
Dynamique et schémas d'intégration pour modèles de poutres géométriquement exacts

Mazen Al Mikdad — Adnan Ibrahimbegovic

*Université de Technologie de Compiègne
Division Modèles Numériques en Mécanique
Laboratoire G2mS, UPRES ass. 6606 CNRS
Département Génie des Systèmes Mécaniques
BP 20529, F-60205 Compiègne*

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous abordons les aspects liés à la théorie et à l'implantation numérique des schémas d'intégrations pas à pas pour l'analyse dynamique non linéaire des poutres soumises à des rotations d'amplitude finie. Le problème modèle retenu est celui de la théorie géométriquement exacte de poutre 3d de Reissner n'imposant aucune restriction sur l'amplitude des déplacements et des rotations. Parmi les paramétrisations possibles des grandes rotations, nous choisissons la représentation matérielle du vecteur de rotation actuelle, ce qui simplifie la construction du schéma d'intégration temporelle associé. Une attention particulière est accordée à la linéarisation exacte des équations du mouvement et aux détails liés à l'implantation numérique.

ABSTRACT. In this work, we examine the aspects pertinent to the theory and numerical implementation of step by step integration schemes for the nonlinear dynamic analysis of beams subjected to finite rotations. The considered model problem is the Reissner's geometrically exact 3d beam theory without any constraint on displacements and rotations. Among several possible parametrizations of rotations, we choose the material representation of the incremental rotation vector, which simplifies the construction of the associated time integration scheme. Special emphasis is directed towards the exact linearization of the equations of motion and pertinent implementation details.

MOTS-CLÉS : dynamique non linéaire, théorie géométriquement exacte des poutres, grandes rotations, schéma de Newmark.

KEYWORDS : nonlinear dynamics, geometrically exact beam theory, finite rotations, Newmark scheme.

1. Introduction

Les aspects théoriques et numériques des schémas d'intégration pas à pas pour l'analyse dynamique des poutres en présence de grandes rotations tridimensionnelles, représentent le thème essentiel abordé dans ce document. La formulation faible retenue est celle de Reissner. Elle est capable de fournir les mesures des déformations d'une manière exacte sans aucune restriction cinématique sur l'amplitude des déplacements ou des rotations. Ce modèle garantit d'une part l'expression sous forme quadratique de la densité d'énergie interne en fonction des mesures des déformations associées, et d'autre part une forme bilinéaire de la densité d'énergie cinétique grâce au repère global, qui est utilisé pour l'écriture de toutes les quantités. Ceci est une différence importante par rapport à l'approche dite 'par repère flottant' (en anglais '*shadow beam*') longuement appliquée, qui ne peut pas permettre des grandes déformations.

La difficulté particulière des rotations 3d d'amplitude finie réside dans le fait qu'il ne s'agit pas de quantités vectorielles mais d'objets appartenant à la variété différentielle $SO(3)$ (voir [Arg82]). Ceci rend leur paramétrisation et leur implantation numérique des tâches loin d'être évidentes. De plus, une complexité additionnelle doit être surmontée dans le traitement de tels problèmes, avec le rôle spécial que jouent les grandes rotations dans le domaine de la théorie non linéaire des structures et dans le choix du problème modèle de poutres 3d (voir [IFK95]). Comme conséquence majeure de cette difficulté, une extension des intégrateurs pas à pas standards (par exemple la méthode de Newmark ou de Wilson θ , voir [BE76]) ne peut pas être généralisée à l'analyse dynamique non linéaire comme pour le cas où on ne rencontre que des degrés de liberté de translation.

Dans les travaux précédents, parmi plusieurs manières de paramétriser les rotations, on ne trouve pas celle qui est bien adaptée à la construction des schémas d'intégration temporelle. Nous revenons au départ sur la paramétrisation par le vecteur de rotation totale qui a été initialement appliquée à l'analyse dynamique des poutres par [CG88] à cause de la simplicité de l'écriture du schéma d'intégration pour les variables de rotation. Cependant la lourde procédure de linéarisation exacte - largement simplifiée dans [CG88] - que nous avons entreprise nous laisse dire qu'en plus de son incapacité à représenter des rotations dépassant 2π , cette formulation n'est pas à recommander. La seconde alternative proposée dans [SVQ88] consiste à choisir comme variable principale pour décrire les variations de la matrice de rotation un vecteur spatial de rotation itérative défini sur la configuration déformée. D'une manière peu cohérente [SVQ88] ont utilisé un algorithme de Newmark qui combine ce vecteur de rotation avec des objets matériels définis sur la configuration initiale. Afin d'obtenir une forme cohérente du schéma d'intégration de Newmark, nous revenons sur cette formulation mais en partant d'une écriture complètement matérielle du principe des travaux virtuels. De plus, cette formulation a fourni

une procédure de mise à jour des rotations qui nous a permis d'éviter de faire appel à l'algorithme de Spurrier ([Spu78]) lors de l'évaluation numérique du vecteur de rotation à partir de la matrice de rotation.

Comme le montre ce travail, la nouvelle formulation des grandes rotations qui se base sur le vecteur de rotation actuelle est très bien adaptée à la construction des schémas d'intégration pas à pas. D'un côté, elle nous permet de calculer les vitesses et les accélérations par les équations de Newmark, et d'un autre côté elle apporte une forme compacte des équations linéarisées, ainsi qu'une procédure simple de mise à jour des quantités itératives associées aux rotations.

2. Théorie géométriquement exacte de poutre 3d

2.1. Cinématique

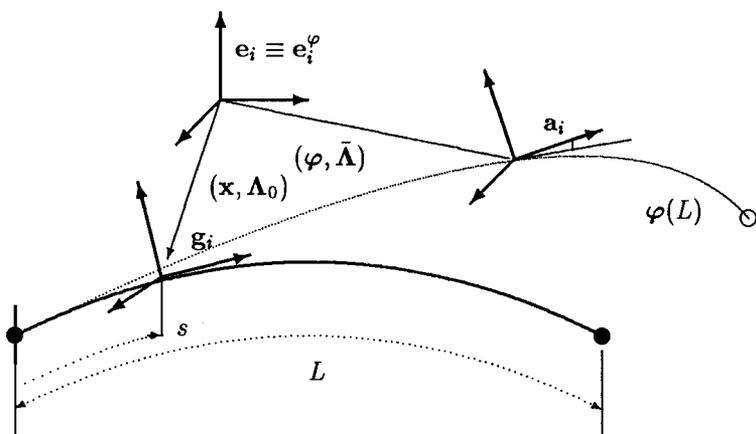


Figure 1. Poutre 3d de Reissner. Configuration initiale et courante

En accord avec la l'hypothèse cinématique classique (voir [Rei72]) supposant la conservation des sections planes au cours de la déformation, il est suffisant pour décrire la transformation de la poutre (figure 1) de suivre le mouvement du repère cartésien $\mathbf{g}_{i=1,3}(s; t = 0)$ attaché à chaque section repérée par son abscisse curviligne s . Initialement la section est choisie perpendiculaire à l'axe neutre et sa normale s'identifie au vecteur \mathbf{g}_1 .

La section déformée qui n'est plus normale à l'axe neutre déformé à cause de la présence de déformation de cisaillement transverse, est repérée par le vecteur de position de son centre de gravité $\varphi(s; t)$ et par son orientation $\mathbf{a}_i(s; t)$

$$\mathbf{a}_i = \Lambda \mathbf{g}_i ; \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (1)$$

L'objet $\Lambda(s ; t)$ est un tenseur à deux points associant à un vecteur matériel (c-à-d attaché à la configuration initiale) \mathbf{g}_i son image spatiale (c-à-d attachée à la configuration courante) \mathbf{a}_i de même module et préservant l'orthogonalité. Dans les repères globaux $\mathbf{e}_{i=1,3} = \mathbf{e}_{i=1,3}^\varphi$ qui ont été choisis pour décrire tous les objets matériels et spatiaux, nous pouvons représenter la matrice Λ par

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathbf{a}_i(s ; t) \otimes \mathbf{g}_i(s ; t = 0) \\ &= \bar{\Lambda}_{ji}(s ; t) \mathbf{e}_j^\varphi \otimes \mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{2}$$

dans cette expression \otimes dénote le produit tensoriel entre deux vecteurs.

La déformation de la poutre peut être décrite par les mesures de déformations (voir [IFK95])

$$\boldsymbol{\epsilon} = \Lambda^T \boldsymbol{\varphi}' - \mathbf{g}_1 \tag{3}$$

$$\mathbf{K} = \Lambda^T \Lambda' \tag{4}$$

où le vecteur $\boldsymbol{\epsilon}$ contient les déformations longitudinales et tangentielles et \mathbf{K} est la matrice anti-symétrique de déformation de courbure qui peut aussi être définie par le vecteur axial $\boldsymbol{\kappa}$

$$\mathbf{K} \mathbf{b} = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

dans cette équation \times dénote le produit vectoriel.

Dans (3) et (4), $\bullet' = \frac{d\bullet}{ds}$ est la dérivée par rapport à la variable d'espace s .

Les objets $\boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\kappa}$ décrivent sur la configuration initiale, l'image des déformations agissant sur la configuration actuelle. Au sens de l'énergie, ils sont respectivement conjugués aux efforts (axiaux et tranchants) et moments (de torsion et de flexion) résultants internes

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_n \boldsymbol{\epsilon} \tag{6}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{C}_m \boldsymbol{\kappa} \tag{7}$$

avec les matrices de comportement pour le cas d'un matériau élastique linéaire

$$\mathbf{C}_n = \text{diag}(E A, G A'_2, G A'_3) \tag{8}$$

$$\mathbf{C}_m = \text{diag}(G J, E I_2, E I_3) \tag{9}$$

Dans (8) et (9), E et G sont respectivement, le module d'Young et de cisaillement, tandis que A représente la section, A'_i les sections corrigeant le cisaillement transverse, J l'inertie de torsion, et I_i les inerties de flexion.

Comme le montre l'ensemble des équations précédentes, le champ $(\boldsymbol{\varphi} , \Lambda)$ détermine de façon unique la configuration courante, les déformations, et les contraintes généralisées. Autrement dit, l'espace de configuration de la poutre 3d s'identifie à

$$\mathcal{C} = \{(\boldsymbol{\varphi}, \Lambda) : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times SO(3)\} \tag{10}$$

où $SO(3)$ est le groupe spécial des matrices orthogonales tridimensionnelles (voir [CG88] ou [Sim85])

$$SO(3) = \{ \Lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \Lambda^T \Lambda = \mathbf{I}, \det \Lambda = 1 \} \quad (11)$$

Remarque 1: L'intérêt de considérer la formulation matérielle est qu'elle ne nécessite pas de prendre en compte le mouvement du repère \mathbf{a}_i lors du calcul des variations spatiales et temporelles des différents objets attachés à la configuration actuelle, comme se présente le cas de la formulation spatiale dans [IAM96] et [IAM97] où on fait appel à la dérivée de Lie ([MH83]) vu la grandeur de la transformation.

