

---

# Méthodes asymptotiques numériques pour la plasticité

Bouazza Braikat \* — Nouredine Damil \*  
Michel Potier-Ferry \*\*

\* *Laboratoire de calcul scientifique en mécanique  
Université Hassan II, Faculté des sciences Ben M'Sik  
Casablanca, Maroc*

\*\* *Laboratoire de physique et mécanique des matériaux  
URA CNRS 1215, ISGMP, Université de Metz, Ile du Saulcy  
57045 Metz, cedex 01*

---

**RÉSUMÉ.** *Notre objectif est d'étendre aux problèmes avec fortes non-linéarités les méthodes asymptotiques numériques qui avaient été développées en non linéaire géométrique. En plasticité, on rencontre des discontinuités de rigidité auquel cas, l'application de développements asymptotiques semble difficile ou impossible. Nous montrons comment on peut appliquer des techniques de perturbation à des problèmes régularisés et discrétisés par éléments finis. Nous considérons des régularisations, soit par une loi en puissance, soit par une loi de type hyperbolique.*

**ABSTRACT.** *In this paper, we extend to strongly non-linear problems the symptotic-numerical methods, that have been previously developed in an elastic framework. Within plasticity, the tangent modulus may vary discontinuously, so the solution paths can not be represented in the form of series. In this paper, we present some application of perturbation techniques to problems regularised and discretized by finite element method. Regularisations using power law or hyperbolic type law are considered.*

**MOTS-CLÉS :** *calcul non linéaire, perturbation, éléments finis, méthode asymptotique numérique, non linéarité forte, plasticité.*

**KEYWORDS :** *non-linear computation, perturbation, finite element, asymptotic-numerical method, strong non-linearity, plasticity.*

---

## 1. Introduction

Les méthodes asymptotiques numériques (MAN) ont été introduites pour le calcul non linéaire géométrique des structures élastiques [DP90] ; [ACDP93] ; [CDP94a]. Ces MAN appartiennent à la classe des méthodes de perturbation, dont on trouvera une bibliographie dans [Nay73] ; [NP81] ; [Dyk84] ; [Hin91]. Le principe général des MAN consiste à chercher les branches de solutions sous forme de représentation paramétrique en séries entières. Ces méthodes permettent la détermination d'une partie d'une branche de solution en n'inversant qu'une seule matrice de rigidité. Pour en faire une méthode numérique facile à utiliser, une méthode de continuation automatique a été développée [CDP94b] ; [Coc94]. Ainsi la branche de solution est obtenue à l'aide d'une succession de représentations analytiques sans aucune correction, à la différence des méthodes classiques de prédiction-corrrection où la branche est déterminée point par point avec des corrections à chaque étape. Après de nombreux tests variés, nous avons constaté que les MAN sont souvent plus rapides que les méthodes itératives classiques, mais aussi et surtout beaucoup plus faciles à utiliser.

L'efficacité de ces méthodes asymptotiques numériques en analyse non linéaire géométrique est en partie due au fait que les non-linéarités sont quadratiques en formulation mixte, c'est-à-dire lorsque l'inconnue est le couple déplacement-contrainte. Ceci permet d'obtenir une algèbre simple pour le calcul des différents seconds membres. Avec une non-linéarité physique, la première difficulté est l'existence d'un changement brutal de pente pour certaines lois de comportement plastique. Dans ce cas, la branche de solution ne peut admettre de représentations sous forme de séries entières. La deuxième difficulté est le fait que les non-linéarités ne sont plus quadratiques, ce qui rend le calcul des seconds membres plus difficile et plus coûteux.

Dans cet article, nous appliquons les méthodes asymptotiques numériques aux problèmes avec fortes non-linéarités, en particulier nous traitons des problèmes avec changement brutal de rigidité. Nous nous limitons ici à l'étude d'un exemple unidimensionnel et à des lois de type déformation totale. La loi de la plasticité parfaite sera régularisée, soit par une relation de type Osgood, soit par une fonction d'allure hyperbolique.

## 2. Un problème test

Nous avons choisi un exemple qui peut être traité avec une loi de comportement unidimensionnelle. Il s'agit d'une poutre d'épaisseur  $b$  et de longueur  $L$  sous un

chargement vertical réparti  $\lambda f$ ,  $\lambda$  étant un paramètre de chargement scalaire. La poutre est sur appui simple à une extrémité et encastée à l'autre (Figure 1).

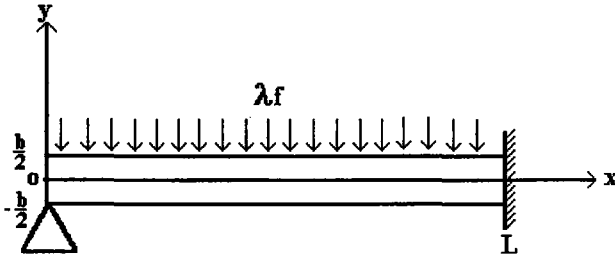


Figure 1. Poutre sollicitée par une charge répartie  $\lambda f$

On se place dans le cadre classique de la théorie des poutres en petites perturbations où le tenseur des déformations est réduit à une composante, qui s'exprime en fonction des composantes  $u(x)$  et  $v(x)$  du vecteur déplacement de la ligne moyenne.

$$\varepsilon(x, y) = u'(x) - yv''(x) \quad [1]$$

La formulation variationnelle traduisant l'équilibre, s'écrit alors

$$\int_V \sigma \delta \varepsilon \, dv - \lambda \int_{\Gamma} f \delta v \, d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u, \delta v \text{ C.A.} \quad [2]$$

où C.A. est l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles. Dans le cas d'un comportement élastique parfaitement plastique, la contrainte et la déformation sont reliées par la relation suivante :

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & \text{si } |\varepsilon| < \varepsilon_y \\ |\sigma| = \sigma_y & \text{si } |\varepsilon| > \varepsilon_y \end{cases} \quad [3]$$

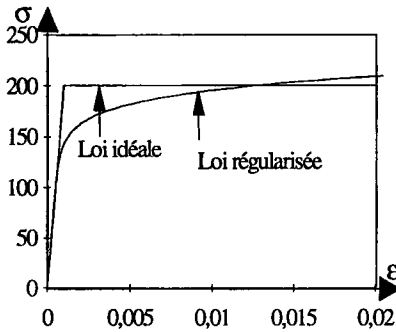
où  $E$  est le module d'Young,  $\sigma_y$  et  $\varepsilon_y = \sigma_y/E$  sont les limites du domaine d'élasticité. Notons qu'avec un modèle de poutres plastiques, les déplacements  $u(x)$ ,  $v(x)$  ne sont fonctions que d'une seule variable alors que les contraintes sont définies sur le domaine bidimensionnel. De même, après discrétisation, on utilisera des éléments unidimensionnels et un réseau bidimensionnel de points d'intégration, ce qui est tout à fait classique.

