
Conception optimale des pièces mécaniques modélisées par des coques minces

Mohamed Beldi ^{*,**} — Catherine Knopf-Lenoir ^{*}

** Université de Technologie de Compiègne
LG2mS, UPRESA6066 du CNRS, BP 20529
F-60205 Compiègne cedex*

*** France Acoustique
11, rue du 8 Mai 1945
F-60350 Berneuil*

RÉSUMÉ. Le but de ce papier est de décrire une méthode numérique pour la résolution de certains problèmes d'optimisation des coques minces. Les résultats d'analyse de sensibilité sont présentés dans le cas discret où la variable de contrôle est l'épaisseur de la structure. Des expériences numériques sont étudiées pour un carter de servo-actionneur de commande de gouverne d'engin aéronautique.

ABSTRACT. This paper is concerned with a numerical method to solve some thin shell optimization problems. The functions to minimize or to limit are the mass and the Von Mises stress. Sensitivity analysis is developed in the discrete case. Numerical results are presented for an aeronautic piece (gear case) of complex shape.

MOTS-CLÉS : méthode élément fini, coque mince, analyse de sensibilité, optimisation d'épaisseur, minimisation de masse, minimisation des contraintes de Von Mises.

KEY WORDS : finite element method, thin shell, sensitivity analysis, thickness optimization, mass minimization, Von Mises stress minimization.

1. Introduction

L'optimisation des structures est une tendance naturelle de l'ingénieur concepteur, puisqu'après avoir construit une pièce, il s'efforce constamment d'en améliorer la tenue mécanique et ceci au moindre coût, ce dernier étant souvent proportionnel au poids de la structure. Nous étudions dans ce travail deux problèmes (P) et (Q)

d'optimisation d'épaisseur des pièces mécaniques modélisées par des coques minces. Le problème (P) est celui de la minimisation de la masse tout en limitant la contrainte élastique de Von Mises, tandis que le problème (Q) est celui de la minimisation des contraintes élastiques à masse fixée.

Ce type de problème a fait l'objet de nombreuses études théoriques et numériques, mais on trouve dans la littérature très peu d'applications industrielles, ce qui constitue un des objectifs de ce travail. Les aspects théoriques relatifs à l'optimisation des coques concernent plutôt l'optimisation de forme, et non le dimensionnement: les problèmes d'existence de solution et le calcul des sensibilités sont exposés par exemple dans [HAU 80] [CHE 87] [ROU 87] [BER 91].

En ce qui concerne l'optimisation d'épaisseur de plaques ou coques, des résultats analytiques et numériques basés sur une approche par critères d'optimalité peuvent être trouvés dès les années 70 ([MRO 72], [ARM 78], [BAN 81]), mais les applications numériques sont en grande partie liées aux concepts d'approximation introduits par Schmit [SCH 74] , puis généralisés et associés au traitement du problème d'optimisation par les méthodes duales [FLE 78] [FLE 83]; plus récemment, des approximations particulièrement adaptées au cas des plaques et des coques ont été présentées dans [VAN 93] [ZHO 96].

Dans la plupart de ces travaux, les approches présentées sont validées sur des exemples académiques; des applications à caractère industriel, principalement issues du domaine aéronautique peuvent être trouvées dans [HAF 80], [PET 82], [ESP 85], [BRA 86].

L'approche que nous avons retenue pour l'étude des problèmes (P) et (Q) est essentiellement basée sur la méthodologie du contrôle optimal [LIO 68] où l'équation d'équilibre de la structure est l'équation d'état du système et la variable épaisseur est le contrôle du problème d'optimisation. Les problèmes (P) et (Q) faisant partie de la programmation non linéaire, leurs résolutions nécessitent des méthodes itératives de types gradient. Le calcul des dérivées des fonctions coûts et des contraintes d'optimisation par rapport au contrôle s'avère donc nécessaire. Cette étape essentielle dans l'optimisation structurale constitue l'analyse de sensibilité. Par application du principe des travaux virtuels et dans le cas discret, nous montrons que la variation du champ des déplacements d'une coque mince due à une perturbation de l'épaisseur vérifie un système d'équations linéaires. Cet important résultat permet d'établir les gradients des fonctionnelles des déplacements ou des contraintes élastiques. La technique proposée ainsi que l'application à des pièces mécaniques industrielles de géométrie complexe constituent les particularités de ce travail. Notons que dans [BEL 88], nous avons étudié dans le cas continu l'existence d'une épaisseur optimale dans un espace adéquat ainsi que la Fréchet-différentiabilité des fonctionnelles de l'épaisseur de type déplacement ou contrainte élastique.

2. Formulation des problèmes d'optimisation (P) et (Q)

2.1. Approximation géométrique de la structure

On considère une coque mince élastique et isotrope occupant un domaine $\Omega(e)$ de l'espace affine \mathfrak{R}^3 muni d'un système d'axes orthonormés (O, X_1, X_2, X_3) . On suppose que la surface ω est composée de facettes planes triangulaires notées T_i :

$$\omega = \bigcup_{i=1}^N T_i$$

Le paramètre e est l'épaisseur variable de la coque mesurée sur la normale à chaque élément (N est le nombre total d'éléments). La fonction e est donc définie par :

$$e: \omega = \bigcup_{i=1}^N T_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow e(x)$$

où $e(x)$ est supposée faible devant les deux autres dimensions (hypothèse des coques minces).

Par la suite la coque est définie par :

$$\Omega(e) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) / x = (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } \frac{-1}{2} e(x) \leq x_3 \leq \frac{1}{2} e(x) \right\}$$

On suppose ici que la surface moyenne ω est fixée et que l'épaisseur de matière autour de ω peut varier, c'est-à-dire la fonction e .

