons tout d'abord, que nous avons supposé ici une périodicité latérale (dans la direction  $z$ ), c'est dire que les conditions aux limites correspondantes traduisent une symétrie des grandeurs thermiques et dynamiques, relativement aux plans verticaux latéraux  $z = L_W/2$  et  $-L_W/2$ . Cette hypothèse a pour objectif de simuler une série de composants identiques montés côte à côte dans la direction transversale  $z$ .

Comme nous pouvons le remarquer, les grandeurs physiques et géométriques sont également symétriques par rapport à la surface ( $z=0$ ). Ainsi, nous pouvons considérer, pour notre calcul, la moitié du domaine représenté dans cette figure 13 ( $0 < x < L$ ,  $0 < y < H+2e$ ,  $0 < z < L_W/2$ ).

Le problème est ici de type convection forcée. Les conditions aux limites thermiques dans la direction  $z$  sont du type cyclique. La vitesse et la température d'entrée sont respectivement  $U_e = 1$  m/s et  $T_e = 20$  °C. Le composant électronique, de longueur  $L_L$ , de largeur  $L_T$ , de hauteur  $B$ , siège d'une dissipation de flux  $Q = 1$  W est localisé à une distance  $L_E$  de l'entrée du canal. Mentionnons que la puce de longueur  $l_x$  et de largeur  $l_z$  est localisée au centre du composant.

Les dimensions géométriques repérées sur la figure 13, sont définies dans le tableau 1, ainsi que les propriétés physiques. Les autres dimensions concernant le composant seront précisées ultérieurement selon les cas étudiés.

Grandeur	Valeur	Grandeur	Valeur
L (mm)	200	B (mm)	4
H (mm)	11	$l_x$ (mm)	5
$L_E$ (mm)	20	$l_z$ (mm)	5
e (mm)	1.6	Q (W)	1
$L_W=L_T+L_S$ (mm)	30	conductivité (W/m.K)	composant : 0.7 carte : 2 air : $2.5 \times 10^{-2}$

**Tableau 1 - Les dimensions géométriques et les valeurs des paramètres thermophysiques**

#### 4.3. La schématisation bidimensionnelle

De façon à évaluer les effets tridimensionnels, précisons ici que, pour schématiser le problème réel 3D en un problème 2D simplifié, nous avons considéré que l'extension du composant est supposée uniforme et non pas discrète dans la direction  $z$  et il en est de même pour la puce (cf. fig. 14).

La densité surfacique est calculée en assumant une distribution uniforme dans la puce (cf. fig. 15). Nous transformons alors la puissance réelle  $Q$  (W) dissipée dans la puce en une densité surfacique  $q$  ( $W/m^2$ ) selon l'expression :

$$q = \frac{Q}{L_z l_x}$$

La puissance  $Q$  sera supposée distribuée uniquement sur la puce (cas a :  $L_z = l_z/2$ ), sur la largeur du composant (cas b :  $L_z = L_T/2$ ), ou sur la totalité du canal (cas c :  $L_z = L_W/2$ ).

#### 4.4. Quelques caractéristiques de fonctionnement des multigrilles

Nous mentionnons tout d'abord un exemple de "réglage" de la procédure et plus particulièrement de son démarrage.

L'exemple a trait à un modèle 2D (1 canal, 1 seul composant, flux distribué selon le cas b de la figure 15). La stratégie de commutation entre grilles est de type

adaptatif, sauf au démarrage où il s'agit de régler de façon optimale le nombre d'itérations sur la grille grossière G1 (machine DEC 3100 - 15 Mips). La figure 16 montre qu'en y imposant un long séjour initial (cas 2) on filtre efficacement les composantes de l'erreur qui plus tard seront associées aux basses fréquences de la grille fine G3. A même durée de simulation (8 mn), les résidus mais surtout la conservation du débit  $\Delta r_n$  sont nettement améliorés. A l'inverse, un premier lissage insuffisant sur G1 (cas 1) conduit, à performance égale à un temps CPU 5 fois plus élevé, et s'accompagne d'une mauvaise gestion des grilles (absence de retour à G1).

Il est également intéressant de concrétiser par les figures 17 et 18 :

- la croissance quasi linéaire de la consommation en temps CPU avec les multigrilles (cf. fig. 17),
- l'efficacité flagrante des multigrilles, comparées à une technique à grille unique (fig. 18).

