

---

# Un problème d'identification de paramètre associé aux équations de Saint-Venant

Mekki Idrissi — Azzeddine Soulaïmani

*Ecole de technologie supérieure  
Département de génie mécanique  
Université du Québec  
1100, rue Notre-Dame Ouest  
Montréal H3C 1K3, Canada*

---

**RÉSUMÉ.** Ce travail est consacré au développement d'une méthode d'identification du coefficient de frottement dans les écoulements à surface libre. La formulation est basée sur la théorie du contrôle optimal. Un Lagrangien est introduit dont les dérivées correspondent aux équations d'état, d'état adjoint et à la condition d'optimalité. La discrétisation est effectuée avec une méthode d'éléments finis. Deux algorithmes de résolution sont développés et testés sur plusieurs applications en régime stationnaire. Le premier algorithme est très robuste et converge pour n'importe quel tir initial. Le second algorithme converge pratiquement pour tout tir réaliste. C'est l'algorithme qui peut être retenu pour simuler le régime instationnaire.

**ABSTRACT.** This work presents a numerical method to automatically identify the friction coefficient which governs natural free surface flows. The mathematical formulation is based on the optimal control theory. A Lagrangian operator, which partial derivatives provide respectively the state equations, the adjoint equations and the optimality condition, is introduced. A finite element method is used for space discretization. Two solution algorithms are proposed and tested on some steady flows. The first one is very robust and converges for any initial distribution of the friction coefficient. The second one converges for realistic initial trials, uses less memory and could be well extended to unsteady flows.

**MOTS-CLÉS :** écoulements à surface libre, identification du frottement, contrôle optimal, éléments finis.

**KEY WORDS :** free surface flows, finite element method, friction coefficient identification, optimal control.

---

## 1. Introduction

Le succès de la modélisation numérique d'un système physique ne dépend pas seulement de la formulation mathématique, de la discrétisation ou des algorithmes numériques utilisés, mais aussi de la précision des paramètres physiques. On entend par paramètres, des grandeurs physiques qui décrivent les propriétés du système et qui interviennent sous forme de coefficients dans les équations qui le gouvernent, comme par exemple la viscosité, la masse volumique ou les coefficients de frottement en mécanique des fluides. Dans bien des situations, l'assignation de valeurs à ces paramètres s'avère difficile, particulièrement quand ils varient dans l'espace ou encore quand ils dépendent d'autres grandeurs de manière non linéaire. Les coefficients de porosité et de perméabilité de milieux hétérogènes dans les écoulements souterrains sont des exemples classiques de paramètres difficiles à évaluer. D'un point de vue pratique, l'identification ou l'estimation de paramètres est le processus par lequel des valeurs approchées sont assignées aux divers paramètres du modèle. Dans les systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, une méthode directe d'identification consisterait à résoudre les équations par rapport aux paramètres considérés comme des fonctions inconnues (problème inverse). C'est le cas, par exemple, de certaines équations elliptiques et paraboliques qui sont résolues par rapport à leurs coefficients et particulièrement le coefficient de diffusion. On trouvera dans les références ([2],[3],[11],[15],[16],[20],[25],[26]) des études tant théoriques (existence et unicité de solutions) que numériques. La méthode des moindres carrés non linéaire ou les méthodes de contrôle optimal sont de type indirect. Dans ces méthodes, il s'agit essentiellement de déterminer le paramètre  $x$  dans un ensemble de paramètres admissibles  $C$  tel que

$$\mathcal{J}(x) = \min \mathcal{J}(y) \quad (1.1)$$

où

$$\mathcal{J}(y) = \| \phi(y) - z \|^2. \quad (1.2)$$

Pour un paramètre donné  $y$ ,  $\phi(y)$  est la valeur de l'observation (sortie du modèle) et  $z$  une observation donnée (mesure). La notation  $\| \cdot \|$  étant une norme sur l'espace des observations. Ces méthodes ont été utilisées aussi pour établir (dans certains cas) des résultats d'existence de solutions. Pour ces méthodes on peut consulter les références ([1],[8],[9],[10],[19],[21],[29]).

En hydraulique des cours d'eau, le frottement du lit traduit la résistance à l'écoulement. Cette résistance peut fortement varier d'un endroit à un autre du domaine de l'écoulement ce qui rend le choix de la valeur du coefficient de frottement difficile. Si on sait lui assigner certaines valeurs empiriques à partir de la connaissance des matériaux qui constituent le lit, elles ne peuvent être qu'approximatives et requièrent une validation. Les écoulements en eau peu profonde tels les lacs et les rivières sont modélisés habituellement par les équations de Saint-Venant.

On propose dans ce travail d'identifier le coefficient de frottement de Manning par les méthodes de contrôle optimal. On définit une fonction coût de type (1.2) et on calcule sa dérivée en introduisant le problème adjoint. On écrit alors la condition nécessaire d'optimalité associée à (1.1). Dans une discrétisation par éléments finis, on mettra en œuvre deux algorithmes de type quasi-Newton pour l'identification du coefficient de Manning dans le cas d'un écoulement stationnaire. L'article est structuré comme suit :

- dans une première partie, on propose une formulation générale du problème d'identification de paramètres d'une classe de problèmes de la mécanique des milieux continus dont les équations de Saint-Venant sont un cas particulier. Ces problèmes sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles quasi-linéaires de type diffusion-transport (ou paraboliques-hyperboliques).

Le problème d'identification est alors formulé au moyen d'une fonction coût à minimiser. On introduit un opérateur Lagrangien qui permet d'éviter les dérivées de l'état par rapport aux paramètres et les équations de sensibilité. En écrivant la dérivée du Lagrangien, on obtient les équations d'état et d'état-adjoint ainsi que l'expression du gradient de la fonction coût.

- Dans une seconde partie, ce formalisme est appliqué en détail aux équations de Saint-Venant écrites sous forme non conservative. Le paramètre physique à identifier étant le carré du coefficient de frottement dit de Manning.

- La troisième partie est consacrée à la mise en œuvre numérique du problème stationnaire. On y discute brièvement de la discrétisation par éléments finis des équations d'état, d'état adjoint et du gradient du coût ainsi que des algorithmes de résolution de ces équations.

- Dans la dernière partie, on présente quelques tests numériques permettant d'évaluer la puissance des techniques proposées pour identifier les coefficients de frottement en hydrodynamique des cours d'eau.

## 2. Formulation générale

Dans ce paragraphe, on présente une formulation générale du problème d'identification d'un paramètre dans une équation quasi-linéaire de type transport diffusion. On formulera le problème comme un problème de minimisation d'une fonction coût. Le calcul du gradient du coût nous permettra d'écrire la condition nécessaire d'optimalité.

### 2.1. Notations et position du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2,3$ ), de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$ . Pour  $T$  un réel positif on pose  $Q = \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ .

On considère le système quasi-linéaire :

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{conv}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{i,i}^{diff}(\mathbf{U}) + \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U}) = 0 \quad \text{dans } Q \quad (2.1)$$

où la convention de l'indice répété désigne la sommation et la notation  $\mathbf{U}_{,i}$  désigne la dérivation de  $\mathbf{U}$  par rapport à la  $i$ ème coordonnée. Le vecteur des variables inconnues  $\mathbf{U}$  est une fonction de  $Q$  dans  $\mathbb{R}^m$ , où  $m$  est un entier  $\geq 1$ . Les flux de convection et de diffusion dans la direction  $i$  sont notés respectivement  $\mathbf{F}_i^{conv}$  et  $\mathbf{F}_i^{diff}$ , le vecteur source est noté par  $\mathcal{F}$  et  $\tau(t, \mathbf{x})$  étant un paramètre à déterminer.  $\mathbf{A}_0(\mathbf{U})$  désigne une matrice inversible de dimension  $m$ .

Quand  $\mathbf{F}_i^{conv}$  est différentiable, l'équation (2.1) peut être mise sous la forme générale :

$$\mathbf{A}_0\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{A}_i\mathbf{U}_{,i} - (\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,j})_{,i} + \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U}) = 0 \quad \text{dans } Q \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{A}_i$  est la matrice jacobienne du flux de convection telle que  $\mathbf{A}_i = \frac{\partial \mathbf{F}_i^{conv}}{\partial \mathbf{U}}$ ; et  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{ij}]$  est la matrice de diffusion telle que  $\mathbf{K}_{ij}\mathbf{U}_{,j} = \mathbf{F}_i^{diff}$ .

Aux systèmes (2.1) ou (2.2) sont associées des conditions initiales appropriées. Les conditions aux limites que nous considérons s'écrivent de manière générale comme suit : soit que la  $i$ ème composante  $\mathbf{U}_i$  de  $\mathbf{U}$  est donnée sur une partie  $\Gamma_i$  de la frontière, soit que la  $i$ ème composante du flux de diffusion  $(\mathbf{F}_j^{diff} n_j)_i$  est supposée nulle, où  $n_j$  est la  $j$ ème composante de la normale à  $\Gamma$ .

Soit  $\mathbf{U}_d$  une fonction donnée de  $Q$  dans  $\mathbb{R}^m$  correspondant à la solution désirée. Pour un paramètre  $\tau$  donné, on désigne par  $\mathbf{U}(\tau)$  la solution de (2.2). On considère la fonction coût :

$$\mathcal{J}(\tau) = J(\mathbf{U}(\tau)) = \frac{1}{2} \int_Q \| \mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \tau) - \mathbf{U}_d(\mathbf{x}, t) \|^2_m \, d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_\Omega \epsilon \tau^2 \, d\Omega \quad (2.3)$$

où  $\epsilon$  est un scalaire assez petit (de l'ordre de  $10^{-6}$ ) et  $\| \cdot \|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^m$ .