2.2. Espace de contrôle

A chaque élément T_i , on associe un repère local dans lequel l'épaisseur $e(x_1, x_2)$ est supposée constante et égale à e_i :

$$e_i = \int_{T_i} e(x) dx$$

Pour traduire l'hypothèse de coque mince et les contraintes technologiques de fabrication, il est nécessaire de supposer que :

$$0 < e_{\min} \leq e_i \leq e_{\max}$$

où e_{\min} et e_{\max} sont deux constantes données.

L'espace de contrôle E_c est défini alors par :

$$E_c = \left\{ e / e \in C, 0 < e_{\min} \leq e(x) \leq e_{\max}, x \in \omega \right\}$$

où C est l'ensemble des fonctions constantes sur chaque élément T_i . L'ensemble $(\chi_i)_{i=1}^N$ des fonctions caractéristiques de ces éléments forme une base de C .

$$\forall e \in C, e = \sum_{i=1}^N e_i \chi_i$$

On note par $e = (e_1, e_2, \dots, e_N)$, le vecteur épaisseur de la coque.

2.3. Equation d'état-discrète

L'élément fini retenu pour l'analyse linéaire de la coque est l'élément triangulaire plan COQ à 18 degrés de liberté, soient trois déplacements u, v, w et trois rotations $\theta_{x_1}, \theta_{x_2}, \theta_{x_3}$ aux trois nœuds. Il résulte de la superposition de l'élément triangulaire classique de membrane à déformation constante CST et de l'élément de flexion de plaque mince DKT [BAT 80] où l'effet de cisaillement est négligé.

Sans restreindre la généralité, nous supposons que la coque est soumise à un chargement indépendant de l'épaisseur et qu'elle est encastree sur Γ_0 , qui est une partie du bord $\partial\omega$ de ω . Nous montrons alors dans [BEL 88] que l'équation d'état discrète des coques minces à épaisseur variable e est donnée dans le repère global \mathcal{R}^3 par :

$$\begin{cases} [K(e, e^3)]\{U(e)\} = F \\ \{U(e)\} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad [1]$$

où

- $[K(e, e^3)]$ est la matrice de rigidité globale.
- $\{U(e)\}$ est le vecteur des déplacements nodaux de la structure.
- $\{F\}$ est le vecteur charge

Par la notation (e, e^3) , nous avons voulu faire apparaître la proportionnalité de la matrice de rigidité par rapport à e et e^3 .

2.4. Fonctionnelles discrètes de l'épaisseur associées aux problèmes (P) et (Q)

Les fonctionnelles de l'épaisseur e associées aux problèmes d'optimisation (P) et (Q) sont de deux types :

2.4.1. Fonctionnelle de masse

Elle est définie pour $e \in E_c$ par :

$$\begin{aligned} M(e) &= \sum_{i=1}^N \int_{T_i} \rho(x) e(x) dx \\ &= \{S\}' \{e\} \end{aligned} \quad [2]$$

où

$$\{S\}' = (\langle T_1 |, \langle T_2 |, \dots, \langle T_N |) \text{ , avec } |T_i| \text{ aire de } T_i$$

ρ est la densité surfacique du matériau.

2.4.2. Fonctionnelle des contraintes élastiques

Soit $[\sigma^D]$ le déviateur du tenseur des contraintes élastiques $[\sigma]$. En prenant la moyenne du second invariant de $[\sigma]$ sur la peau supérieure de la coque $x_3 = +\frac{e(x)}{2}$ et la peau inférieure $x_3 = -\frac{e(x)}{2}$, on définit la fonctionnelle élastique de Von Mises par :

$$J(e) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{1}{2} \left(Tr[\sigma^D \sigma^D] \Big|_{x_3 = +\frac{e(x)}{2}} + Tr[\sigma^D \sigma^D] \Big|_{x_3 = -\frac{e(x)}{2}} \right) dx$$

Pour faciliter la mise en œuvre numérique, nous écrivons $Tr[\sigma^D \sigma^D]$ sous forme matricielle [BEL 88] :

$$\forall (x, x_3) \in T_i \times \left[+\frac{e(x)}{2}, -\frac{e(x)}{2} \right], \text{ on a :}$$

$$\text{Tr}[\sigma^D \sigma^D] = \{U_n(e)\}' \left([B^m(x)]' [A^m] [B^m(x)] + x_3 ([B^m(x)]' [A^f] [B^f(x)] + [B^f(x)]' [A^f] [B^m(x)]) + x_3^2 [B^m(x)]' [A^f] [B^f(x)] \right) \{U_n(e)\}$$

où

- $[A^m]$, $[A^f]$, $[B^m]$, $[B^f]$ sont des matrices indépendantes de l'épaisseur.
- $\{U_n(e)\}$ est le vecteur élémentaire des déplacements nodaux.

Nous déduisons alors que J s'écrit :

$$J(e) = \frac{1}{2} \{U(e)\}' [K^\sigma(1, e^2)] \{U(e)\} \tag{3}$$

où

- $[K^\sigma(1, e^2)] = \sum_{i=1}^N [K_{T_i}^\sigma(1, e^2)]$
- $[K_{T_i}^\sigma(1, e)] = \int_{T_i} e(x) [B^m(x)]' [A^m] [B^m(x)] dx + \int_{T_i} e^2(x) [B^m(x)]' [A^f] [B^f(x)] dx$

On note $J_i(e)$ la contribution de l'élément i à la fonctionnelle $J(e)$:

$$J_i(e) = \frac{1}{2} \{U_n(e)\}' [K_{T_i}^\sigma(1, e^2)] \{U_n(e)\}$$

2.5. *Enoncés des problèmes d'optimisation (P) et (Q)*

Nous proposons de résoudre le problème suivant:

Trouver la loi d'épaisseur e^* qui rend une pièce mécanique la plus légère possible sans que le maximum de la contrainte de Von Mises ne dépasse la limite élastique.