#### 4.5. Quelques résultats significatifs

La nécessité de prendre en compte le caractère 3D apparaît tout d'abord très clairement sur la figure 19 qui démontre qu'aucune des schématisations bidimensionnelles n'est susceptible d'approcher les prédictions du modèle 3D : l'écart est au mieux de 30°C sur la température de puce, ce qui n'est pas admissible, compte tenu de l'observation effectuée au début de ce paragraphe 4.

Il est par ailleurs intuitif que le modèle 2D doit nécessairement surestimer les échanges sur la face supérieure du composant : l'air ne peut évidemment contourner partiellement l'obstacle, comme le permet le modèle 3D. Cette remarque est confirmée par la figure 20 qui montre effectivement la tendance du modèle 2D à cette surestimation. Enfin, et c'est bien là une des performances nouvelles du modèle 3D, il fournit des indications importantes sur les transferts relatifs aux parois latérales (cf. fig. 21).

## 5. Conclusions

Face au défi posé par la complexité croissante des systèmes à analyser, et à l'inflation de la taille des modèles qu'il est nécessaire de mettre en place, le thermicien doit adapter ses outils de modélisation. Diverses directions ont été suggérées pour cela au paragraphe 1.3. Parmi celles-ci, nous venons de présenter les multigrilles, et les avons appliquées à la modélisation des transferts conjugués (conduction/convection) dans les cartes de composants électroniques. Les performances en ont été démontrées, avec en particulier une dépendance quasi-linéaire du temps CPU à l'égard de la taille du modèle. Cependant, leur maîtrise requiert un certain doigté, et la recherche d'un réglage optimum en particulier en cas de cycles adaptatifs.

Cet effort s'avère tout à fait payé en retour, et nous avons pu montrer sur un exercice simple l'absolue nécessité de prendre en considération le caractère tridimensionnel des transferts. De très nombreuses études ont pu être poursuivies dans ce contexte des cartes électroniques grâce à cette adaptation des multigrilles, et pour citer les récents progrès obtenus, indiquons que nous venons d'introduire la prise en compte du rayonnement.

## 6. Bibliographie

- [AFR 89] AFRID M. and ZEBIB A., "Natural Convection Air Cooling of Heated Components Mounted on a Vertical Wall", *Numerical Heat Transfer, Part. A. Vol. 15*, 1989, p. 243-259.
- [BAR 88] BAROZZI G.S. and NOBILE E. (1988), "Heat Transfer in Electronic and Microelectronic Equipment", *20th Int. Symposium*, Dubrovnik, Yugoslavia, 1988.
- [BRA 77] A. BRANDT A., "Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems", *Mathematics of computation. Vol.31. Num. 138*, 1977, p. 333-390.
- [BRA 80] BRANDT A., "Multilevel Adaptive Computations in Fluid Dynamics", *AIAA J. Vol.18, n°10*, 1980, p. 1165-1172.
- [BRO 86] BROCKMEIER U., MITRA N.K. and FIEBIG M., "Implementation of multigrid in SOLA algorithm" GMD-Studien Nr 110, 1986.
- [FER 87] FERRAZ BASTOS J.L., Extension de la méthode nodale à la modélisation des transferts couplés conduction/convection dans un canal: applications à la thermique du bâtiment et aux cartes électroniques. Thèse de Docteur de l'Université de POITIERS, n° d'ordre 171, 1984.
- [FOU 97] FOURKA B., Analyse des transferts conjugués conduction/convection/ rayonnement, dans les cartes électroniques, par modélisation 3D. Thèse de docteur de l'Université de Poitiers, 1997.
- [HAB 86] HABCHI S. and ACHARYA S., "Laminar Mixed Convection in a Partially Blocked - Vertical Channel", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, n° 11, 1986, p. 1711-1722.
- [HAC 85] HACKBUSCH W., *Multigrid Methods and Applications*, Springer-Verlag, 1985.
- [HAC 85] HACOEN Y., Convective heat transfer coefficients for elements on a packed board, M.Sc. Thesis, Ben-Gurion University of the Negev, 1985.
- [HIR 75] HIRT C.W., NICHOLS B.D. and ROMERO N.C., SOLA - "A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows", Los Alamos Scientific Laboratory report LA-5652, New Mexico, 1975.
- [HUC 84] HUCLIN J.C., Contribution à la modélisation des transferts combinés conduction, rayonnement, convection. Application au couplage des échanges thermiques solide, fluide le long d'une plaque. Thèse de Docteur-Ingénieur, Poitiers, n° d'ordre 198, 1984.
- [MER 86] P. MEROUR P., La réduction des modèles en thermique. Application à l'étude d'un circuit intégré électronique. Thèse de Docteur de l'Université de Poitiers, 1996.
- [PAT 80] S.V. PATANKAR S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc Graw Hill Book Company, 1980.
- [PAU 86] PAU V. and LEWIS E., "Application of the Multigrid Technique to the Pressure-Correction Equation for the SIMPLE Algorithm", GMD-Studien Nr.110, 1986.
- [PRA 89] PRAKASH C., "Application of Computational Fluid Dynamics for Analyzing Pratical Electronics Cooling Problems", *CHAM*, 1989.
- [SHA 88] SHAW G.J. and SIVALOGANATHAN S., "On the Smoothing Properties of the SIMPLE Pressure - Correction Algorithm", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, 1988, p. 441-461.
- [SIV 88] SIVALOGANATHAN S. and SHAW G.J., "A Multigrid Method for Recirculating Flows", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, 1988, p. 417-440.
- [THO 89] THOMPSON M.C. and FERZIGER J.H., "An Adaptive Multigrid Technique for the Incompressible Navier-Stokes Equations", *J. of Comp. Phys.* 82, 1989, p. 94-121.
- [TOR 88] TOROK D. and GRONSETH R., "Developing Flows in Narrow Channels, Containing Heated Obstacles", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, 1988, p. 1543-1561.
- [TRO 80] TROTTEBERG U., "Interface of MGOO for a Given Boudary-Value Problem", GMD-Studien Nr.110, 1980.