Le problème consiste à résoudre les équations [2] et [3]. Avec la loi de comportement [3], la branche de solutions n'est pas représentable par des fonctions analytiques. Ainsi, l'utilisation de développements asymptotiques n'est pas réalisable sauf si on utilise des développements des frontières libres comme en flambage plastique [LP93]. On se propose dans ce qui suit de remplacer le problème [2], [3] par un problème régulier dont la branche de solution est analytique. Ceci nous autorise à chercher cette branche à l'aide de techniques de perturbation. Nous régularisons la loi de comportement [3] de deux manières différentes.

La première idée consiste à considérer une non-linéarité homogène de degré  $n$ ,  $n$  étant un entier naturel donné. La déformation et la contrainte sont alors reliées par une relation de type Ramberg-Osgood de la forme suivante :

$$\epsilon(x, y) = \frac{\sigma(x, y)}{E} + \left( \frac{\sigma(x, y)}{\sigma_0} \right)^n \tag{4}$$

où  $\sigma_0$  est un paramètre ayant la dimension d'une contrainte. Sur la figure 2, on a représenté cette loi de comportement que l'on a comparée à la loi élastique parfaitement plastique.



**Figure 2.** Régularisation par une loi de puissance  $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_y=2.10^2$  Mpa,  $\sigma_0=3.10^2$  Mpa et  $n=11$

Pour une valeur de  $n$  impaire et assez grande, cette loi apparaît comme une régularisation de la loi de comportement élastique parfaitement plastique [3], mais on voit qu'il faudrait choisir un entier  $n$  très grand pour que la loi de Ramberg-Osgood soit proche de la plasticité parfaite. Toutefois une relation de type [4] permet de prendre en compte l'écrouissage, le nombre  $n$  pouvant prendre des

valeurs très variées et pas forcément entières [LC85]. Il est donc intéressant d'étudier l'efficacité d'une méthode numérique avec une loi de ce type.

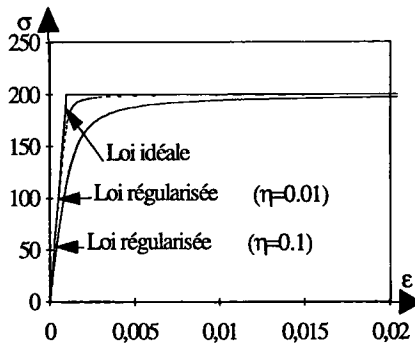
On peut aussi régulariser la loi de comportement [3] par une loi d'allure hyperbolique de la forme suivante :

$$(\sigma(x, y) - E\varepsilon(x, y))(\sigma^2(x, y) - \sigma_y^2) = \eta E \sigma(x, y)$$

soit

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\sigma(x, y)}{E} + \eta \frac{\sigma(x, y)}{\sigma_y^2 - \sigma^2(x, y)} \quad [5]$$

Sur la figure 3, on a représenté la loi de comportement élastique parfaitement plastique et la loi régularisée [5].



**Figure 3.** Régularisation par une loi de type hyperbolique  $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_y=2.10^2$  Mpa,  $\eta=0.1$  et  $\eta=0.01$

La loi de comportement [5] apparaît ainsi comme une bonne approximation de la loi de comportement élastique parfaitement plastique sans décharge de seuil  $|\sigma|=\sigma_y$  quand  $\eta$  tend vers zéro. La loi régularisée est donc très fortement non linéaire pour  $\eta$  petit. Pour  $\eta$  plus grand, par exemple  $\eta=0.1$ , la non-linéarité est plus douce, mais la loi régularisée est alors plus éloignée de la loi idéale. On notera aussi que cette régularisation est beaucoup plus efficace que la loi puissance s'il s'agit de définir une loi régulière et proche de la plasticité parfaite.

Ainsi, au lieu de résoudre le problème fortement non linéaire [2], [3], on s'intéresse aux solutions des problèmes régularisés [2], [4] ou [2], [5]. Notons que ces deux problèmes restent fortement non linéaires si la valeur de  $n$  est assez

grande dans [4] ou si la valeur de  $\eta$  est assez petite dans [5]. On présente dans les paragraphes suivants une méthode asymptotique numérique pour calculer ces branches de solutions.

### 3. Méthode asymptotique numérique avec une loi en puissance

#### 3.1. Algorithme pour un pas de calcul

Il a été démontré [CDP94a], que le choix du paramètre de développement a une importance sur l'efficacité de l'algorithme. Dans le cas d'une non-linéarité forte, il faut essayer d'introduire un paramètre qui prend en compte la structure du problème. L'homogénéité de la partie non linéaire permet d'introduire un tel paramètre comme cela avait été remarqué dans [DPB94]. Ce nouveau paramètre noté  $s$  apparaît naturellement si on effectue le changement de variables suivant :

$$U = \frac{u}{\lambda}, V = \frac{v}{\lambda}, \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\lambda}, \Sigma = \frac{\sigma}{\lambda} \tag{6}$$