Soit le sous-ensemble des paramètres admissibles (qui sont des fonctions de  $Q$  dans  $\mathbb{R}$ ) :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ \tau, \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \} \quad (2.4)$$

Les nombres réels positifs  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont donnés.

Le problème d'identification de  $\tau$  s'énonce alors de manière classique comme un problème de contrôle optimal : trouver  $\tau_{opt}$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$  tel que

$$\mathcal{J}(\tau_{opt}) = \min \{ \mathcal{J}(\tau), \tau \in \mathcal{U}_{ad} \} \quad (2.5)$$

Par la suite, on désire calculer la dérivée de  $\mathcal{J}$  et écrire la condition nécessaire d'optimalité. Les diverses formulations utilisées pour les problèmes d'état, d'état adjoint ainsi que le calcul de la dérivée de  $\mathcal{J}$  sont formelles.

La formulation variationnelle faible de (2.2) s'écrit :

trouver  $\mathbf{U}$  tel que pour toute fonction test  $\mathbf{W}$  on ait

$$\int_Q \{[\mathbf{A}_0(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{A}_i(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,i} + \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})] \cdot \mathbf{W} + \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,j} \cdot \mathbf{W}_{,i}\} \, d\Omega dt = 0 \quad (2.6)$$

### Remarque 2.1

Les conditions aux limites utilisées dans la formulation variationnelle faible ci-dessus sont de deux types : de Dirichlet sur la  $i$ ème composante de  $\mathbf{U}$  (dans ce cas  $\mathbf{W}_i = 0$ ) ou de Neumann sur la  $i$ ème composante du flux de diffusion ( $\mathbf{F}_j^{diff}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_j$ ) <sub>$i$</sub>  = 0.

### 2.2- Etat adjoint

Pour accéder de manière simple au gradient de  $\mathcal{J}(\tau)$ , on utilise une méthode de dualité. On considère le problème de minimisation (2.5) sous la contrainte (2.6). On introduit pour cela le Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_Q \{(\mathbf{A}_0(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{A}_i(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,i}) \cdot \mathbf{V} + \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,j} \cdot \mathbf{V}_{,i} \\ + \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}\} \, d\Omega dt + J(\mathbf{U}(\tau)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$  choisis dans des espaces appropriés.

On dérive  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\mathbf{V}$  dans la direction  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{V}}\mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \Phi) = \int_Q \{(\mathbf{A}_0(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}_{,i}) \cdot \Phi + \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,j} \cdot \Phi_{,i} \\ + \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U}) \cdot \Phi\} \, d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

En écrivant que :

$$\partial_{\mathbf{V}}\mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \Phi) = 0 \quad (2.9)$$

pour tout  $\Phi$ , on retrouve l'équation d'état (2.2).

Si  $\mathcal{L}$  est dérivée par rapport à  $\mathbf{U}$  dans la direction  $\Psi$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_U \mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \Psi) &= \int_Q \left\{ \mathbf{A}_0(\mathbf{U}) \Psi_{,t} + \frac{\partial \mathbf{A}_0(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Psi \mathbf{U}_{,t} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \Psi_{,i} + \frac{\partial \mathbf{A}_i(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Psi \mathbf{U}_{,i} \right\} \cdot \mathbf{V} \, d\Omega dt \\
&+ \int_Q \left\{ \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}) \Psi_{,j} \cdot \mathbf{V}_{,i} + \frac{\partial \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Psi \mathbf{U}_{,j} \cdot \mathbf{V}_{,i} \right\} \, d\Omega dt \\
&+ \int_Q \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Psi \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{U} - \mathbf{U}_d) \cdot \Psi \right\} \, d\Omega dt. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que

$$\int_0^T \mathbf{A}_0 \Psi_{,t} \cdot \mathbf{V} \, dt = - \int_0^T \Psi \cdot (\mathbf{A}_0^* \mathbf{V})_{,t} \, dt$$

pour tout  $\Psi$  tel que  $\Psi(0) = 0$  avec  $\mathbf{V}(T) = 0$ , on obtient l'état adjoint en écrivant que :

$$\partial_U \mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \Psi) = 0 \quad (2.11)$$

pour tout  $\Psi$  vérifiant  $\Psi(0) = 0$ . Soit encore en supposant que  $\mathbf{A}_0$  et  $\mathbf{K}_{ij}$  ne dépendent pas de  $\mathbf{U}$  :

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left\{ -\mathbf{A}_0^* \mathbf{V}_{,t} - (\mathbf{A}_i^*(\mathbf{U}) \mathbf{V})_{,i} - (\mathbf{K}_{ij}^* \mathbf{V}_{,i})_{,j} \right\} \cdot \Psi \, d\Omega dt \\
&+ \int_Q \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}_i(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Psi \cdot \mathbf{U}_{,i} + \left( \left( \frac{\partial \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right)^* \mathbf{V} + \mathbf{U} - \mathbf{U}_d \right) \cdot \Psi \right\} \, d\Omega dt = 0. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Dans le cas où l'on utilise la forme conservative (2.1) l'équation adjoint s'interprète sous la forme d'une équation aux dérivées partielles dans  $Q$  :

$$\begin{aligned}
-\mathbf{A}_0^* \mathbf{V}_{,t} - \mathbf{A}_i^*(\mathbf{U}) \mathbf{V}_{,i} - (\mathbf{K}_{ij}^* \mathbf{V}_{,i})_{,j} + \left( \frac{\partial \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right)^* \mathbf{V} \\
+ (\mathbf{U} - \mathbf{U}_d) = 0 \quad (2.13)
\end{aligned}$$

avec la condition finale :

$$\mathbf{V}(., T) = 0 \quad (2.14)$$

et bien entendu des conditions aux limites appropriées (voir la remarque 2.2).

### Remarque 2.2

Les conditions aux limites utilisées dans la formulation variationnelle faible du problème adjoint ci-dessus sont aussi de deux types : de Dirichlet homogène sur la  $i$ ème composante,  $\mathbf{V}_i = 0$  sur la partie de la frontière où  $\mathbf{U}_i$  est imposée, et de type Neumann, sur la partie où  $\mathbf{U}_i$  est libre, soit :

$$(\mathbf{A}_j^*(\mathbf{U})\mathbf{V}n_j + \mathbf{K}_{ij}^*\mathbf{V}, n_j)_i = 0. \quad (2.15)$$

### Remarque 2.3

Dans les applications réelles, la fonction  $\mathbf{U}_d$  est un ensemble de mesures ponctuelles. Si  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$  désignent un nombre fini de points d'observation de  $\Omega$  où l'on mesure  $\mathbf{U}$  à l'instant  $t$  :

$$\mathbf{U}_d^1(t), \mathbf{U}_d^2(t), \dots, \mathbf{U}_d^N(t),$$

la fonction coût pourrait s'écrire :

$$\mathcal{J}(\tau) = J(\mathbf{U}(\tau)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^T \|\mathbf{U}(\mathbf{x}^j, t, \tau) - \mathbf{U}_d^j(t)\|_m^2 dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon \tau^2 d\Omega, \quad (2.16)$$

dans ce cas, le problème adjoint associé s'écrirait *formellement* :

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}_0^* \mathbf{V}, t - \mathbf{A}_i^*(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}, i - (\mathbf{K}_{ij}^* \mathbf{V}, i), j + \left( \frac{\partial \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right)^* \mathbf{V} \\ + \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}(\mathbf{x}^j, t, \tau) - \mathbf{U}_d^j(t)) \otimes \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j) = 0 \quad \text{dans } Q \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec la condition finale

$$\mathbf{V}(T) = 0,$$

où  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j)$  désigne la distribution de Dirac au point  $\mathbf{x}^j$  et  $(\mathbf{U}(\mathbf{x}^j, t, \tau) - \mathbf{U}_d^j(t)) \otimes \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j)$  le produit tensoriel des distributions  $(\mathbf{U}(\mathbf{x}^j, t, \tau) - \mathbf{U}_d^j(t))$  et  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j)$ .

### 2.3. Gradient du coût

Pour accéder au gradient de  $\mathcal{J}(\tau)$ , on utilise les dérivées directionnelles. Soit  $\delta\tau$  une variation quelconque de  $\tau$ , on note

$$\dot{\mathbf{U}}(\tau) = \frac{d}{d\lambda} \mathbf{U}(\tau + \lambda \delta\tau) |_{\lambda=0}. \quad (2.18)$$

Soient  $\mathbf{U}(\tau)$  et  $\mathbf{V}(\tau)$  l'état et l'état adjoint, on a alors

$$\mathcal{J}(\tau) = J(\mathbf{U}(\tau)) = \mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}(\tau), \mathbf{V}(\tau)).$$

On dérive donc  $\mathcal{J}(\tau)$  par rapport à  $\tau$  dans la direction  $\delta\tau$  :

$$D\mathcal{J}(\tau)\delta\tau = D_\tau\mathcal{L}(\tau, \dot{\mathbf{U}}(\tau), \mathbf{V}(\tau), \delta\tau) = \partial_{\mathbf{U}}\mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \dot{\mathbf{U}}(\tau)) + \partial_{\mathbf{V}}\mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \dot{\mathbf{V}}(\tau)) + \partial_\tau\mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \delta\tau). \quad (2.19)$$

Or, on a

$$\partial_{\mathbf{U}}\mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \dot{\mathbf{U}}(\tau)) = 0$$

et

$$\partial_{\mathbf{V}}\mathcal{L}(\tau, \mathbf{U}, \mathbf{V}; \dot{\mathbf{V}}(\tau)) = 0.$$

D'où l'expression du gradient de  $\mathcal{J}$  :

$$D\mathcal{J}(\tau)\delta\tau = \int_Q \frac{\partial\mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial\tau} \mathbf{V}(\tau)\delta\tau \, d\Omega dt + \int_\Omega \epsilon\tau\delta\tau \, d\Omega. \quad (2.20)$$

On peut maintenant écrire la condition nécessaire d'optimalité de  $\tau$ . Si  $\tau$  est solution de (2.6), alors on doit avoir

$$D\mathcal{J}(\tau)(\delta\tau - \tau) \geq 0 \quad (2.21)$$

pour tout  $\delta\tau$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$ .

