
Application de la méthode de réanalyse aux assemblages collés

Mohammed Cheikh — Alexandre Loredo
Shahram Aivazzedeh

*Laboratoire de Recherche en mécanique des Transports
Institut Supérieure de l'Automobile et des Transports
49, rue M^{re} Bourgeois
58000 Nevers*

RÉSUMÉ. Nous présentons une méthode de réanalyse permettant de réduire la durée de calculs répétitifs. Une comparaison avec la durée d'une analyse complète par éléments finis sera donnée. Cette méthode permet d'imposer la condition de continuité du vecteur contrainte aux interfaces des structures hétérogènes. Nous appliquons la méthode au calcul des joints collés avec réanalyse sur les conditions aux limites, ainsi que pour imposer la continuité du vecteur contrainte. Une comparaison avec le calcul des joints collés par éléments finis mixtes sera traitée.

ABSTRACT. This paper describes a reanalyse method which enables repetitive calculation times to be reduced. Comparison with complete analysis duration using the finite element method is given. In this method the conditions of stress continuity at the interface of heterogeneous structures were imposed. The results were compared with those calculated by the mixed finite element. Reanalysis was applied to the case of bonded joints.

*MOTS-CLÉS : réanalyse, inverse partielle, continuité des contraintes, joints collés.
KEYWORDS : reanalysis, partial inverse, stress continuity, bonded joint.*

1. Introduction

Les assemblages collés sont de plus en plus employés, tant pour les technologies avancées (telles que l'aéronautique, l'armement, l'électronique, l'automobile, ...), que dans les applications au quotidien. Leur intérêt croissant a poussé les mécaniciens et les spécialistes du calcul des structures à proposer un certain nombre de modèles pour l'analyse de leur comportement mécanique [Ada84]. Bien qu'apparaissant simple à première vue, le calcul d'un assemblage

collé est complexe et dès que l'on veut intégrer tous les paramètres, la solution analytique devient difficile, voire impossible à obtenir.

La méthode des éléments finis (MEF) représente un outil puissant pour l'étude du comportement mécanique des matériaux. Elle permet l'analyse des structures avec des géométries complexes et des conditions aux limites en déplacement et en chargement générales. Cependant, toute modification des conditions aux limites en déplacements — ce qui est nécessaire pour l'analyse et l'optimisation d'un joint collé — nécessite de reprendre le calcul dès le début, ce qui est coûteux du point de vue temps de calcul. Un deuxième problème se pose pour le calcul des structures hétérogènes en général et pour les joints collés en particulier : la MEF sous sa forme la plus répandue — formulation en déplacement — ne satisfait pas les conditions de continuité du vecteur contrainte aux interfaces. La discontinuité s'exprime d'autant plus fortement que les structures sont hétérogènes. Les assemblages collés constituent un cas extrême de ces structures. En effet, les caractéristiques mécaniques de la colle sont très différentes de celles des matériaux collés.

En se basant toujours sur la MEF, nous proposons une méthode permettant de réduire le temps des réanalyses avec modification des conditions aux limites. Cette méthode permet en même temps d'imposer la continuité du vecteur contrainte aux interfaces.

2. Présentation de la méthode de réanalyse

La matrice K de dimensions $(n \times n)$ du système :

$$Ku = f \quad (1)$$

régissant l'équilibre des structures élastiques discrétisées par éléments finis est singulière, semi-définie positive. On montre dans [Ver90] qu'un ensemble de solutions :

$$\{u\} = \{S_r^- f + R\omega \mid \omega \text{ arbitraire}\} \quad (2)$$

peut être obtenu sans connaître aucune condition aux limites au préalable. La matrice S_r^- est l'inverse partielle de K au sens de Moore-Penrose [Lor95, Che96]. R est une matrice de dimensions $(n \times r)$ dont les vecteurs colonnes forment une base du noyau de l'application linéaire associée à K . Les r colonnes de R sont les vecteurs décrivant les mouvements d'ensemble, vecteurs propres de K pour la valeur propre zéro. Ces vecteurs propres sont indépendants de la structure étudiée et parfaitement connus une fois défini le type du problème considéré : par exemple, pour un problème bidimensionnel, ils représentent des combinaisons linéairement indépendantes des deux translations parallèles aux axes des coordonnées du plan et la rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan. La matrice R est liée au vecteur force par l'équation d'équilibre statique $R^T f = 0$, soit :

$$R^T (f_d + f_r) = 0 \quad (3)$$

Avec f_d et f_r les vecteurs des forces données et des efforts de réaction.

Afin d'éviter le calcul de l'inverse partielle, on utilise [Che96] une pseudo-décomposition de Cholesky de la matrice S_r^- soit $S_r^- = B_r^- B_r^{-T}$; la solution générale devient :

$$u = B_r^- B_r^{-T} (f_d + f_r) + R\omega \quad (4)$$

Pour définir les r éléments du vecteur libre ω et obtenir une solution particulière de (4), on prend en considération les conditions cinématiques :

$$\delta = C u \quad (5)$$

et les forces de réaction induites par ces conditions cinématiques :

$$f_r = C^T \phi \quad (6)$$

Les éléments du vecteur δ sont les p déplacements imposés assurant le blocage isostatique de la structure (avec $p \geq r$); ϕ est un vecteur homogène à des forces inconnues. Après élimination, la relation (5) devient :

$$\delta = C B_r^- B_r^{-T} f_d + C B_r^- B_r^{-T} C^T \phi + C R \omega \quad (7)$$

