
Analyse de sensibilité locale : modèle et validation

Sophie Ortola — Amine Ghouali — Alain Oster
Georges Duvaut

*Laboratoire de Modélisation et Mécanique des Structures
CNRS URA n° 1776, Paris 6 - ENSAM - ENS Cachan
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu, Tour 66 - 5^e étage, boîte 161
75252 Paris cedex 05*

RÉSUMÉ. *Toute méthode d'optimisation de formes nécessite un calcul rigoureux de sensibilités. La méthode que nous avons développée repose sur une différentiation des équations locales du problème étudié. Elle permet de construire un problème associé dont les solutions sont des sensibilités recherchées. Elle est ici présentée sur un problème simple appelé « problème modèle », puis illustrée pour un problème de Dirichlet résolu dans un domaine ellipsoïde. La méthode d'analyse de sensibilité locale proposée permet alors de calculer la sensibilité de la solution de ce problème à une perturbation de la frontière de l'ellipse. La confrontation des sensibilités obtenues analytiquement et numériquement permet d'illustrer la validité et la précision de la méthode proposée.*

ABSTRACT. *Shape optimization needs rigorous calculs of sensibilities. Our local sensibility analysis is based on a differentiation of the local equations of the studied problem. This method allows to construct an associated problem, of which solutions are the researched sensibilities. This method is here explained with a simplified problem called « model problem », and then applied on a Dirichlet problem in an ellipsoid domain. When the ellipsoid boundary is perturbed, sensibilities of theses solutions are calculated analytically and numerically by finite element method. Confrontation of both results shows the validity and accuracy of the proposed local analysis sensibility method.*

MOTS-CLÉS : *optimisation de formes, analyse de sensibilité, calculs par éléments finis.*
KEY WORDS : *shape optimization, sensibility analysis, finite element method.*

1. Introduction

Ce travail entre dans le cadre des études sur l'optimisation de forme. Cette dernière nécessite le choix de paramètres de conception p [ZHA93], d'un critère C à respecter et d'un algorithme d'optimisation adapté au problème de conception étudié [HAF93]. Ce dernier reposera sur des évaluations précises du gradient du critère C par rapport aux paramètres de conception p choisis. Pour un problème de mécanique des milieux continus par exemple, posé dans un domaine Ω_p et de couple solution (\vec{u}, σ) , si le critère retenu est l'énergie de déformation, la fonction objectif C à optimiser s'écrira :

$$C(p) = \iiint_{\Omega_p} \sigma(\vec{x}; p) : \varepsilon[\vec{u}(\vec{x}; p)] d\Omega_p$$

où $\vec{u}(\vec{x}; p)$ est le champ de déplacements,

$\sigma(\vec{x}; p)$ le tenseur des contraintes et,

$\varepsilon[\vec{u}(\vec{x}; p)]$ le tenseur des déformations linéarisé : $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} [\vec{\nabla}\vec{u} + {}^t(\vec{\nabla}\vec{u})]$

Optimiser cette fonction objectif nécessite le calcul de son gradient par rapport aux variables de conception p choisis. Ce dernier s'exprime par :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dp} = & \iiint_{\Omega_p} \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial p}(\vec{x}; p) : \varepsilon[\vec{u}(\vec{x}; p)] + \sigma(\vec{x}; p) : \varepsilon\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial p}(\vec{x}; p)\right] \right\} d\Omega_p \\ & + \iint_{\partial\Omega_p} \sigma(\vec{x}; p) : \varepsilon[\vec{u}(\vec{x}; p)] \vec{V}_\Gamma \cdot \vec{n} d\Gamma_p \end{aligned}$$

où - $\frac{\partial \vec{u}}{\partial p}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial p}$ mesurent la sensibilité du couple (\vec{u}, σ) solution du problème posé à une fluctuation d'un paramètre p ,

- \vec{V}_Γ caractérise le transport de la frontière $\partial\Omega_p$ du domaine Ω_p (notée Γ_p) dû à cette même fluctuation du paramètre p .

L'évaluation du gradient du critère $\frac{dC}{dp}$, et la mise en œuvre d'un algorithme

d'optimisation, repose donc sur un calcul précis des quantités $\frac{\partial \vec{u}}{\partial p}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial p}$ et $\vec{V}_\Gamma \cdot \vec{n}$.