### Remarque 2.4

- Si on utilise comme fonction coût l'expression (2.16), le gradient de  $\mathcal{J}$  a la même expression que (2.20) avec  $\mathbf{V}$  solution de (2.17).

- Dans le cas où l'espace admissible des fonctions  $\tau$  est l'espace tout entier (i.e. il n'y a pas de bornes  $\tau_1$  ou  $\tau_2$ ) l'inégalité (2.21) devient une égalité

$$D\mathcal{J}(\tau)\delta\tau = 0 \quad (2.22)$$

pour tout  $\delta\tau$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$ .

### 3. Application aux équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles par intégration sur la direction verticale en supposant que la répartition verticale de la pression est hydrostatique. Ces équations modélisent les écoulements en faible profondeur comme dans les lacs

et les rivières. Les équations de Saint-Venant sont données sous forme conservative ou non conservative suivant le type d'approximation adoptée dans l'intégration verticale du terme de diffusion dans les équations de Navier-Stokes [4]. Pour des solutions régulières, les deux formulations donnent des résultats numériques équivalents. Cependant, le traitement des conditions aux limites peut être plus ou moins facile selon le type de formulation. Par exemple, il est plus facile et naturel d'imposer la distribution du débit à une frontière en utilisant la formulation conservative.

Les effets de frottement au fond du domaine d'écoulement sont décrits par une loi empirique appelée loi de Chezy. Cette loi, non linéaire, fait intervenir un coefficient de frottement appelé coefficient de Manning. Ce coefficient peut varier fortement d'une région à une autre et le choix d'une valeur appropriée constitue la principale opération de calibration du modèle. Les frottements sont responsables en premier lieu de pertes de charge. On propose d'appliquer les résultats précédents à l'estimation du coefficient de Manning.

### 3.1. Les équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant sous la forme non conservative sont données par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla h + g \tau \frac{\|\mathbf{u}\| \mathbf{u}}{(H+h)^{4/3}} = \mathbf{f} \quad \text{dans } Q \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot ((H+h)\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } Q \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $h$ ,  $H$  et  $\mathbf{f}$  désignent respectivement la vitesse, la position de la surface par rapport à un plan horizontal de référence, la profondeur du lit par rapport au plan de référence et la force extérieure. Le paramètre  $\tau$  est égal à  $n^2$  où  $n$  est le coefficient de Manning,  $g$  étant la gravité. Le tenseur des contraintes visqueuses est donné par  $\sigma(\mathbf{u}) = \nu(\text{grad} \mathbf{u} + \text{grad} \mathbf{u}^T)$  où  $\nu$  est la viscosité. La notation  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ .

On peut associer aux équations de Saint-Venant plusieurs types de problèmes d'identification comme ceux des coefficients de frottement ou de viscosité ([1], [19], [5]), de la profondeur, des conditions aux limites sur les frontières ouvertes [5], ou alors des conditions initiales.

Soient  $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t)$  et  $\eta_d(x, t)$  deux fonctions données représentant la vitesse et la hauteur désirées en un point  $\mathbf{x}$  et à l'instant  $t$ . Si  $(\mathbf{u}, h)$  est l'état du système (i.e.  $(\mathbf{u}, h)$  est la solution de (3.1) et (3.2)) on cherche alors le frottement  $\tau(\mathbf{x}, t)$  qui minimise la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{2} \left( \int_Q \{ \| \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \tau) - \mathbf{u}_d \|^2 + | h(\mathbf{x}, t, \tau) - h_d |^2 \} d\Omega dt + \int_{\Omega} \epsilon \tau^2 d\Omega \right). \tag{3.3}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (u_1, u_2, h)^T \\ \mathbf{V} &= (v_1, v_2, \beta)^T \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} u_1 & 0 & g \\ 0 & u_1 & 0 \\ H + h & 0 & u_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & g \\ 0 & H + h & u_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}_{11} &= \nu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}_{12} &= \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}_{21} &= \mathbf{K}_{12}^* \\ \mathbf{K}_{22} &= \nu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{F}(\tau, \mathbf{U}) = \frac{g\tau}{(H + h)^{4/3}} (u_1, u_2, 0) + (0, 0, u_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial H}{\partial x_2}) \tag{3.4}$$

En écrivant le système (3.1-3.2) sous la forme (2.2), on trouve le système adjoint correspondant en interprétant (2.12) sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \sigma(v) - [(\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \cdot \mathbf{u})I] \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (H + h) \nabla \beta$$

$$- \frac{g\tau}{(H + h)^{4/3}} (\| \mathbf{u} \| \mathbf{v} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \|} \mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \quad \text{dans } Q \tag{3.5}$$

$$\mathbf{v}(\cdot, T) = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + g \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{4}{3} \frac{g\tau}{(H+h)^{7/3}} \|\mathbf{u}\| \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \nabla \beta = h - h_d \quad \text{dans } Q \quad (3.7)$$

$$\beta(\cdot, T) = 0 \quad (3.8)$$

où  $I$  est le tenseur identité.

Le gradient du coût dans la direction  $\delta\tau$  est donné par :

$$dJ(\tau) \cdot \delta\tau = \int_Q \frac{g}{(H+h)^{4/3}} \|\mathbf{u}\| \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \delta\tau \, d\Omega \, dt + \int_{\Omega} \epsilon \tau \delta\tau \, d\Omega \quad (3.9)$$

### 3.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées aux équations de Saint-Venant peuvent être de plusieurs types. De manière générale, on impose des conditions de glissement sur les frontières fermées (i.e solides). Sur les frontières ouvertes, le choix des conditions aux limites dépend de la disponibilité des données. On impose des conditions de type Dirichlet soit sur le niveau, soit sur le débit, ou sur la composante normale de la vitesse. Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  désignent respectivement la partie ouverte et la partie fermée de la frontière du domaine d'écoulement  $\Omega$ , on peut par exemple prendre :

$$h = h_1 \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1;$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

Les conditions aux limites pour le problème adjoint seront alors :

$$\beta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\sigma(\mathbf{v})\mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \sigma(\mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

## 4. Discrétisation du problème stationnaire

Dans cette section, on s'intéresse au problème stationnaire. On réécrit d'abord les équations dans ce cas particulier qui sont par la suite discrétisées par éléments finis. Deux méthodes de résolution sont alors proposées.

4.1. *Discrétisation*

Le système variationnel formé par les équations d'état, d'état adjoint et la condition d'optimalité s'écrit sous une forme compacte :

$$\int_{\Omega} \{[\mathbf{A}_i(\mathbf{U})\mathbf{U}_{,i} + \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})] \cdot \mathbf{W} + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{U}_{,j} \cdot \mathbf{W}_{,i}\} \, d\Omega = 0, \tag{4.1}$$

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{A}_i(\mathbf{U})\Psi_{,i} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})\Psi_{,j} \cdot \mathbf{V}_{,i} + \frac{\partial \mathbf{A}_i(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Psi \mathbf{U}_{,i} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Psi \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{U} - \mathbf{U}_d) \cdot \Psi \} \, d\Omega = 0 \tag{4.2}$$

et

$$DJ(\tau)\delta\tau = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial \tau} \mathbf{V}(\tau) + \epsilon\tau \right\} \cdot \delta\tau \, \Omega \tag{4.3}$$

pour toutes fonctions tests  $\mathbf{W}, \Psi$  et  $\delta\tau$ . La version discrète du système 4.1-4.3, s'obtient classiquement en utilisant des approximations polynômiales continues pour les variables indépendantes  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ . Comme il n'y a pas de dérivations du paramètre par rapport aux coordonnées, celui-ci est approximé par des polynômes discontinus d'un élément à l'autre. Dans le cas des équations de Saint-Venant, les approximations par éléments finis choisies sont des polynômes quadratiques pour  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , linéaires pour  $(h, H, \beta)$  et des constantes par groupe d'éléments pour  $\tau$  (éventuellement le groupe est réduit à un seul élément). Ce choix d'approximations permet de vérifier la condition de stabilité inf-sup à la fois pour le problème d'état entre  $\mathbf{u}$  et  $h$  et pour le problème adjoint entre  $\mathbf{v}$  et  $\beta$  ([12]). La stabilité peut être renforcée dans le cas de la convection dominante en utilisant les techniques de décentrage ([14]) dont l'une des méthodes les plus simples à mettre en œuvre revient à modifier les équations de continuité du problème d'état et du problème d'état adjoint (3.2 et 3.7) en :

$$\nabla \cdot ((H + h)\mathbf{u}) - \alpha\Delta h = 0, \tag{4.4}$$

$$g\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{4}{3} \frac{g\tau}{(H + h)^{7/3}} \|\mathbf{u}\| \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}\nabla\beta - \alpha\Delta\beta = h - h_d \tag{4.5}$$

où  $\alpha$  est un réel positif donné. Dans la discrétisation, on prend  $\alpha = |\mathbf{u}|l/2$  avec  $l$  la taille de l'élément. La prise en compte exacte la dépendance non linéaire de  $\alpha$  en  $\mathbf{u}$  compliquerait l'expression des équations adjointes (3.5) et (3.7) en introduisant un terme de dérivation de  $\alpha$  par rapport à  $\mathbf{u}$ . Cependant, afin de simplifier la mise en œuvre informatique, ces termes sont négligés dans le système adjoint, comme il est montré dans (4.5). En effet, les expériences numériques, menées jusqu'à présent en adoptant cette approximation dans l'expression du système adjoint, ne montrent aucune dégradation des résultats. Par contre, les termes stabilisateurs retenus dans (4.4) et (4.5) se sont révélés cruciaux pour obtenir une bonne stabilité des problèmes d'état et d'état adjoint ainsi que pour la bonne convergence des algorithmes de résolution.