Le système complet de l'équilibre devient, après élimination du vecteur f_r dans les relations (6) et (3) :

$$R^T f_d + R^T C^T \phi = 0 \quad (8)$$

Les relations (7) et (8) forment le système de réanalyse, dont les inconnues sont ω et ϕ ; soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} E E^T & C R \\ (C R)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta - E g \\ -R^T f_d \end{bmatrix} \quad (9)$$

Avec $E = C B_r^-$ et $g = B_r^{-T} f_d$. La taille ($p + r$) du système (9) est en général très inférieure à la taille n du système (1). Les paramètres ϕ et ω connus, il est possible de calculer la solution u selon (6) et (4). Pratiquement, on ne calcule jamais la matrice B_r^- et toute modification des conditions cinématiques sera prise en compte en calculant E par simple substitution dans le système à matrice triangulaire :

$$B_p E^T = C^T \quad (10)$$

et en reformulant le système de réanalyse (9). La matrice B_p est la matrice triangulaire obtenue par décomposition de Cholesky de K et régularisée en annulant les éléments des lignes correspondant à des pivots nuls, (voir en annexe la décomposition de B_p). Les nouvelles colonnes du bloc E^T correspondant aux nouvelles conditions de chaque réanalyse seront sauvegardées. Si pendant une réanalyse ultérieure on utilise les mêmes conditions, il n'est plus nécessaire de calculer ces colonnes.

3. Coût du calcul par la méthode de réanalyse, application aux joints collés

Afin d'avoir une idée sur l'efficacité et le gain en temps de calcul de la méthode, nous donnons le nombre d'opérations utilisées par cette méthode en comparaison avec celui d'un calcul par la MEF.

En négligeant le calcul des rigidités élémentaires et l'assemblage de K , l'essentiel des opérations utilisées par la MEF est consacré à la factorisation et la résolution du système triangulaire. Soit pour la factorisation, en supposant que la demi-largeur de bande b est très inférieure à n :

$$N_{mf} = nb^2/2 \quad (11)$$

Pour la méthode de réanalyse, le temps de calcul est consacré spécialement à la résolution du système (10), au calcul de la sous matrice EE^T et du vecteur g , soit :

$$N_{mr} = n(bp + p^2 + b) \quad (12)$$

Vu que $r \leq 6$ et $(p + r) \ll n$, le temps de la factorisation et de la résolution du système de réanalyse est négligé ainsi que le calcul des blocs CR , $R\omega$ et le second membre du système de réanalyse (9). Le calcul de la solution (4) est équivalent à la résolution du système triangulaire de la MEF.

Nous définissons un coefficient ∂ donnant la différence relative entre les durées des calculs des deux méthodes et par la suite le gain en temps de calcul de la méthode de réanalyse :

$$\partial = \frac{b^2 - 2p^2 - 2bp - 2b}{b^2 + 4b} \quad (13)$$

Nous remarquons que le gain ∂ ne dépend pas — du moins en première approximation — de la dimension du problème n . La figure (1) montre la variation de ∂ en fonction de b et p . Le gain devient positif dès que $b > (p + 1 + \sqrt{3p^2 + 2p + 1})$; et en négligeant le calcul du vecteur g , il faut que $b > p(1 + \sqrt{3})$.

La méthode présente tout son intérêt pour les structures complexes à grande largeur de bande, mais à titre d'application nous traitons un exemple de joint collé. La figure (2) présente un joint collé à simple recouvrement, correspondant au modèle standard D 1002-72 de la norme ASTM¹. Le modèle est discrétisé en 1284 éléments 2D et 1147 nœuds (soit 2294 DDL) et une demi-largeur de bande $b = 29$ avec $p = 14$ conditions cinématiques.

Pour une première analyse, l'avantage est donné à la MEF, par contre pour les réanalyses suivantes trois cas se présentent :

1. Pour des réanalyses avec modification du chargement (sur la zone de recouvrement par exemple), la matrice du système de réanalyse (9) ne

1. American Society for Testing and Materials

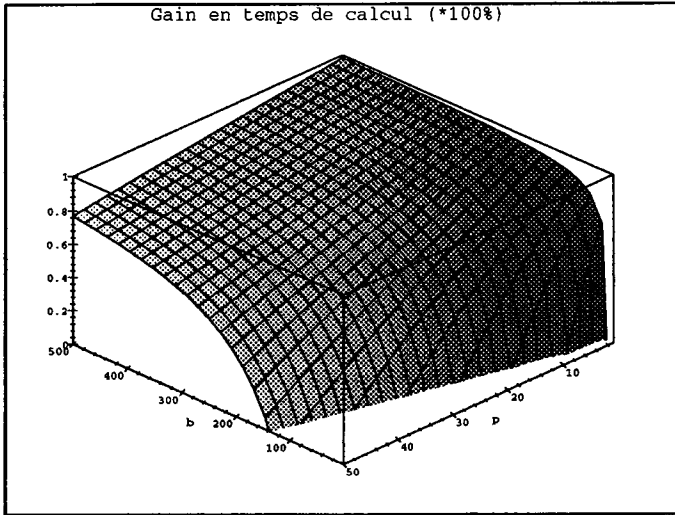


Figure 1. Gain en temps de calcul de la méthode de réanalyse par rapport à la MEF

change pas ; la solution est obtenue par résolution d'un système triangulisé, ce qui est équivalent pour les 2 méthodes.