Seule la composante normale de \vec{V}_Γ est définie de manière unique [ORT93], la composante tangentielle dépendant de la paramétrisation choisie ; cette composante normale est notée π : $\pi = \vec{V}_\Gamma \cdot \vec{n}$.

Le calcul des sensibilités $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial p}$ peut être conduit suivant différentes méthodes, à savoir par :

- *quotients différentiels* :

Ce principe d'évaluation des sensibilités consiste à calculer numériquement les champs $\bar{u}(\bar{x}, p)$ et $\sigma(\bar{x}, p)$ pour deux jeux de paramètres successifs, par exemple p et $p + \delta p$ (différences finies décentrées). Les sensibilités recherchées s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}(\bar{x}, p) = \frac{\bar{u}(\bar{x}, p + \delta p) - \bar{u}(\bar{x}, p)}{\delta p}$$

et

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p}(\bar{x}, p) = \frac{\sigma(\bar{x}, p + \delta p) - \sigma(\bar{x}, p)}{\delta p}$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle oblige à un transfert des valeurs nodales, les champs solution étant numériquement obtenus en des nœuds et points d'interpolation différents pour les deux maillages des domaines Ω_p (initial) et $\bar{\Omega}_{p+\delta p}$ (perturbé). De surcroît, dans le cas de problèmes non linéaires, les quotients différentiels sont numériquement coûteux.

- *sensibilité analytique globale* :

Cette méthode repose sur la formulation globale du problème étudié, ou formulation variationnelle. La dérivation de cette formulation par rapport à une variable de conception p donne une nouvelle formulation variationnelle en fonction des sensibilités inconnues. La résolution de cette formulation variationnelle dérivée donne une évaluation des sensibilités recherchées [PIR84].

- *sensibilité semi-analytique* :

Cette méthode est également fondée sur la formulation variationnelle du problème initial qui est ensuite discrétisée. Le calcul des sensibilités est alors développé sur cette formulation variationnelle discrétisée. La résolution de la nouvelle formulation discrète obtenue donne une évaluation numérique des sensibilités recherchées [BRA86], [FOU94].

- *sensibilité analytique locale* :

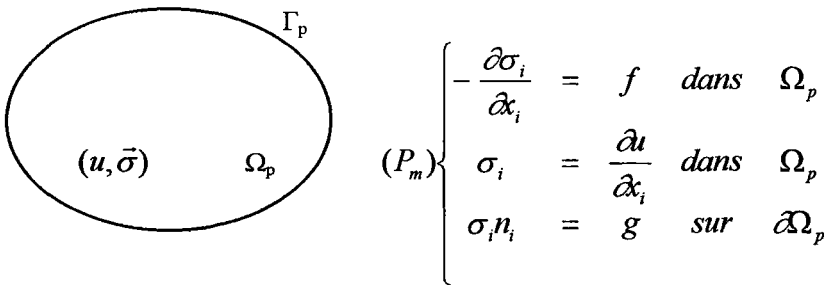
Il s'agit de la démarche que nous avons développée. Travaillant sur la formulation locale du problème initial [BAD95], nous avons recherché de quel

nouveau problème (équations locales) étaient solutions les sensibilités $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p}$ et $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial p}$ recherchées [ORT93].

Cette méthode est, dans une première partie, expliquée sur un problème modèle, puis, dans une seconde partie, illustrée sur un exemple.

2. Analyse de sensibilité locale : modèle

La méthode d'analyse de sensibilité locale développée est ici appliquée à un problème simple ; le problème modèle (P_m) bidimensionnel étudié est le suivant :



Ce problème modèle (P_m) est formulé en fonction de deux inconnues scalaire u et vectorielle $\vec{\sigma}$. (P_m) comporte une équation d'équilibre, une loi de comportement, et une condition de bord.