2.2. Variations temporelles - Vitesses et accélérations angulaires

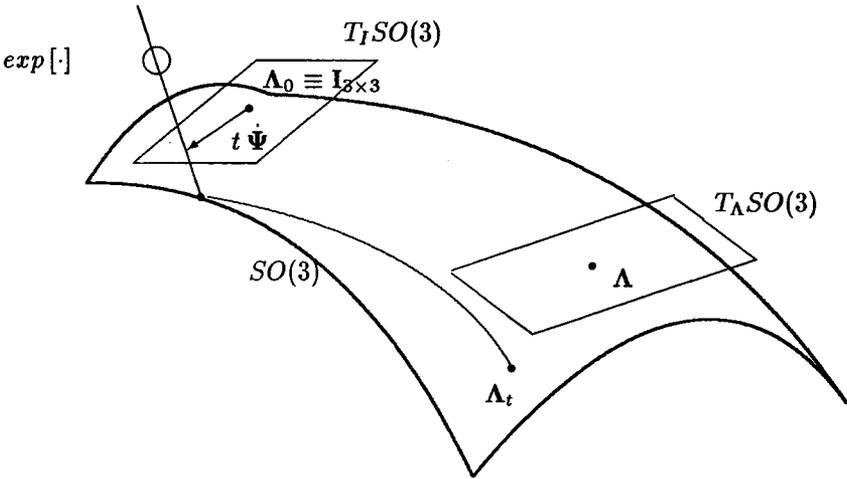


Figure 2. Vitesse angulaire. Matrice anti-symétrique objet de l'espace tangent $T_I SO(3)$

Afin de modéliser les effets d'inertie, il est indispensable d'examiner les variations temporelles de la matrice de rotation. Ainsi nous définissons la vitesse et l'accélération angulaires matérielles (voir [IAM97] et [Ibr97])

$$\dot{\Psi} = \Lambda^T \dot{\Lambda} ; \dot{\Psi} \mathbf{b} = \dot{\psi} \times \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (12)$$

$$\ddot{\Psi} = \Lambda^T \ddot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^T \dot{\Lambda} ; \ddot{\Psi} \mathbf{b} = \ddot{\psi} \times \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (13)$$

Comme conséquence de l'orthogonalité de la matrice de rotation Λ , nous notons que la vitesse $\dot{\Psi}$ et l'accélération $\ddot{\Psi}$ sont des matrices anti-symétriques

éléments de $T_1SO(3)$ l'espace linéaire tangent à $SO(3)$ autour de l'identité \mathbf{I} (voir figure 2). Leurs vecteurs axiaux sont respectivement la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ et l'accélération angulaire $\ddot{\psi}$, ce qui nous permet de décrire les variations temporelles des vecteurs de base de la section déformée sous la forme

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{\Lambda} (\dot{\psi} \times \mathbf{g}_i) \tag{14}$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{\Lambda} (\ddot{\psi} \times \mathbf{g}_i) \tag{15}$$

2.3. Principe du travail virtuel

Une fois l'idéalisation géométrique et cinématique introduite dans la forme faible de type déplacement pour un milieu 3d, la cinématique de Reissner nous aide à établir le principe du travail virtuel de poutre comme suit

$$\delta \pi = \delta \pi_{int} - \delta \pi_{ext} + \int_L \{ \delta \varphi \cdot A_\rho \ddot{\varphi} + \delta \psi \cdot (\mathbf{J}_\rho \ddot{\psi} + \dot{\psi} \times (\mathbf{J}_\rho \dot{\psi})) \} ds = 0 \tag{16}$$

où $A_\rho = \int_A \rho dA$ est la densité linéique de masse et \mathbf{J}_ρ est le tenseur d'inertie de rotation dans la représentation matérielle. Les relations (14) et (15) nous permettent de définir ce tenseur d'inertie sous la forme

$$\mathbf{J}_\rho = \int_A \rho \sum_{i=2}^3 \xi_i \mathbf{G}_i \sum_{j=2}^3 \xi_j \mathbf{G}_j dA ; \mathbf{G}_i \mathbf{b} = \mathbf{g}_i \times \mathbf{b} \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \tag{17}$$

$\xi_{i=1,2}$ étant les coordonnées locales sur la section. Si de plus \mathbf{g}_i passe par les axes principaux d'inertie alors

$$\mathbf{J}_\rho = \text{diag} (J_1 , J_2 , J_3) \tag{18}$$

Dans la forme faible (16) la partie statique du travail virtuel peut s'écrire (voir [IFK95]) comme

$$\delta \pi_{int} - \delta \pi_{ext} = \int_L \{ \delta \epsilon \cdot \mathbf{n} + \delta \kappa \cdot \mathbf{m} \} ds - \int_L \{ \delta \varphi \cdot \bar{\mathbf{n}} + \delta \psi \cdot (\mathbf{\Lambda}^T \bar{\mathbf{m}}) \} ds \tag{19}$$

Les équations d'Euler-Lagrange de la forme faible (16) traduisent sur la configuration courante l'équilibre en translation et en rotation de la section déformée

$$(\mathbf{\Lambda} \mathbf{n})' + \bar{\mathbf{n}} = A_\rho \ddot{\varphi} \tag{20}$$

$$(\mathbf{\Lambda} \mathbf{m})' + \varphi' \times (\mathbf{\Lambda} \mathbf{n}) + \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{\Lambda} (\mathbf{J}_\rho \ddot{\psi} + \dot{\psi} \times (\mathbf{J}_\rho \dot{\psi})) \tag{21}$$

3. Schémas implicites d'intégration

Quand les effets d'inertie sont pris en compte nous avons besoin d'évaluer les vitesses et les accélérations à des instants bien choisis de l'intervalle de temps, et ce en plus des valeurs des positions et des rotations. Comme nous le discutons dans la suite, la famille des algorithmes implicites de Newmark (voir [BE76]) est retenue pour l'intégration pas à pas des équations d'équilibre ci-dessus. Pour que cette tâche puisse être accomplie il convient de partager l'intervalle de temps en question en une séquence de pas $0 < t_1 < \dots t_n < t_{n+1} < \dots T$, et de résoudre sur un pas typique $h = t_{n+1} - t_n$ le problème du tableau 1.

étant donnés à t_n :	$\varphi_n = \varphi(t_n)$, $\mathbf{v}_n = \dot{\varphi}(t_n)$, $\mathbf{a}_n = \ddot{\varphi}(t_n)$ vecteur de position, vitesse et accélération
	$\Lambda_n = \Lambda(t_n)$, $\omega_n = \dot{\psi}(t_n)$, $\alpha_n = \ddot{\psi}(t_n)$ matrice de rotation, vitesse et accélération angulaires
avancer à t_{n+1} :	$\varphi_{n+1} = \varphi(t_{n+1})$, $\mathbf{v}_{n+1} = \dot{\varphi}(t_{n+1})$, $\mathbf{a}_{n+1} = \ddot{\varphi}(t_{n+1})$ $\Lambda_{n+1} = \Lambda(t_{n+1})$, $\omega_{n+1} = \dot{\psi}(t_{n+1})$, $\alpha_{n+1} = \ddot{\psi}(t_{n+1})$
vérifiant à t_{n+1} :	$\delta\pi_{n+1} = \delta\pi(t_{n+1}) = 0$

Tableau 1. *Problème central d'intégration temporelle*

Il s'agit en réalité de construire un schéma temporel respectant une paramétrisation choisie pour la rotation. Quant à la partie translation, son schéma d'intégration est l'extension du cas linéaire simple (voir [BE76]).

3.1. Paramétrisations des rotations

La difficulté principale à laquelle nous faisons face est liée au fait que l'espace de configuration de la poutre ne s'identifie pas à un espace vectoriel mais à une variété différentielle non linéaire (équations (10) et (11)). L'idée clé est alors de trouver un paramètre vectoriel de rotation capable de définir de manière convenable l'actualisation de Λ lors d'une procédure itérative de résolution du système d'équations algébriques non linéaires.

Cette mise à jour n'est pas unique mais peut être effectuée de 3 manières

$$\Lambda_{n+1} \leftarrow \begin{cases} \exp[(\vartheta + \Delta\vartheta)] \\ \Lambda_{n+1} \exp[\Delta\psi] \\ \Lambda_n \exp[\vartheta_{n+1} + \Delta\vartheta_{n+1}] \end{cases} \quad (22)$$

où les paramètres matériels tous éléments de $T_I SO(3)$ sont : ϑ vecteur de rotation totale, $\Delta\psi$ vecteur de rotation itérative ; Λ_{n+1} étant la matrice de rotation à l'itération précédente, ϑ_{n+1} vecteur de rotation actuelle ; Λ_n étant la matrice de rotation au pas de temps précédent.

La forme exponentielle (voir [Arg82]) connue comme la formule de Rodrigues associant à un vecteur ϑ_{n+1} une matrice orthogonale de rotation autour de ce dernier, est donnée par

$$\begin{aligned} \exp[\vartheta_{n+1}] &= \cos\vartheta_{n+1} \mathbf{I} + \frac{\sin\vartheta_{n+1}}{\vartheta_{n+1}} \Theta_{n+1} + \frac{1 - \cos\vartheta_{n+1}}{\vartheta_{n+1}^2} \vartheta_{n+1} \otimes \vartheta_{n+1} ; \\ \Theta_{n+1} \mathbf{b} &= \vartheta_{n+1} \times \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (23)$$

3.2. Schéma de Newmark - Vecteur de rotation totale

La première possibilité dans (22) est un choix logique et direct de paramétriser Λ en prenant comme paramètre principal le vecteur de rotation totale qui est en réalité le vecteur propre ϑ associé à la valeur propre unité (voir [IFK95] ou [CG88]). Un tel choix simplifie énormément l'application du schéma de Newmark aux composantes de rotations, en effet la forme accélération d'un tel schéma est simplement celle que l'on applique à la partie translation

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\vartheta,n+1} &= \mathbf{v}_{\vartheta,n} + h [(1 - \gamma) \mathbf{a}_{\vartheta,n} + \gamma \mathbf{a}_{\vartheta,n+1}] \\ \varphi_{\vartheta,n+1} &= \varphi_{\vartheta,n} + h \mathbf{v}_{\vartheta,n} + h^2 [(\frac{1}{2} - \beta) \mathbf{a}_{\vartheta,n} + \beta \mathbf{a}_{\vartheta,n+1}] \end{aligned} \quad (24)$$

Il est bien connu que cet algorithme de règle trapézoïdale possède une précision du second ordre si $\gamma = 2\beta = \frac{1}{2}$. La matrice de rotation est directement évaluée à l'instant t_{n+1} grâce à la forme exponentielle (23)

$$\Lambda_{n+1} = \exp[\varphi_{\vartheta,n+1}] \quad (25)$$

Cependant, les manipulations associées dans les procédures de linéarisation et de mise à jour deviennent vite très élaborées. A l'origine de cette complication, les lourdes expressions des vitesses et accélérations angulaires en fonction des quantités impliquées dans le schéma (24) à savoir

$$\boldsymbol{\omega}_{n+1} = \mathbf{T}^T(\varphi_{\vartheta,n+1}) \mathbf{v}_{\vartheta,n+1} \quad (26)$$

$$\alpha_{n+1} = \mathbf{T}^T(\varphi_{\vartheta, n+1}) \mathbf{a}_{\vartheta, n+1} + \dot{\mathbf{T}}^T(\varphi_{\vartheta, n+1}) \mathbf{v}_{\vartheta, n+1} \quad (27)$$

où \mathbf{T} est la matrice qui décrit la variation de la formule de Rodrigues (23). La référence [IFK95] détaille sa dérivation et fournit son expression en fonction du vecteur de rotation totale

$$\mathbf{T}(\vartheta) = \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \Theta + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \vartheta \otimes \vartheta \quad (28)$$