2. Pour une réanalyse i avec modification des conditions cinématiques, le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution du système (10) et le calcul du bloc EE^T est de $n(bp_i + p_i^2)$. Avec $p_i = p - p_s$ et p_s le nombre des conditions déjà calculées dans les étapes précédentes et sauvegardées. Pour notre exemple, si on veut faire une réanalyse pour simuler un essai de flexion en changeant les conditions cinématiques de traction suivant l'axe x (les conditions du côté gauche sur la figure (2) par des conditions de flexion suivant l'axe y , il n'est plus nécessaire de calculer les colonnes de E correspondant aux conditions limites d'encastrement (les conditions du côté droit sur la figure (2)). Le temps de réanalyse sera consacré au calcul des colonnes de E et EE^T correspondant aux conditions de flexion (5 conditions pour notre cas).

Pour cette simulation le gain ∂ de la réanalyse est de 46 %.

3. Pour des réanalyses avec modification de la valeur des conditions cinématiques sans modification de C . C'est par exemple le cas si on veut faire un essai de traction sur le joint avec une variation incrémentale du déplacement. Puisque C ne change pas, il n'est pas nécessaire de calculer E

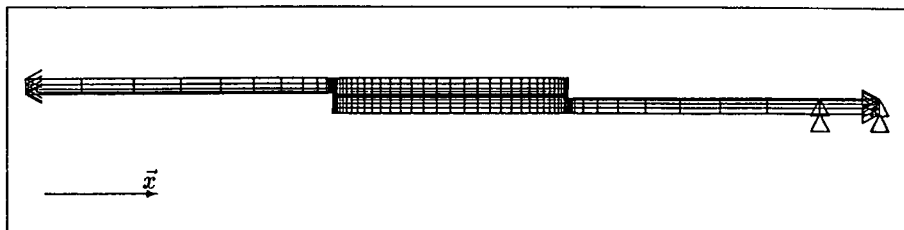


Figure 2. Exemple de joint à simple recouvrement

et EE^T . La matrice du système (9) ne change pas et le temps de calcul sera consacré à la solution du système (4), soit la résolution d'un système triangularisé.

Pour notre exemple le gain en temps de calcul s'approche de 87 %.

4. Continuité des contraintes aux interfaces

4.1. Relations de continuité à travers une interface cohérente

La parfaite cohésion d'une interface séparant deux matériaux est traduite par la cohésion géométrique entre les deux matériaux. Cette cohésion s'exprime par une continuité des déplacements :

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad (14)$$

Le deuxième aspect de la cohésion est l'équilibre mécanique de la matière de part et d'autre de l'interface. Cet équilibre se traduit par la continuité du vecteur contrainte (figure 3) :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (15)$$

4.2. La continuité des contraintes par la formulation mixte

La méthode des éléments finis classique, basée sur le principe variationnel du minimum de l'énergie potentielle et dont la variable unique est le champ des déplacements, permet de satisfaire la condition (14). Afin de satisfaire les deux conditions (14) et (15), il faut que le principe variationnel soit multi-champs et mixte, permettant d'employer simultanément les variables statiques et cinématiques.

Parmi les méthodes variationnelles mixtes, c'est le principe variationnel de Reissner (1950) qui a sans doute suscité le plus d'intérêt dans la formulation des éléments mixtes. La densité du potentiel introduite par Reissner s'écrit :

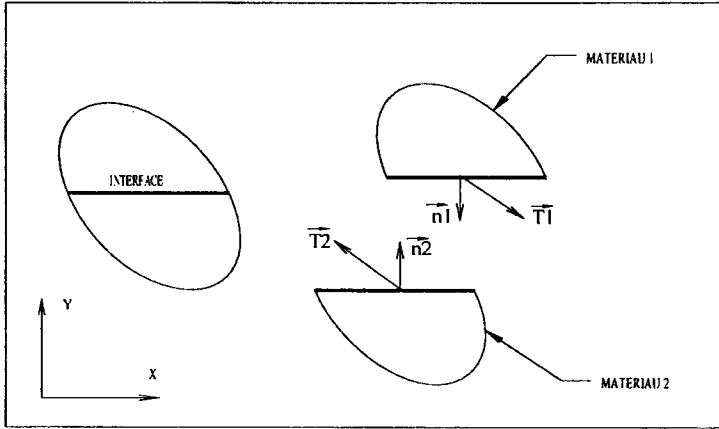


Figure 3. Vecteur contrainte à l'interface entre deux matériaux

$$\mathbf{R} = \sigma_{ij} u_{i,j} - 1/2 S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Avec S_{ijkl} les éléments de la matrice de souplesse et σ_{ij} les éléments du tenseur des contraintes. Le principe de Reissner s'énonce ainsi : La fonctionnelle \mathbf{R} est stationnaire pour les champs (u_i, σ_{ij}) réalisant l'équilibre (figure 4), soit $\delta \mathbf{R} = 0$:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}(u_i, \sigma_{ij}) &= \int_v \{ \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i \} \delta u_i dv \\ &+ \int_v \{ \varepsilon_{ij} - S_{ijkl} \sigma_{ij} \} \delta \sigma_{ij} dv \\ &+ \int_{s_u} \{ u_i - \bar{u}_i \} \delta \sigma_{ij} n_j ds_u \\ &+ \int_{s_\sigma} \{ \sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i \} \delta u_i ds_\sigma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

En supposant que u_i et σ_{ij} sont des variables indépendantes, on trouve :

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (\text{l'équation d'équilibre}) \quad (18)$$

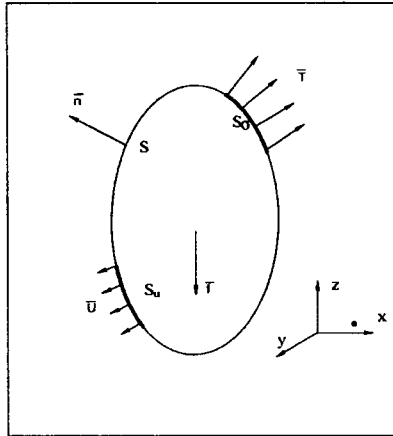


Figure 4. Conditions limites sur un volume v

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (\text{la loi du comportement}) \quad (19)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{les conditions cinématiques}) \quad (20)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{T}_i \quad (\text{les conditions statiques en contraintes}) \quad (21)$$

La fonctionnelle sous cette forme est peu utilisée pour la formulation des éléments finis pour les deux raisons suivantes :

- le nombre des inconnues est très important vu l'utilisation de la loi de comportement ainsi que l'équation d'équilibre pour la formulation des éléments ;
- tous les éléments du tenseur des contraintes sont des variables nodales d'où continuité trop forte au niveau des interfaces.