Afin de rester dans le cadre différentiable, nous ne faisons pas intervenir la valeur maximale des contraintes, mais nous formulons ce problème par :

Problème (P)

$$\begin{aligned} \text{Min } & M(e) \\ \left\{ \begin{array}{l} e \in E_c \\ J_i(e) \leq |T_i| \sigma_0^2 \\ (i = 1, N) \end{array} \right. \end{aligned}$$

où σ_0 est la limite élastique du matériau.

Nous considérons également le problème suivant :

Sachant qu'une pièce mécanique de masse imposée est soumise à un chargement donné, trouver la loi d'épaisseur e^* qui minimise maximum de la contrainte élastique de Von Mises.

Nous formulons ce problème par :

Problème (Q)

$$\begin{aligned} \text{Min } & J(e) \\ \left\{ \begin{array}{l} e \in E_c \\ M(e) = M_0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

où M_0 est la masse fixée.

La masse imposée M_0 peut être aussi "la" solution du problème (P). En effet, en minimisant la masse, la structure devient "plus mince" ce qui risque de faire apparaître des contraintes élastiques très importantes dans certaines parties. Ceci peut donc endommager la pièce mécanique jusqu'à la rupture. Pour éviter ce phénomène, on minimise cette concentration des contraintes par résolution du problème (Q).

3. Analyse de sensibilité

On introduit un ouvert θ de C défini par :

$$\theta = \{e \in C \mid e(x) > 0 \text{ sur } \omega\}$$

Soit $\partial e = \sum_{i=1}^N \partial e_i \chi_i$ un accroissement infinitésimal de $e \in E_c$.

On désigne par $\{U(e + \partial e)\}$ la solution de l'équation d'état [1] associée à l'épaisseur $e + \partial e$.

On pose

$$\{\partial U(e)\} = \{U(e + \partial e)\} - \{U(e)\}$$

Le problème qui se pose alors pour accéder au gradient de J par rapport à e, est d'exprimer $J(e + \partial e) - J(e)$ en fonction de ∂e .

3.1. Sensibilité du champ de déplacement par rapport à l'épaisseur

Pour cela on doit déterminer l'équation que doit vérifier la variation de déplacement $\{\partial U(e)\}$ correspondant à la variation ∂e de l'épaisseur e.

En reformulant l'équation d'équilibre d'une coque mince à épaisseur variable $e + \partial e$, nous montrons dans [BEL 88] le résultat suivant :

Résultat 1

Soit $\{U(e)\}$ le champ des déplacements nodaux associé à la coque mince d'épaisseur variable e et vérifiant l'équation d'état [1].

Alors :

La variation $\{\partial U(e)\}$ du champ des déplacements correspondant à une variation infinitésimale ∂e de l'épaisseur $e \in \Theta$ vérifie l'équation :

$$\begin{cases} [K(e, e^3)]\{\partial U(e)\} = -\sum_{i=1}^N \partial e_i [K(\chi_i, 3e^2 \chi_i)]\{U(e)\} \\ \{\partial U(e)\} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad [4]$$

L'équation [4] nous permet donc d'exprimer $\{\partial U(e)\}$ en fonction de ∂e .

3.2. Gradient de la fonctionnelle de Von Mises J(e) - Equation d'état-adjoint associée

Pour accéder au gradient de J(e), il est nécessaire d'exprimer $\{\partial U(e)\}$ en fonction de ∂e . Nous introduisons alors l'équation d'état adjoint [LIO 68] associée à J :

$$\begin{cases} [K(e, e^3)]\{P(e)\} = 2[K^\sigma(1, e^2)]\{U(e)\} \\ \{P(e)\} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad [5]$$

Les équations [4] et [5] nous permettent alors de déduire le résultat suivant :

Résultat 2

Soit δe une variation infinitésimale de l'épaisseur $e \in \theta$.

Alors:

La fonctionnelle de Von Mises $J(e)$ est différentiable et la $i^{\text{ème}}$ composante de son gradient par rapport à e est définie par :

$$\begin{aligned} \nabla_e^i J(e) = & -\{P(e)\}' [K(\chi_i, 3e^2 \cdot \chi_i)] \{U(e)\} \\ & + \{U(e)\}' [K^\sigma(0, 2e \cdot \chi_i)] \{U(e)\} \end{aligned}$$

où

$\{U(e)\}$ est solution de l'équation d'état [1]

$\{P(e)\}$ est solution de l'équation d'état adjoint [5]

Pour déterminer les gradients des fonctionnelles élémentaires $J_i(e)$, on utilisera la même démarche que celle décrite ci-dessus.

3.3. Gradient de la fonctionnelle de Masse

Etant donné que la fonctionnelle $M(e)$ est linéaire, son gradient est évident et il est donné d'après la relation [2] par :

$$\nabla_e^i M(e) = \int_{T_i} \rho(x) \chi_i(x) dx$$

4. Réduction des variables de contrôle dans les problèmes d'optimisation d'épaisseur des structures mécaniques

Dans une structure industrielle, le nombre d'éléments est très élevé et il n'est pas possible ni souhaitable de laisser varier indépendamment les épaisseurs de chaque élément. Ceci nous a conduit à définir la notion de zone composée d'un ensemble d'éléments finis, auquel on associe une seule variable d'épaisseur. Nous pouvons aussi considérer qu'il existe des zones où les épaisseurs sont connues (on peut envisager, par exemple, d'optimiser seulement une partie de la structure).