Contrairement à [CG88] où une forme linéarisée très simplifiée pour la partie rotation a été retenue, nous sommes ramenés à calculer les dérivées temporelle et incrémentale combinées de l'expression \mathbf{T} ci-dessus. A titre d'exemple la forme exacte de l'incrément sur la dérivée temporelle de \mathbf{T} se présente sous la forme élaborée suivante

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{T}}(\vartheta) &= (\Delta \vartheta \cdot \dot{\vartheta} + \vartheta \cdot \Delta \dot{\vartheta}) [c_1 \mathbf{I} + c_2 \Theta + c_3 \vartheta \otimes \vartheta] \\ &+ c_4 \Delta \dot{\Theta} + c_5 [\Delta \dot{\vartheta} \otimes \vartheta + \dot{\vartheta} \otimes \Delta \vartheta + \Delta \vartheta \otimes \dot{\vartheta} + \vartheta \otimes \Delta \dot{\vartheta}] \\ &+ (\vartheta \cdot \dot{\vartheta}) [a_1 \mathbf{I} + a_2 \Theta + a_3 \vartheta \otimes \vartheta + c_2 \dot{\Theta} + c_3 (\dot{\vartheta} \otimes \vartheta + \vartheta \otimes \dot{\vartheta})] (\vartheta \cdot \Delta \vartheta) \\ &+ (\dot{\vartheta} \cdot \vartheta) [c_2 \Delta \Theta + c_3 (\Delta \vartheta \otimes \vartheta + \vartheta \otimes \Delta \vartheta)] \end{aligned} \quad (29)$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\vartheta \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} ; c_2 = \frac{\vartheta \sin \vartheta + 2 \cos \vartheta - 2}{\vartheta^4} \\ c_3 &= \frac{2 \sin \vartheta - 2 \vartheta - \vartheta \cos \vartheta}{\vartheta^5} ; c_4 = \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} ; c_5 = \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \end{aligned} \quad (30)$$

$$a_1 = c_3 - c_2 ; a_2 = (c_1 - 4c_2)/\vartheta^2 ; a_3 = (c_2 - 5c_3) \vartheta^2$$

La linéarisation exacte que nous obtenons ainsi joue un rôle très important dans la vitesse de convergence de la solution itérative (voir le tableau 6 sur un exemple numérique).

3.3. Schéma de Newmark - Vecteur de rotation actuelle

Déjà constaté dans le cas statique (voir [IFK95]), la formulation par le vecteur de rotation totale en analyse dynamique se révèle coûteuse quant à l'évaluation numérique de la matrice tangente. De plus, nous observons sur les simulations numériques de la section 5 que c'est une formulation qui reste limitée à des normes de rotation inférieures à 2π . Une bonne alternative pour surmonter cette difficulté consiste à introduire la notion de vecteur de rotation actuelle (voir [Ibr97]). Il s'agit du vecteur de rotation mesuré entre les deux pas de temps successifs t_n et t_{n+1} de façon à déterminer la matrice de rotation de la manière suivante

$$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \exp[\vartheta_{n+1}] \quad (31)$$

L'introduction d'un tel vecteur de rotation défini sur un pas de temps rend possible l'utilisation d'un schéma analogue à la partie translation. Cependant

il est nécessaire de combiner vitesse et accélération angulaires pour fournir l'approximation du vecteur de rotation actuelle ϑ_{n+1} (voir [SVQ88])

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \omega_n + h [(1 - \gamma) \alpha_n + \gamma \alpha_{n+1}] \\ \vartheta_{n+1} &= h \omega_n + h^2 [(\frac{1}{2} - \beta) \alpha_n + \beta \alpha_{n+1}] \end{aligned} \tag{32}$$

Ce schéma possède un sens géométrique cohérent du moment que les objets qu'il fait intervenir sont matériels et appartiennent tous au même espace linéaire tangent $T_rSO(3)$. C'est la raison pour laquelle la règle reste trapézoïdale et la précision du second ordre, si les coefficients de Newmark sont choisis $\gamma = 2\beta = \frac{1}{2}$.

Le schéma dont la forme accélération est donnée dans l'équation (32) est naturellement adapté à la formulation basée sur ϑ_{n+1} comme variable principale car elle y intervient explicitement. Cette formulation est celle que nous détaillons dans la section qui va suivre. Comme suggéré dans [SVQ88], le schéma (32) est aussi applicable à la paramétrisation par le vecteur de rotation itérative (deuxième possibilité dans (22)), cependant les procédures de calcul engendrées sont moins évidentes (voir la sous-section 4.1).

4. Linéarisation exacte

La méthode itérative de Newton bien adaptée à la résolution de systèmes d'équations algébriques - fortement non linéaires dans notre cas - devient d'autant plus efficace qu'une linéarisation exacte est appliquée à la théorie géométriquement exacte sur laquelle est fondé notre modèle. La famille des schémas d'intégration de Newmark est implicite, cela implique que les équations de mouvement à intégrer dans cette classe de schémas doivent être vérifiées à l'instant t_{n+1}

$$\delta\pi_{n+1} = \delta\pi(t_{n+1}) = 0 \tag{33}$$

Le champ virtuel de position $\delta\varphi_{n+1}$ représente la fonction test pour la partie translation. Quant aux rotations, nous choisissons que la fonction test associée soit le champ virtuel de rotation actuelle $\delta\vartheta_{n+1}$. C'est pour cette raison que nous réécrivons l'équilibre dynamique (16) en fonction de la variable de rotation ϑ_{n+1} et des quantités cinématiques impliquées dans l'algorithme (32)

$$\begin{aligned} &\delta\pi_{n+1} = (\delta\pi_{int} - \delta\pi_{ext})_{n+1} \\ &+ \int_L \{ \delta\varphi \cdot A_\rho \mathbf{a}_{n+1} + (\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta\vartheta_{n+1}) \cdot (\mathbf{J}_\rho \alpha_{n+1} + \omega_{n+1} \times (\mathbf{J}_\rho \omega_{n+1})) \} ds = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

dans cette nouvelle forme, nous avons fait appel à une relation similaire à celle donnée dans [IFK95] exprimant le paramètre de rotation virtuelle sous la forme

$$\delta\psi_{n+1} = \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta\vartheta_{n+1} \tag{35}$$

où $\mathbf{T}(\vartheta_{n+1})$ est la matrice de variation de rotation donnée par l'expression (28). A partir des expressions dans (32), nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta h} \vartheta_{n+1} + \frac{\beta-\gamma}{\beta} \omega_n + \frac{(\beta-0.5\gamma)h}{\beta} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} &= \frac{1}{\beta h^2} \vartheta_{n+1} - \frac{1}{\beta h} \omega_n - \frac{0.5-\beta}{\beta} \alpha_n \end{aligned} \tag{36}$$

En introduisant ce résultat dans la forme faible (34), celle-ci se traduit par un système d'équations algébriques non linéaires, avec φ_{n+1} et ϑ_{n+1} comme inconnues. La solution de ce système est obtenue par le processus itératif de Newton qui fait intervenir la forme linéarisée suivante

$$L[\delta\pi_{n+1}] = \delta\pi_{n+1} + \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\delta\pi_{n+1,\varepsilon}] = 0 \tag{37}$$

Le dernier terme dans (37) est calculé par la dérivée directionnelle de la perturbation de $\delta\pi_{n+1}$ que l'on définit par

$$\delta\pi_{n+1,\varepsilon} = \delta\pi_{n+1}(\varphi_{n+1} + \varepsilon \Delta\varphi_{n+1}, \vartheta_{n+1} + \varepsilon \Delta\vartheta_{n+1}) \tag{38}$$

Cette expression fournit la matrice tangente dynamique générée à partir du second terme que nous exprimons sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\delta\pi_{n+1,\varepsilon}] &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [(\pi_{int} - \pi_{ext})_{n+1,\varepsilon}] + \int_L \{ \delta\varphi \cdot A_\rho \Delta\mathbf{a}_{n+1} \\ &+ \delta\vartheta_{n+1} \cdot (\mathbf{T}(\vartheta_{n+1})) (\mathbf{J}_\rho \Delta\alpha_{n+1} + \omega_{n+1} \times (\mathbf{J}_\rho \Delta\omega_{n+1}) + \Delta\omega_{n+1} \times (\mathbf{J}_\rho \omega_{n+1})) \\ &+ \delta\vartheta_{n+1} \cdot (\Delta\mathbf{T}(\vartheta_{n+1})) (\mathbf{J}_\rho \alpha_{n+1} + \omega_{n+1} \times (\mathbf{J}_\rho \omega_{n+1})) \} ds \end{aligned} \tag{39}$$

Grâce à la simplicité du schéma temporel utilisé pour les rotations dans (36), nous pouvons calculer les linéarisations de la vitesse et de l'accélération angulaires sous une forme aussi simple que la partie translation

$$\Delta\omega_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \Delta\vartheta_{n+1} \tag{40}$$

$$\Delta\alpha_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} \Delta\vartheta_{n+1} \tag{41}$$

D'un autre côté, la linéarisation du terme contenant $\Delta\mathbf{T}$ est calculée par l'application de la dérivée directionnelle suivant ϑ_{n+1} de la façon suivante

$$\begin{aligned} (\Delta\mathbf{T}(\vartheta_{n+1})) \mathbf{a} &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\mathbf{T}(\vartheta_{n+1} + \varepsilon \Delta\vartheta_{n+1})] \mathbf{a} \\ &= \mathbf{\Pi}(\mathbf{a}) \Delta\vartheta_{n+1} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{42}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(\mathbf{a}) &= (c_1 \mathbf{a} + c_2 (\vartheta_{n+1} \times \mathbf{a}) + c_3 (\vartheta_{n+1} \cdot \mathbf{a}) \vartheta_{n+1}) \otimes \vartheta_{n+1} \\ &\quad - c_4 \mathbf{A} + c_5 ((\vartheta_{n+1} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{I} + \vartheta_{n+1} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \tag{43}$$

avec

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\vartheta_{n+1} \cos \vartheta_{n+1} - \sin \vartheta_{n+1}}{\vartheta_{n+1}^3} ; c_2 = \frac{\vartheta_{n+1} \sin \vartheta_{n+1} + 2 \cos \vartheta_{n+1} - 2}{\vartheta_{n+1}^4} \\
 c_3 &= \frac{2 \sin \vartheta_{n+1} - 2 \vartheta_{n+1} - \vartheta_{n+1} \cos \vartheta_{n+1}}{\vartheta_{n+1}^5} ; c_4 = \frac{1 - \cos \vartheta_{n+1}}{\vartheta_{n+1}^2} \\
 c_5 &= \frac{\vartheta_{n+1} - \sin \vartheta_{n+1}}{\vartheta_{n+1}^3} .
 \end{aligned} \tag{44}$$

Avec ces résultats, nous arrivons finalement à la forme linéarisée explicite finale

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\delta \pi_{n+1, \varepsilon}] &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [(\pi_{int} - \pi_{ext})_{n+1, \varepsilon}] + \int_L \{ \delta \varphi \cdot \frac{1}{\beta h^2} A_\rho \Delta \varphi_{n+1} \\
 &+ \delta \vartheta_{n+1} \cdot (\mathbf{T}(\vartheta_{n+1})) \left(\frac{1}{\beta h^2} \mathbf{J}_\rho + \frac{\gamma}{\beta h} ([\omega_{n+1} \times] \mathbf{J}_\rho - [(\mathbf{J}_\rho \omega_{n+1}) \times]) \right) \Delta \vartheta_{n+1} \\
 &+ \delta \vartheta_{n+1} \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{J}_\rho \alpha_{n+1} + \omega_{n+1} \times (\mathbf{J}_\rho \omega_{n+1})) \Delta \vartheta_{n+1} \} ds
 \end{aligned} \tag{45}$$

Alors que la matrice tangente de rigidité statique est symétrique (voir annexe), il est intéressant de noter que la partie linéarisée dynamique fournit une matrice tangente non symétrique. En réalité, c'est le cas de toutes les formulations des rotations que nous discutons, à cause du produit vectoriel $\dot{\psi} \times (\mathbf{J}_\rho \dot{\psi})$ dans le travail virtuel d'inertie de rotation.