Afin de réduire le nombre des variables nodales, les éléments finis développés à partir de cette fonctionnelle sont formulés avec des procédés d'éliminations et de relocalisation des variables nodales en contraintes [Aiv85].

Un autre inconvénient d'ordre pratique pour les éléments finis développés à partir de cette méthode : les matrices de rigidité ne sont ni définie-positives ni définie-négatives. La résolution doit se faire avec un algorithme de Gauss avec recherche de pivot non nul, ce qui est peu pratique pour les matrices à structure bande, et extrêmement coûteux en règle générale.

4.3. La continuité du vecteur contrainte par la formulation réanalyse

Basée sur la MEF en déplacements, la méthode de réanalyse satisfait automatiquement la condition (14). Afin d'exprimer l'équilibre de la matière de part et d'autre de l'interface, nous utilisons le vecteur contrainte résultant appliqué au milieu du segment de l'interface (ou au centre géométrique de la face pour les éléments 3D) comme le montre la figure (5).

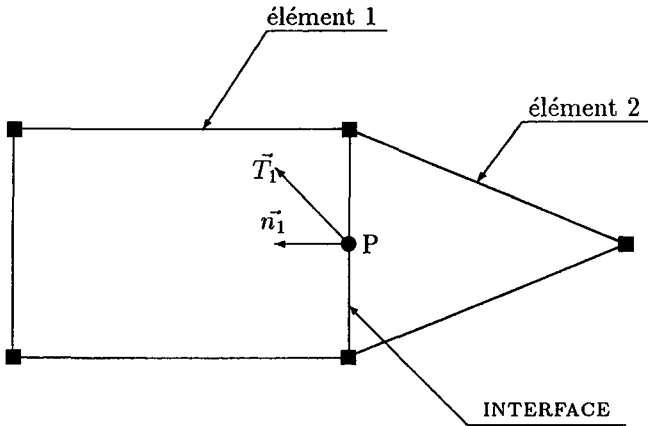


Figure 5. Vecteur contrainte sur une interface entre deux éléments avec matériaux différents

Le vecteur contrainte appliqué sur l'élément 1 s'exprime par : $T_1 = N_1 \sigma_1$. Avec σ_1 les éléments du tenseur des contraintes exprimés sous forme vectorielle. La matrice N_1 est définie à partir des composantes du vecteur \vec{n}_1 normale à l'interface, soit pour le cas 2D :

$$N_1 = \begin{bmatrix} n_{1x} & 0 & n_{1y} \\ 0 & n_{1y} & n_{1x} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Le vecteur des contraintes est défini par la loi de comportement :

$$\sigma_1 = D_1 \varepsilon_1 \quad (23)$$

La matrice D_1 est la matrice des caractéristiques mécaniques et ε_1 les éléments du tenseur des déformations exprimés sous forme vectorielle. Le vecteur ε_1 est lié au vecteur déplacements par : $\varepsilon_1 = B_1 u_1$. Avec B_1 la matrice de dérivation calculé au point P centre géométrique de l'interface. Le vecteur contrainte devient :

$$T_1 = N_1 D_1 B_1 u_1 \quad (24)$$

Afin d'exprimer la condition de continuité des contraintes à l'échelle globale nous utilisons des matrices de localisation L_1 et L_2 , tel que, $u_1 = L_1 u$ et $u_2 = L_2 u$. La condition (15) de continuité du vecteur contrainte à travers l'interface devient :

$$[L_1 N_1 D_1 B_1 + L_2 N_2 D_2 B_2] u = 0 \quad (25)$$

qui peut s'exprimer sous la forme :

$$C_c u = 0 \quad (26)$$

Le nouveau système de réanalyse comprendra, en plus des équations (3),(4) et (5), l'équation (26). Le système (10) devient alors $E'^T = B_0 C'^T$, avec C' constituée comme suit :

$$C' = \begin{bmatrix} C \\ C_c \end{bmatrix} \quad (27)$$

En prenant en considération la condition (26), nous remarquons une similitude entre la formulation réanalyse et la formulation mixte, néanmoins l'approche n'est pas la même pour satisfaire toutes les conditions. La loi de comportement (19) est équivalente au système (1). Les deux conditions sont formulées à l'échelle élémentaire. L'équation d'équilibre (18) formulée à l'échelle élémentaire correspond à l'équation d'équilibre (3) formulée à l'échelle globale pour la méthode de réanalyse. La condition en contrainte (21) correspond à l'équation (26), et les conditions cinématiques (20) et (5) sont identiques pour les deux méthodes.

Le système de réanalyse est mixte, car formé par des conditions en déplacement et des conditions en force. De la même façon que la matrice de rigidité-souplesse de la formulation mixte, la matrice du système de réanalyse n'est ni définie-positive, ni définie-négative. Cependant, la recherche de pivot non nul pendant la résolution de Gauss ne pose aucun problème car $(p+r) \ll n$ et la matrice n'est pas à caractère bande ; et ceci à l'inverse de la formulation mixte.