- [VAN 84] VAN DOORMAAL J.P. and RAITHEY G.D., "Enhancements of the SIMPLE Method for predicting Incompressible Fluid Flow", *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, 1984, p. 147-163.
- [VAN 86] S.P. VANKA S.P., "Block-Implicit Multigrid Calculation of two-Dimensional Recirculating Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59, 1986, p. 29-48.
- [VAN 86] S.P. VANKA S.P., "Block-Implicit Multigrid Solution of Navier-Stokes Equations in Primitive Variables", *Journal of Computational Physics*, 65, 1986, p. 138-158.
- [VAN 86] VANKA S.P., "A Calculation Procedure for Three-Dimensional Steady Recirculating Flows Using Multigrid Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55, 1986, p. 321-338.
- [VAN 88] VANKA S.P., "Multigrid Computation of Practical Fluid Flows and Heat Transfer", *International Conference on Computational Engg, Science*, Atlanta, Ga., 10 Apr., 1988.
- [VAN 88] VANKA S.P., KRAZINSKI J.L., "An Efficient Computational Tool for Ramjet Combustor Research", *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting*, 1988.
- [WAN 92] WANG H.Y., Simulation numérique par multigrilles des transferts conjugués dans les cartes de composants électroniques. Thèse de Docteur de l'Université de Poitiers, 1992.
- [WIR 84] WIRTZ R.A. and DYKSHOORN P., "Heat transfer from arrays of flat packs in a channel flow", *Proc. 4th Int. Electronic Packaging Society Conf.*, 1984, p. 318-326.
- [WRO 81] WROBEL L.C. and BREBBIA C.A., *The Boundary Element Method for steady State and transient heat Conduction*, Southampton University, England, 1981.