La perturbation de chacune des équations locales de (P_m), due à une fluctuation d'un paramètre de conception p de la frontière, se détermine différemment dans Ω_p et sur $\partial\Omega_p$. En effet :

- Dans Ω_p , les variables d'espace \vec{x} et le paramètre p sont indépendants :

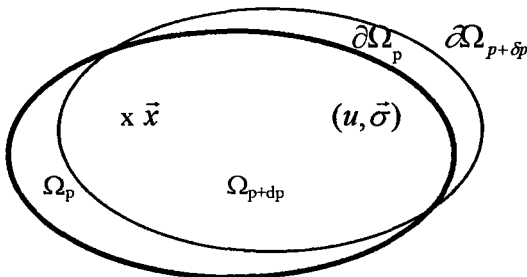


Figure 1. Sensibilité dans le domaine Ω_p

c'est-à-dire qu'il est possible de modifier la frontière $\partial\Omega_p$ sans modifier les coordonnées \vec{x} d'un point interne dans Ω_p (comme pour le cas d'un marquage sur une boule de pétanque, par exemple). La modification des équations de (P_m) dans le domaine Ω_p est alors indépendante de leurs sensibilités aux variables d'espace. Il suffit de les dériver partiellement par rapport au paramètre p . Notant : $w = \frac{\partial u}{\partial p}$ et

$\Sigma_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$ les sensibilités recherchées, on montre que :

- la première équation de (P_m) se transforme en une nouvelle équation d'équilibre portant sur la nouvelle inconnue $\vec{\Sigma}$:

$$-\frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial p} \text{ dans } \Omega_p$$

- la seconde équation de (P_m) se transforme en une loi de comportement reliant les nouvelles inconnues $\vec{\Sigma}$ et w :

$$\Sigma_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \text{ dans } \Omega_p$$

□ Sur $\partial\Omega_p$, les variables d'espace \vec{x} et le paramètre p ne sont pas indépendants :

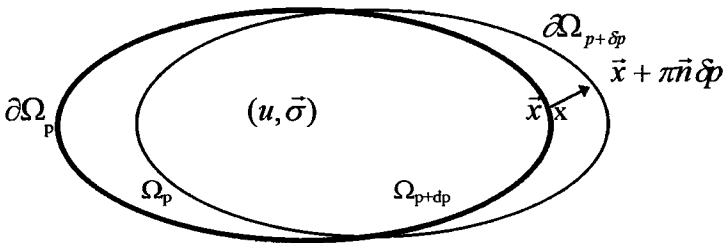


Figure 2. Sensibilité sur le bord $\partial\Omega_p$

c'est-à-dire qu'il est impossible de modifier la frontière $\partial\Omega_p$ sans modifier les coordonnées \vec{x} d'un point de $\partial\Omega_p$. La modification de la dernière équation de (P_m) fait alors intervenir des termes représentant la sensibilité des inconnues par rapport au paramètre p , mais également des termes dus au transport de la frontière $\partial\Omega_p$:

$$\underbrace{\sum_i n_i}_{\text{sensibilité par rapport à } p} + \underbrace{\pi(s) \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} n_j n_i + \sigma_i \frac{dn_i}{dp}}_{\text{transport de } \partial \Omega_p} = \frac{dg}{dp}$$

L'utilisation des définitions et transformations établies dans le cas bidimensionnel [ORT94] :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}(s)}{dp} &= \pi'(s)\vec{n}(s) \\ \frac{d\vec{n}}{dp} &= -\pi'(s)\vec{\tau}(s) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial n} \vec{n} &= \text{div} \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial s} \vec{\tau} \end{aligned}$$

permet de montrer que la troisième équation de (P_m) se transforme en une nouvelle condition aux limites, pour laquelle il est possible de donner un sens à chaque terme :

$$\sum_i n_i = \frac{dg}{dp} + \pi(s)[f + c(s)g] + \frac{\partial}{\partial s} [\pi \sigma_i \tau_i] \quad \text{sur } \partial \Omega_p$$

où $c(s)$ désigne la courbure de la frontière $\partial \Omega_p$.