$$s = \lambda^{n-1} \tag{7}$$

En effet, en utilisant ce changement de variables [6], les équations du problème [2] et [4] s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V \Sigma \delta \epsilon \, dV &= \int_{\Gamma} f \delta V \, d\Gamma \\ \tilde{\epsilon} &= \frac{\Sigma}{E} + s \left( \frac{\Sigma}{\sigma_0} \right)^n = U' - yV^n \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Supposons que le problème admet une solution connue notée  $(U_0, V_0, \tilde{\epsilon}_0, \Sigma_0, \lambda_0)$ . Nous cherchons alors les inconnues  $U, V, \tilde{\epsilon}, \Sigma$  sous la forme d'une représentation en séries entières par rapport au paramètre "a" défini à partir de  $\lambda^{n-1}$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} U &= U_0 + aU_1 + a^2U_2 + a^3U_3 + \dots \\ V &= V_0 + aV_1 + a^2V_2 + a^3V_3 + \dots \\ \tilde{\epsilon} &= \epsilon_0 + a\epsilon_1 + a^2\epsilon_2 + a^3\epsilon_3 + \dots \\ \Sigma &= \Sigma_0 + a\Sigma_1 + a^2\Sigma_2 + a^3\Sigma_3 + \dots \\ \lambda^{n-1} &= s_0 + a = s \end{aligned} \right. \tag{9}$$

avec  $s_0 = \lambda_0^{n-1}$

En injectant les développements [9] dans le problème [8], on obtient une succession de problèmes linéaires vérifiés par les nouvelles inconnues  $U_i, V_i, \varepsilon_i, \Sigma_i$

Ordre 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \Sigma_0 \delta \varepsilon \, dx dy = \int_0^L f \delta V \, dx \\ \varepsilon_0 = \frac{\Sigma_0}{E} + s_0 \left( \frac{\Sigma_0}{\sigma_0} \right)^n \end{array} \right. \quad [10]$$

Ordre p

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \Sigma_p \delta \varepsilon \, dx dy = 0 \\ \varepsilon_p = \frac{\Sigma_p}{E_t} + \varepsilon_p^{\text{res}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} [11-a] \\ [11-b] \end{array}$$

où  $\varepsilon_p^{\text{res}}$  est une grandeur qui dépend des ordres inférieurs (p étant l'ordre de la série) et  $E_t$  est le module tangent qui dépend de la solution initiale et qui est donné par :

$$E_t = \frac{E \sigma_0}{\sigma_0 + n s_0 E \left( \frac{\Sigma_0}{\sigma_0} \right)^{n-1}}$$

L'expression exacte de la quantité  $\varepsilon_p^{\text{res}}$  peut être obtenue assez facilement à l'aide d'un code de calcul symbolique, mais elle est assez complexe et on ne la reproduira pas ici. La complexité de l'expression de cette déformation résiduelle peut rendre assez coûteux le calcul de la solution asymptotique à des ordres élevés. On se limitera ici à l'ordre 6.

Afin d'utiliser une méthode d'éléments finis en déplacement, nous substituons les lois de comportement [11-b] dans les équations d'équilibre [11-a]. Ainsi le problème à l'ordre p s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L E_t \varepsilon_p \delta \varepsilon dx dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L E_t \varepsilon_p^{\text{res}} \delta \varepsilon dx dy$$

Après discrétisation, on obtient les problèmes linéaires suivants :

Ordre 0 (seulement dans le cas où  $s_0$  est nul)

$$[\mathbf{K}_T] \{ \mathbf{V}_0 \} = \{ \mathbf{F} \}$$

Ordre p

$$[\mathbf{K}_T] \{ \mathbf{V}_p \} = \{ \mathbf{F}^{\text{nl}p} \}$$

où  $[\mathbf{K}_T]$  est la matrice de rigidité globale,  $\{ \mathbf{V}_p \}$  est le vecteur déplacement des points nodaux à l'ordre p,  $\{ \mathbf{F} \}$  est le vecteur force usuel et  $\{ \mathbf{F}^{\text{nl}p} \}$  est le vecteur force à l'ordre p qui dépend des ordres inférieurs. Dans le cas où  $s_0$  n'est pas nul, le point de départ  $\{ \mathbf{V}_0 \}$  devra être défini à une étape précédente.

Remarquons que tous ces problèmes admettent la même matrice de rigidité  $[\mathbf{K}_T]$  qui est assemblée et triangulée une fois pour toute lors d'un pas de calcul. Ces problèmes sont résolus par une méthode d'éléments finis classique.

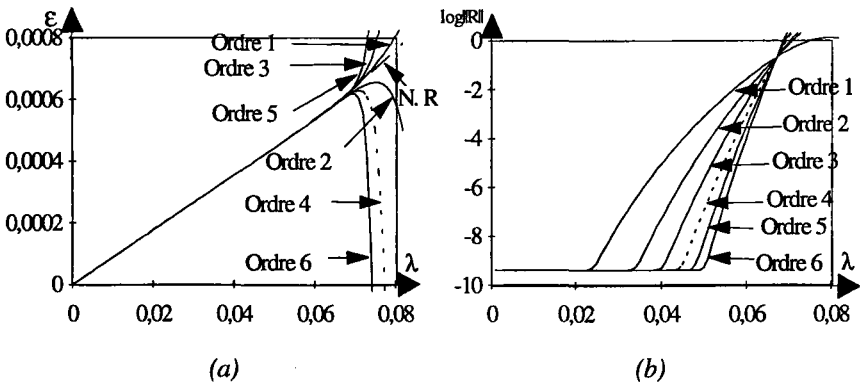
### 3.2. Application

La poutre a été maillée avec des éléments 1D à deux nœuds et trois degrés de liberté par nœud (100 éléments, 303 degrés de liberté) avec une intégration 2D (4 points de Gauss en x et 7 points de Gauss en y). La poutre a une longueur  $L=5\text{cm}$ , une épaisseur  $b=0.1\text{cm}$  et la force est uniformément répartie :  $f=-1$ .