Nous désignons par :

N^Z = nombre total de zones

N^V = nombre total de zones où l'épaisseur est variable

N^F = nombre total de zones où l'épaisseur est fixe

m_j = nombre d'éléments constituant la zone Z_j

$$\{S^V\}' = (S_1^V, S_2^V, \dots, S_{N^V}^V) \text{ avec } S_j^V = \sum_{\substack{i=1 \\ T_i \in Z_j}}^N |T_i|$$

$\{e^F\}$ = le vecteur épaisseur fixe

$\{e^V\}$ = le vecteur épaisseur variable

$\{e\} = \{e^F\} + \{e^V\}$ le vecteur épaisseur de la structure

Le problème (P) devient ainsi :

Trouver $\{e^{*v}\} \in R^{N^V}$ tel que :

$$(P_Z) \left\{ \begin{array}{l} \forall \{e^v\} \in R^{N^V}, \{S^v\}' \{e^{*v}\} \leq \{S^v\}' \{e^v\}, \\ J_i(e^v, e^F) \leq |T_i| \sigma_0^2 \quad (i = 1, N), \\ 0 < e_{\min} \leq e_j^V \leq e_{\max} \quad (j = 1, N^V) \end{array} \right.$$

où N^V est inférieur ou égal à N . On envisage, en effet, le cas où l'on cherche à réduire la masse d'une partie seulement de la structure.

Le problème (Q) se transforme en (Q_Z) d'une façon analogue.

Remarquons que dans le cas où $N^V < N$, le calcul du gradient de $J_i(e^V, e^F)$ s'obtient en dérivant directement l'équation d'état [1]. Par contre, pour (Q_Z) le gradient de $J(e^V, e^F)$ s'obtient à l'aide d'un état adjoint, à partir du résultat de différentiabilité de la section 3.2.

5. Résolution numérique des problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation $(P), (Q), (P_Z), (Q_Z)$ peuvent se mettre sous la forme générale :

$$(OPT) \begin{cases} \text{Minimiser } F(e) \\ e \in \mathbb{R}^n \\ g_i(e) \leq 0 \quad i = 1, n \end{cases}$$

où la fonction coût $F(e)$ et les contraintes d'optimisation $g_i(e)$ sont des fonctions non linéaires des variables de contrôle. Les concepts utilisés pour déterminer une solution du problème d'optimisation (OPT), consistent à remplacer le problème non linéaire (OPT) par une suite de sous problèmes obtenus en développant en série de Taylor au voisinage d'un point de contrôle donné les fonctions F et g_i . Cette suite génère donc un processus itératif donnant naissance aux algorithmes de minimisation.

A l'itération k , les variables de contrôle sont données par :

$$e_{k+1} = e_k + \alpha_k d_k$$

où d_k est la direction de descente et α_k est la longueur du pas dans cette direction.

Dans la littérature, les algorithmes de minimisation diffèrent par la manière de déterminer d_k et α_k [POW 78] [SVA 81] [STO 85]. Nous avons retenu une méthode de programmation quadratique séquentielle [POW 78] pour la résolution des problèmes d'optimisation considérés. Dans cette méthode, d_k est obtenue comme solution du problème de minimisation de l'approximation quadratique de la fonction, sous contraintes linéarisées. L'analyse de sensibilité doit donc fournir le calcul des gradients de F et g .

6. Processus d'optimisation

Le processus d'optimisation se compose des étapes suivantes :

- Etape 1. Modélisation de la géométrie de la structure à l'aide d'un logiciel CAO.
- Etape 2. Découpage de la structure en sous domaines (optimisables ou non) ayant une signification de fonctionnalité.
- Etape 3. Réalisation d'un fichier d'interface CAO/Calcul permettant le passage d'une géométrie complexe à une géométrie adaptée à l'analyse et à l'optimisation.
- Etape 4. Maillage de la géométrie par sous domaines vérifiant l'étape 2.
- Etape 5. Introduction des caractéristiques mécaniques, conditions aux limites, chargements. Ces données sont affectées interactivement.
- Etape 6. Analyse de la structure par éléments finis.

L'outil active les modules éléments finis, soit interactivement soit en batch. Les résultats obtenus sont analysés graphiquement afin de déterminer les zones à optimiser.

- Etape 7. Boucle d'optimisation par sous problèmes.

- L'analyse par éléments finis doit permettre à l'utilisateur de savoir dans chaque sous domaine s'il faut minimiser la masse, la concentration des contraintes élastiques ou tout autre critère. A l'issue du choix du problème d'optimisation, le sous domaine est partagé éventuellement en deux parties. L'une est un sous volume à optimiser (Zone mobile) tandis que la deuxième doit rester sans optimisation (Zone fixe).

- Exécution de l'optimisation. Elle s'effectuera en interactif ou en batch en exécutant un nombre d'itérations pilotées par l'utilisateur.

- Visualisation des résultats. Au vu des résultats, l'utilisateur décide de poursuivre les itérations sur le sous domaine ou de passer à un autre sous problème.

- Etape 8. Fin de la boucle d'optimisation.

Une fois la convergence obtenue sur un sous problème sélectionné, par exemple minimisation de la masse avec limitations sur les contraintes élastiques, l'utilisateur peut traiter un autre sous problème, par exemple minimiser la concentration des contraintes élastiques à masse fixée. Il choisit d'utiliser pour les autres domaines des formes initiales ou déjà optimisées.

- Etape 9. Analyse de la pièce optimisée.

Le but de cette analyse est de vérifier que la pièce obtenue répond bien à tous les critères fixés au départ de la modélisation, en particulier la prise en compte des contraintes technologiques de fabrication.