Ainsi, lors d'une modification de la frontière $\partial \Omega_p$ du domaine Ω_p , les sensibilités des solutions u et $\vec{\sigma}$ du problème (P_m) :

$$(P_m) \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} &= f & \text{dans } \Omega_p \\ \sigma_i &= \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{dans } \Omega_p \\ \sigma_i n_i &= g & \text{sur } \partial \Omega_p \end{aligned} \right.$$

sont mesurées par les fonctions w et $\vec{\Sigma}$, solutions d'un autre problème, associé à (P_m) et noté (P'_m) :

$$(P'_m) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \Sigma_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{dans } \Omega_p \\ \Sigma_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \text{dans } \Omega_p \\ \Sigma_i n_i = \frac{dg}{dp} + \pi(s)[f + c(s)g] + \frac{\partial}{\partial s}[\pi \sigma_i \tau_i] \quad \text{sur } \partial\Omega_p \end{array} \right.$$

(P'_m) est fonction des deux seules inconnues scalaire w et vectorielle $\vec{\Sigma}$, $\vec{\sigma}$ étant connu car déterminé par la résolution préalable (analytique ou numérique) de (P_m). (P'_m) est un problème linéaire posé dans le même domaine Ω_p que le problème initial (P_m). Sa résolution est analytique ou numérique (cf. § 3).

L'avantage de ce problème modèle (P_m), outre celui d'exposer simplement la méthodologie développée, est d'en permettre sa validation. En effet, nos résultats [ORT94] sont confirmés par des travaux d'analyse de sensibilité analytique globale déjà établis [PIR84].

Cette méthode d'analyse de sensibilité locale est illustrée sur un exemple dans le paragraphe suivant.

3. Analyse de sensibilité locale : validation

La méthodologie proposée est ici illustrée sur un exemple présentant une solution analytique. Il s'agit d'un problème de Dirichlet posé dans un domaine ellipsoïde. Ce problème présentant une solution analytique, il permet de valider, dans un premier temps, les calculs analytiques de sensibilités et, dans un second temps, les résultats numériques obtenus par un calcul par éléments finis.

3.1. Problème de l'ellipse

Soit Ω le domaine bidimensionnel occupé par cette ellipse dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$, et $\partial\Omega$ sa frontière, comme indiqué sur la figure ci-dessous :

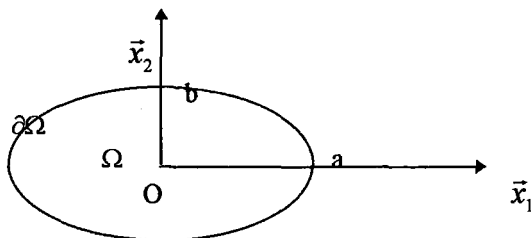


Figure 3. Ellipse

La frontière $\partial\Omega$ est définie par l'équation :

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad [1]$$

où a et b désignent les demi longueurs aux axes de l'ellipse.

Soit $\theta(x_i)$ une fonction scalaire définie sur le domaine Ω par le problème en Laplacien suivant :

$$(P) \begin{cases} \Delta\theta = -2 & \text{dans } \Omega \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{matrix} [2a] \\ [2b] \end{matrix}$$

Le problème (P) peut avoir différentes origines mécaniques. Ainsi, le champ solution θ peut s'interpréter comme le potentiel des contraintes associé à un arbre cylindrique de section elliptique en torsion [DUV90]. Ce champ peut également être considéré comme un champ de température ; il est alors la solution d'un problème de diffusion thermique dans un milieu homogène isotrope.

En procédant à un changement de variable faisant intervenir le produit s et le rapport p des demi-axes : $s = a.b$ et $p = \frac{a}{b}$,

l'équation [1] de la frontière de l'ellipse s'écrit alors :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + p^2 x_2^2 - sp = 0 \quad [3]$$

où les variables de conception s et p gouvernent la géométrie de l'ellipse : s contrôle son aire et p son allongement.

La solution de ce problème (P) est recherchée sous la forme [DUV90] :

$$\theta(x_i) = Kf(x_i) = Kf(x_1^2 + p^2 x_2^2 - sp) \quad [4]$$

où K est une constante à déterminer. Cette fonction $\theta(x_i)$ vérifie alors la condition de bord [2b]. La constante K est déterminée en injectant l'expression [4] dans l'équation [2a] ; la solution $\theta(x_i)$ du problème (P) s'exprime alors en fonction de s et p suivant :

$$\theta(x_1, x_2) = \frac{-1}{1+p^2} (x_1^2 + p^2 x_2^2 - sp) \quad [5]$$

3.2. Analyse de sensibilité locale

Pour étudier la sensibilité du champ $\theta(x_i)$ par rapport à l'une des variables de conception de l'ellipse, choisissons p , le rapport des génératrices, comme paramètre. L'objectif est de mesurer la sensibilité de la solution $\theta(x_i)$ [5] lorsque ce paramètre est perturbé d'une quantité infinitésimale δp . Cette sensibilité par rapport au paramètre p , est mesurée à l'aide de la dérivée partielle de $\theta(x_i)$ définie par :

$$\frac{\partial \theta(x_i, p)}{\partial p} = \frac{d\theta(x_i, p)}{dp} - \pi n_j \frac{\partial \theta(x_i, p)}{\partial x_j} \tag{6}$$