Les conditions (26) sont d'ordre général, on peut imposer toutes sortes de conditions portant sur les contraintes en les traitant de la même façon que la continuité présentée ci-dessus.

5. Application aux assemblages collés

A titre d'application, nous traitons un exemple de joint collé à simple recouvrement présenté sur les figures (6-8). Le maillage est identique à celui de la figure (2). Les adhérents ont été découpés à partir d'une plaque stratifiée à comportement mécanique isotrope transverse. Les caractéristiques géométriques et mécaniques des adhérents et de l'adhésif sont présentées sur le tableau (1)

Le calcul est effectué par un logiciel développé à partir de la formulation réanalyse. Nous étudions spécialement les contraintes de cisaillement et de décollement au milieu de l'adhésif et à l'interface de celui-ci avec les adhérents.

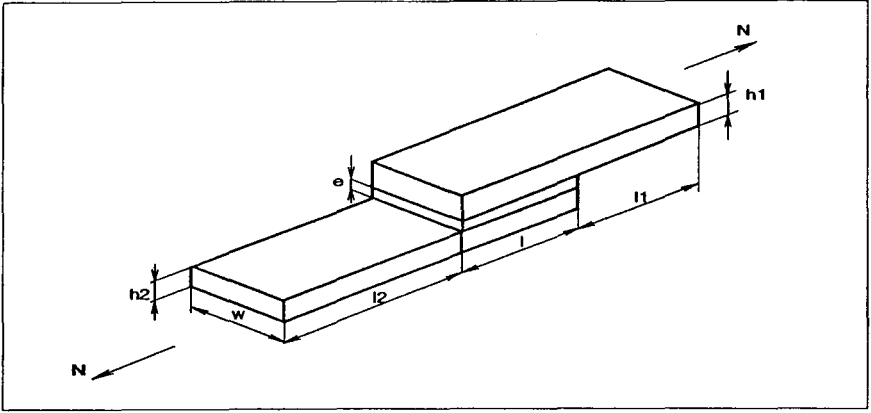


Figure 6. Géométrie du joint collé à simple recouvrement

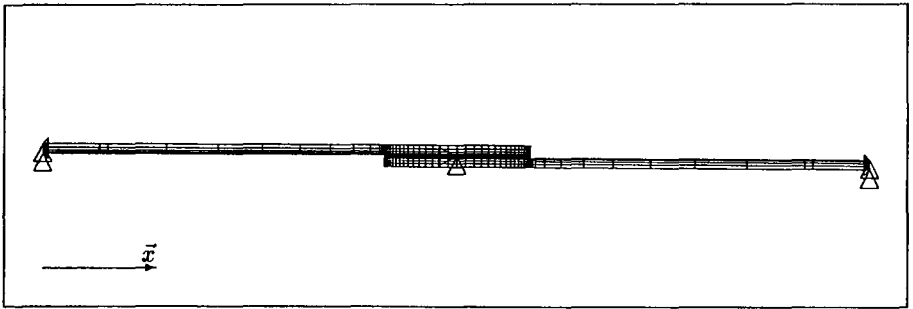


Figure 7. Maillage et conditions aux limites du joint

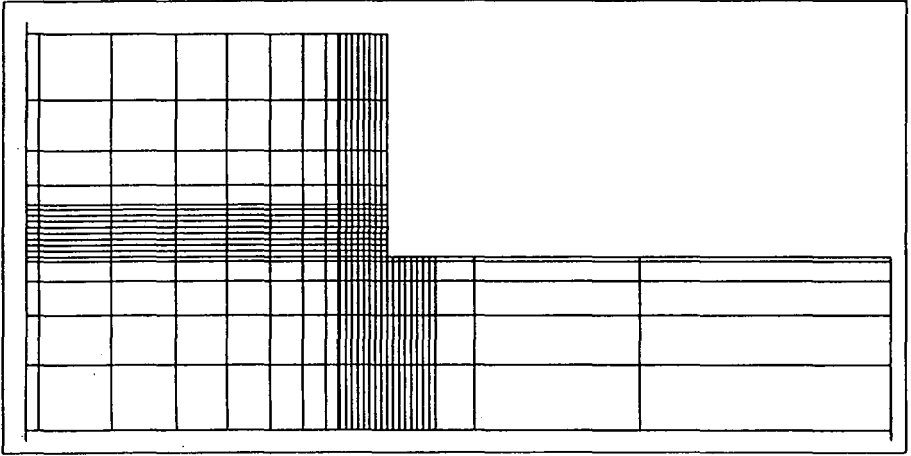


Figure 8. *Détail du maillage du côté droit de la zone du recouvrement*

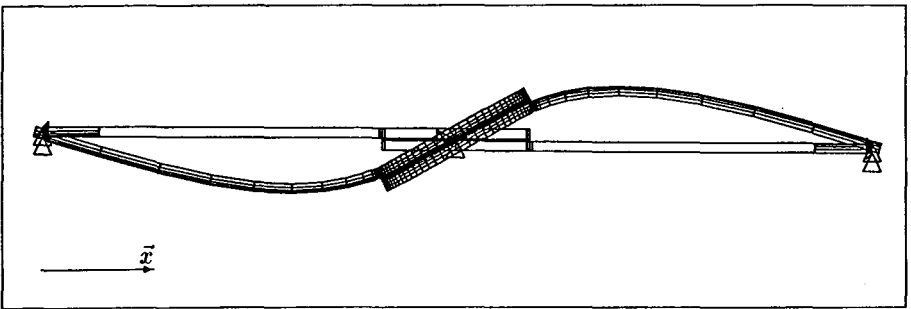


Figure 9. *Déformée du joint après sollicitation*

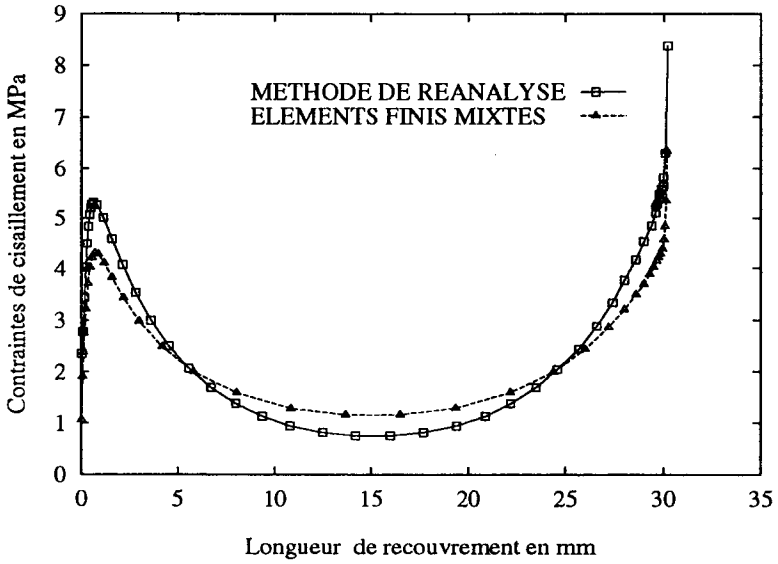