Une fois le système algébrique non linéaire résolu à chaque itération ($i - 1$) nous effectuons pour l'itération suivante (i) une mise à jour des variables de rotation comme le montre le tableau 2.

vecteur de rotation actuelle	$\vartheta_{n+1}^{(i)} = \vartheta_{n+1}^{(i-1)} + \Delta \vartheta_{n+1}^{(i-1)}$
vitesse angulaire	$\omega_{n+1}^{(i)} = \frac{\gamma}{\beta h} \vartheta_{n+1}^{(i)} + (1 - \frac{\gamma}{\beta}) \omega_n + h(1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \alpha_n$
accélération angulaire	$\alpha_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{\beta h^2} \vartheta_{n+1}^{(i)} - \frac{1}{\beta h} \omega_n - \frac{\frac{1}{2} - \beta}{\beta} \alpha_n$
matrice de rotation	$\Lambda_{n+1}^{(i)} = \Lambda_n \exp[\vartheta_{n+1}^{(i)}]$

Tableau 2. Mise à jour des variables de rotations

La figure 3 représente graphiquement que la matrice anti-symétrique de rotation actuelle Θ_{n+1} est mise à jour dans l'espace tangent linéaire $T_{\mathbb{R}SO(3)}$ de manière additive simple exactement comme le vecteur de position φ_{n+1} est actualisé dans l'espace \mathbb{R}^3 . La vitesse et l'accélération angulaires sont actualisées

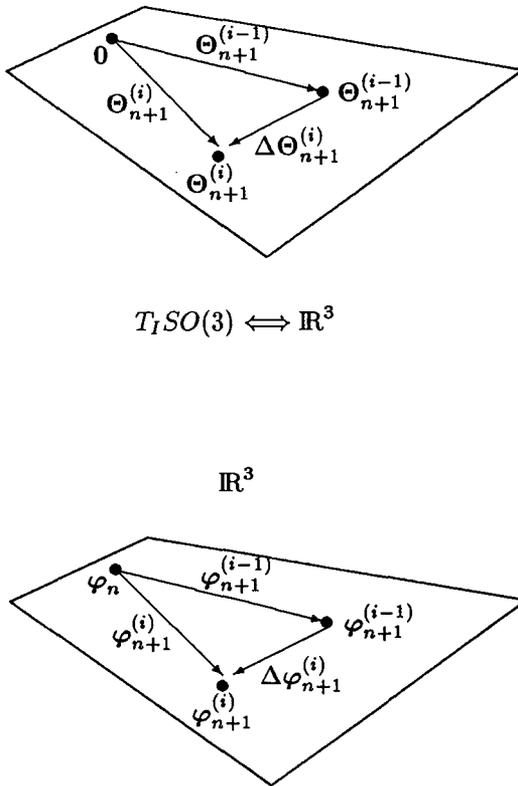


Figure 3. Mise à jour itérative de la rotation actuelle dans $T_I SO(3)$ (en haut) et de la position dans \mathbb{R}^3 (en bas)

similairement aux vitesse et accélération linéaires à cause de la simplicité du schéma (32).

Nous faisons appel pour l'actualisation de la matrice orthogonale de rotation aux paramètres d'Euler aussi appelés quaternions (voir [Arg82]). L'actualisation de \mathbf{A} est optimisée du point de vue temps de calcul et précision par la composition multiplicative des quaternions associés comme résumé dans le tableau 3.

Remarque 2: La procédure d'actualisation des variables rotationnelles doit être intégrée au niveau du calcul du résidu et de la matrice tangente c-à-d en chaque point d'intégration numérique. Les vecteurs vitesse et accélération angulaires ainsi que la rotation actuelle sont obtenus à partir des valeurs nodales (déjà mise à jour) par simple interpolation linéaire. En réalité, la commutation schéma

- récupérer le quaternion de Λ_n

$$\{q_{01}, \mathbf{q}_1\}$$

- calcul du quaternion de $\exp[\vartheta_{n+1}^{(i)}]$

$$\{q_{02}, \mathbf{q}_2\} = \left\{ \cos \frac{\vartheta_{n+1}^{(i)}}{2}, \frac{\sin \frac{\vartheta_{n+1}^{(i)}}{2}}{\vartheta_{n+1}^{(i)}} \vartheta_{n+1}^{(i)} \right\}$$

- composition multiplicative du quaternion de $\Lambda_{n+1}^{(i)} = \Lambda_n \exp[\vartheta_{n+1}^{(i)}]$

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} q_{01} & -\mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_1 & q_{01} \mathbf{I} + \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{02} \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$$

- calcul de la matrice de rotation

$$\Lambda_{n+1}^{(i)} = (q_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{I} + q_0 \mathbf{Q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}$$

Tableau 3. Mise à jour des grandes rotations - Vecteur de rotation actuelle

temporel/actualisation-interpolation est possible ici du moment que nous travaillons en version matérielle c-à-d dans $T_7SO(3)$. Ceci est une autre différence par rapport à l'option spatiale où il n'est pas justifié d'interpoler ces variables rotationnelles nodales car elles appartiennent à des espaces tangents à $SO(3)$ différents selon les pas de temps et selon les nœuds. C'est la raison pour laquelle la mise à jour dans ([IAM97]) ne peut avoir lieu qu'aux points d'intégration numérique de Gauss.

4.1. Alternative pour la mise à jour des rotations - Vecteur de rotation itérative

La seconde possibilité d'effectuer la mise à jour des rotations consiste à appliquer la fonction exponentielle à chaque itération, donc sur le vecteur de rotation itérative $\Delta\psi$

$$\Lambda_{n+1}^{(i)} = \Lambda_{n+1}^{(i-1)} \exp[\Delta\psi_{n+1}^{(i-1)}] \quad (46)$$

Le paramètre $\Delta\psi$ ne possède un sens qu'entre deux itérations et ne peut pas être cumulé sur un ou plusieurs pas de temps. Par conséquent, nous avons besoin de revenir au vecteur de rotation actuelle ϑ_{n+1} associant l'algorithme

temporel (32) dans une formulation basée sur $\Delta\psi$ pour pouvoir définir une rotation au moins entre deux pas de temps.

Nous reprenons le principe des travaux virtuels (16) utilisant le champ de rotation virtuelle $\delta\psi$ comme fonction test de rotation et nous l'établissons à l'instant t_{n+1} . Dès lors, la forme exactement linéarisée de cette formulation s'exprime sous la forme suivante

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\delta\pi_{n+1,\varepsilon}] = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [(\pi_{int} - \pi_{ext})_{n+1,\varepsilon}] + \int_L \{ \delta\varphi \cdot A_\rho \Delta\mathbf{a}_{n+1} + \delta\psi \cdot (\mathbf{J}_\rho \Delta\alpha_{n+1} + \omega_{n+1} \times (\mathbf{J}_\rho \Delta\omega_{n+1}) + \Delta\omega_{n+1} \times (\mathbf{J}_\rho \omega_{n+1})) \} ds \quad (47)$$

Cette linéarisation a été obtenue par la dérivée directionnelle suivant $\Delta\varphi_{n+1}$ et $\Delta\psi_{n+1}$ le vecteur de rotation itérative.

Les relations (40) et (41) définissant les variations incrémentales de la vitesse ω_{n+1} et l'accélération α_{n+1} sont valables sauf que nous devons exprimer l'incrément $\Delta\vartheta_{n+1}$ en fonction du degré de liberté de rotation considéré c-à-d $\Delta\psi_{n+1}$. Le calcul différentiel nous permet d'écrire la relation (35) en substituant le symbole virtuel δ par le symbole incrémental Δ , autrement dit

$$\Delta\psi_{n+1} = \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta\vartheta_{n+1} \quad (48)$$

ou encore

$$\Delta\vartheta_{n+1} = \mathbf{T}^{-T}(\vartheta_{n+1}) \Delta\psi_{n+1} \quad (49)$$

Ce dernier résultat fournit le calcul de la vitesse et l'accélération angulaire incrémentales

$$\Delta\omega_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{T}^{-T}(\vartheta_{n+1}) \Delta\psi_{n+1} \quad (50)$$

$$\Delta\alpha_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{T}^{-T}(\vartheta_{n+1}) \Delta\psi_{n+1} \quad (51)$$

avec (voir [IFK95])

$$\mathbf{T}^{-1}(\vartheta_{n+1}) = \frac{\vartheta_{n+1}/2}{\tan(\vartheta_{n+1}/2)} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \Theta_{n+1} + \frac{1}{\vartheta_{n+1}^2} [1 - \frac{\vartheta_{n+1}/2}{\tan(\vartheta_{n+1}/2)}] \vartheta_{n+1} \otimes \vartheta_{n+1} \quad (52)$$

Finalement, la forme exacte de l'opérateur tangent peut être mise sous la forme :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\delta\pi_{n+1,\varepsilon}] = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [(\pi_{int} - \pi_{ext})_{n+1,\varepsilon}] + \int_L \{ \delta\varphi \cdot \frac{1}{\beta h^2} A_\rho \Delta\varphi_{n+1} + \delta\psi_{n+1} \cdot (\frac{1}{\beta h^2} \mathbf{J}_\rho + \frac{\gamma}{\beta h} ([\omega_{n+1} \times] \mathbf{J}_\rho - [(\mathbf{J}_\rho \omega_{n+1}) \times]) \mathbf{T}^{-T}(\vartheta_{n+1})) \Delta\psi_{n+1} \} ds \quad (53)$$

Nous remarquons que cette forme est relativement moins élaborée que la forme (45). En effet la partie géométrique est absente. Cependant, pour pouvoir

-
- récupérer le quaternion de $\Lambda_{n+1}^{(i-1)}$
 - calcul du quaternion de $\exp[\Delta\psi_{n+1}^{(i-1)}]$
 - composition multiplicative du quaternion de $\Lambda_{n+1}^{(i)} = \Lambda_{n+1}^{(i-1)} \exp[\Delta\psi_{n+1}^{(i-1)}]$
 - calcul de la matrice de rotation $\Lambda_{n+1}^{(i)}$
 - calcul du quaternion de la matrice de rotation $\exp[\vartheta_{n+1}^{(i)}] = \Lambda_{n+1}^{(i)} \Lambda_n^T$
 - calcul du vecteur de rotation actuelle $\vartheta_{n+1}^{(i)}$
-

Tableau 4. *Mise à jour des grandes rotations - Vecteur de rotation itérative*

mettre à jour ω_{n+1} et α_{n+1} (la procédure du tableau 2 reste valable) et calculer la matrice tangente nous devons extraire le vecteur ϑ_{n+1} pendant la procédure d'actualisation de la matrice orthogonale à chaque itération (voir tableau 4).