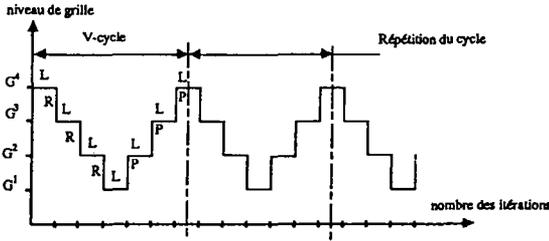


Fig. 1. Schématisation de la procédure de cycle en V

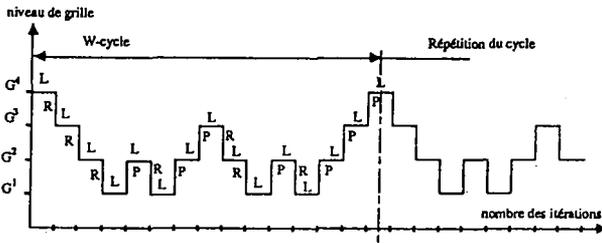


Fig. 2. Schématisation de la procédure de cycle en W

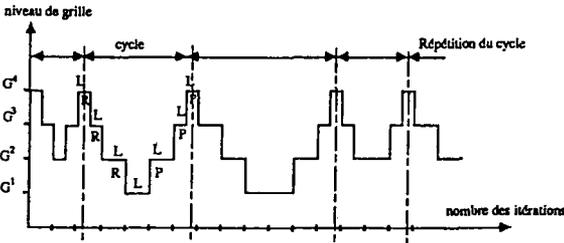


Fig. 3. Schématisation de la procédure à cycles adaptatifs

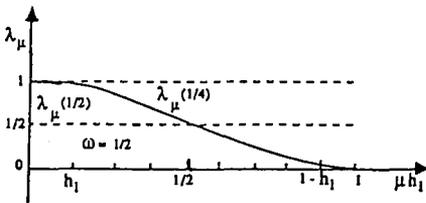


Fig. 4. Distribution des valeurs propres de la matrice d'itération

$$(JACOBI : w = \frac{1}{4})$$

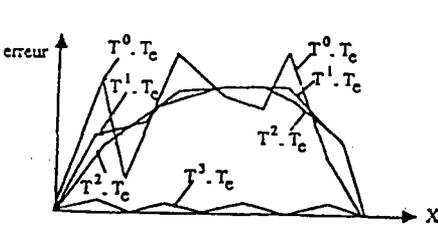


Fig. 5. Effet de lissage spatial de l'erreur au cours des itérations

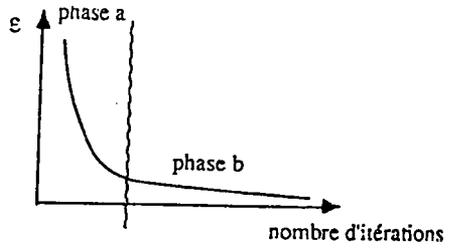
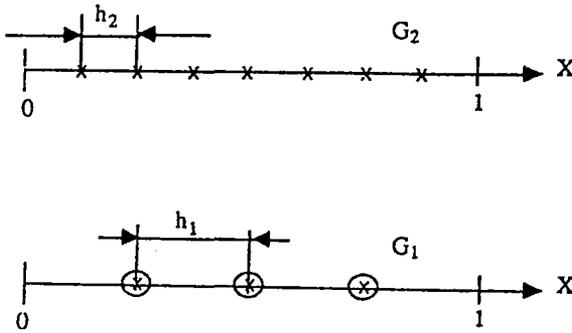


Fig. 6. Les 2 phases de l'évolution de l'erreur au cours des itérations sur une grille unique



indice de grille  $k = 2$   
 pas  $h_2 = \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^3}$   
 $n_2 = 2^{k+1} - 1 = 7$  noeuds  
 $2^{k+1} = 8$  intervalles  
 2 noeuds limites

indice de grille :  $k = 1$   
 pas  $h_1 = \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^2}$   
 $n_1 = 2^{k+1} - 1 = 3$  noeuds  
 $2^{k+1} = 4$  intervalles  
 2 noeuds limites

Fig. 7. Installation de 2 grilles emboîtées

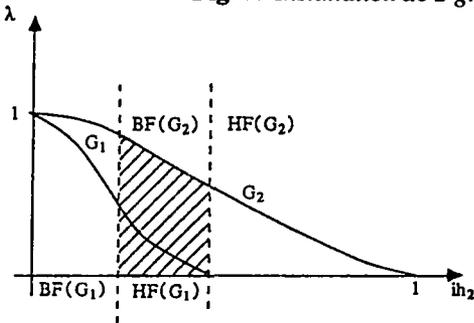


Fig. 8. Evolution des valeurs propres de la grille fine  $G^2$  à la grille moins fine  $G^1$