Figure 10. Contraintes de cisaillement à l'interface inférieure du joint

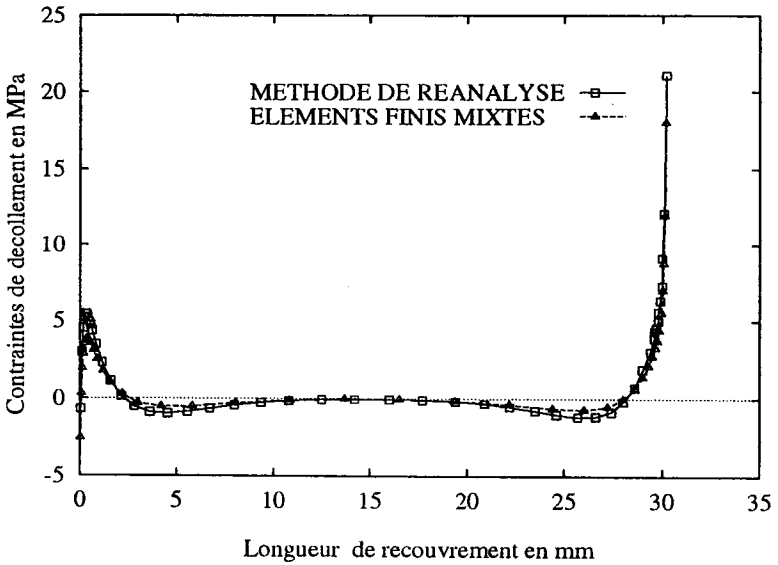


Figure 11. Contraintes de décollement à l'interface inférieure du joint

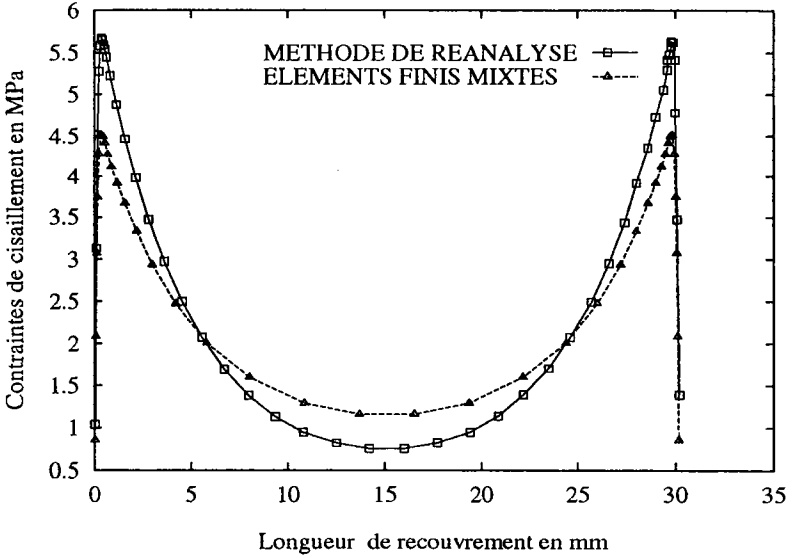


Figure 12. *Contraintes de cisaillement au milieu du joint*

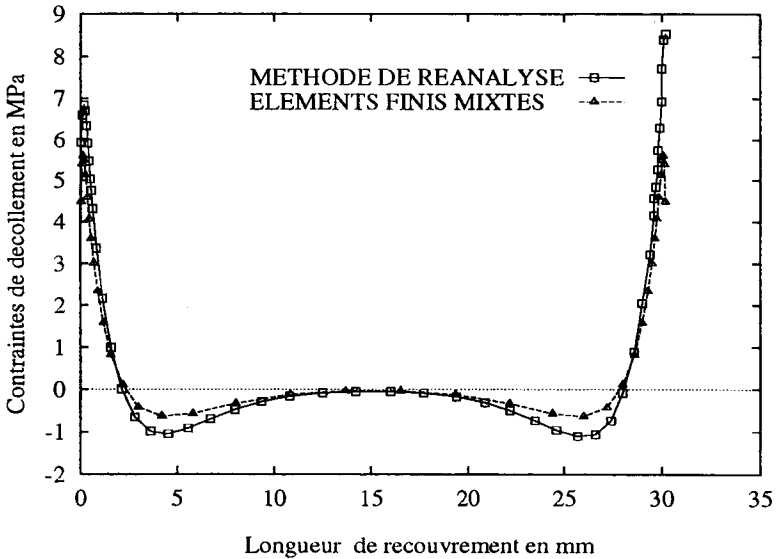


Figure 13. *Contraintes de décollement au milieu du joint*

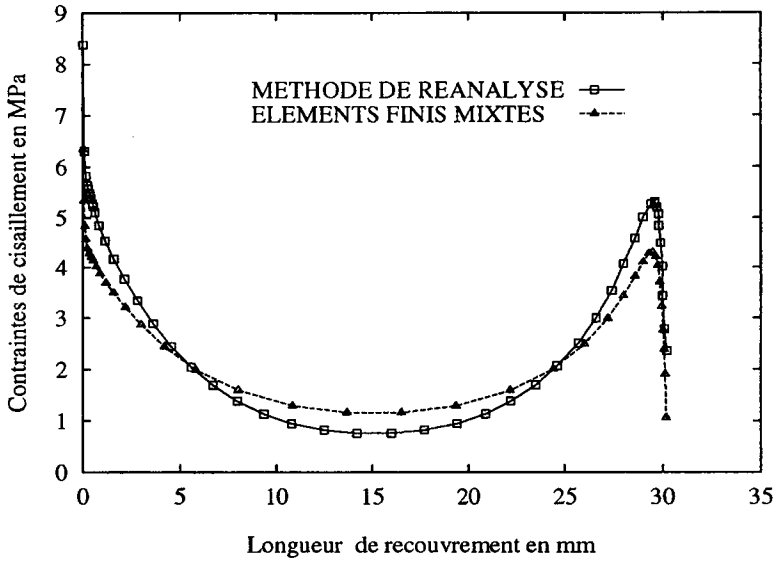


Figure 14. Contraintes de cisaillement à l'interface supérieure du joint

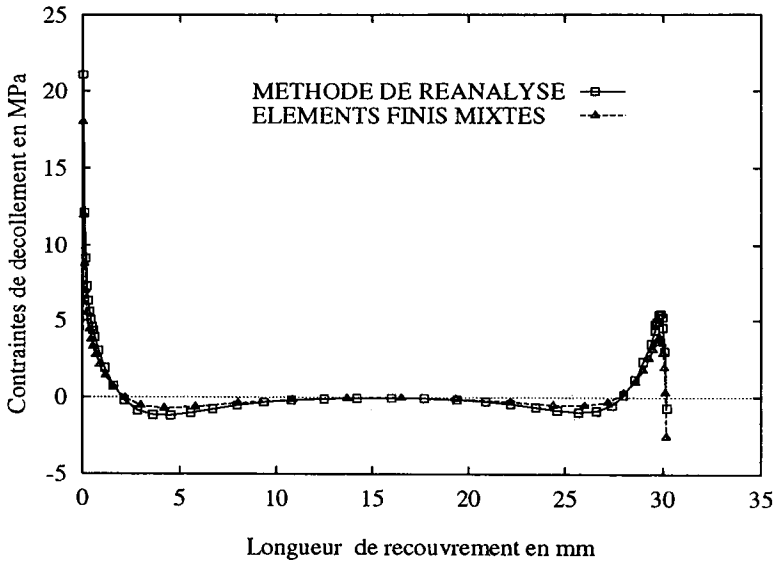


Figure 15. Contraintes de décollement à l'interface supérieure du joint

paramètres	symboles	valeur
Longueur de recouvrement	l	30.2 mm
Longueur des substrats hors du recouvrement	$l_1 = l_2$	112 mm
Epaisseur des substrats	$h_1 = h_2$	2 mm
Largeur des substrats	w	24.5 mm
Epaisseur du joint	e	0.55 mm
Chargement	N	1500N
Module d'Young longitudinal des substrats	E_{11}	95000 MPa
Module d'Young transverse des substrats	E_{22}	9700 MPa
Module de cisaillement des substrats	G_{12}	4850 MPa
Coefficient de Poisson des substrats	ν_{12}	0.339
Module d'Young de l'adhésif	E	1200 Mpa
Coefficient de Poisson de l'adhésif	ν	0.33

Tableau 1. *Caractéristiques géométriques et mécaniques du joint collé*

Les résultats sont comparés à ceux obtenus à l'aide d'un logiciel spécialisé "JOINT DESIGN" ([Est95]) développé à partir des éléments finis mixtes.

Le logiciel de réanalyse utilise des éléments finis en déplacements à 4 nœuds et interpolation bilinéaire. Le champ de contrainte obtenu par dérivation ultérieure est par la suite linéaire. Le logiciel JOINT DESIGN utilise des éléments finis mixtes à interpolation bilinéaire pour les champs des déplacements et des contraintes. Afin de rattraper l'ordre de précision du champ des contraintes de JOINT DESIGN nous raffinons le maillage utilisé par le logiciel de réanalyse dans les zones à fort gradient de contraintes. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures (10-15). La première remarque tirée de ces résultats est la concordance globale entre les deux calculs. Les 2 méthodes sont en accord quant à la variation du champ des contraintes le long de l'épaisseur de l'adhésif. On note une très bonne concordance en dehors des extrémités gauche et droite des interfaces supérieure et inférieure, zones de singularités des contraintes dues à la présence de la variation brusque de géométrie. On observe une faiblesse des contraintes de cisaillement sur les surfaces latérales — qui s'approchent de zéro pour le milieu de l'adhésif — car ces surfaces sont libres.