Remarque 3: Nous n'avons pas besoin de passer par l'algorithme de Spurrier ([Spu78]) comme pour [SVQ88] dans l'option spatiale afin d'extraire le vecteur de rotation actuelle par un quaternion car ce dernier est déjà calculé dans la procédure d'actualisation de la matrice Λ_{n+1} par le vecteur de rotation itérative $\Delta\psi_{n+1}$ (tableau 4). Nous évitons ainsi l'énorme coût et les inconvénients de cet algorithme: d'une part cet algorithme possède une singularité quand $\vartheta_{n+1} \simeq 2\pi$, et d'autre part, un vecteur ϑ_{n+1} peut être confondu avec $-\vartheta_{n+1}$ car les deux possèdent le même quaternion.

5. Exemples numériques

Dans cette section nous traitons des applications numériques dans le but de montrer et évaluer l'efficacité des formulations proposées. Tous les calculs sont effectués avec le logiciel *FEAP* décrit dans la référence [ZT89].

Ces applications ont été simulées avec des éléments finis à deux nœuds dont les formulations ont été abordées dans cet article. Le tableau 5 établit la nomenclature de chacun des éléments testés avec une brève description. Deux points d'intégration numérique de Gauss sont utilisés pour l'évaluation numérique de la partie d'inertie de l'opérateur tangent (c-à-d matrice tangente de masse) alors qu'avec un seul point de Gauss nous calculons la matrice tangente de rigidité pour remédier au phénomène de blocage en cisaillement transverse.

élément	d.d.l. de rotation	forme faible	linéarisation
v. r. actuelle (matériel)	$\Delta\vartheta_{n+1}$	(34)	(45)
v. r. itérative (matériel)	$\Delta\psi_{n+1}$	(16)	(53)
v. r. totale (matériel)	$\Delta\varphi_{\vartheta,n+1}$		
v. r. actuelle (spatial)	$\Delta\vartheta_{n+1}$	([IAM97])	([IAM97])
v. r. itérative (spatial)	$\Delta\psi_{n+1}$	([IAM97])	([IAM97])
v. r. totale (spatial)	$\Delta\varphi_{\vartheta,n+1}$		

Tableau 5. *Librairie des éléments finis*

5.1. Poutre de Bathe et Boulourchi

Cet exemple traite de la poutre de Bathe et Boulourchi qui est une portion d'un cercle de rayon $R = 100$ et d'angle central de 45 degrés encastrée d'un côté et soumise de l'autre côté à une force suivieuse $\mathbf{F}(t) = 100t \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{e}_z$. La poutre est de section carrée et ses caractéristiques sont : module d'Young $E = 10^7$, coefficient de Poisson $\nu = 0$, inertie de translation $A_\rho = 1$, et inertie de rotation $\mathbf{J}_\rho = 10 \text{diag}(2, 1, 1)$.

L'analyse est effectuée avec un modèle de 8 éléments finis à 2 nœuds et le pas de temps est choisi comme $h = 0.1$.

La force suivieuse $\mathbf{F}(t)$ sollicitant la structure est non conservatrice car elle est dépendante de la déformation et elle engendre une contribution non symétrique dans la matrice tangente au niveau du nœud sollicité. Nous obtenons donc cette correction de la matrice tangente par une linéarisation exacte différente selon la paramétrisation des rotations dans chaque formulation.

Dans la figure 4 nous traçons les variations en fonction du temps des trois composantes du déplacement et de la norme de rotation à l'extrémité sollicitée obtenus avec les différentes formulations décrites dans les sections précédentes. Ces résultats sont en parfait accord et mettent en évidence les vibrations instables d'importante amplitude que subit graduellement l'arc (avec la dominance des effets d'inertie) après un départ qui est plus lent. Une illustration graphique par les formes déformées successives après chaque 10 pas de temps est fournie dans la figure 5.

5.2. Toupie tournante

Le pendule de la figure 6 est constitué d'un disque uniforme de masse $m = 15$ et de rayon $R = 0.25$ attaché à une extrémité d'un bras rigide de masse nulle et de longueur $L = 4R$ dont la deuxième extrémité est simplement supportée. Ce gyroscope est induit en mouvement de corps rigide grâce à une vitesse angulaire

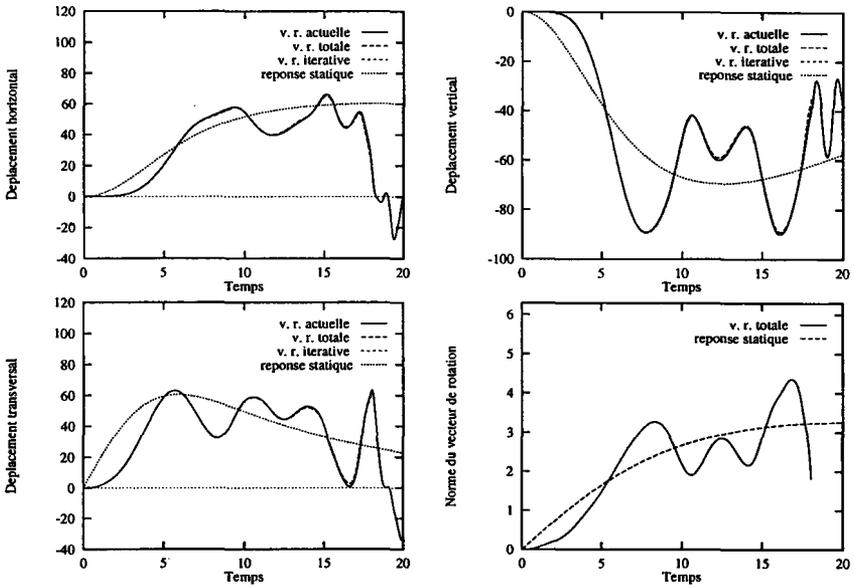


Figure 4. Poutre de Bathe et Boulourchi. Réponses à l'extrémité sollicitée

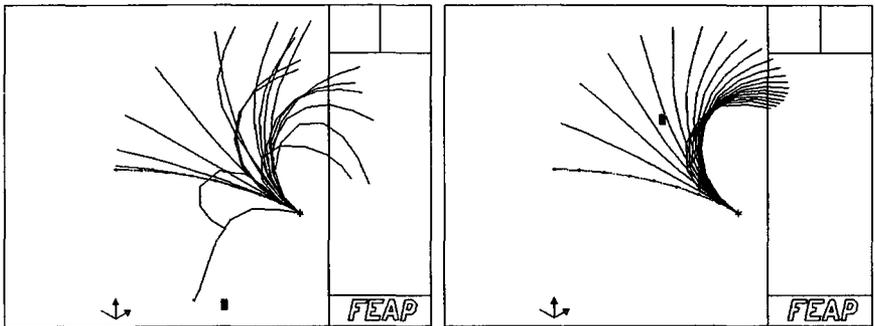


Figure 5. Poutre de Bathe et Boulourchi. Vue de perspective des déformées successives ; à gauche : analyse dynamique, à droite : analyse statique

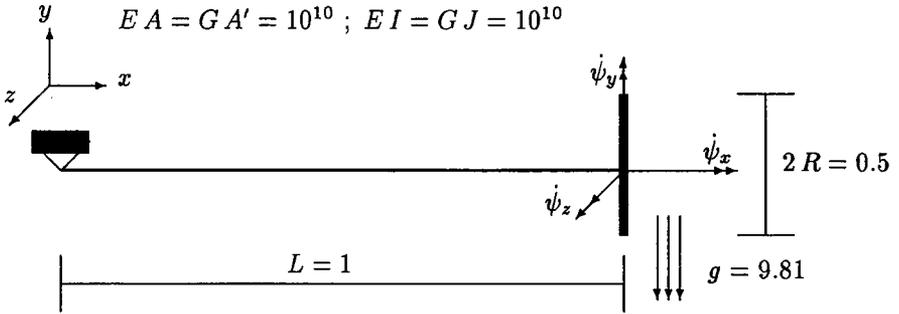


Figure 6. *Toupie tournante. Données du problème*

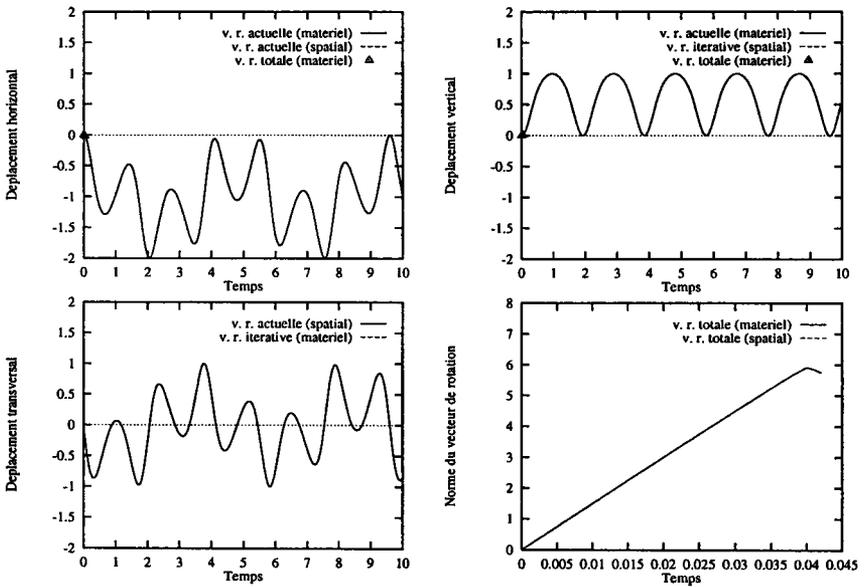


Figure 7. *Toupie tournante. Réponses du centre de gravité du disque*

initiale $\dot{\psi} = 150 < 1$, $\frac{2R^2}{L^2+R^2}$, $0 > T$ dans le champ de pesanteur $g = -9.81 e_y$.

Nous avons effectué l'analyse avec un modèle constitué d'un élément fini de poutre 3d et d'un élément de point matériel représentant le centre de gravité d'un corps solide non déformable. Ce dernier est basé pour la partie rotation sur les mêmes formulations possibles des rotations que nous avons décrites et possède des degrés de liberté identiques à ceux de la poutre. Cet élément contribue également dans l'opérateur tangent dynamique déterminé par la linéarisation exacte des effets d'inertie et on procède à une mise à jour des variables de rotation d'une manière similaire à celle de l'élément de poutre.

L'analyse réalisée avec un pas de temps assez petit $h = 10^{-3}$ en raison de la haute rigidité de la poutre, nous fournissons les réponses de la figure 7 qui mettent en évidence un mouvement vibratoire harmonique périodique des trois composantes du déplacement au centre de gravité du disque. La composante verticale reste positive dans ses variations en fonction du temps et montre clairement que grâce au choix judicieux de la vitesse angulaire initiale le gyroscope oscille dans l'hémisphère supérieur malgré le poids propre du disque.