Elle sera dans la suite notée $w(x_i, p) : w(x_i, p) = \frac{\partial \theta(x_i, p)}{\partial p}$.

La méthode d'analyse de sensibilité locale décrite précédemment (cf. § 2) permet d'établir que w est solution du problème (P') ci-dessous, associé au problème (P) initial :

$$(P') \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \\ w = -\pi n_j \frac{\partial \theta(x_i, p)}{\partial x_j} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7a}$$

$$\tag{7b}$$

où π est la composante normale de la vitesse de déplacement de la frontière de l'ellipse engendrée par la perturbation du paramètre p . Dans le cas de l'ellipse, l'équation de la frontière [3] permet d'écrire [ORT93, GHO95] :

$$\pi = \frac{1}{2p} (-x_1^2 + p^2 x_2^2)(x_1^2 + p^4 x_2^2)^{-1/2} \tag{8}$$

En remplaçant dans [7b] le terme $\pi n_j \frac{\partial \theta(x_i, p)}{\partial x_j}$ par sa valeur, calculée à partir des expressions analytiques de π [8] et de $\theta(x_i, p)$ [6] solution connue du problème initial (P), le problème (P') s'énonce alors :

$$(P') \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \\ w = -\frac{2p^2 x_2^2 - sp}{p(1 + p^2)} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{9a}$$

$$\tag{9b}$$

La solution $w(x_i, p)$ de ce problème (P') est construite de la même façon que celle du problème (P). Par conséquent, la solution $w(x_i, p)$ de (P') est donnée par l'expression ci-dessous :

$$w(x_i, p) = \frac{2p(x_1^2 - x_2^2) + (1 - p^2)s}{(1 + p^2)^2} \quad [10]$$

Il est facile de vérifier que $w(x_i, p)$ défini par l'équation [10] est la dérivée partielle par rapport au paramètre p de $\theta(x_i, p)$ donnée par l'équation [5]. Cette confrontation illustre la validité de la méthode d'analyse de sensibilité locale proposée : elle permet donc bien de calculer la sensibilité d'une solution d'un problème initial (P) comme solution d'un problème linéaire associé (P'), obtenu en étudiant successivement les sensibilités de chacune des équations locales de (P).

3.3. Application numérique

L'objectif est ici de tester la mise en œuvre numérique de la méthode d'analyse de sensibilité locale proposée sur le problème de l'ellipse présenté au paragraphe précédent. Le champ solution et sa sensibilité, calculés analytiquement, sont donc comparés à ceux résultant des calculs numériques par éléments finis obtenus avec le code de calcul MODULEF. Les données du problème (P') dépendant de la solution θ du problème (P), il faut donc tout d'abord résoudre le problème initial (P), puis le problème de sensibilité associé (P') en y reportant les valeurs déterminées précédemment pour θ .

Le domaine de l'ellipse est discrétisé avec des éléments finis triangulaires de degré 2 (P² - Lagrange). Les données géométriques sont les suivantes : $a = 2$ et $b = 1$, soit $s = p = 2$. En raison des conditions de double symétries, seul le quart supérieur de l'ellipse est maillé. Les conditions de symétries sur les bords Γ_x ($0 \leq x \leq a, y = 0$) et Γ_y ($x = 0, 0 \leq y \leq b$) sont équivalentes, pour un problème de thermique, à des conditions aux limites de flux nul.

Le champ solution et sa sensibilité ($\theta_{\text{num}}, w_{\text{num}}$) obtenus numériquement sont ci-après comparés avec le champ analytique et sa sensibilité ($\theta_{\text{ana}}, w_{\text{ana}}$).