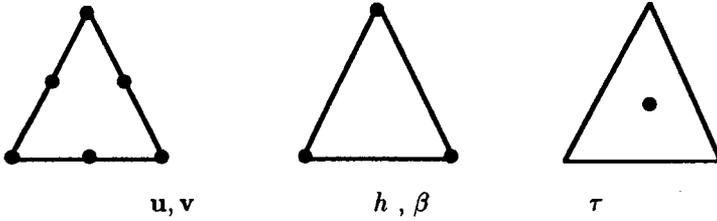


Figure 1. Approximations par éléments finis

#### Remarque 4.1

Considérons le cas de mesures ponctuelles, où les points de mesure  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$  sont aussi des nœuds du maillage de  $\Omega$ , avec  $\mathbf{u}_d^1, \mathbf{u}_d^2, \dots, \mathbf{u}_d^N$  et  $h_d^1, \dots, h_d^N$  les mesures de la vitesse et de la position de la surface libre en ces points. Soit  $\mathbf{x}_i$  un nœud quelconque du maillage. Les fonctions  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{h}$  sont définies en  $\mathbf{x}_i$  par

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}_d^i$$

et

$$\tilde{h}(\mathbf{x}_i) = h(\mathbf{x}_i) - h_d^i$$

si  $\mathbf{x}_i$  est un point de mesure, autrement

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) = 0$$

et

$$\tilde{h}(\mathbf{x}_i) = 0.$$

Par la suite, les fonctions  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{h}$  sont définies en tout point  $\mathbf{x}$  du domaine par de simples interpolations polynômiales par élément, quadratique pour  $\tilde{\mathbf{u}}$  et linéaire pour  $\tilde{h}$ .

Nous définissons alors la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 + |\tilde{h}|^2 + \epsilon \tau^2 \right) d\Omega$$

qu'on peut interpréter comme une forme régularisante de (2.16). En utilisant, cette fonction coût, les termes de droite des équations adjointes (3.5) et (3.7) sont remplacés respectivement par  $\tilde{\mathbf{u}}$  et par  $\tilde{h}$  qui sont bien des fonctions continues dans tout le domaine.

#### 4.2. Méthodes de résolution

On propose deux démarches pour résoudre numériquement le problème stationnaire. Dans une méthode couplée, on résout d'un bloc les systèmes

d'état, d'état adjoint et la condition d'optimalité. La méthode découplée consiste à résoudre l'équation d'optimalité sous les contraintes constituées par les équations d'état et d'état adjoint.

#### 4.2.1. Méthode couplée

La discrétisation par éléments finis du système variationnel (4-1),(4-2),(4-3), entraîne un système algébrique non linéaire de la forme :

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \tau) = 0. \quad (4.6)$$

Ici, nous désignons par le vecteur  $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \tau)^T$  le vecteur global des degrés de liberté pour les problèmes discrets respectivement d'état, d'état adjoint et du paramètre. L'algorithme proposé consiste à résoudre ce système par une méthode itérative de type Newton-Raphson ou quasi-Newton couplée à l'algorithme GMRES. Autrement dit, on forme la matrice Jacobienne  $\mathbf{G}'(\mathbf{W}^i)$  et les vecteurs résidus correspondants à une solution approchée  $\mathbf{W}^i$  de l'itération  $i$  en considérant comme inconnu l'ensemble des degrés de liberté en  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\tau$ . L'algorithme est décrit comme suit :

#### Algorithme 1 : méthode Newton-Raphson/GMRES

1. choisir une solution initiale  $\mathbf{W}^0$
2. Do  $i = 1$ , nombre maximum d'itérations
3. trouver  $\delta\mathbf{W}^i$  tel que :

$$\mathbf{G}'(\mathbf{W}^{i-1})\delta\mathbf{W}^i = -\mathbf{G}(\mathbf{W}^{i-1}) \quad (4.7)$$

4. mettre à jour la solution :  $\mathbf{W}^i = \delta\mathbf{W}^i + \mathbf{W}^{i-1}$
5. s'il y a convergence aller à l'étape 7
6. endDo
7. Stop

D'autre part, le système (4.7) est lui aussi résolu de manière itérative en utilisant l'algorithme GMRES non linéaire préconditionné par une approximation de la matrice Jacobienne  $\mathbf{G}'(\mathbf{W}^0)$  ([27] et [28]). Cet algorithme est présenté en détail dans l'annexe.

#### 4.2.2. Méthode découplée

On résout cette fois-ci la condition d'optimalité sous les contraintes de l'équation de l'état et de l'état adjoint. On cherche donc à résoudre l'équation suivante en  $\tau$  :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\tau, \mathbf{U})}{\partial \tau} \mathbf{V}(\tau) + \epsilon \tau \right\} \delta \tau \, d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

pour tout  $\delta\tau$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$  et où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont l'état et l'état adjoint. Une fois discrétisée, l'équation (4.8) entraîne un système de  $k$  équations algébriques non linéaires pour  $k$  degrés de liberté en  $\tau$ , qu'on écrit sous la forme :

$$\mathbf{g}(\tau; \mathbf{U}(\tau), \mathbf{V}(\tau)) = 0. \quad (4.9)$$

Ce système est alors résolu par une méthode de Newton :

1. soit  $\tau^0$  le tir initial du paramètre et  $(\mathbf{U}^0, \mathbf{V}^0)$  l'état et l'état adjoint correspondants ;
2. pour  $i = 1$ , nombres maximum d'itérations
3. trouver  $\Delta\tau^i$  tel que :

$$\mathcal{H}\Delta\tau^i = -\mathbf{g}(\tau^{i-1}; \mathbf{U}^{i-1}, \mathbf{V}^{i-1}) \quad (4.10)$$

où  $\mathcal{H} = \mathbf{g}'(\tau^i, \mathbf{U}^i, \mathbf{V}^i)$  est la matrice Hessienne, de dimension  $k \times k$ , de la fonction coût discrète ;

4. mettre à jour  $\tau^i = \Delta\tau^i + \tau^{i-1}$  ;
5. s'il y a convergence aller à l'étape 7 ;
6. enddo
7. Stop

On remarque qu'on a besoin de la matrice Hessienne, à l'étape 2, dont il est difficile de trouver l'expression analytique. Toutefois, il est possible d'en calculer une approximation par différences finies puis l'inverser pour résoudre (4.10). Or, si on résout le système (4.10) par l'algorithme GMRES non linéaire (voir annexe) on aura alors besoin uniquement de calculer le produit du Hessien par des vecteurs, ce qui se calcule très bien par différences finies et ce sans avoir à calculer explicitement la matrice Hessienne ou à la stocker. Ainsi, le système (4.10) est résolu de manière itérative par l'algorithme GMRES sans préconditionnement. Notons que pour  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  donnés, l'algorithme GMRES converge vers la solution exacte de (4.10) dès qu'on prend  $k$  directions de descente. D'autre part, pour un  $\tau$  donné,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont obtenus en résolvant successivement les équations (4.1) et (4.2). Remarquons aussi que le système d'état (4.1) est non linéaire en  $\mathbf{U}$ , et peut être très bien résolu par une méthode quasi-Newton couplée à une factorisation complète du Jacobien. Le système adjoint (4.2) est par contre linéaire en  $\mathbf{V}$ .

## Remarque 4.2

Le paramètre  $\tau$  doit toujours être positif, d'autre part il est physiquement borné par une valeur supérieure de l'ordre de  $\tau_2 = 10^{-2}$ . S'il arrive, au cours des itérations, qu'un degré de liberté en  $\tau$  devient négatif alors on le ramène à une petite valeur  $\tau_1 = 10^{-6}$ . De même, s'il dépasse la borne supérieure  $\tau_2$ , il est ramené immédiatement à cette valeur. Les deux algorithmes décrits précédemment se comportent très bien avec ce type de projection.

### Remarque 4.3

Avec l'algorithme de résolution découplée, il peut arriver qu'on rencontre des problèmes de convergence lorsque le nombre de paramètres est relativement élevé ( $> 10$ ) et ce particulièrement lorsque le tir initial est loin de la solution du problème. Afin de donner plus de robustesse à cet algorithme, nous avons développé une heuristique qui a fonctionné avec succès dans tous les tests de calcul que nous avons menés. Elle consiste à établir une stratégie d'identification *hiérarchique*. On procède par décompositions successives du domaine et on identifie à chaque fois le nombre correspondant de paramètres. Ces paramètres sont alors utilisés pour initialiser une nouvelle décomposition, et ainsi de suite jusqu'à la convergence. La première décomposition est constituée par l'ensemble des éléments du domaine, ce qui fait qu'il y a un seul paramètre à identifier. Une fois qu'on obtient le champ d'écoulement correspondant à ce paramètre, il servira comme solution initiale pour une nouvelle décomposition constituée de deux sous-domaines et pour laquelle on identifie deux valeurs du paramètre. Cette série de décompositions et d'initialisations est répétée un certain nombre de fois jusqu'à ce qu'on arrive à un champ d'écoulement capable de bien initialiser le problème final correspondant au nombre total de paramètres. Ces décompositions ne se font pas, évidemment, de manière complètement arbitraire, elles correspondent d'une certaine façon à la distribution physique du paramètre.