Il est à noter que les résultats obtenus avec les versions matérielles et spatiales des paramétrisations des grandes rotations sont identiques bien que leurs éléments finis ne possèdent pas les mêmes degrés de liberté. Nous constatons aussi que la formulation par le vecteur de rotation totale devient rapidement incapable de poursuivre l'analyse après $t \approx 0.04$ car la norme de rotation atteint très vite une valeur proche de $\vartheta \approx 2\pi$ (comme le montre la figure 7) provoquant la singularité de la matrice \mathbf{T} et la divergence de l'algorithme.

5.3. Poutre circulaire en grandes transformations

Pour mettre en évidence l'influence de la courbure initiale, nous considérons la réponse dynamique non linéaire d'une poutre fermée dont la configuration initialement circulaire et les propriétés matérielles sont représentés dans la figure 8. La structure est soumise à deux forces transversales F et $-F$. Le module de chaque force suit une loi qui est linéairement croissante dans le temps jusqu'à la valeur maximale ensuite linéairement décroissante jusqu'à la valeur nulle (voir figure 8). Nous supposons que les conditions initiales sont nulles et que la poutre est libre de toute condition aux limites. Le maillage éléments finis consiste en 16 éléments et 16 nœuds et nous utilisons un pas de temps $h = 0.1$ qui est gardé constant durant toute la simulation.

Suivant chaque direction, nous constatons que les déplacements des nœuds sollicités 1 et 5 sont exactement les mêmes mais de signes opposés. D'un autre côté, il est justifié que les réponses suivant l'axe horizontal x et vertical y soient identiques au signe près étant donnée l'anti-symétrie des sollicitations (voir figure 9 pour les résultats obtenus avec le vecteur de rotation actuelle).

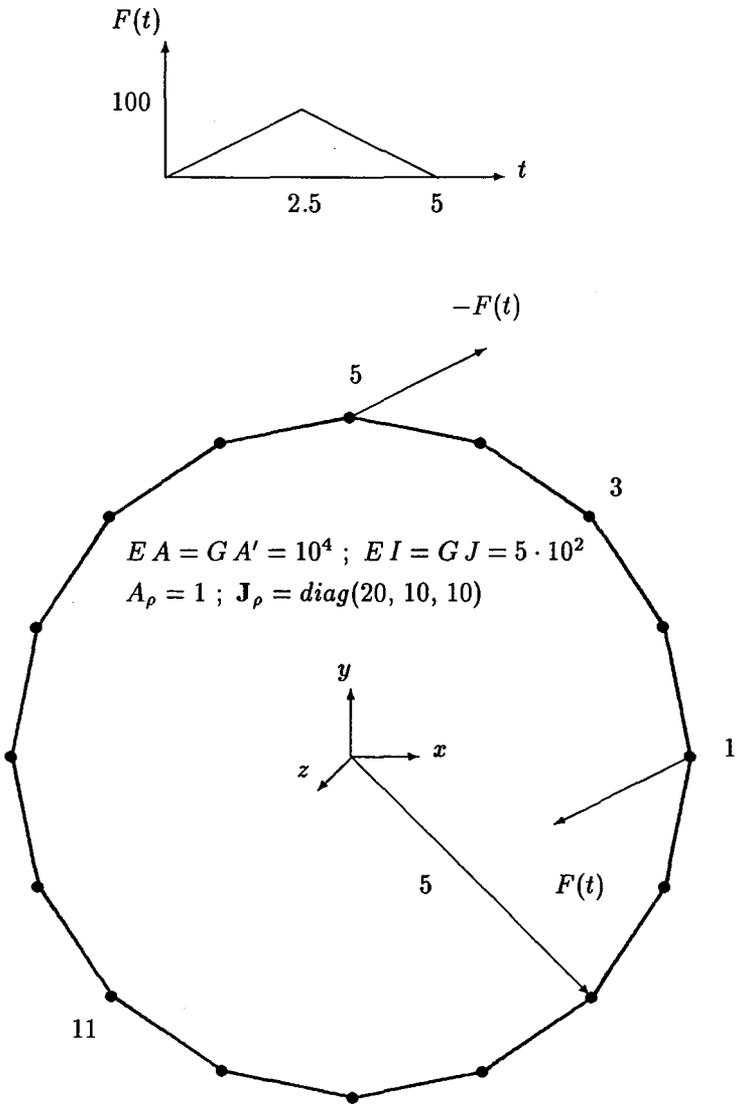


Figure 8. Poutre circulaire. Données du problème

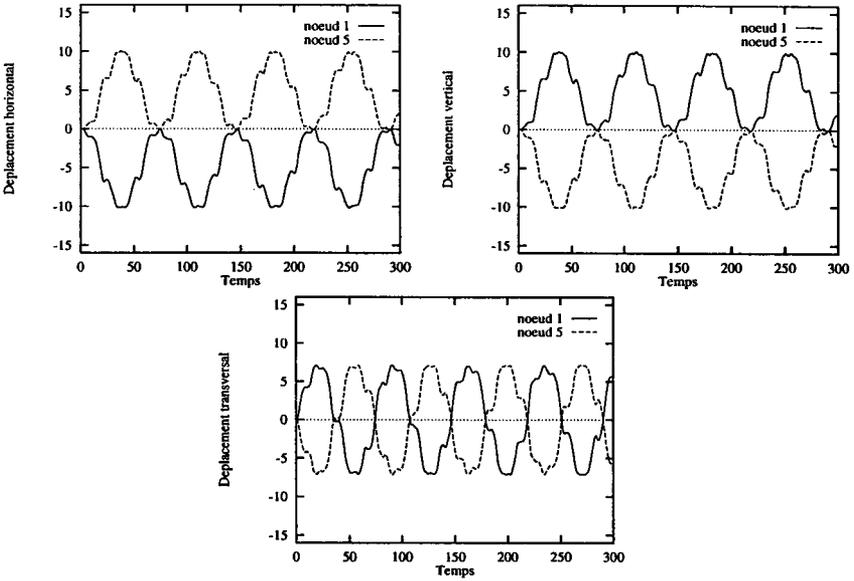


Figure 9. Poutre circulaire. Déplacements aux nœuds sollicités

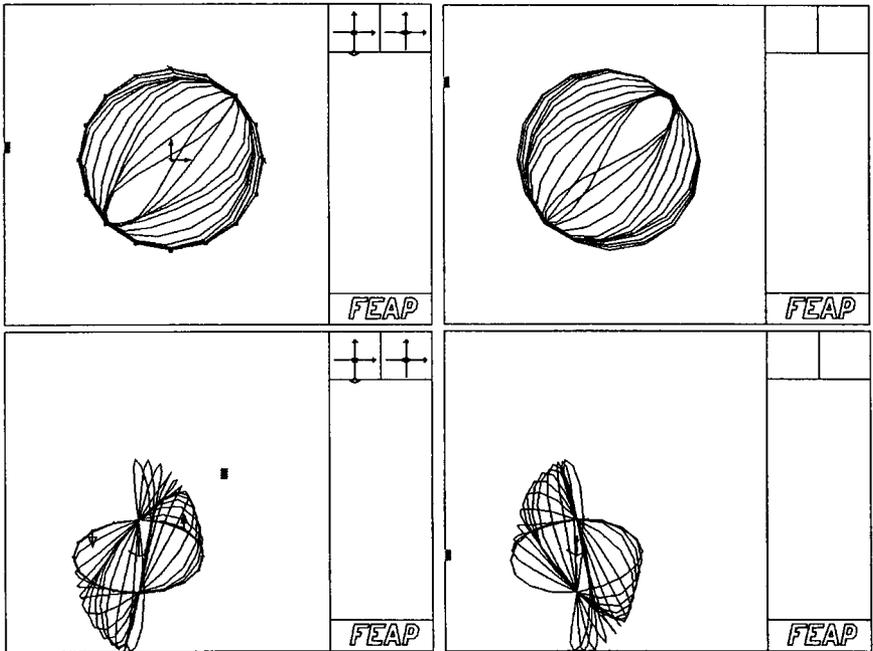


Figure 10. Poutre circulaire. Vue dans le plan (en haut) et vue de perspective (en bas) des déformées successives ; à gauche $0 \leq t \leq 19.5$, à droite $21 \leq t \leq 39$

Dans la figure 10 nous fournissons les déformées successives de la structure qui illustrent un mode anti-symétrique de déformation de flexion et de torsion combinées correspondant à des déplacements nuls aux nœuds 3 et 11 qui appartiennent à l'axe d'anti-symétrie.

5.4. Grands mouvements d'une hélice flexible

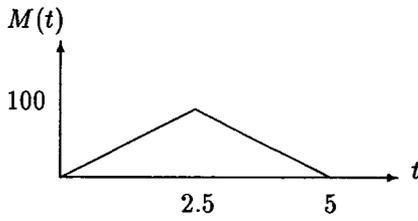
Cet exemple montre la capacité des formulations proposées (notamment par le vecteur de rotation actuelle) à simuler la dynamique des structures réticulées composées de poutres quand celles-ci sont soumises à des grands mouvements et à des grandes déformations élastiques. Nous considérons pour cela le cas simple d'une structure de forme X constituée de deux poutres identiques rigidement attachées entre elles au niveau de leur centre avec un angle droit $\frac{\pi}{2}$ comme le montre la figure 12.

Cette hélice n'est sous aucune condition aux limites et elle est induite en mouvement quand une force F perpendiculaire au plan est appliquée aux deux extrémités gauches, une force $-F$ est appliquée aux deux extrémités droites, et un moment concentré M est appliqué à la liaison (voir figure 11). Toutes ces sollicitations possèdent des modules proportionnels qui suivent la même loi identique à celle de l'exemple précédent. La contrainte de la liaison est explicitement imposée dans la procédure d'assemblage des éléments finis, de manière à ne pas utiliser la démarche des multiplicateurs de Lagrange dans ce cas. Nous avons discrétisé la structure en 20 éléments finis et 21 nœuds et le pas de temps utilisé pour l'intégration des équations dynamiques est $h = 0.1$.

Aux nœuds sollicités 1 et 11, nous fournissons dans la figure 12 les trois composantes du déplacement obtenues suivant les directions x , y et z tracées en fonction du temps. Les grands mouvements de l'hélice vus dans le plan et vus de perspective sont illustrés dans la figure 13. Ils montrent que la liaison qui est en fait le point d'anti-symétrie des charges ne subit aucun déplacement durant les transformations. Nous constatons également qu'en chaque instant l'hélice se déforme dans un plan qui lui subit des grandes rotations 3d.