Les résultats numériques et analytiques coïncident pour le calcul du champ initial θ . La figure 4 compare les résultats numériques aux valeurs analytiques sur les deux axes de symétrie Γ_x ($0 \leq x \leq a, y = 0$) (fig. 4a) et Γ_y ($x = 0, 0 \leq y \leq b$) (fig. 4b). La précision des résultats obtenus permet de valider le choix de la discrétisation.

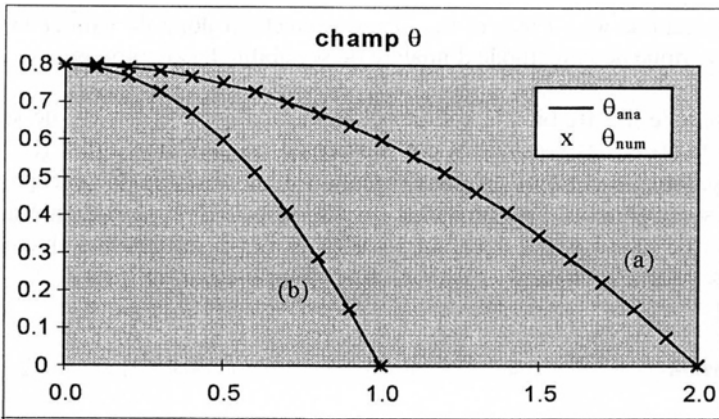


Figure 4. Comparaison entre la solution numérique θ_{num} et la solution analytique θ_{ana}

Connaissant θ , solution du problème initial (P), la quantité $\frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_i$ sur le bord

$\partial\Omega$ de l'ellipse est évaluée en calculant, en chaque nœud, la moyenne des valeurs déterminées sur les éléments voisins (lissage). Le problème de sensibilité (P') est alors résolu sur le même maillage que celui utilisé pour le problème initial (P) [GHO95].

La figure 5 montre que pour le calcul des sensibilités, les valeurs numériques w_{num} coïncident également parfaitement avec les valeurs analytiques w_{ana} calculées sur les frontières Γ_x (fig. 5c) et Γ_y (fig. 5d). Des calculs numériques par quotients différentiels w_{dif} redonnent les mêmes sensibilités.

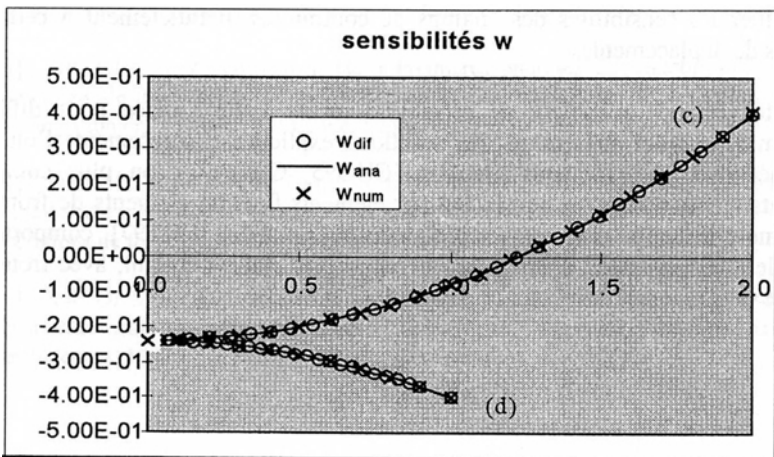


Figure 5. Comparaison entre la sensibilité numérique w_{num} et la sensibilité analytique w_{ana}

Ces confrontations w_{num} / w_{ana} et w_{num} / w_{dif} permettent donc de valider la mise en œuvre numérique de la méthode d'analyse de sensibilité locale proposée.

Cet exemple illustre bien la validité de la méthodologie d'analyse de sensibilité locale développée : les sensibilités des solutions d'un problème initial (P), dans un domaine paramétré Ω donné, à une fluctuation d'une variable de conception de ce domaine, sont solutions d'un problème linéaire associé (P'), obtenu en étudiant les sensibilités de chacune des équations locales de (P) à cette même fluctuation de paramètre.

4. Conclusion

L'objectif de l'analyse de sensibilité locale présentée est de déterminer l'influence de paramètres de conception géométriques sur la solution d'un problème étudié. La méthode d'analyse de sensibilité locale que nous avons développée permet de construire le problème noté (P'), associé au problème initial (P), dont les solutions sont les sensibilités recherchées.