## 5. Exemples numériques

On propose deux bancs d'essai numériques :

- un écoulement dans un canal avec élargissement,
- un écoulement dans une rivière avec piles de pont,

afin d'étudier le comportement des méthodes et des algorithmes décrits dans les sections précédentes. Dans tous ces exemples, la formulation non conservative des équations de Saint-Venant est utilisée. Pour chacun des tests, la procédure suivie consiste à construire une solution désirée (solution d'état) d'un écoulement dans un domaine avec des conditions aux limites spécifiées et qui correspond à une distribution spécifiée des valeurs du paramètre  $\tau$ . Par la suite, en partant d'une distribution presque aléatoire du paramètre, on déclenche l'algorithme d'identification. A la convergence, on doit retrouver, avec une certaine tolérance, la distribution exacte de  $\tau$ , la solution de l'état et une solution d'état-adjoint pratiquement nulle.

### 5.1. Canal avec élargissement

L'objectif de ce test est de comparer les deux méthodes de résolution couplée et découplée. On considère un canal (figure 2) de 16 m de long, la partie étroite longue de 6 m est de largeur 1 m, la partie élargie est longue de

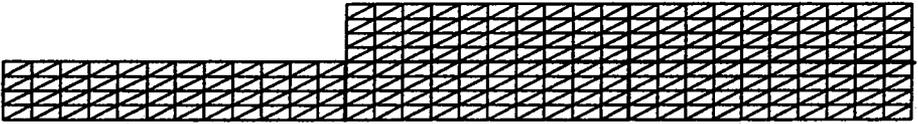


Figure 2. Canal avec élargissement. Maillage et décomposition du domaine

Algorithme : méthode découplée

Nombre d'éléments	416
Nombre d'itérations	10
Dimension de Krylov	5
Nombre de paramètres	5

	paramètres initiaux	Paramètres désirés
$\tau_1$	3.000E-04	5.000E-04
$\tau_2$	5.000E-04	7.000E-04
$\tau_3$	9.000E-04	3.000E-04
$\tau_4$	2.000E-04	9.000E-04
$\tau_5$	6.000E-04	4.000E-04

( $\times 1.0E-04$ )

Itér.	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	Coût
1	3.44392	5.81140	11.3974	2.77470	11.0928	8.7135E+1
2	3.95693	6.28379	9.53586	3.15994	12.4511	5.221
3	4.94901	7.04146	2.95914	9.08228	4.26291	9.3074E-02
4	5.01863	7.01346	2.88609	9.08228	3.83088	1.2465E-03
5	5.00021	7.00084	2.99864	9.00296	3.99760	9.9858E06
6	5.00016	7.00030	2.99849	9.00297	3.99769	4.0700E-07
7	5.00015	7.00029	2.99856	9.00283	3.99780	3.8476E-07
8	5.00014	7.00027	2.99864	9.00268	3.99792	3.4620E-07
9	5.00013	7.00024	2.99874	9.00251	3.99806	3.0259E-07
10	5.00012	7.00026	2.99885	9.00229	3.99823	2.5365E-07

Tableau 1. Canal avec élargissement

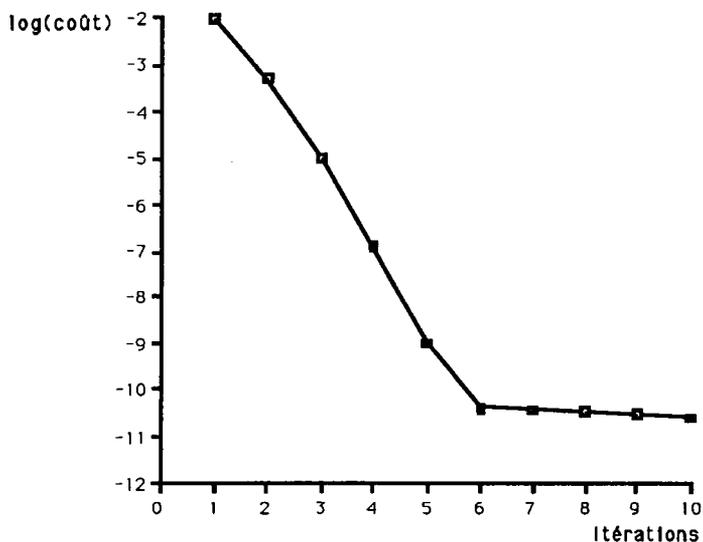
**Algorithme : méthode couplée**

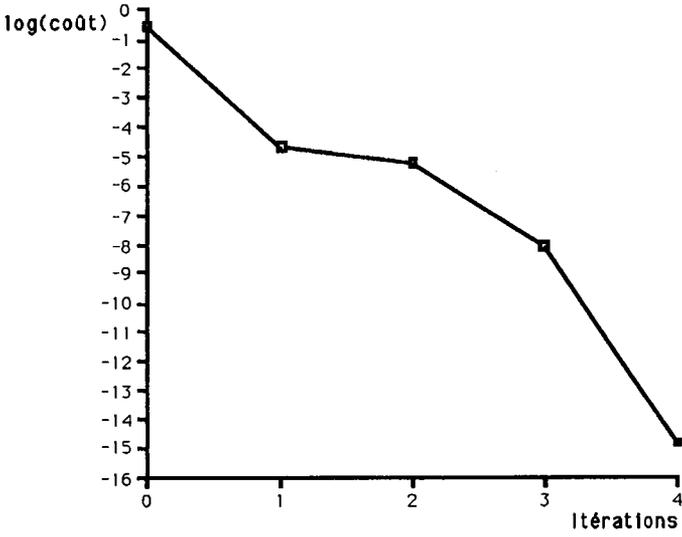
Nombre d'éléments	416
Nombre de noeuds	913
Nombre d'itérations	5
Dimension de Krylov	5
Nombre de paramètres	5

	paramètres initiaux	Paramètres désirés
$\tau_1$	3.000	5.000
$\tau_2$	5.000	7.000
$\tau_3$	9.000	3.000
$\tau_4$	2.000	9.000
$\tau_5$	6.000	4.000

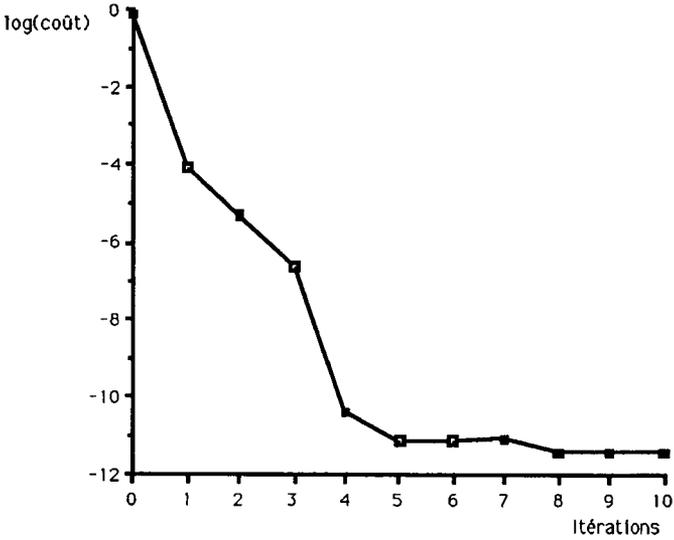
(x 1.0E-04)

Itér.s	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	Coût
0	3.000	5.000	9.000	2.000	6.000E	0.26804E+04
1	7.0519	9.1342	2.09E+01	1.0964	2.7299	2.01218E-01
2	6.0275	8.0636	3.0362	8.9786	4.0237	5.13809E-02
3	4.9989	6.9975	3.0362	8.9786	4.0237	7.76771E-05
4	5.0000	7.0000	3.0000	9.0000	4.0000	1.39735E-11

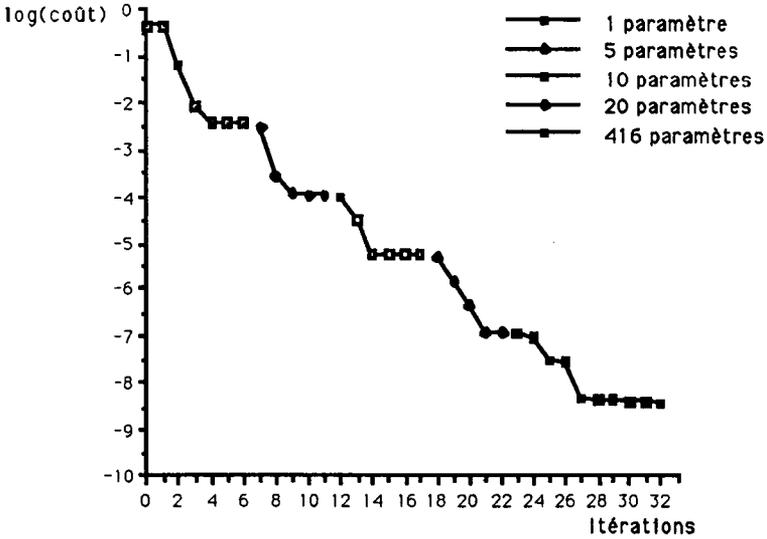
**Tableau 2. Canal avec élargissement****Figure 3. Canal avec élargissement. Convergence de la méthode découplée pour 5 paramètres**



**Figure 4.** Canal avec élargissement. Convergence de la méthode couplée pour 5 paramètres



**Figure 5.** Canal avec élargissement. Convergence de la méthode couplée avec 416 paramètres



**Figure 6.** Canal avec élargissement. Convergence de la méthode couplée avec une résolution hiérarchique par décomposition de domaine

10 m et de largeur 2 m. La pente est de  $10^{-3}$  et la profondeur à l'entrée est de 0.2 m. La viscosité est égale à  $10^{-3}$ . On impose le niveau à l'entrée à zéro et à la sortie à  $-0.016$  m. Les conditions de glissement sont imposées sur les parois solides. Le domaine est maillé par 416 éléments triangulaires et 913 nœuds.