Les résultats de ce calcul (figure 4) et de ceux qui suivront seront présentés, soit par une courbe de réponse, soit par une courbe résidu. Une courbe de réponse représente une grandeur caractéristique de la solution en fonction du paramètre de chargement  $\lambda$ . Dans cet article, cette grandeur sera toujours la déformation au point de coordonnées  $x = (\zeta+199)L/200$ ,  $y = \eta/2$  ( $\zeta = 0.861136311594053$ ,  $\eta = 0.949107912342759$ ) qui est le point de Gauss (4 suivant x et 7 suivant y) le plus chargé au niveau de l'encastrement. La solution de référence, notée N.R., a été obtenue par la méthode de Newton-Raphson à pas fixé. Une courbe résidu représente, en fonction du paramètre  $\lambda$ , l'évolution du logarithme de la norme du vecteur résidu d'équilibre. Il est quasiment certain que le rayon de convergence de la série est proche de  $\varepsilon \approx 0.6\%$  soit un peu avant la limite élastique du problème non régularisé. A l'examen de la courbe  $(\varepsilon, \lambda)$ , (figure 4-a), l'intérêt de calculer un grand



nombre de termes de la série n'apparaît pas évident. Toutefois, la figure 4-b montre que la qualité de la solution à l'intérieur du rayon de convergence augmente fortement avec l'ordre de troncature, ce qui est très important lorsque l'on utilise une technique de continuation. La décroissance du résidu d'équilibre est donc un critère plus fiable que l'allure d'une courbe de réponse pour évaluer l'efficacité d'une méthode asymptotique numérique, comme cela avait déjà été observé pour des problèmes plus faiblement non linéaires [CDP94b]. Rappelons que cette branche de solutions jusque  $\varepsilon \approx 0.6\%$  a été obtenue avec une seule inversion de matrice et quelques calculs de seconds membres, c'est-à-dire pour un coût de calcul de l'ordre du coût d'un pas avec l'algorithme de Newton modifié [ACDP93].



**Figure 4.** Un pas MAN (a) Courbe de réponse (b) Courbe résidu  $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_0=3.10^2$  Mpa et  $n=11$

### 3.3. Algorithme de continuation

Pour obtenir une plus grande partie de la branche de solution, il suffit d'appliquer la même procédure pas à pas. Le principe est simple : après avoir appliqué la MAN, on définit un nouveau point de départ  $V_0$  et  $\lambda_0$  sur la branche déjà déterminée, puis on applique de nouveau la MAN à partir de ce point. Le point crucial dans cette procédure de continuation est donc de définir une valeur maximale du paramètre de développement  $a_m$ , ce qui détermine le nouveau point de départ. Cette valeur maximale doit être située plus ou moins à l'intérieur du rayon de convergence, selon la précision souhaitée et l'ordre de troncature. Une technique efficace a été proposée pour déterminer cette valeur maximale [Coc94]. Selon ce critère, la contribution du dernier terme de la série doit être assez petite devant l'incrément de solution :

$$\frac{\|a^k \mathbf{V}_k\|}{\|a\mathbf{V}_1 + \dots + a^k \mathbf{V}_k\|} \leq \alpha$$

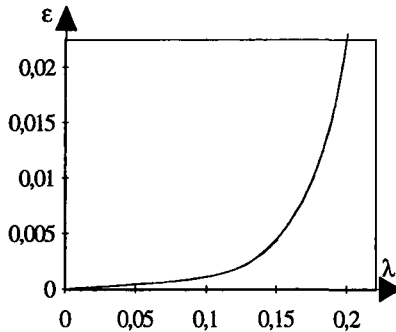
où  $\alpha$  est un nombre assez petit. En approchant le dénominateur par  $\|a\mathbf{V}_1\|$ , on obtient alors une approximation de  $a_m$  qui donne le domaine de validité de l'approximation polynomiale.

$$a_m = \left( \alpha \frac{\|\mathbf{V}_1\|}{\|\mathbf{V}_k\|} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

En pratique, il suffit de calculer les normes des vecteurs des déplacements nodaux  $\{\mathbf{V}_1\}$  et  $\{\mathbf{V}_k\}$  pour obtenir  $a_m$ , ce qui requiert un temps de calcul insignifiant.

### 3.4. Résultats et discussion

On a appliqué cette procédure à l'exemple précédent avec les paramètres suivants : ordre 6,  $\alpha=10^{-4}$ . La solution complète (2,25% de déformation au point le plus chargé) a été obtenue en 49 pas (figure 5), c'est-à-dire avec 49 décompositions de la matrice de rigidité. La figure 5 représente la déformation en fonction du paramètre de chargement.



**Figure 5.** Continuation MAN 49 pas. Courbe de réponse  $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_0=3.10^2$  Mpa et  $n=1$

Pour évaluer l'efficacité de cet algorithme asymptotique-numérique, nous avons comparé ce résultat avec ceux obtenus par des méthodes itératives. Nous avons d'abord appliqué l'algorithme de Newton-Raphson à pas fixé avec un pilotage en

longueur d'arc et en choisissant diverses longueurs de pas. Dans le meilleur des cas, la courbe de réponse présentée à la figure 5 est obtenue en 27 pas et 81 inversions de matrice, soit deux itérations en moyenne à chaque pas. En augmentant la longueur de pas, nous avons pu obtenir une dizaine de points solutions avec 40 inversions de matrice, mais cet ensemble de points n'était pas assez dense pour décrire précisément le début de la courbe de réponse. Si on augmente encore la longueur de pas, l'algorithme ne converge plus. Ces chiffres peuvent paraître élevés, mais ceci est dû à la forte non-linéarité du problème, en particulier à l'exposant  $n = 11$  qui induit de fortes variations de rigidité.

Nous avons, ensuite appliqué d'autres algorithmes de type prédiction-correction, qui ont été proposés dans [Bra95] ; [BDP97]. Ces algorithmes diffèrent de l'algorithme de Newton-Raphson sur deux points. Premièrement, le prédicteur tangent est amélioré par la technique de projection présentée dans l'article [DPB94]. Deuxièmement, on définit une longueur de pas adaptative à partir de la valeur du résidu le long de la courbe de prédiction. Avec ces algorithmes, la courbe de réponse est généralement obtenue au prix d'une centaine d'inversions de matrices, mais dans un cas, nous avons pu effectuer le calcul avec 30 inversions de matrice. Néanmoins, ce très bon résultat est exceptionnel et il a été obtenu avec un algorithme qui ne semble pas très robuste : d'une part l'algorithme a divergé quand on a augmenté légèrement la taille des pas, d'autre part les corrections ont été faites par la méthode de Newton modifiée, qui est généralement considérée comme peu fiable.