5.5. Convergence de la méthode de Newton

Dans le tableau 6 nous présentons les normes de convergence sur le résidu et sur l'énergie fournies par chaque élément fini sur l'exemple de la poutre circulaire. Ces normes montrent la très bonne convergence quadratique de la méthode de Newton - à proximité de la solution - notamment pour l'élément basé sur le vecteur de rotation actuelle, comparé aux deux autres alternatives. Ajoutons que cela peut être interprété par le fait que le modèle de la théorie géométriquement exacte est linéarisé d'une manière exacte et que dans un tel cas les seuls sources d'erreur sont :



$$EA = GA' = 10^4 ; EI = GJ = 5 \cdot 10^2$$

$$A_\rho = 1 ; \mathbf{J}_\rho = \text{diag}(20, 10, 10)$$

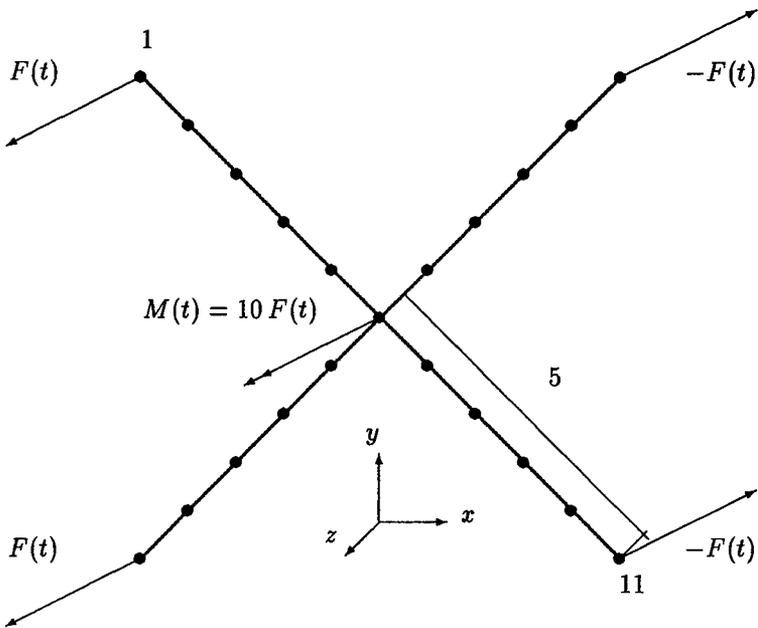


Figure 11. Hélice flexible. Données du problème

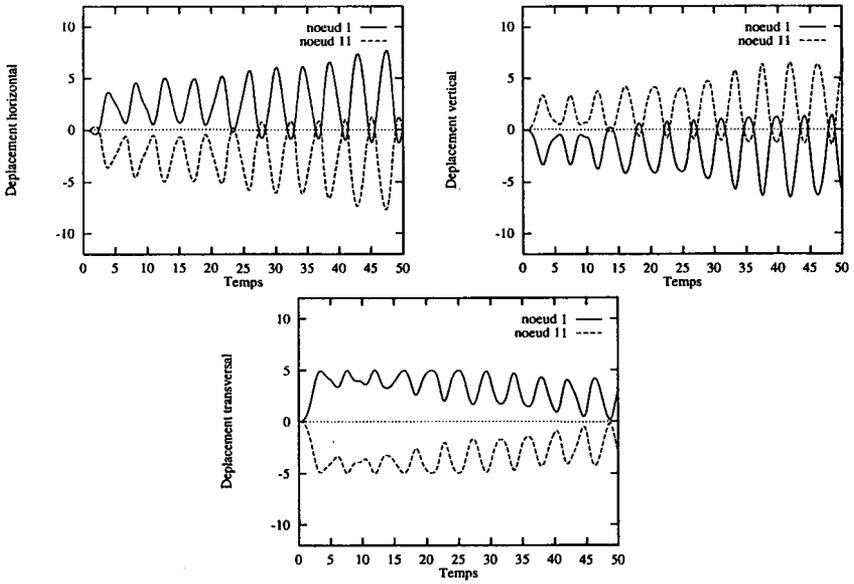


Figure 12. Hélice flexible. Déplacements aux nœuds sollicités

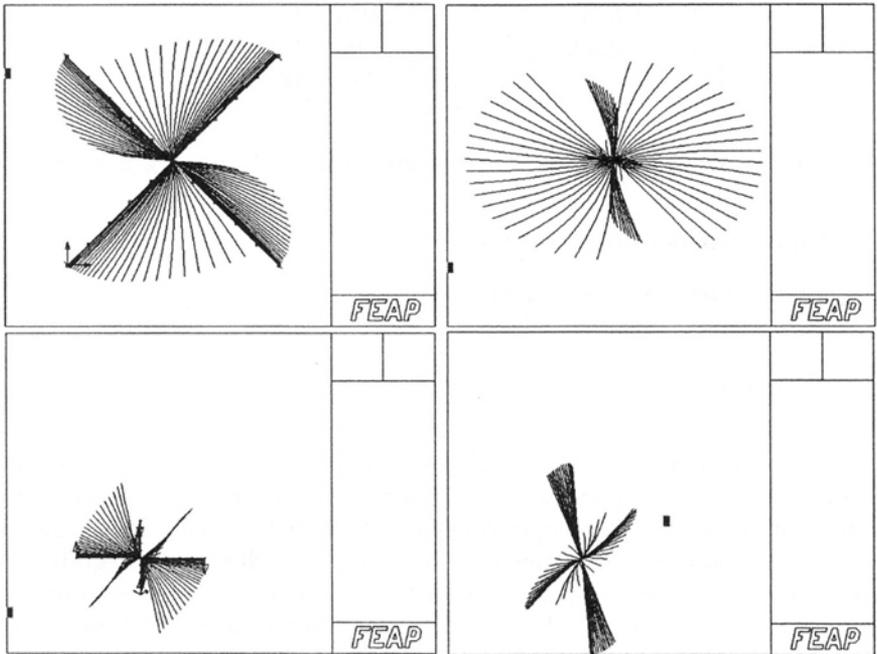


Figure 13. Hélice flexible. Vue dans le plan (en haut) et vue de perspective (en bas) des déformées successives ; à gauche $0 \leq t \leq 3$, à droite $3.1 \leq t \leq 5$

Itér.	v. r. actuelle	
No.	Norme du résidu	Norme de l'énergie
0	$2.468 \times 10^{+4}$	$4.252 \times 10^{+3}$
1	$2.290 \times 10^{+3}$	7.690×10^0
2	1.161×10^0	1.080×10^{-5}
3	3.168×10^{-5}	9.214×10^{-16}
4	4.005×10^{-9}	6.431×10^{-24}

Itér.	v. r. itérative	
No.	Norme du résidu	Norme de l'énergie
0	$2.468 \times 10^{+4}$	$4.251 \times 10^{+3}$
1	$2.293 \times 10^{+3}$	7.704×10^0
2	1.178×10^0	1.088×10^{-5}
3	1.069×10^{-4}	7.104×10^{-14}
4	5.825×10^{-9}	8.317×10^{-23}

Itér.	v. r totale	
No.	Norme du résidu	Norme de l'énergie
0	$2.425 \times 10^{+4}$	$4.353 \times 10^{+3}$
1	$2.331 \times 10^{+3}$	8.079×10^0
2	1.060×10^0	1.087×10^{-5}
3	3.981×10^{-3}	2.276×10^{-10}
4	3.322×10^{-5}	1.606×10^{-14}
5	2.769×10^{-7}	1.118×10^{-18}

Tableau 6. Poutre circulaire. Normes quadratiques de convergence à $t = 18$

- l'approximation éléments finis,
- l'approximation du schéma d'intégration.

6. Conclusions

Ce document a été consacré au traitement des effets d'inertie liés aux grandes rotations des poutres 3d en considérant la forme matérielle (c-à-d la description transformée sur la configuration initiale). Nous avons examiné trois paramétrisations différentes pour lesquelles des schémas d'intégration de type Newmark ont été implantés dans la résolution itérative des équations non linéaires du mouvement. Les principales conclusions peuvent être résumées comme suit :

1. Du point de vue de l'algorithme temporel la formulation vecteur de rotation totale paraît simple c-à-d qu'aucune actualisation particulière des

grandes rotations n'est nécessaire. Cependant, la matrice d'inertie tangente se révèle très compliquée. De plus nous avons remarqué que similairement à la statique, cette paramétrisation n'est valable que pour des rotations inférieures à 2π , ce qui n'est souvent pas le cas en analyse dynamique des structures et des systèmes constitués de poutres.

2. Contrairement à l'analyse statique dans la formulation basée sur le vecteur de rotation itérative, il est nécessaire d'introduire la notion du vecteur de rotation actuelle en vue d'écrire un schéma temporel consistant. Ce dernier vecteur doit être extrait à chaque pas de temps pour pouvoir écrire et résoudre les équations du mouvement en faisant appel à une procédure additionnelle. Ce même schéma a été utilisé d'une façon optimale dans la formulation par le vecteur de rotation actuelle, et il s'est révélé le plus intéressant étant donné la forme compacte de l'opérateur tangent et de la procédure simplement additive d'actualisation des paramètres de rotations. De plus, cette formulation par le vecteur de rotation actuelle reste efficace quelles que soient les normes des rotations subies. Ajoutons que pour la partie interne cette paramétrisation fournit un opérateur tangent riche et une matrice tangente de rigidité symétrique.
3. La version matérielle ne faisant appel ni au transport parallèle dans le schéma temporel ni à la dérivée de Lie dans le calcul différentiel virtuel et incrémental, se présente comme une alternative plus simple et moins lourde que l'option spatiale (voir [IAM97]) même si elle manipule des objets dont le sens est moins naturel à saisir.

La motivation principale de l'implantation proposée du schéma temporel de Newmark est pour les applications des systèmes dynamiques hautement flexibles. Dans la dynamique des systèmes multi-corps utilisant les multiplicateurs de Lagrange (pour forcer les contraintes) ou bien des systèmes composés de corps flexibles et rigides, le problème est décrit par un système d'équations raides ou alors par un système algébrique d'équations différentielles. L'algorithme de Newmark subirait quelques difficultés liées à la perte de la conservation de l'énergie. Comme le montre les travaux antérieurs (par exemple [HSD77] ou [HCL78]) cet inconvénient peut être contourné en imposant explicitement la conservation d'énergie dans le schéma d'intégration temporelle.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les appuis financiers du programme 'ABONDÉMENT ANVAR 95' et du programme 'Bourses Franco-Algériennes'.

Bibliographie

- [Arg82] J.H. Argyris. An excursion into large rotations. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32:85–155, 1982.
- [BE76] K.J. Bathe and Wilson E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [CG88] A. Cardona and M. Géradin. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26:2403–2438, 1988.
- [HCL78] T.J.R. Hughes, T.K. Caughey, and W.K. Lin. Finite element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. *ASME J. Appl. Mech.*, 45:36–370, 1978.
- [HSD77] E. Haug, N.Q. Son, and A.L. DeRouvray. An improved energy conserving implicit time integration algorithm for nonlinear dynamic structural analysis. In *Transactions of 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, San Francisco, 1977.
- [IAM96] A. Ibrahimbegović and M. Al Mikdad. *On dynamics of finite rotations of 3d beams, Proceedings of Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, pages 447–453. Désidéri J.L. et al., John Wiley, London, 1996.
- [IAM97] A. Ibrahimbegović and M. Al Mikdad. Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, in press, 1997.
- [Ibr97] A. Ibrahimbegović. *On the Choice of Finite Rotation Parameters*. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* (Anniversary Volume Dedicated to J.T. Oden), in press, 1997.
- [IFK95] A. Ibrahimbegović, F. Frey, and I. Kožar. Computational aspects of vector-like parameterization of three-dimensional finite rotations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 38:3653–3673, 1995.
- [MH83] J.E Marsden and T.J.R Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs , N.J., 1983.
- [Rei72] E. Reissner. On one-dimensional finite strain beam theory: The plane problem. *J. Appl. Math. Phys.*, 23:795–804, 1972.
- [Sim85] J.C. Simo. A finite-strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part 1. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 49:55–70, 1985.
- [Spu78] R.A. Spurrier. Comment on 'singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix'. *J. Spacecraft*, 15:255–256, 1978.