7. Application à une structure industrielle

7.1. Motivation

La structure choisie est une structure tridimensionnelle. Il s'agit d'un carter de servo-actionneur de commande de gouverne d'engin aéronautique. Cette structure particulière est représentative :

- d'une part, à cause de sa géométrie très complexe,

- d'autre part, à cause des efforts importants appliqués sur le carter qui est lui même fixé en porte-à-faux sur la structure de l'engin aéronautique ; les contraintes élastiques à travers la pièce sont donc importantes, et il faut en tenir compte du point de vue de la tenue mécanique,

- enfin, le besoin d'allègement de masse est réel sur l'ensemble du servo-actionneur. Il y a quatre servo-actionneurs sur l'engin aéronautique, qui sont situés dans sa partie arrière au niveau des gouvernes; l'engin doit être équilibré, si bien que ce que l'on gagne en masse dans sa partie arrière, on le gagnera aussi dans sa partie avant. Donc, un gain de masse par exemple de 1 kg sur un seul carter, nous fait gagner 8 kg sur l'ensemble de l'engin, ce qui n'est pas négligeable et qui illustre bien l'intérêt d'une telle application.

7.2. Modélisation de la pièce

Le carter est un servo-rotatif, c'est-à-dire que sa fonction est de commander la position d'un axe de sortie sur lequel est fixée une gouverne de l'engin aéronautique. Le servo-actionneur possède donc un moteur, une chaîne de réduction (engrenages) et un bloc électronique qui a pour fonction d'une part de commander le moteur, d'autre part d'assurer l'asservissement de la gouverne lorsque l'engin est en fonctionnement. Le carter se subdivise donc en trois parties [TRA 87] :

- La partie " moteur ", dans laquelle vient se loger le moteur. C'est au niveau de cette partie que le carter se rattache à la structure de l'engin au moyen de quatre pattes de fixation.

- La partie " mécanique ", c'est la partie centrale du carter dans laquelle vient se loger toute la réduction. C'est dans cette partie que l'on trouve les formes les plus complexes. Elle comporte le carter et la platine qui est une sorte de couvercle qui vient fermer la partie mécanique par en dessous. Cette platine est fixée au carter par des vis de fixation.

- La partie "électronique ", c'est la partie avant de la structure, à l'extrémité de laquelle viennent s'appliquer les efforts ramenés par le carénage. Dans cette partie vient se loger le boîtier électronique.

La géométrie de l'ensemble de cette structure réelle a été modélisée par des surfaces moyennes planes et représentatives de l'état des contraintes élastiques dans la pièce et donc du comportement général du carter (Figure 1).

En ce qui concerne les efforts qui lui sont appliqués, ils sont importants et complexes. Ainsi le carter est chargé suivant deux types de sollicitations qui sont des efforts transmis respectivement par la gouverne et le carénage. Les premiers sont des efforts aérodynamiques (force de portance et couple aérodynamique) qui sont transmis à la structure de l'engin aéronautique par l'intermédiaire du boîtier-vérin en mode fonctionnement. Les seconds sont essentiellement des efforts transmis au niveau de la face avant du boîtier par des éléments extérieurs (carénage muni de ses équipements). L'ensemble de ces efforts est schématisé sur la figure 1.

Pour les conditions aux limites, on considère que le boîtier-vérin est parfaitement fixé sur la structure au niveau des pattes de fixation. Il s'agit donc d'un encastrement parfait.

Notons enfin que dans la modélisation retenue, la structure complète est décrite par 478 éléments-finis triangulaires et plans (Figure 2) de type COQ à 6 degrés de liberté par nœud. Le modèle numérique du carter compte donc 256 nœuds, soit 1 536 inconnues. De plus le nombre de variables d'optimisation associé à ce modèle s'élève à 478. Pour réduire ce nombre, nous avons défini 48 zones, à l'intérieur desquelles des éléments finis auront la même épaisseur. L'épaisseur doit rester comprise entre $e_{\min} = 1.5 \text{ mm}$ et $e_{\max} = 6 \text{ mm}$, et la limite élastique est de 60 daN / mm^2 .