Dans un premier essai on a considéré 5 zones de paramètres différents (voir les tableaux 1 et 2). Dans cet essai, on considère que tous les nœuds du maillage correspondent aux points de mesure, ce qui fait qu'on a partout  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_d$  et  $\tilde{h} = h - h_d$ . Les figures 3 et 4 montrent les courbes de convergence et les tableaux 1 et 2 montrent l'historique des valeurs de  $\tau$  au cours de l'identification. On voit bien que les deux algorithmes convergent après quelques itérations, toutefois avec un léger avantage pour l'algorithme couplé. L'algorithme couplé consomme naturellement plus de mémoire et de temps de calcul compte tenu de la taille du système global.

Dans un second essai, on a considéré autant de sous-domaines que d'éléments, soit 416 paramètres à identifier et on a utilisé les mêmes conditions aux limites que précédemment. Ceci constitue, d'après notre expérience, un problème difficile. La solution désirée correspond à une distribution constante  $\tau = 4.10^{-4}$  dans tout le domaine. En partant d'une distribution initiale plus ou moins éloignée de la distribution exacte, les algorithmes de résolution tentent de retrouver la solution désirée. D'après les différents essais effectués, on a constaté que l'algorithme couplé converge pratiquement pour n'importe quel tir initial réaliste (i.e. les valeurs du paramètres restent dans un intervalle physiquement admissible) alors que l'algorithme découplé peut diverger si le tir initial est éloigné. La figure 5 montre un exemple de résultats obtenus avec

l'algorithme couplé, alors que dans ces mêmes conditions l'algorithme découplé a divergé. Cependant, en adoptant la stratégie de résolution hiérarchique on obtient aussi la convergence dans ce cas avec l'algorithme découplé.

Un autre exemple illustrant le comportement de l'approche hiérarchique d'identification d'un grand nombre de paramètres, consiste à retrouver une distribution non uniforme du paramètre donnée par la formule :

$$\tau(x_G) = [5.0 - 4.0 \cos \frac{\pi x_G}{L}] \times 10^{-4},$$

avec  $L = 16$  m la longueur du canal et  $x_G$  le centre de gravité de l'élément. La procédure hiérarchique consiste à déterminer d'abord un seul paramètre dans tout le domaine et le champ d'écoulement correspondant. Celui-ci sert comme solution initiale pour une nouvelle décomposition en 5 sous-domaines (identique à celle de la figure 2) et on détermine les 5 paramètres correspondants. Par la suite, deux autres décompositions respectivement en 10 et 20 sous-domaines sont obtenues en subdivisant chaque sous-domaine dans le sens longitudinal. On passe d'une étape d'identification à une autre dès que le coût devient stationnaire. A partir de la solution correspondant à 20 paramètres on a initialisé directement le cas final de 416 paramètres. La figure 6 retrace les divers segments de courbes de convergence correspondant à chaque étape.

**Algorithme : méthode couplée**

Nombre d'éléments	416
Nombre de noeuds	913
Nombre d'itérations	10
Dimension de Krylov	20
Nombre de paramètres	416

Valeur initiale du paramètre : 9.0E-04

Valeur désirée : 4.0 E-04

Itér.	Coût
0	0.68294
1	7.68207E-05
2	4.65956E-06
3	2.27581E-07
4	3.99612E-11
5	7.20985E-12
6	7.10240E-12
7	8.57441E-12
8	3.77921E-12
9	3.77996E-12
10	3.77994E-12

**Tableau 3.** Canal avec élargissement. Cas d'un grand nombre de paramètres

Observations continues

Nombre d'éléments	1222
Nombre de noeuds	2567
Nombre d'itérations	10
Dimension de Krylov	4
Nombre de paramètres	4

	paramètres initiaux	Paramètres désirés
$\tau_1$	4.000E-04	400.000E-04
$\tau_2$	4.000E-04	100.000E-04
$\tau_3$	4.000E-04	24.000E-04
$\tau_4$	4.000E-04	44.4444E-04

( x 1.0E-04)

iter	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
1	83.87999	29.8733	9.99999E-07	9.99999E-07
2	200.35957	60.36256	57.89562	9.99999E-07
3	303.37066	87.25800	84.43875	61.28299
4	385.09025	101.54264	15.82881	28.76462
5	399.37136	100.35324	24.34 97	43.54132
6	399.99401	100.00762	24.97284	44.41862
7	399.99473	100.00642	24.97530	44.42051
8	399.99473	100.00642	24.97530	44.42051
9	399.99473	100.00642	24.97530	44.42051
10	399.99473	100.00642	24.97530	44.42051

**Tableau 4.** Rivière avec piles de pont. Cas de 4 paramètres et observations ponctuelles

Observations ponctuelles

Nombre d'éléments	1222
Nombre de noeuds	2567
Nombre d'itérations	15
Dimension de Krylov	4
Nombre de paramètres	4
Nombre de points d'observation	8

	paramètres initiaux	Paramètres désirés
$\tau_1$	10.000E-04	1.000E-04
$\tau_2$	98.000E-04	23.000E-04
$\tau_3$	42.000E-04	58.000E-04
$\tau_4$	3.000E-04	100.000E-04

(x 1.0E-04)

iter	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$
1	100.0000	9.999E-07	9.999E-07	9.999E-07
2	31.3509	9.094E-07	32.7436	29.7332
3	7.7007	9.999E-07	59.1339	85.9121
4	0.3793	52.1499	58.9060	99.7015
5	4.7109	21.7940	56.5207	98.3499
6	1.7505	22.9844	57.7285	99.5633
7	1.0173	22.9993	57.9958	99.9914
8	1.0000	23.0001	58.0003	100.0000
9	1.0000	23.0001	58.0003	100.0000
10	1.0000	23.0002	58.0003	100.0000
11	1.0001	23.0002	58.0003	100.0000
12	1.0001	23.0002	58.0003	99.9995
13	1.0001	23.0002	58.0003	100.0000
14	1.0001	23.0002	58.0003	99.9995
15	1.0001	23.0002	58.0003	100.0000