- [SVQ88] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions: A geometrically exact approach. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 66:125–161, 1988.
- [ZT89] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*, volume 1. McGraw-Hill, London, 1989.

Article soumis le 5 juillet 1997
Version révisée le 30 octobre 1997

Annexe. Dérivation de la partie statique

Dans le but d'une compréhension complète de l'analyse dynamique des poutres 3 d simulées avec la théorie géométriquement exacte nous revenons à la partie statique modélisant les déformations et efforts internes. Nous détaillons la dérivation des équations pour la formulation des rotations par le vecteur de rotation actuelle ϑ_{n+1} . Pour alléger l'écriture nous omettons l'indice $n+1$ pour la suite sauf pour le vecteur ϑ_{n+1} .

La matrice orthogonale de rotation est exprimée en fonction de la variable principale de rotation ϑ_{n+1} par la fonction exponentielle appliquée avant la rotation Λ_n car la description est matérielle

$$\Lambda = \Lambda_n \exp[\vartheta_{n+1}] \quad (54)$$

Cette définition nous permet de réécrire la déformation longitudinale en fonction de la déformation ϵ_n du pas de temps précédent

$$\epsilon = \epsilon_n + \Lambda_n (\exp[\vartheta_{n+1}]^T \varphi_{n+1} - \varphi_n) \quad (55)$$

En ce qui concerne la courbure qui est en réalité une certaine mesure du gradient de la matrice Λ par rapport à l'abscisse curviligne, si nous voulons établir une relation similaire à l'équation ci-dessus nous devons revenir à la matrice anti-symétrique de courbure et exploiter la relation (54), ainsi

$$\mathbf{K} = \exp[\vartheta_{n+1}]^T (\exp[\vartheta_{n+1}])' + \exp[\vartheta_{n+1}]^T \Lambda_n^T \Lambda_n' \exp[\vartheta_{n+1}] \quad (56)$$

Ce qui nous donne la relation entre les matrices de courbures aux pas actuel et précédent mettant en évidence le transport parallèle entre \mathbf{K} et \mathbf{K}_n

$$\mathbf{K} = \exp[\vartheta_{n+1}]^T (\exp[\vartheta_{n+1}])' + \exp[\vartheta_{n+1}]^T \mathbf{K}_n \exp[\vartheta_{n+1}] \quad (57)$$

avec

$$\mathbf{K}_n = \Lambda_n^T \Lambda_n' \quad (58)$$

Cette relation entre matrices anti-symétrique de courbure est traduite au niveau des vecteurs axiaux κ et κ_n par la simple relation

$$\kappa = \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \vartheta'_{n+1} + \exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n \tag{59}$$

Le travail virtuel statique (19) peut être réécrit en vertu de la relation (35) sous l'expression suivante

$$\delta\pi_{int} - \delta\pi_{ext} = \int_L \{ \delta\varepsilon \cdot \mathbf{n} + \delta\kappa \cdot \mathbf{m} \} ds - \int_L \{ \delta\varphi \cdot \bar{\mathbf{n}} + \delta\vartheta_{n+1} \cdot (\mathbf{T}(\vartheta_{n+1}) \Lambda_n^T \bar{\mathbf{m}}) \} ds \tag{60}$$

où les déformations virtuelles sont exprimées en fonction des champs de position φ et de rotation ϑ_{n+1}

$$\delta\varepsilon = \Lambda^T \delta\varphi' - (\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta\vartheta_{n+1}) \times (\Lambda^T \varphi') \tag{61}$$

$$\delta\kappa = \delta\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \vartheta'_{n+1} + \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta\vartheta'_{n+1} - (\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta\vartheta_{n+1}) \times (\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n) \tag{62}$$

En vue d'établir le système algébrique d'équations non linéaires, il est nécessaire d'appliquer la dérivée directionnelle afin de calculer la partie linéaire du travail virtuel. Pour la partie externe du travail virtuel, la linéarisation est à effectuer selon que la nature des sollicitations $\bar{\mathbf{n}}$ et $\bar{\mathbf{m}}$ est conservatrice ou non. Dans tous les cas, la partie linéaire exacte du travail virtuel des forces internes est calculée comme

$$L[\delta\pi_{int}] = \delta\pi_{int} + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [(\delta\pi_{int})_\varepsilon] \tag{63}$$

avec dérivation par rapport à ε dans la direction de φ et de ϑ_{n+1}

$$(\delta\pi_{int})_\varepsilon = \delta\pi_{int}(\varphi_{n+1} + \varepsilon \Delta\varphi_{n+1}, \vartheta_{n+1} + \varepsilon \Delta\vartheta_{n+1}) \tag{64}$$

D'une manière classique la partie incrémentale du travail virtuel interne est composée d'une partie matérielle et d'une partie géométrique, et peut être écrite sous la forme

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [(\pi_{int})_\varepsilon] = \int_L \{ \delta\varepsilon \cdot \Delta\mathbf{n} + \delta\kappa \cdot \Delta\mathbf{m} \} ds + \int_L \{ \Delta\delta\varepsilon \cdot \mathbf{n} + \delta\kappa \cdot \mathbf{m} \} ds \tag{65}$$

Les lois constitutives linéaires (8) et (9) largement justifiées dans l'analyse dynamique non linéaire des poutres conduisent à exprimer les parties incrémentales des efforts résultants sous la forme

$$\Delta\mathbf{n} = \mathbf{C}_n (\Lambda^T \Delta\varphi' - (\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta\vartheta_{n+1}) \times (\Lambda^T \varphi')) \tag{66}$$

$$\Delta\mathbf{m} = \mathbf{C}_m (\Delta\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \vartheta'_{n+1} + \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta\vartheta'_{n+1} - (\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta\vartheta_{n+1}) \times (\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n)) \tag{67}$$

Comme la configuration courante est très éloignée de la configuration initiale, les déformations virtuelles sont assez grandes et un calcul exact de leur partie linéaire doit alors être accompli

$$\begin{aligned}
 \Delta \delta \epsilon = & -(\Delta \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta \vartheta_{n+1}) \times (\Lambda^T(\vartheta_{n+1}) \varphi') \\
 & -(\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta \vartheta_{n+1}) \times (\Lambda^T \Delta \varphi') \\
 & -(\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta \vartheta_{n+1}) \times (\Lambda^T \delta \varphi') \\
 & +(\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta \vartheta_{n+1}) \times ((\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta \vartheta_{n+1}) \times \varphi')
 \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \delta \kappa = & \Delta \delta \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \vartheta'_{n+1} + \delta \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta \vartheta'_{n+1} + \Delta \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta \vartheta'_{n+1} \\
 & -(\Delta \mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta \vartheta_{n+1}) \times (\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n) \\
 & +(\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \delta \vartheta_{n+1}) \times ((\mathbf{T}^T(\vartheta_{n+1}) \Delta \vartheta_{n+1}) \times (\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n))
 \end{aligned} \tag{69}$$

Ainsi, nous aboutissons à la contribution de la partie interne du travail virtuel interne dans le système d'équations non linéaires

$$L[\delta \pi_{int}] = \int_L \begin{pmatrix} \delta \varphi' \\ \delta \vartheta_{n+1} \\ \delta \vartheta'_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{r} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} \Delta \varphi' \\ \Delta \vartheta_{n+1} \\ \Delta \vartheta'_{n+1} \end{pmatrix} \right) ds \tag{70}$$

le vecteur \mathbf{r} qui génère le vecteur résidu interne est donné par

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Lambda^T & [\Lambda^T \varphi' \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} + [\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} \tag{71}$$

où

$$\mathbf{R} = \Xi(\vartheta'_{n+1}) \tag{72}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Xi(\mathbf{a}) = & (c_1 \mathbf{a} - c_2(\vartheta_{n+1} \times \mathbf{a}) + c_3(\vartheta_{n+1} \cdot \mathbf{a}) \vartheta_{n+1}) \otimes \vartheta_{n+1} \\
 & + c_4 \mathbf{A} + c_5((\vartheta_{n+1} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{I} + \vartheta_{n+1} \otimes \mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3
 \end{aligned} \tag{73}$$

La matrice \mathbf{K} qui génère la matrice tangente de rigidité composée d'une partie matérielle et d'une partie géométrique est donnée par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = & \begin{bmatrix} \Lambda^T & [\Lambda^T \varphi' \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} + [\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}^T \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^T & [\Lambda^T \varphi' \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} + [\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\Lambda[\mathbf{n} \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}[\mathbf{n} \times] \Lambda^T & \mathbf{T}[\mathbf{n} \times][\Lambda^T \varphi' \times] \mathbf{T}^T + \Pi(\mathbf{n} \times \Lambda^T \varphi') & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J} & \mathbf{\Pi}^T(\mathbf{m}) \\ 0 & \mathbf{\Pi}(\mathbf{m}) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}[\mathbf{m} \times] [\exp[\vartheta_{n+1}]^T \kappa_n \times] \mathbf{T}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

la matrice $\mathbf{\Pi}$ est déjà donnée dans (43), et

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & (c_1(\mathbf{m} \cdot \vartheta'_{n+1}) - c_2 \mathbf{m} \vartheta_{n+1} \times \vartheta'_{n+1}) + c_3(\mathbf{m} \cdot \vartheta_{n+1})(\vartheta_{n+1} \cdot \vartheta'_{n+1}) \mathbf{I} \\ & + (a_1(\mathbf{m} \cdot \vartheta'_{n+1}) - a_2 \mathbf{m} \cdot (\vartheta_{n+1} \times \vartheta'_{n+1}) + a_3(\mathbf{m} \cdot \vartheta_{n+1})(\vartheta_{n+1} \cdot \vartheta'_{n+1})) [\vartheta_{n+1} \otimes \vartheta_{n+1}] \\ & + c_5[\vartheta'_{n+1} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \vartheta'_{n+1}] + c_3(\mathbf{m} \cdot \vartheta_{n+1})[\vartheta'_{n+1} \otimes \vartheta_{n+1} + \vartheta \otimes \vartheta'_{n+1}] \\ & + c_3(\vartheta_{n+1} \cdot \vartheta'_{n+1})[\vartheta_{n+1} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \vartheta_{n+1}] \\ & - c_2[(\vartheta'_{n+1} \times \mathbf{m}) \otimes \vartheta_{n+1} + \vartheta_{n+1} \otimes (\vartheta'_{n+1} \times \mathbf{m})] . \end{aligned} \quad (75)$$

avec les coefficients $c_{i=1,5}$ qui sont déjà donnés dans l'équation (44), et les coefficients $a_{i=1,3}$

$$a_1 = c_3 - c_2 ; a_2 = (c_1 - 4c_2)/\vartheta_{n+1}^2 ; a_3 = (c_2 - 5c_3) \vartheta_{n+1}^2 . \quad (76)$$