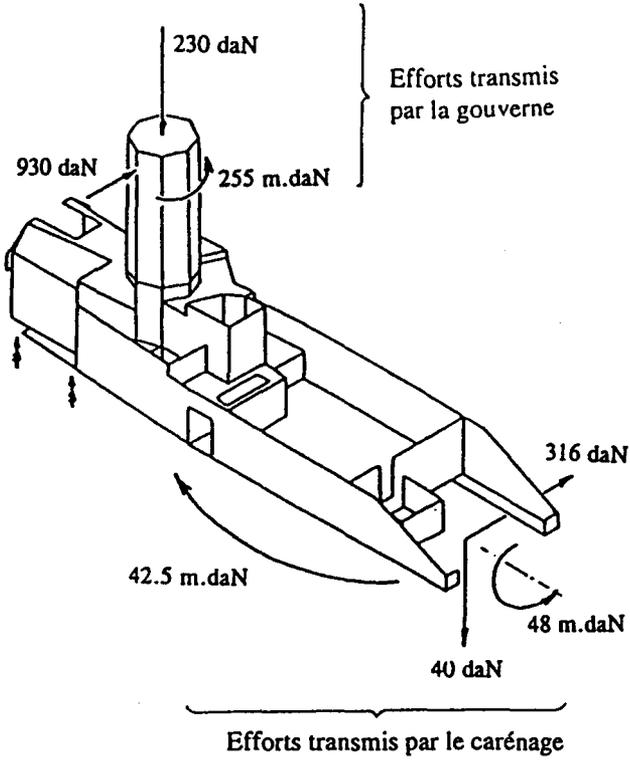


Figure 1. Modélisation du carter

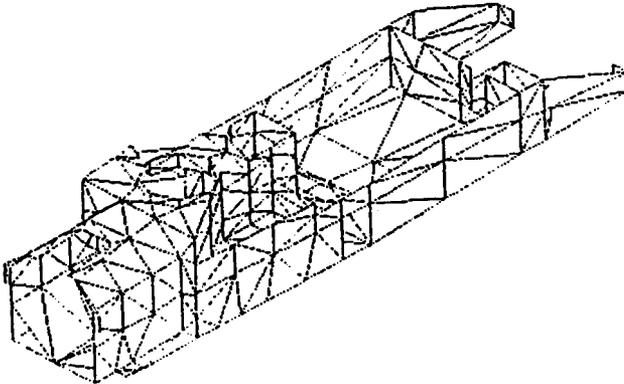


Figure 2. Maillage en élément coque mince du carter

7.3. Analyse des Résultats

Le problème (P) est résolu en prenant une épaisseur initiale uniforme $e_0 = \frac{e_{\min} + e_{\max}}{2}$ [BEL 88]. La valeur du critère de Von Mises est limitée sur tous les éléments finis, ce qui donne un problème comprenant 48 contrôles (toutes les zones sont mobiles) et 574 contraintes d'optimisation. La convergence est obtenue en 22 itérations et la masse est alors passée de 4.09 kg (Masse initiale) à 1.734 kg. Le gain de masse apporté par le processus d'optimisation s'élève donc à 60 %. La figure 3 donne la représentation de la loi d'épaisseur optimale e^* .

Cette configuration optimale est satisfaisante. En effet, au niveau des parties Moteurs et Mécanique, on est en présence d'une structure de type caisson fermé, donc très rigide. Ceci explique que dans ces zones beaucoup d'épaisseurs prennent leur valeur minimale. En ce qui concerne le plancher de la partie Moteur, il se trouve pris entre les quatre points encastrés et les contraintes élastiques y sont très faibles. Ceci explique que dans cette partie l'épaisseur e^* est aussi minimale.

Etant donné que les efforts sur la gouverne induisent des réactions importantes sur les couronnes supérieure et inférieure, qui correspondent sur la pièce réelle aux chemins de roulement de l'arbre de sortie, on trouve bien une épaisseur e^* importante à ces endroits.

La répartition de l'épaisseur optimale e^* au niveau de la partie électronique se comporte en première approche comme une poutre en U encastrée et sollicitée en flexion à l'autre extrémité (Figure 1). Cette partie vient en effet se rattacher sur la partie Mécanique qui est très rigide.

Enfin, en raison de la présence du trou connecteur et de la proximité de l'encastrement, on trouve à cet endroit un gradient des contraintes élastiques important (c'est la zone la plus chargée de la structure) qui donne une épaisseur optimale e^* la plus élevée possible.

Nous avons ensuite traité le problème (Q) qui comprenait 48 variables de contrôle et 97 contraintes d'optimisation [BEL 88]. La masse a été imposée égale à 4.09 kg. Comme dans le problème (P), l'algorithme a été initialisé avec l'épaisseur e_0 constante sur toutes les zones. La convergence est obtenue au bout de 22 itérations. Le processus d'optimisation a permis de réduire la fonctionnelle élastique de Von Mises de $J(e_0) = 0.92383 \cdot 10^9 \text{ daN}^2$ à $J(e^*) = 0.55033 \cdot 10^9 \text{ daN}^2$, soit une réduction de 40 %. La répartition de l'épaisseur optimale e^* est illustrée pour chaque zone sur la figure 4. Nous constatons que cette loi d'épaisseur partage le carter en 3 domaines ω_1 , ω_2 , ω_3 définis par :

$$\omega_1 = \left\{ x \in \omega \mid e(x) = e_{\min} \right\}$$

$$\omega_2 = \left\{ x \in \omega \mid e_{\min} \leq e(x) \leq e_{\max} \right\}$$

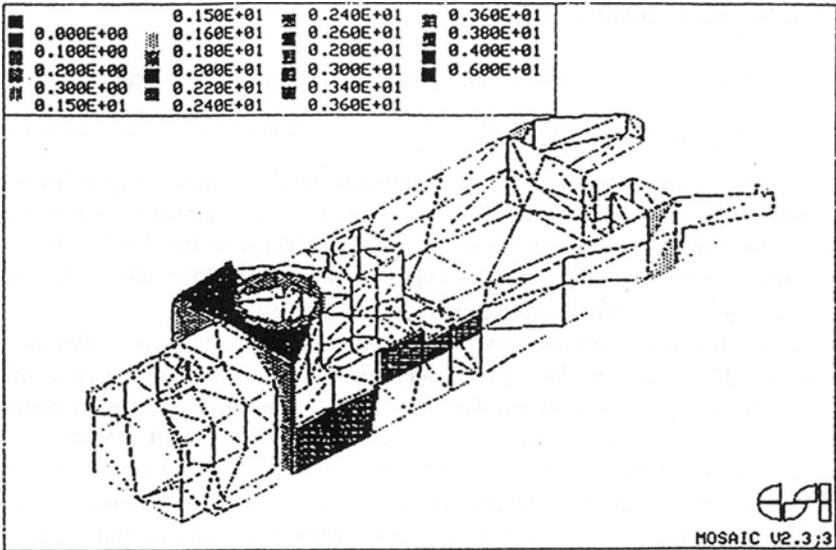


Figure 3. Epaisseur optimale (P)