6. Conclusion, perspectives

L'intérêt essentiel de la méthode est de faciliter les réanalyses d'une structure sous des conditions aux limites variables avec réduction du temps de calcul. Les applications possibles de cette méthode pour le calcul des structures en général et les joints collés en particulier sont nombreuses. Elle peut constituer un outil de grande valeur pour l'aide à la conception. Elle peut avantageusement simplifier les analyses itératives pour les résolutions non linéaires. C'est le cas pour l'étude du comportement des matériaux avec pilotage en déplacements.

Comme le montrent les figures (10-15), même si les sollicitations sont faibles, des concentrations de contraintes apparaissent au niveau de la zone de recouvrement. Le joint collé peut passer facilement en plasticité dans ces zones. Une étude complète d'un joint doit être faite avec un comportement élastoplastique. Ce qui est à la portée de cette méthode en intégrant la réanalyse de rigidité comme on le montre dans [Che96]. D'autres travaux sont en cours pour appliquer la méthode à l'étude de la fissuration et la rupture des joints collés.

7. Bibliographie

- [Aiv85] S. Aivazzadeh, E. Ramahefarison, and G. Verchery. Composite structure analysis with micro-computers using classical and interface finite elements. *Computer and Mathematics with Applications.*, 11:1023-1042, 1985.
- [Ada84] Robert D. Adams and William C. Wake. *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Elsevier Applied Science, New York, 1984.
- [Che96] M. Cheikh and A. Loredo. Réanalyse de l'équilibre des structures par inverse partielle de Moore-Penrose. *C.R. Acad. Sci.*, 323(série IIb):83-86, 1996.
- [Est95] J. L. Esteves. JOINT DESIGN: Programme d'aide à la conception des assemblages collés utilisant les éléments finis mixtes d'interfaces. Thèse d'université, Université de Bourgogne, 1995.
- [Lor95] A. Loredo. Calcul numérique de la quasi-inverse d'une matrice réelle symétrique semi-définie positive. *C.R. Acad. Sci.*, 321(série I):247-252, 1995.
- [Ver90] G. Verchery. Régularisation du système de l'équilibre des structures élastiques discrètes. *C.R. Acad. Sci.*, 311(série II):585-589, 1990.

A. Annexe

A.1. Notion d'inverse généralisée de Moore-Penrose

Penrose définit l'inverse généralisée d'une matrice arbitraire K à éléments complexes par une matrice unique K^\dagger vérifiant les 4 conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad K^\dagger K K^\dagger = K^\dagger \\ \text{(ii)} \quad K K^\dagger K = K \\ \text{(iii)} \quad (K^\dagger K)^T = K^\dagger K \\ \text{(iv)} \quad (K K^\dagger)^T = K K^\dagger \end{array} \right. \quad (28)$$

L'inverse généralisée permet de donner un ensemble de solutions du type (2) à l'équation fondamentale (1).

En fonction de l'utilisation de l'inverse généralisée et afin de surmonter la difficulté de son calcul, on définit des inverses partielles vérifiant certaines propriétés de l'inverse généralisée :

1. L'inverse réflexive S_r^- vérifiant les 2 premières conditions (i,ii) et permettant d'obtenir l'ensemble de solutions (2)
2. L'inverse S_m^- vérifiant les conditions (i,iv) et donnant la solution de norme minimale
3. L'inverse S_l^- vérifiant les conditions (i,iii) et donnant la solution au sens des moindres carrés.

A.2. Inverse partielle de la matrice de rigidité

La matrice K peut être décomposée sous la forme :

$$K = P \begin{bmatrix} K_0 & K_c \\ K_c^T & K_r \end{bmatrix} Q \quad (29)$$

Avec P et Q des matrices unitaires de permutation et K_0 une matrice régulière de dimensions $((n - r) \times (n - r))$. Cette décomposition ne dépend d'aucune condition aux limites et apparaît naturellement suite à une décomposition de Cholesky par exemple. Le bloc $\begin{bmatrix} K_c^T & K_r \end{bmatrix}$ s'exprime linéairement avec le bloc $\begin{bmatrix} K_0 & K_c \end{bmatrix}$ et $\text{rang}(K) = \text{rang}(K_0) = n - r$. Ce qui permet de définir une inverse réflexive de K :

$$S_r^- = P \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q \quad (30)$$

La matrice S_0 est l'inverse régulière de K_0 et S_r^- vérifie les conditions (i,ii) soit :

$$KS_r^-K = K \text{ et } S_r^-KS_r^- = S_r^-$$

et donne l'ensemble de solutions (2).

A.3. Décomposition de la solution générale

Étant donné que la matrice K_0 est symétrique définie positive, on utilise une décomposition de Cholesky $K_0 = B_0B_0^T$ et $S_r^- = B_r^-B_r^{-T}$. La solution générale prend la forme (4). La matrice triangulaire B_r^- est définie à partir de B_0^{-1} comme S_r^- l'est à partir de S_0 soit :

$$B_r^- = P \begin{bmatrix} B_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q \quad (31)$$

La matrice triangulaire B_p utilisée dans le système (10) est définie par :

$$B_p = \begin{bmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Les matrices de permutation sont présentées pour la clarté de l'exposé. Numériquement, les formes partitionnées de K sont obtenues par un échange adéquat des lignes et des colonnes. La matrice B_p est obtenue par décomposition de Cholesky de la matrice K en remplaçant les éléments de B_p correspondant à des pivots nuls par des éléments nuls.