La MAN donne donc des résultats tout à fait convenables. Certes, un des algorithmes itératifs a permis d'obtenir plus rapidement la courbe cherchée, mais il n'est probablement pas aussi robuste que la MAN, voir [CDP94-a] ; [CDP94-b] ; [Coc94]. De plus, l'algorithme asymptotique-numérique peut être sensiblement amélioré. En effet, il est bien établi que le meilleur ordre de troncature se situe souvent aux environs de 20 [CDP94-b]. Dans cet article, nous avons dû nous limiter à l'ordre 6, mais nous avons proposé récemment une technique pour calculer des séries jusqu'à des ordres élevés et avec une loi en puissance [PDB97]. Par ailleurs, nous verrons que l'utilisation des approximants de Padé peut améliorer la longueur des pas.

Dans cette discussion, nous avons considéré que le critère d'efficacité est le nombre d'inversions de matrice, plutôt que le temps CPU. En effet, il est bien établi que le temps CPU est directement lié au nombre d'inversions de matrice dès que le nombre de degrés de liberté dépasse quelques milliers [ACDP93] ; [CDP94-b]. Lorsque le nombre de degrés de liberté est beaucoup plus petit comme dans l'exemple présenté ici, le temps CPU dépend aussi du temps de calcul des seconds

membres, ce qui influe sur l'efficacité relative de divers algorithmes. Dans notre étude, le nombre d'inversions de matrice est donc un critère plus significatif que le temps CPU, si on vise des applications avec un assez grand nombre de degrés de liberté.

#### 4. Méthode asymptotique numérique avec une loi de type hyperbolique

##### 4.1. L'algorithme

Dans ce paragraphe, nous régularisons le comportement [3] par la loi [5] qui est d'allure hyperbolique. Cette équation présente l'avantage d'être cubique par rapport aux inconnues  $(\epsilon, \sigma)$ , ce qui permet de faire simplement des développements asymptotiques jusqu'à des ordres élevés. Le problème variationnel à résoudre s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \sigma \delta \epsilon \, dx dy &= \int_0^L f \delta V \, dx \\ \epsilon &= \frac{\sigma}{E} + \eta \frac{\sigma}{\sigma_y^2 - \sigma^2} \end{aligned} \right. \quad [12]$$

On suppose que le problème admet une solution connue notée  $(u_0, \sigma_0, \epsilon_0, \lambda_0)$ . Pour une valeur de  $\eta$  fixée, nous calculons la solution du problème non linéaire [12] en cherchant les inconnues à l'aide d'une représentation paramétrique. Plus exactement, les inconnues  $u$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$  et  $\lambda$  seront représentées dans ce cas par des séries entières par rapport à un paramètre "a" de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} U &= U_0 + aU_1 + a^2U_2 + a^3U_3 + \dots \\ \lambda &= \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + a^3\lambda_3 + \dots \end{aligned} \right. \quad [13]$$

où  $U$  est le vecteur représentant les inconnues  $(u, \sigma, \epsilon)$ . Il reste à préciser le paramètre de développement "a". Trois choix sont possibles. On peut identifier "a" à l'incrément de chargement  $\lambda - \lambda_0$  ou, à la projection de l'incrément du déplacement  $u - u_0$  sur le vecteur  $u_1$  ou, à la projection des incréments  $(u - u_0, \lambda - \lambda_0)$  sur le vecteur tangent  $(u_1, \lambda_1)$ , la projection étant prise au sens du produit scalaire ordinaire.

$$a = \lambda - \lambda_0$$

$$a = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle$$

$$a = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1$$

En injectant une de ces définitions dans les développements asymptotiques et en identifiant terme à terme suivant les puissances du paramètre "a", on obtient une succession d'équations scalaires vérifiées par les  $\lambda_p$ . Ensuite, l'utilisation des développements [13] ramène le problème non linéaire [12] à une succession de problèmes linéaires. En introduisant les notations suivantes, on obtient dans le cas du troisième choix du paramètre a :

$$E_t = \frac{E(\sigma_y^2 - \sigma_0^2)}{\eta E + 2\sigma_0(E\varepsilon_0 - \sigma_0) + \sigma_y^2 - \sigma_0^2} \quad E_n = \eta E + 2\sigma_0(E\varepsilon_0 - \sigma_0) + \sigma_y^2 - \sigma_0^2$$

ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \sigma_1 \delta \varepsilon \, dx dy = \lambda_1 \int_0^L f \delta V \, dx \\ \sigma_1 = E_t \varepsilon_1 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1 \end{array} \right. \quad [14]$$

ordre p

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \sigma_p \delta \varepsilon \, dx dy = \lambda_p \int_0^L f \delta V \, dx \quad [15-a]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p = E_t \varepsilon_p - \frac{(E\varepsilon_0 - \sigma_0)}{E_n} \left( \left( \sum_{i=1}^{p-1} 2\sigma_i \sigma_{p-i} \right) + \sigma_{\frac{p}{2}}^2 \right) \end{array} \right. \quad [15-b]$$

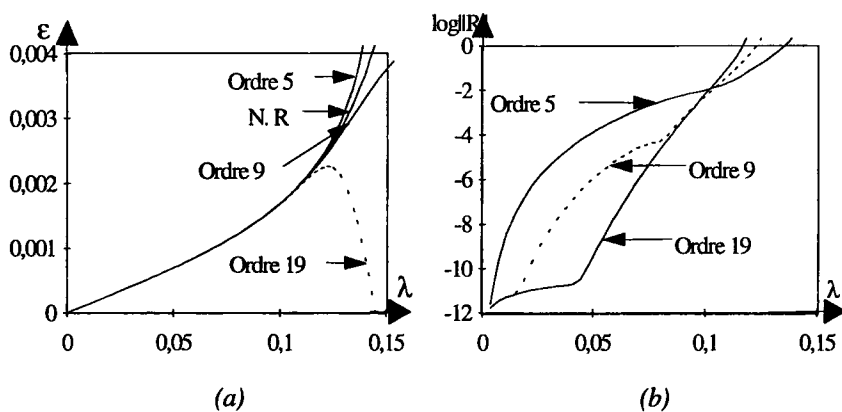
$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(E\varepsilon_k - \sigma_k)}{E_n} \left( \left( \sum_{j=1}^{\frac{p-k-1}{2}} 2\sigma_j \sigma_{p-k-j} \right) + \sigma_{\frac{p-k}{2}}^2 \right) \\ \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \quad [15-c]$$