**Tableau 5.** Rivière avec piles de pont. Cas de 4 paramètres et observations ponctuelles

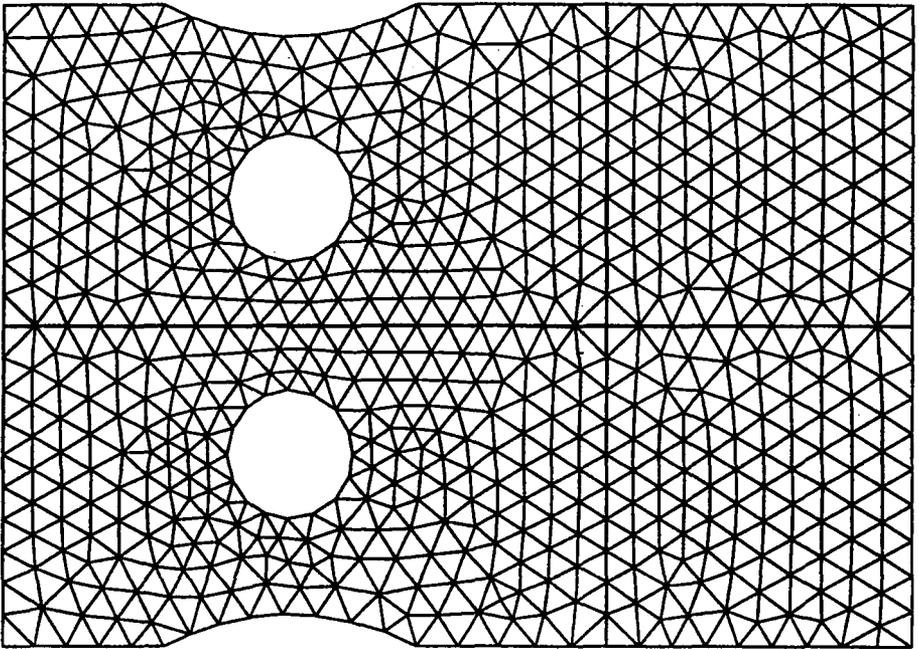


Figure 7. Rivière avec piles de pont. Maillage et décomposition du domaine

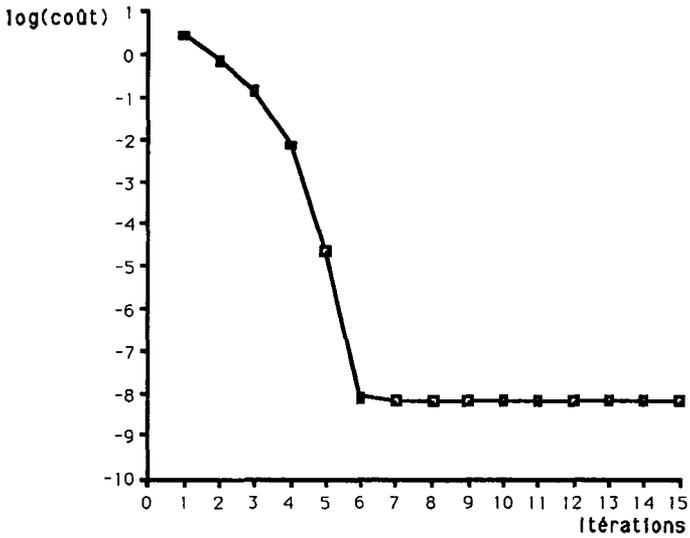
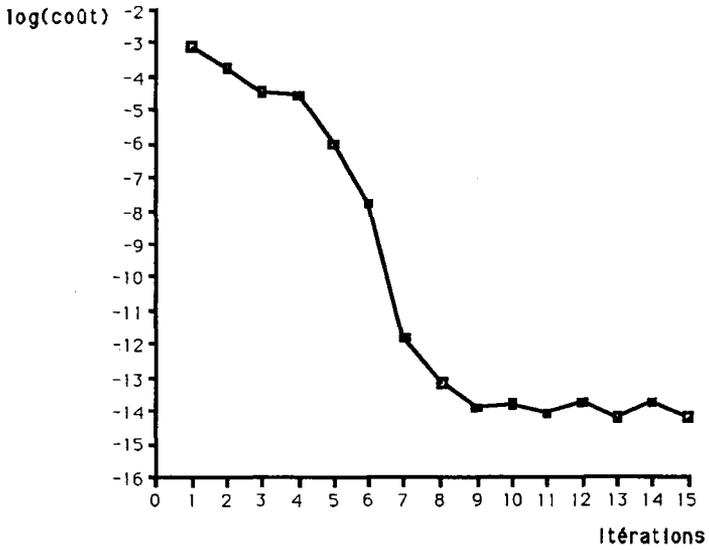
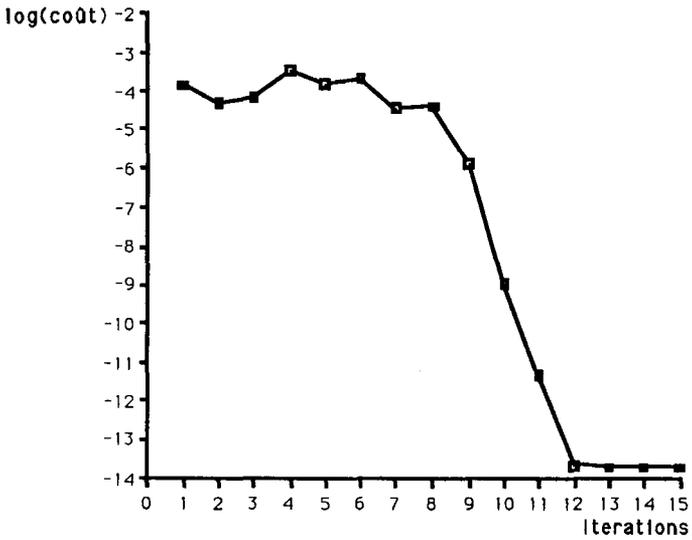


Figure 8. Rivière avec piles de pont. Courbe de convergence avec la méthode découplée



**Figure 9.** Rivière avec piles de pont. Courbe de convergence pour 4 paramètres avec 8 points d'observation



**Figure 10.** Rivière avec piles de pont. Courbe de convergence pour 8 paramètres avec 15 points d'observation

	paramètres initiaux	Paramètres désirés
$\tau_1$	56.000E-04	99.000E-04
$\tau_2$	92.000E-04	21.000E-04
$\tau_3$	3.000E-04	65.000E-04
$\tau_4$	84.000E-04	1.000E-04
$\tau_5$	68.000E-04	23.000E-04
$\tau_6$	15.000E-04	83.000E-04
$\tau_7$	82.000E-04	3.000E-04
$\tau_8$	71.000E-04	41.000E-04

Observations ponctuelles

Nombre d'éléments	1222
Nombre de noeuds	2567
Nombre d'itérations	15
Dimension de Krylov	8
Nombre de paramètres	8
Nombre de points d'observation	15

(x 1.E-04)

iter	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	$\tau_6$	$\tau_7$	$\tau_8$
1	100.00	100.00	94.920	10.055	9.9E-03	9.99E-03	44.268	100.000
2	100.00	9.99E-07	55.643	9.99E-07	100.000	60.488	9.99E-07	95.436
3	98.154	4.713	56.055	1.251	100.000	9.99E-07	9.99E-07	94.420
4	97.096	51.497	54.791	5.006	9.9E-07	9.99E-07	100.000	87.302
5	100.00	81.677	32.462	9.99E-07	100.000	100.000	9.99E-07	6.776
6	12.396	80.699	34.437	1.601	100.000	96.760	3.842	7.616
7	42.777	24.688	92.695	9.99E-07	9.9E-07	100.000	4.425	34.386
8	50.476	21.424	86.973	0.133	15.494	95.595	4.585	34.738
9	87.523	5.737	58.737	1.380	32.643	81.651	1.870	40.903
10	98.570	20.946	65.106	0.989	22.414	83.305	3.176	40.796
11	98.998	21.011	64.991	0.999	23.023	83.006	2.995	41.003
12	98.996	20.998	65.000	0.999	22.997	83.000	3.000	41.000
13	98.996	20.998	65.000	0.999	22.997	83.000	3.000	40.999
14	98.996	20.998	65.000	0.999	22.997	83.000	3.000	40.999
15	98.996	20.998	65.000	0.999	22.997	83.000	3.000	40.999

Tableau 6. Rivière avec piles de pont. Cas de 8 paramètres et observations ponctuelles

### 5.2. Rivière avec piles de pont

Il s'agit d'un écoulement en présence d'obstacles (figure 7). Le fond a une profondeur constante de 4 m par rapport au plan de référence. Deux cylindres représentent les piles de pont et deux portions de cylindre sous forme d'arcs font obstacle à l'écoulement dans le sens transversal. On impose un débit à l'entrée de  $62 \text{ m}^3/\text{s}$  et la hauteur à la sortie à zéro. Les dimensions du domaine sont 28.5 m par 20 m. Le diamètre des piles est de 4 m. La viscosité est égale à  $5.10^{-3}$ .

Ce cas a pour but d'une part de tester le comportement de l'algorithme découplé sur une géométrie complexe avec des paramètres très variables d'une zone à l'autre et d'utiliser d'autre part des observations ponctuelles. On a aussi examiné l'influence du nombre et de la position des points d'observation. Pour ce problème on a utilisé uniquement l'algorithme découplé avec la procédure hiérarchique quand c'est nécessaire.

Le tableau 4 montre la distribution désirée du paramètre (qui est très variable dans ce cas), la distribution initiale choisie arbitrairement et l'évolution des valeurs de  $\tau$  au cours des itérations. Dans cet essai on a considéré que les points de mesure sont confondus avec tous les nœuds du maillage. On remarque qu'à l'itération initiale certaines valeurs du paramètre atteignent la borne inférieure imposée, soit  $10^{-10}$ , et par la suite ces valeurs sont corrigées. La figure 8 montre la courbe de convergence.

Un autre test a été réalisé en utilisant un nombre relativement restreint de points d'observation qui sont choisis cependant en des zones où l'écoulement subit une variation significative, comme la région entre les piles et les zones qui se trouvent entre les piles et les arcs. Le tableau 5 donne l'historique des variations de 4 paramètres  $\tau$  (avec la décomposition de domaine de la figure 7) avec 8 points d'observation et la figure 9 montre la courbe de convergence. Pour ce cas, l'écart relatif en norme entre la solution exacte et la solution calculée est de l'ordre  $10^{-6}$  pour le paramètre  $\tau$  et de  $10^{-7}$  pour la vitesse  $\mathbf{u}$  et le niveau  $h$ . Un autre test avec 8 paramètres correspondant à une décomposition en 8 sous-domaines (chaque sous-domaine de la figure 7 est subdivisé en deux dans le sens longitudinal) est présenté avec 15 points d'observation (figure 10 et tableau 6). Le tableau 6 montre que certains paramètres touchent les bornes du domaine admissible ( $\tau_1 = 10^{-6}$  et  $\tau_2 = 10^{-2}$ ) avant de converger vers les valeurs désirées.

## 6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons utilisé la théorie du contrôle optimal pour l'identification du coefficient de frottement dans les écoulements à surface libre. Nous avons proposé une formulation assez générale pour être appliquée à d'autres types de problèmes. Le problème d'identification de paramètres a été formulé comme un problème de minimisation d'une fonction coût sous la contrainte de l'équation d'état. Ceci nous a permis d'introduire un La-

grangien dont les variations permettent de restituer l'équation d'état, d'écrire l'équation adjointe et d'accéder de manière simple à la dérivée du coût par rapport aux paramètres. On obtient ainsi un système variationnel formé par ces deux équations et la condition d'optimalité. Une formulation variationnelle stabilisée et un choix judicieux des approximations par éléments finis ont permis d'obtenir une discrétisation stable de ce système. Il est important d'insister que sans la stabilisation de la formulation variationnelle du problème d'état et d'état adjoint, aucun résultat satisfaisant n'a été obtenu. Aussi, une régularisation naturelle et efficace de la fonction coût a été introduite pour le cas d'observations ponctuelles. Deux algorithmes de résolution sont développés pour résoudre l'ensemble des équations algébriques obtenues. Le premier algorithme consiste à utiliser la méthode de Newton-Raphson couplée avec l'algorithme GMRES comme accélérateur et ce pour l'ensemble des degrés de liberté (de l'état, de l'état adjoint et du paramètre). Le second algorithme est basé sur GMRES non linéaire où on résout la condition d'optimalité sous contraintes de l'état et de l'état adjoint. Les tests numériques effectués montrent que le premier algorithme est très robuste pour résoudre des problèmes à très grand nombre de paramètres et pratiquement pour n'importe quelle condition de départ. Le second algorithme est aussi stable et converge pour un nombre raisonnable de paramètres. Comme le cas d'un très grand nombre de paramètres nécessite un tir initial proche de la solution, et qui n'est pas toujours facile à deviner en pratique, on a alors utilisé une stratégie hiérarchique basée sur une décomposition successive du domaine. Avec cette approche, l'algorithme découplé devient robuste. Aussi, il nécessite moins de mémoire que l'algorithme couplé et peut être appliqué dans le cas instationnaire, ce qui fera l'objet d'une prochaine étude. En pratique, la méthodologie développée dans ce travail permettrait non seulement de calibrer les paramètres de frottement dans les cours d'eau lorsque des mesures sont disponibles mais aussi d'étudier la sensibilité de la calibration selon le nombre et la position des points de mesure. Ainsi, on pourrait déterminer à l'avance le nombre optimal et les positions des points de mesure en préparation d'une campagne sur le terrain.