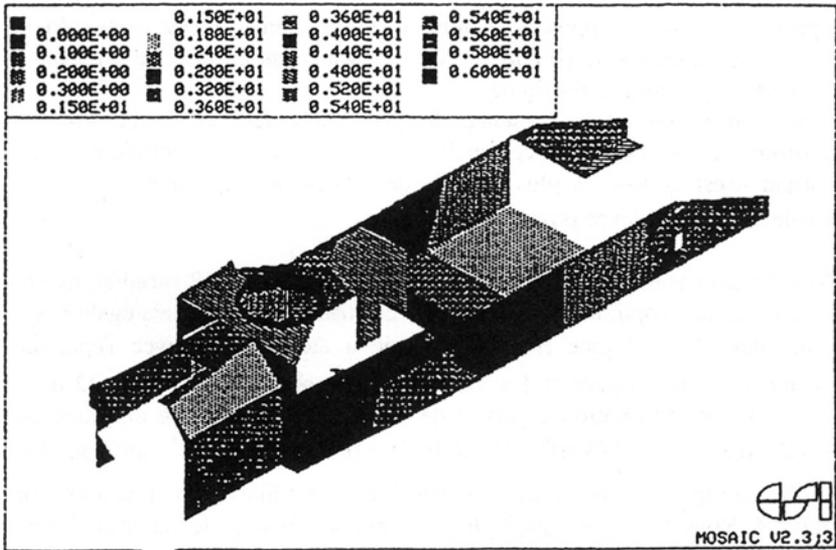


Figure 4. Epaisseur optimale (Q)

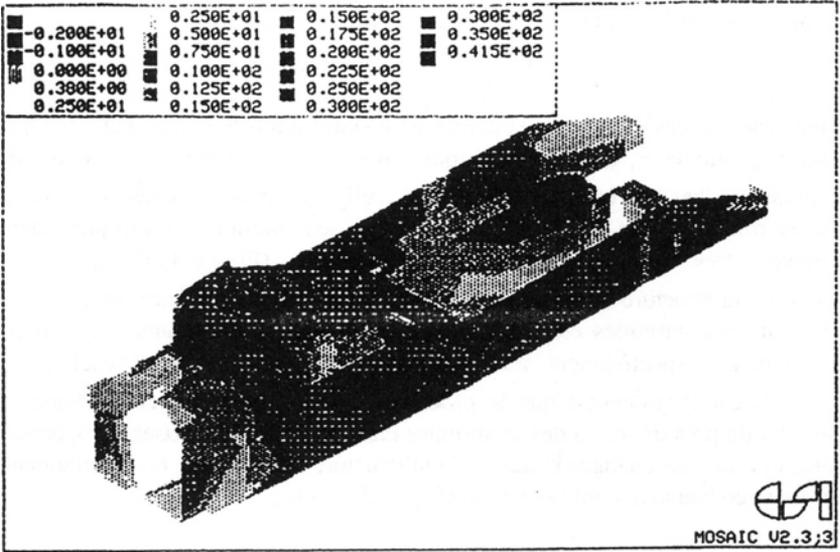


Figure 5. Isovaleurs des contraintes de Von Mises (épaisseur initiale)

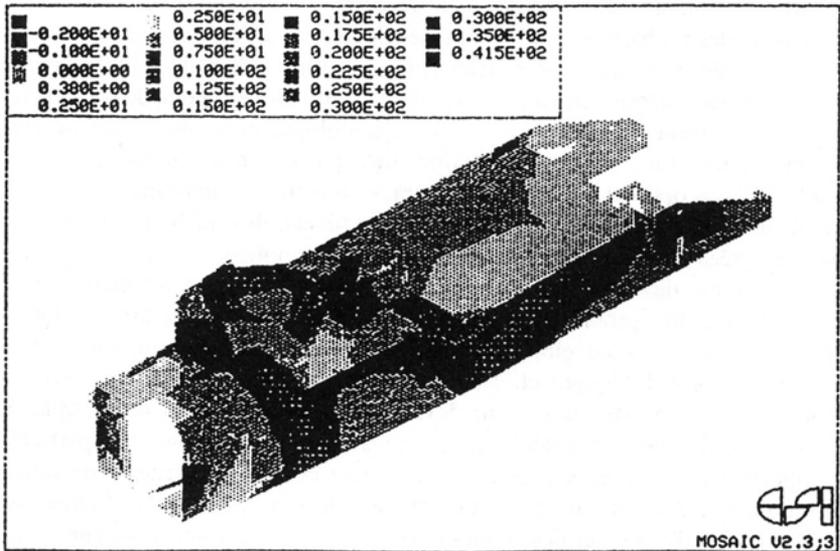


Figure 6. Isovaleurs des contraintes de Von Mises (épaisseur optimale)

$$\omega_3 = \left\{ x \in \omega \mid \epsilon(x) = \epsilon_{\max} \right\}$$

L'existence de ces domaines est conforme à l'intuition mécanique, car par rapport à l'épaisseur initiale e_0 (constante partout), il y a renforcement de l'épaisseur dans les régions proches de l'encastrement et dans celles qui sont soumises à des efforts. La figure 6 montre que c'est dans ces zones que les contraintes élastiques sont les plus élevées. Ces régions correspondent au domaine ω_3 (Figure 4). Etant donné que la masse de la structure est constante, le carter ne peut que s'affiner dans les autres régions où les contraintes élastiques sont plus ou moins importantes. Ces régions correspondent respectivement aux domaines ω_2 , et ω_1 . Ces résultats sont intéressants car ils montrent que le processus d'optimisation permet d'obtenir une diminution de près de 40 % des contraintes élastiques de Von Mises dans certaines régions, et ceci sans changer la masse de la structure ni sa forme, mais seulement en répartissant convenablement la matière (Figure 5 et 6).