Notons que tous ces problèmes linéaires ont le même opérateur tangent. Afin d'utiliser une méthode classique d'éléments finis, nous transformons ces problèmes

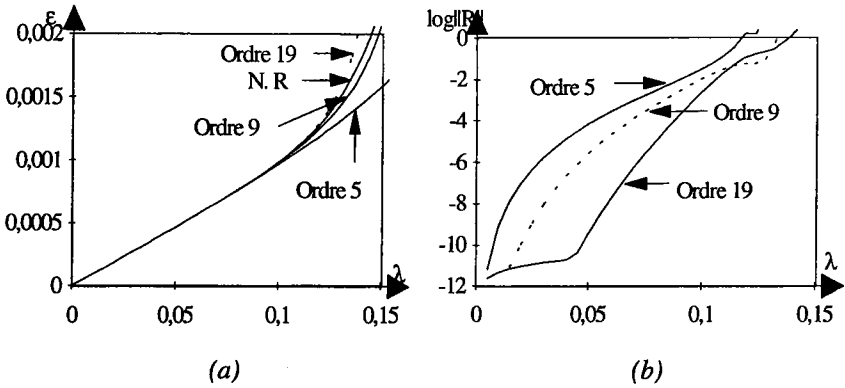
en des problèmes en déplacement en réinjectant la relation de comportement [15-b] dans les équations d'équilibre [15-a], comme dans le cas précédent.

#### 4.2. Application

L'efficacité de l'algorithme est étudiée de la même manière qu'au paragraphe 3, c'est-à-dire en analysant des courbes de réponse, des courbes de résidu et en évaluant le nombre d'inversions nécessaire pour calculer une courbe donnée. Les données géométriques sont  $b = 0.1\text{cm}$ ,  $L = 5\text{cm}$  et les données matérielles sont présentées sur la figure 3 et  $f = -1$ . On représente sur les figures 6-a, 7-a les courbes de réponse obtenues avec des troncatures des séries [13] aux ordres 5, 9 et 19 pour les valeurs de  $\eta=0.1$  et  $\eta=0.01$ . Sur ces figures, nous pouvons voir qu'avec une seule décomposition de la matrice de rigidité tangente, nous sommes capables de calculer en un seul pas la branche solution jusqu'à une déformation  $\varepsilon \approx 1\%$  pour la loi fortement non linéaire ( $\eta=0.01$ ) et  $\varepsilon \approx 2\%$  pour la loi faiblement non linéaire ( $\eta=0.1$ ). La solution asymptotique numérique semble coïncider parfaitement avec la solution de référence pour des valeurs du paramètre "a" inférieures au rayon de convergence de cette série. Au-delà de ce rayon, la série polynomiale tronquée diverge. Pour une vision très fine de la qualité des solutions asymptotiques, on représente l'évolution du logarithme décimal de la norme du vecteur résidu en fonction du paramètre de chargement sur les figures 6-b et 7-b. On constate qu'il est intéressant de pousser les développements jusqu'à un ordre élevé (environ 20) pour améliorer la qualité de la solution à l'intérieur du rayon de convergence, ce qui est en accord avec les résultats obtenus en élasticité [ACDP93] ; [CDP94-b] ; [Coc94] ; [Naj97].



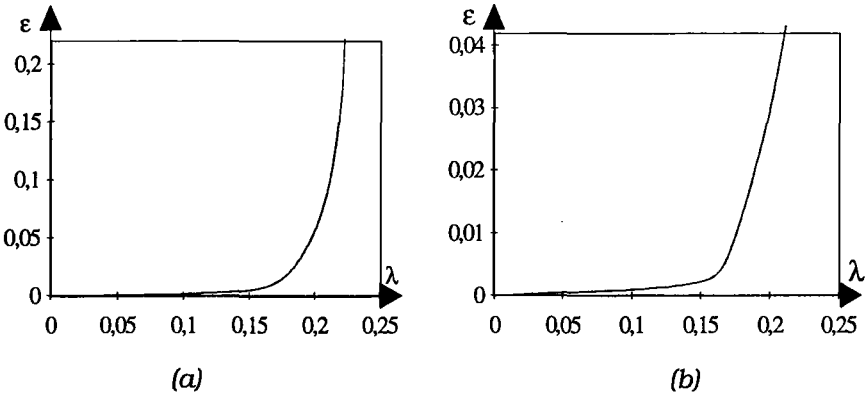
**Figure 6.** Un pas MAN (a) Courbe de réponse (b) Courbe résidu  $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_y=2.10^2$  Mpa et  $\eta=0.1$



**Figure 7.** Un pas MAN (a) Courbe de réponse (b) Courbe résidu  $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_y=2.10^2$  Mpa et  $\eta=0.01$

D'autres calculs ont été effectués avec une loi plus éloignée de la plasticité parfaite ( $\eta=1$ ). Dans ce cas, le rayon de convergence est beaucoup plus grand. C'est donc la non-linéarité forte qui rend ce calcul délicat en diminuant le rayon de convergence des séries.

Pour obtenir une plus grande partie de la branche de solution, nous appliquons la procédure pas à pas qui a été rappelée précédemment, avec les paramètres suivants : ordre 23,  $\alpha=10^{-5}$  et pour deux valeurs du paramètre de régularisation  $\eta$ . Par exemple, si l'on effectue sept pas, la courbe de réponse est obtenue jusqu'à une déformation  $\varepsilon \approx 22\%$  pour le problème assez faiblement non linéaire ( $\eta=0.1$ ) (figure 8-a) et jusqu'à une déformation  $\varepsilon \approx 4.2\%$  pour le problème fortement non linéaire ( $\eta=0.01$ ) si l'on effectue neuf pas (figure 8-b). Bien entendu, un autre modèle serait nécessaire dans le cas des grandes déformations. Cette procédure numérique semble donc beaucoup plus efficace que dans le cas de la loi puissance, ce qui est en partie dû à la possibilité de calculer un grand nombre de termes. Il est également probable que les rayons de convergence des séries soient plus petits dans le cas des lois puissances.