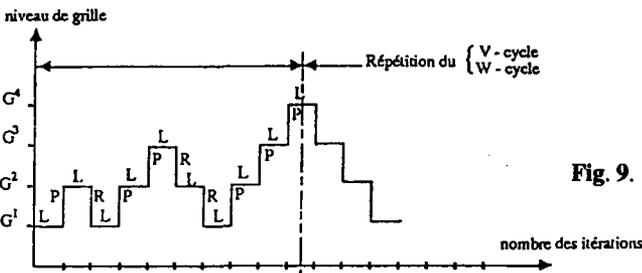


Fig. 9. Le démarrage des cycles

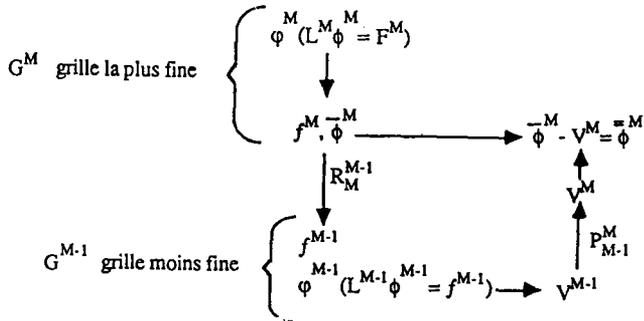


Fig. 10. Schématisation de la restriction et de la prolongation

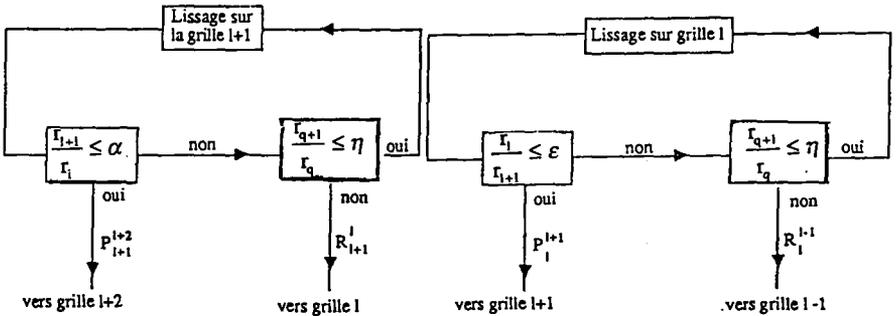


Fig. 11. Schéma de la stratégie de la phase de démarrage

Fig. 12. - Schéma de la stratégie du changement de grilles

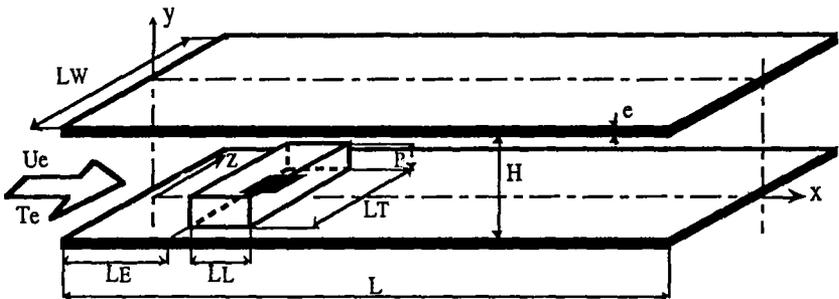


Fig. 13. Le modèle physique et ses coordonnées

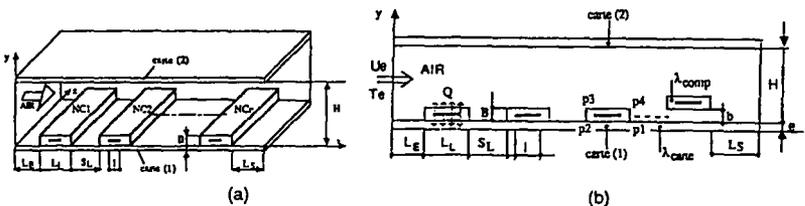


Fig. 14. Du modèle 3D simplifié (a) au modèle 2D (b)