8. Conclusion

Nous avons mis au point deux méthodes de minimisation de la masse ou des contraintes élastiques pour des structures de type coques minces et nous les avons appliquées à une pièce réelle complexe. L'introduction de la notion de zone pour réduire le nombre de variable d'optimisation s'est avéré efficace. Le nombre d'inconnu des problèmes traités est passée de 478 à 48, soit une réduction de près de 90 %. La pièce optimale est satisfaisante puisqu'un calcul de raideur montre bien que l'on est encore largement dans les spécifications demandées. Les résultats obtenus prouvent bien l'intérêt de la méthodologie proposée et de la démarche d'optimisation lors de la conception des pièces mécaniques. Cependant les configurations optimales sont obtenues après un nombre d'itérations assez élevé, une meilleure efficacité pourrait être obtenue en utilisant des méthodes d'approximation bien adaptées au cas des coques. Par ailleurs la simplicité de la méthode proposée pour l'analyse de sensibilité des coques minces par rapport à l'épaisseur, permet d'aborder d'autres problèmes d'optimisation en Mécanique linéaire ou non linéaire. Ainsi les méthodes développées s'insèrent bien dans la continuité des travaux existants dans la littérature et sont destinées à s'intégrer dans un système général d'optimisation des structures, qui devra par la suite prendre en compte d'autres facteurs que ceux considérés ici : nous nous intéressons en particulier au comportement des pièces sous des chargement complexes (critères de fatigues), à l'introduction des contraintes technologiques liées au procédé de fabrication, et à l'optimisation d'épaisseur des coques épaisses. Dans ce dernier problème l'énergie de cisaillement transversal n'est plus négligée et l'analyse de sensibilité est particulièrement délicate [BEL 97].

9. Bibliographie

- [ARM 78] ARMAND J.L., LODIER B., « Optimal Design of Bending Elements », Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 13, 373-384, 1978.
- [BAN 81] BANICHUK N. V. « Design of Plates for Minimum Deflection and Stress », in Haug E.J. and Cea J. (Eds), Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol 1, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan der Rijn, The Netherlands, 333-361, 1981.
- [BAT 80] BATOZ J. L. et al., « A study of three-node triangular plate bending elements », Int. J. for Numerical Meth. in Eng., vol 15, p. 1771-1812, 1980.
- [BEL 88] BELDI M., Optimisation de la loi d'épaisseur des structures minces, Thèse de doctorat, U.T.C., 1988.
- [BEL 97] BELDI M. et KNOPF-LENOIR C., « Analyse de sensibilité des coques épaisses », Proposition de publication à la Revue européenne des éléments finis, 1997.
- [BRA 86] BRAIBANT V., FLEURY C., « Application of Structural Synthesis Techniques », Computer Aided Design, Structural and Mechanical Systems, Proc. NATO ASI , Troia, Portugal, 29-53, Vol 2, 1986 ,
- [ESP 85] ESPING B. « The OASIS Structural Optimization System », Report N° 85-3, Royal Institute of Technology, Dept. Of Aeronautical Structures and Materials, Stockholm, Sweden.
- [FLE 78] FLEURY C., GERADIN M., «Optimality Criteria and Mathematical Programming in Structural Weight Design », Comp. and Struct. 8, 7-18, 1978.
- [FLE 83] FLEURY C., SANDER G., « Dual Methods for optimizing Finite Elements Flexural Systems », Comput. Meth. in Appl. Mech. And Eng., Vol 37, 249-275 (1983)
- HAF 80] HAFTKA R.T., PRASAD B., « Optimum Design of the Sides of a Railroad Car », Eng. Struct., Vol. 2, Oct 1980.
- [HAU 80] HAUG E.J. and ROUSSELET B. « Design Sensitivity Analysis in Structural Mechanics - I Static Response Variations », J. Struct. Mech. 8, 17-41, 1980.
- [LIO 68] LIONS J.L., Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod ed., 1968.
- [MRO 72] MROZ Z. « Multiparameter Optimal Design of Plates and Shells », J. Struct. Mech, 1, 3 , pp 371-392, 1972
- [PET 82] PETIAU C., LECINA G. « Optimisation des structures d'avion », J. de Méca. Théorique et Appliquée, Vol. 1, n°2, pp 291-309, 1982
- [POW 78] POWELL M.J.D., « Algorithms for nonlinear constraints that use Lagrangian Function », Math. Prog., 14, p. 224-248, 1978.
- [SCH 74] SCHMIT L. A., FARSHI B. « Some Approximation Concepts for Structural Synthesis », J. AIAA 12, 692-699, 1974.
- [STO 85] STOER J., « Principles of sequential quadratic programming methods for solving nonlinear programs », NATO ASI series, F15, Comp. Math. Prog., K. Schittkowsky ed., Springer-Verlag, 1985.
- [SVA 81] SVANBERG K., « Optimization of geometry in truss design », Comp. Math. in Appl. MechK. and Eng., 28, p. 63-80, 1981.

[TRA 87] TRAN Q. t., Optimisation de structures composées de coques minces. Réduction de masse par variation d'épaisseur, Thèse de Docteur-Ingénieur, U.T.C., 1987.

[VAN 93] VANDERPLAATS G.N., THOMAS H.L. « An Improved Approximation for Stress Constraints in Plate Structures », Struct. Opt. 6, 1-6, 1993.

[ZHO 96] ZHOU M., «Optimum design of plates and shells using the DCOC method », Structural Optimization, 12, 87-92, 1996.

Article soumis le 15 mai 1997

Version révisée le 20 septembre 1997