## Remerciements

Ce travail a été réalisé grâce au support financier du Centre National de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada et à des subventions de la compagnie Hydro-Québec et du programme PSIR de l'École de technologie supérieure. Nous remercions aussi les examinateurs de cet article pour nous avoir aidé à améliorer la première version.

## Annexe

### Algorithme GMRES avec préconditionnement à droite

Soit le système linéaire à résoudre :

$$AM^{-1}Mx = b,$$

$M$  étant une approximation de la matrice  $A$  appelée préconditionneur. L'algorithme GMRES préconditionné à droite par la matrice  $M$  consiste à :

1. Initialiser la solution à  $x_0$  et choisir la dimension  $m$  du sous-espace de Krylov.
2. Calculer  $r_0 = b - Ax_0$  et  $\beta := \|r_0\|_2$ ,  $v_1 := r_0/\beta$ .
3. Définir la matrice de Hessenberg de dimension  $(m+1) \times m$  par :

$$\bar{H}_m = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m} \text{ et l'initialiser à zéro.}$$

4. *Processus d'Arnoldi* :

(a) Pour  $j = 1, 2, \dots, m$  faire :

(a.1) calculer  $w_j := AM^{-1}v_j$

(a.2) Pour  $i = 1, \dots, j-1$  faire

$$h_{ij} := (w_j, v_i), w_j := w_j - h_{ij}v_i \text{ enddo}$$

(b) calculer  $h_{j+1,j} := \|w_j\|_2$ . Si  $h_{j+1,j} = 0$  aller à 5.

(c) calculer  $v_{j+1} := w_j/h_{j+1,j}$ .

EndDo

5. *Mise à jour de la solution* :

Calculer  $y_m$  qui minimise  $\|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$  et  $x_m = x_0 + M^{-1}V_m y_m$   
avec  $V_m := [v_1, v_2, \dots, v_m]$  et  $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ .

6. fin de l'algorithme.

Afin de compléter la description de cet algorithme, il est important de noter les remarques suivantes :

- l'algorithme GMRES possède la caractéristique suivante: il requiert plusieurs calculs du produit de la matrice  $AM^{-1}$  par les vecteurs  $v$  du sous-espace de Krylov. Si  $A$  représente en fait la matrice Jacobienne du vecteur  $G(x)$  alors, le produit  $AM^{-1}v$  n'est jamais calculé explicitement mais, peut être bien approximé par une différence finie de la forme :

$$AM^{-1}v = \frac{G(x + \sigma M^{-1}v) - G(x)}{\sigma}$$

avec  $\sigma$  un scalaire assez petit ;

- la matrice  $M$  de préconditionnement est, en principe, une bonne approximation de la matrice  $A$  et qui est relativement assez facile à inverser. Dans le cas d'un problème non linéaire, comme celui des écoulements à surface libre

étudiés dans cet article, la matrice  $M$  est calculée uniquement au début des itérations de Newton. Elle est prise soit égale à la matrice Jacobienne exacte ou à sa factorisation incomplète, de type ILUT par exemple, lorsque la taille du problème devient importante et qu'on désire réduire la quantité de mémoire nécessaire ([28]).

## 7. Bibliographie

- [1] A. Anju , M. Kawahara, K. Matsumoto, "Parameter identification of bottom friction and eddy viscosity of tidal flow in Tokyo Bay", Computational Method in Water Resources, A. Peters and al. eds. 1994 Kluwer Academic Publishers.
- [2] G. Alessandrini, "An identification problem for elliptic equation in two variables", Ann. Math. Pur. Appl. vol.145, 1986, pp. 265-296.
- [3] G. Alessandrini, "On the identification of the leading coefficient of an elliptic equation", Bolletino U.M.I Analisi Funzionale e Applicazioni serie VI, vol IV-c 1985, pp. 87-111.
- [4] C. Bernardi, O. Pironneau, "On Shallow Water Equations at Low Reynolds Number", 16 (1), pp. 59-104, 1991.
- [5] P. G. J. Ten Brummelhuis, A. W. Heemink, H. F. P. Van Den Boogaard, "Identification of shallow sea models", Int. Jour. For Num. Meth. in Fluids , vol. 17, pp. 637-665, 1993.
- [6] J. Carrera, S. P. Neuman, "Estimation of aquifer parameters under transient and steady state conditions", Water Res. Research, vol. 22, 2, pp.199-210, 1986.
- [7] G. Chavent, "A nonlinear least-square theory for inverse problems", in Inverse method in Action. Springer, Berlin, New-York, 1990.
- [8] G. Chavent, P. Lemonnier, "Identification de la non-linéarité d'une équation parabolique quasi-linéaire," IRIA-Laboria, Rapport de Recherche n 45, 1973.
- [9] G. Chavent, M. Dupuy and P. Lemonnier, "History matching by use of optimal control theory," Soc. Pet. Eng. J., 15, pp. 74-86, 1975.
- [10] G. Chavent, "On the theory and practice of nonlinear least-squares", Siam J. Control and optimization, vol.23, 2, pp. 217-241, 1985.
- [11] C. Chicone, J. Gerlach, "A note on the identifiability of distributed parameters in elliptic equations", Siam J. Math. Anal., vol 18 1987, pp. 1378-1384.

- [12] G. Dhatt, A. Soulaïmani, Y. Ouellet, M. Fortin, "Development of new triangular elements for free surface flows," *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol.6, pp. 895-911, 1986.
- [13] P. Dupuis, Y. Ouellet, A. Soulaïmani, "Modélisation d'un écoulement tourbillonnaire en régime permanent", *Can. J. Civ. Eng.* 13, pp. 310-318, 1986.
- [14] A. Soulaïmani, N.E Elkadri E, "Sur une méthode de décentrage de schémas d'éléments finis résolvant les équations de Navier-Stokes et de Saint-Venant," *Revue Européenne des éléments finis*, Vol.1, 3, pp. 279-307, 1992.
- [15] R. S. Falk, "Error estimates for the numerical identification of variable coefficient", *Math. Comp.* vol. 40, pp. 537-546, 1983.
- [16] K. H. Hoffman, J. Sprekels, "On the identification of elliptic problems by asymptotic regularization ", *Num. Funct. Anal. and Optim.*, vol. 7, pp. 157-177, 1984.
- [17] M. Idrissi, A. Soulaïmani, "Identification of the friction coefficient in shallow water flows using optimal control", *Proceedings of the international conference on finite elements in fluids - New trends and applications*, Venezia, Italy, pp. 1471-1475, October 1995.
- [18] Y. Jarny, M. N. Ozisik, J.P Bardon, "A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction", *Int. Jour. Heat Mass Transfer*, 34, 11, pp. 2911-2919, 1991
- [19] N. Kaneko, T. Kodama, M. Kawahara, "Estimation of eddy viscosity coefficient in a periodic shallow water equation," *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, 112, pp.165-183, 1994.
- [20] R. V. Kohn, B. D. Lowe, "A variational method for parameter identification", *RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 22,1, pp. 119-158, 1988.
- [21] C. Kravaris , J.H Seinfeld, "Identification of parameters in distributed parameter systems by regularisation", *Siam J. Control and optimization*, vol.23, 2, pp. 217-241, 1985.
- [22] J.L Lions, "Optimal control of systems governed by partial differential equations," Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [23] J.L Lions, "Some aspects of modeling problems in distributed parameter systems," in *Proc. IFIP Working conference*, Rome 1976, A. Ruberti ed, lecture

note in control and Information sciences, Vol 1, Springer-Verlag, Berlin, pp. 11-41, 1978

[24] J. Peraire, O.C. Zienkiewicz, K. Morgan, "Shallow water problems : A general explicit formulation", Int. Jour. for Num. Meth. in Eng. vol.22, pp. 547-574, 1986.

[25] G. R. Richter, "An inverse problem for the steady state diffusion equation", Siam J. Appl. Math. vol. 41, pp, 210-221, 1981.

[26] G. R. Richter, "Numerical identification of a spatially varying diffusion coefficient", Math. Comp., vol. 36, pp. 375-386, 1981.

[27] Y. Saad, M.H. Shultz, "GMRES a Generalized Minimal Residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", Siam J. Sci. Statist. Comput. 7, pp. 856-869, 1986.

[28] A. Soulaïmani, Y. Saad, "A robust finite element method for three dimensional free surface flows", to appear in Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.

[29] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, "Solution of ill-posed Problem", Winston, Washington, DC, 1977.

Article soumis le 30 janvier 1996  
Version révisée le 25 septembre 1997