Les avantages de cette analyse de sensibilité locale sont les suivants :

- quel que soit le problème initial (P), le problème associé (P') est toujours un problème linéaire. Cette méthode se révèle donc être particulièrement avantageuse lorsqu'il est nécessaire de déterminer les sensibilités de solutions d'un problème initial (P) non linéaire (elle a ainsi été appliquée pour étudier la sensibilité d'une passe de forgeage à une modification d'outil [GHO96]);
- cette analyse permet de calculer directement les sensibilités recherchées ; en particulier, pour les problèmes de mécanique des milieux continus, elle permet de déterminer les sensibilités des champs de contraintes, parallèlement à celles des champs de déplacements.

Cette méthode d'analyse de sensibilité locale a été validée pour différents problèmes, simples présentant des solutions explicites : écrasement d'un lopin axisymétrique, cylindre sous pression [GHO95, GHO96] ; ou plus complexes nécessitant une résolution numérique par éléments finis ou éléments de frontière : écrasement de lopin avec contact unilatéral outil-matière [ORT97], comportement équivalent de matériaux composites, forgeage avec contact collant, avec frottement linéaire et frottement non linéaire [GHO95, GHO96].

5. Bibliographie

- [BAD95] BADRINARAYANAN S., ZABARAS N., « A sensitivity analysis for the optimal design of metal forming processes », Cornell University, 1995.
- [BRA86] BRAIBANT V., « Optimisation de forme des structures en vue de la conception assistée par ordinateur », Thèse de Doctorat de l'université de Liège, collection des publications 102, 1986.
- [DUV90] DUVAUT G., *Mécanique des milieux continus*, MASSON, 1990.
- [FOU94] FOURMENT L. & CHENOT J.L., « The inverse problem of design in forging. Inverse problems in engineering mechanics », pp. 21-28, Balkema, Rotterdam, 1994.
- [GHO95] GHOUALI M.A., ORTOLA S., OSTER A. & DUVAUT G., « Analyse de sensibilité locale de passes de forgeage : modèle et applications numériques », Action Concertée de Recherche sur la modélisation des opérations de forgeage, GT4 - Optimisation des gammes, Courbevoie, 1995.
- [GHO96] GHOUALI M.A., ORTOLA S. & DUVAUT G., « Optimisation des gammes de forgeage : analyse de sensibilité locale », *Proceedings du Premier Congrès Maghrébin de la Mécanique (CMM'96)*, vol. 2, p.145-151, GHARDAÏA, ALGERIE, 23-26 mars 1996. (A paraître dans *Algerian Jour. of Tech.*).
- [GHO96] GHOUALI M.A., ORTOLA S., DUVAUT G. & OSTER A., « Local sensibility analysis for forging gamut optimization », *Proceedings Integrated Design and Manufacturing in Mechanical & Engineering (IDMME'96)*, vol. 2, p.985-994, NANTES, FRANCE, 15-17 avril 1996.
- [HAF93] HAFTKA R.T & GÜRDAL Z., *Eléments of structural optimisation solid mechanics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [ORT93] ORTOLA S. & DUVAUT G., « Premières analyses de sensibilités », Action Concertée de Recherche sur la modélisation des opérations de forgeage, GT4 - Optimisation des gammes, St Etienne, Septembre 1993.
- [ORT94] ORTOLA S., GHOUALI M.A. & DUVAUT G., « Analyse de sensibilité locale : principe et validation », Action Concertée de Recherche sur la modélisation des opérations de forgeage, GT4 - Optimisation des gammes, Courbevoie, 1994.
- [ORT97] ORTOLA S., DUVAUT G., OSTER A. & GHOUALI M.A., « Analyse de sensibilité locale et contact unilatéral », soumis aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1997.

- [PIR84] PIRONNEAU O., *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer-Verlag, 1984.
- [ZHA93] ZHANG W.H., BECKERS P., DUYSINX P. & FLEURY C., « A parametric design based approach to structural shape optimisation », *3rd international conference OPTI93*, Zagora, Spain, 1993.

Article soumis le 15 avril 1997
Version révisée le 30 juin 1997