**Figure 8.** MAN Continuation Courbe de réponse (a)  $\eta=0.1$ , 7 pas (b)  $\eta=0.01$ , 9 pas.  $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_y=2.10^2$  Mpa

**5. MAN et approximants de Padé avec la loi de type hyperbolique**

Pour essayer d'améliorer le rayon de convergence de la représentation polynomiale [13], on peut utiliser la technique des approximants de Padé [BG81]; [Pad1892]. Nous les utilisons sous la forme présentée dans [Naj97], qui est différente de celle qui avait été initialement introduite [CDP94a]. La procédure est la suivante:

1. A partir des vecteurs  $U_i$ , on construit une base orthogonale  $U_i^*$  par la méthode classique de Gram-Schmidt.

$$U_i = \sum_{k=2}^i \alpha_{ik} U_k^* \quad \text{pour } i \geq 2, \quad \text{avec} \quad \langle U_k^*, U_j^* \rangle = \delta_{kj}$$

Les coefficients  $\alpha_{ij}$  sont donnés par :

$$\alpha_{22} = \sqrt{\langle U_2, U_2 \rangle}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\langle U_i, U_j \rangle - \sum_{k=2}^{j-1} \alpha_{ik} \alpha_{jk}}{\alpha_{jj}} \quad i > j \quad [16]$$

$$\alpha_{ii} = \sqrt{\langle U_i, U_i \rangle - \sum_{j=2}^{i-1} \alpha_{ij}^2}$$



2. On réécrit la série  $U(a)$  dans la base orthogonale  $U_i^*$ , ce qui fait apparaître  $n-2$  polynômes  $f_k(a)$  :

$$U - U_0 = aU_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a^k f_k(a) U_k^*$$

$$f_k(a) = \sum_{i=k}^{n-1} a^{i-k} \alpha_{ki}$$

3. On remplace ces polynômes par des approximants de Padé, ayant tous le même dénominateur  $\Delta = 1 + ad_1 + \dots + a^{n-2}d_{n-2}$  :

$$g_k(a) = \frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} b^k_j a^j}{1 + \sum_{j=1}^{n-2} a^j d_j} \quad \text{pour } k=2, \dots, n-1$$

Les coefficients de la fraction  $g_k(a)$  sont calculés suivant le même principe qu'avec des approximants de Padé classiques [BG81] : on choisit ces coefficients en sorte que les fonctions  $f_k(a)$  et  $g_k(a)$  soient asymptotiquement équivalentes pour  $a$  petit. Cette identification permet de déterminer les  $b^k_i$  en fonction des  $d_j$  et des  $\alpha_{ij}$ . Dans la programmation de l'algorithme, nous n'aurons pas besoin des coefficients  $b^k_i$ , mais seulement des coefficients du dénominateur, qui sont donnés par :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_k = -\frac{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{n-i, n-k} d_i}{\alpha_{n-k, n-k}} \end{cases} \quad [17]$$

Après quelques réarrangements, on obtient le vecteur  $U(a)$  sous une nouvelle représentation, qui ne fait intervenir que les vecteurs  $U_i$  et les coefficients  $d_i$  :

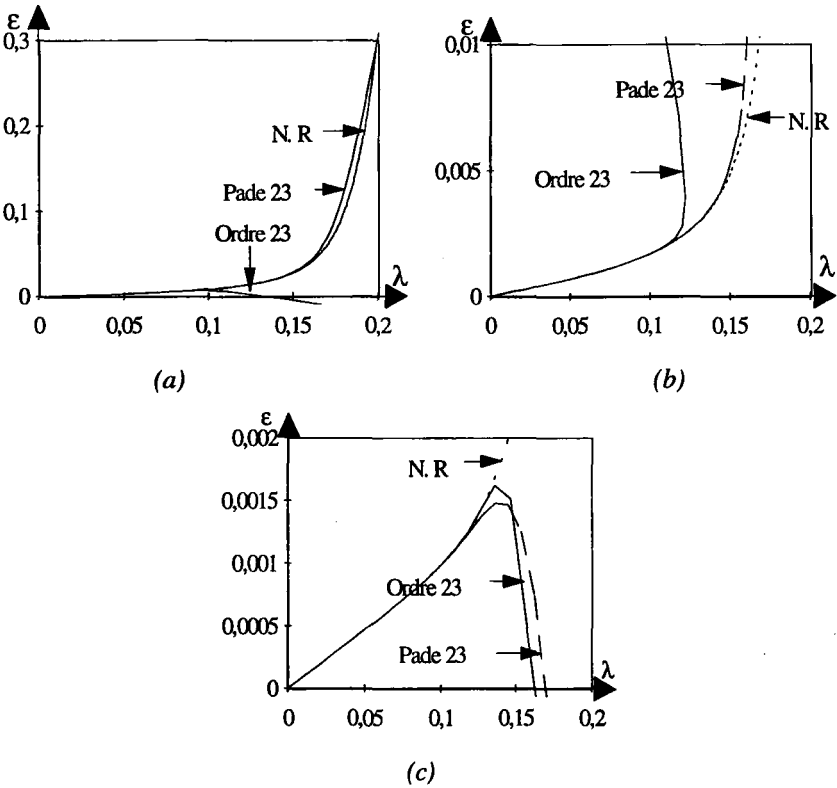
$$U(a) = U_0 + aU_1 + a^2U_2 \left( \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) + \dots + a^{n-2}U_{n-2} \left( \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta} \right) + a^{n-1}U_{n-1} \left( \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta} \right) \quad [18]$$

$$\text{où } \Delta = 1 + \sum_{k=1}^{n-2} a^k d_k \quad \text{et} \quad \Delta_i = 1 + \sum_{k=1}^{n-i-1} a^k d_k \quad [19]$$

De la même façon, on obtient une nouvelle représentation pour le paramètre de chargement  $\lambda(a)$ .

$$\lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 \left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right) + \dots + a^{n-2}\lambda_{n-2} \left(\frac{\Delta_{n-2}}{\Delta}\right) + a^{n-1}\lambda_{n-1} \left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\right) \quad [20]$$

Sur la figure 9, respectivement pour  $\eta=1, 0.1, 0.01$ , on représente la courbe de réponse obtenue par la représentation polynomiale à l'ordre 23 et par la représentation fractionnelle correspondante. Ainsi, comme pour les problèmes non linéaires géométriques [CDP94a], [Naj97], la technique des approximants de Padé peut améliorer le domaine de validité de la représentation surtout lorsque le paramètre  $\eta$  est assez grand.