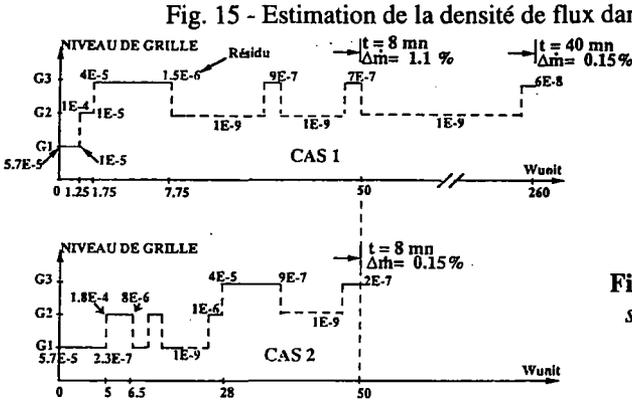
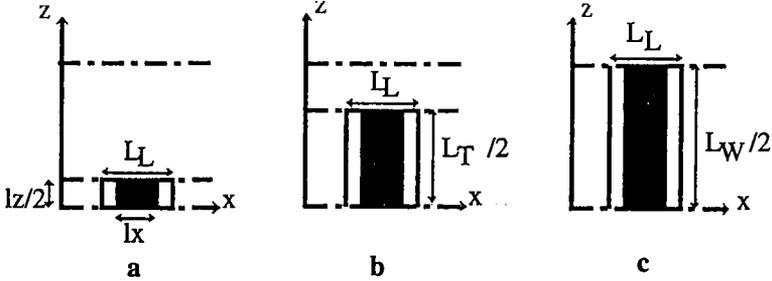


Fig. 16. Deux exemples de stratégies de démarrage

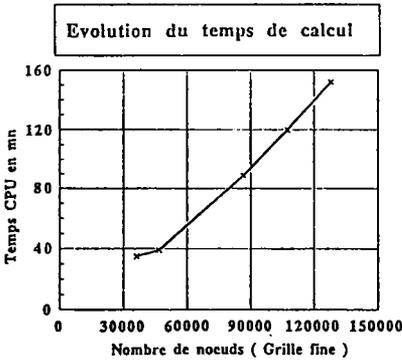


Fig. 17. Evolution du temps CPU avec le nombre de noeuds

Evolution des résidus en grille unique et en multigrilles

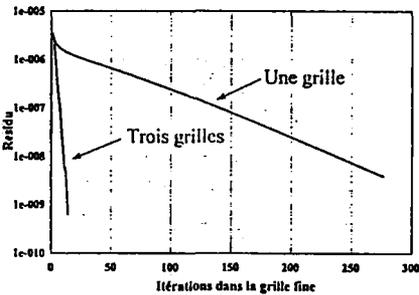


Fig. 18. Comparaison grille unique/multigrille

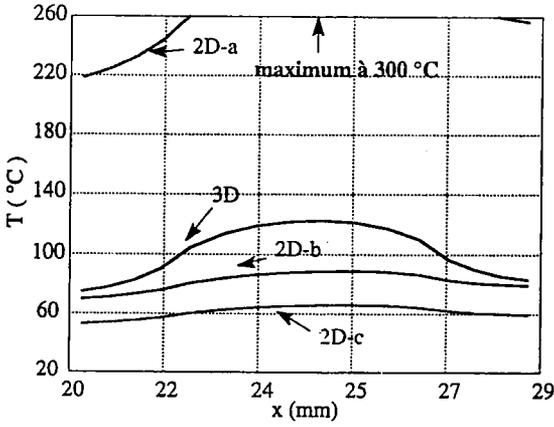


Fig. 19. Evolution de la température de puce dans le plan  $z=0$

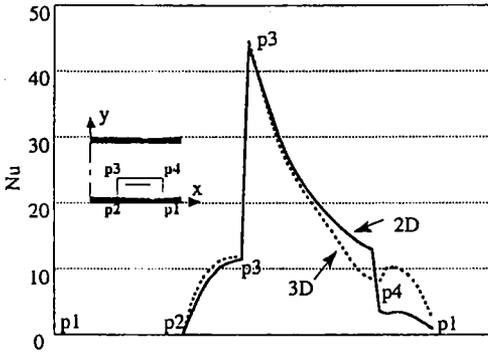


Fig. 20. Evolution du nombre de Nusselt autour du composant dans le plan  $z=0$

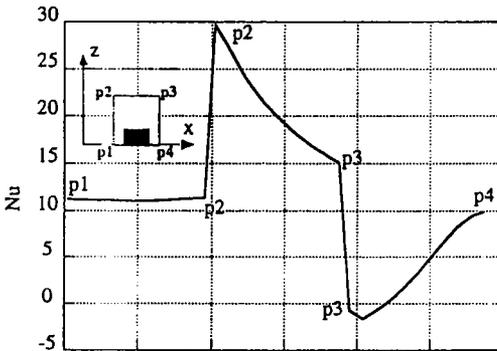


Fig. 21. Evolution du nombre de Nusselt local autour du composant dans le plan  $x-z$  à  $y=e+B/2$