**Figure 9.** Un pas MAN +Padé Courbe de réponse (a)  $\eta=1$  (b)  $\eta=0.1$  (c)  $\eta=0.01$ .  
 $E=2.10^5$  Mpa,  $\sigma_y=2.10^2$  Mpa

A l'heure actuelle, nous n'avons pas développé de méthode de continuation fiable et basée sur la représentation par fraction rationnelle.

## 6. Conclusion

Dans ce travail nous avons montré comment traiter par la Méthode Asymptotique Numérique des problèmes où le comportement physique présente un changement brutal de rigidité. Deux régularisations du comportement parfaitement plastique ont été présentées : régularisation par des lois en puissance de type Ramberg-Osgood et régularisation par des lois de type hyperbolique.

Contrairement à nos préjugés initiaux, la méthode de continuation basée sur les séries semble efficace à condition de pousser les développements à des ordres élevés, comme en élasticité. Nous n'avons pas su introduire ici ces développements d'ordre élevé que pour la loi de comportement hyperbolique, mais il existe des moyens d'écrire des lois  $\sigma(\epsilon)$  assez complexes et qui restent compatibles avec l'utilisation de développements asymptotiques [PDB97]. La qualité des résultats obtenus au paragraphe 4 incite à poursuivre dans cette voie.

Certes, ces MAN sont d'autant plus efficaces que la loi de comportement est régulière et la présence d'une pente fortement variable ( $\eta$  petit, voir paragraphe 4) fait augmenter le nombre de pas de calcul, ce qui est bien naturel. Cette restriction n'est toutefois pas considérable parce que les lois de comportement plastiques sont souvent plus régulières que celles considérées dans cet article et que l'algorithme reste efficace pour des lois proches de la plasticité parfaite.

Les résultats obtenus ici montrent que la MAN peut être appliquée pour les problèmes présentant de fortes non-linéarités. Des études sur le contact, la viscoplasticité et les coques en grandes rotations sont en cours. Notons également qu'une variante a été proposée pour l'étude des grandes rotations des coques, qui pourrait permettre de traiter des problèmes avec fortes non-linéarités [Amm96].

La méthode de continuation du paragraphe 4 avait été introduite par [Coc94] et c'est celle que nous avons validé ici. Elle peut toutefois être améliorée, par exemple en utilisant des approximants de Padé (voir [Naj97] pour une étude systématique).

## 7. Bibliographie

- [ACDP93] AZRAR L., COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., 1993, "An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, pp 1251-1277.
- [Amm96] AMMAR S., 1996, "Méthode asymptotique perturbée appliquée à la résolution de problèmes non-linéaires en grande rotation et grand déplacement", Thèse de l'Université Laval, Québec.
- [BDP97] BRAIKAT B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., 1997, "Une méthode itérative de continuation", Troisième congrès de Mécanique, Tétouan, Maroc.
- [BG81] BAKER G.A., GRAVES MORRIS P., 1981, Padé Approximants, Part I : Basic Theory, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, Vol. 13, Addison-Wesley Publishing Company, New York.
- [Bra95] BRAIKAT B., 1995, "Méthode asymptotique numérique et fortes non-linéarités", Thèse de troisième cycle de l'Université Hassan II, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Casablanca.
- [CDP94a] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., 1994 a, "Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants for non-linear elastic structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp 1187-1213.
- [CDP94b] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., 1994 b, "The Asymptotic Numerical Method, an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics", Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 3, N° 2, pp 281-297.
- [Coc94] COCHELIN B., 1994, "A path following technique via an Asymptotic Numerical Method", Computers and Structures, Vol. 53, N° 5, pp 1181-1192.
- [DP90] DAMIL N., POTIER-FERRY M., 1990, "A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures", International Journal of Engineering Sciences, Vol 28, N° 3, pp 704-719.
- [DPB94] DAMIL N., POTIER-FERRY M., BRAIKAT B., 1994, "Une technique de perturbation pour le calcul des structures avec fortes non-linéarités", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t 318, série II, pp 713- 719.
- [Dyk84] VAN DYKE M., 1984, "Computer-extended series" Ann. Review of Fluid Mechanics, Vol. 16, pp 287-309.
- [Hin91] HINCH F.J., 1991, "Perturbation methods", Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge.
- [LC85] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., 1985, "Mécanique des matériaux solides", Dunod, Paris.
- [LP93] LEGER A., POTIER-FERRY M., 1993, "Elastic-Plastic post-buckling from a heterogeneous state", J. Mech. Phys. Solids Vol. 4, pp. 783-807.
- [Naj97] NAJAH A., 1997, Calcul non linéaire des structures par des méthodes asymptotiques numériques et accélération de la convergence, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle de l'Université Hassan II, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca.
- [Nay73] NAYFEH A., 1973, "Perturbation methods", John Wiley and Sons, New York.

- [NP81] NOOR A.K., PETERS J.M., 1981, "Tracing post-limit paths with reduced basis technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 28, pp 217-240.
- [Pad1892] PADE H., 1892, "Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles". *Ann. de l'Ecole Normale Sup.*, 3<sup>e</sup> série, Vol. 9, Supp, 3-93.
- [PDB97] POTIER-FERRY M., DAMIL N., BRAIKAT B., DESCAMPS J., CADOU J.M., CAO H.L., ELHAGE HUSSEIN A., 1997 "Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t.324, série II, pp 171-177.

Article soumis le 1<sup>er</sup> septembre 1996  
Version révisée le 30 juin 1997