
Comparaison de différents algorithmes de plasticité dans l'analyse non linéaire des structures de poutres 3D

Ying Qiao Guo * — Hossein Shakourzadeh **

* Université de Technologie de Compiègne,
Département Génie des Systèmes Mécaniques
LG2MS, MNM, URA CNRS 1505
BP 649, 60206 Compiègne cedex

** Pôle Universitaire Léonard de Vinci
Direction d'Enseignement et Recherche
Département Mécanique-Structure-Matériaux & Procédés
92916 Paris La Défense cedex

RÉSUMÉ. Cet article concerne la présentation et la comparaison de différents modèles de plasticité des poutres 3D. La méthode de plastification progressive est basée sur les équations de plasticité en contraintes ; la méthode de plastification globale est basée sur les équations de plasticité en efforts résultants. L'intégration de la plasticité est effectuée avec différents schémas explicites ou implicites. La loi intégrée (totale) de Hencky est également utilisée. La comparaison des deux types de plastifications (progressive et globale) combinée avec différents schémas d'intégration fait l'objet de cet article. Les résultats numériques de nos modèles poutres élasto-plastiques sont comparés aux résultats de modèles coques et expérimentaux. Cette comparaison montre l'efficacité et la performance de chaque modèle.

ABSTRACT. This paper concerns the presentation and the comparaison of different methods of plasticity of 3D beam structures. The method of progressive plastification is based on the plasticity equations in terms of stresses ; the method of global plastification is based on the plasticity equations in terms of internal forces. The integration of plasticity is carried out with different explicit or implicit schemes. The integrated (total) constitutive law based on the deformation theory of plasticity is also used. The comparaison of the two types of plastification (progressive and global) combined with different integration schemes is the objectif of this paper. The numerical results of our elasto-plastic beam model are compared with the results of shell models and experiments. This comparaison shows the efficiency and performance of each modele.

MOTS-CLÉS : non linéaire, grands déplacements, plasticité, formulation lagrangienne actualisée à chaque itération, plastification progressive et globale, algorithmes explicite et implicite.

KEY WORDS : non linear analysis, large displacements, plasticity, updated lagrangian formulation, progressive and global plastification methods, explicit and implicit algorithms.

1. Introduction

Les structures métalliques ont souvent un comportement élasto-plastique. La plasticité peut apparaître avant ou après le flambement (non linéarité géométrique) selon la rigidité de la structure. La plastification des barres a des répercussions sur la tenue mécanique et les non linéarités qui en découlent doivent être prises en compte dans la simulation du comportement de la structure.

Etant donnée la nécessité de produire des outils efficaces pour étudier la simulation de la ruine plastique, les travaux de recherche sont nombreux dans ce domaine. Dans le cadre d'études de structures-poutres 3D, ces travaux peuvent être classés dans trois catégories :

(1) modèles de poutres élasto-plastiques, [ARG 82], [CHE 77], [GJE 81], [OWE 80], [SHA 94], [GEN 93], [CRI 91], [WUN 86], [MEE 90], [POW 86], [TOI 93], [ALB 92], [CON 90], [DUR 89], [CUO 87],

(2) intégration de la loi de comportement élasto-plastique, [HAL 87], [GUO 87], [LEM 88], [OWE 80], [SIM 86], [SIM 93], [SHA 94], [ZIE 91], [DOD 87], [CRI 79], [CRI 91], [GRA 92], [IBR 94], [MAR 94], [SCH 79],

(3) critères de plasticité en efforts généralisés, [CHE 77], [CON 90], [GEN 93], [KIT 91], [ORB 82], [SHA 94],

De bons ouvrages sont disponibles pour la théorie des poutres 3D [BAT 90], [CHE 77], [GJE 81], ... et sur la formulation élasto-plastique [CHE 77], [CRI 91], [GJE 81], [HAL 87], [LEM 88], [OWE 80], [ZIE 91], [KHA 95],

La modélisation de poutres élasto-plastiques s'effectue par deux approches différentes : (i) la description des équations de plasticité en fonction de composantes de contraintes (la méthode locale) ; (ii) la représentation en efforts internes en fonction de résultantes de contraintes dans la section de poutre (la méthode globale).

La première approche, basée sur les équations de milieux continus, a l'avantage d'être générale et précise pour toute section de poutre. Cependant, du point de vue numérique, elle coûte très chère car un nombre important de points d'intégration est nécessaire. La deuxième approche est plus économique mais sa validité dépend directement du choix du critère de plasticité en efforts généralisés. En effet, l'expression du critère de plasticité en efforts généralisés n'est pas unique. Son expression dépend de la géométrie de la section et des efforts résultants pris en compte dans le modèle. Par conséquent, de différentes approximations ont été proposées dans la littérature. Plusieurs auteurs ont considéré que la plastification totale apparaît sous l'action de l'effort normal et des moments de flexion et de torsion [CHE 77], [KIT 91], [ORB 82], [TOI 93], [MEE 90], [POW 86], [ALB 92]. D'autres auteurs ont introduit également la contribution des efforts tranchants ou le

bimoment dans la plastification de la section [OWE 80], [CON 90], [ARG 82], [GEN 93]. Cependant la validité de ces derniers critères n'est toujours pas très claire car ces travaux sont généralement faits pour une section de poutre particulière. Il est intéressant de noter que même la prise en compte du moment de torsion dans le critère est toujours un problème ouvert [CHE 77], [GJE 81], [DUR 89].

L'expression des critères précis en efforts globaux a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Dans le cas de sections pleines, l'expression de la surface d'écoulement peut être obtenue par des méthodes analytiques [CHE 77] où la section est divisée par des zones plastiques. Dans le cas des poutres à parois minces, les méthodes analytiques peuvent devenir très compliquées en raison de l'existence de nombreux types de distributions de zones plastiques. Des méthodes numériques ont été proposées dans [CEN 77], [KIT 91], et [SHA 94] permettant d'obtenir les courbes d'interaction réelles des efforts internes en état plastique. Dans [KIT 91], les auteurs ont ensuite établi des équations mathématiques pour représenter ces courbes numériques. Malgré les efforts faits, l'expression de ce genre de critères est difficile à utiliser dans la pratique mais ils peuvent être utiles pour l'analyse de post-traitement afin de valider les résultats numériques.

La méthode de plastification locale permet de tenir compte de l'évolution de la plasticité dans la section, d'une manière naturelle. Le critère de plasticité de Von Mises peut être directement utilisé. L'écroutissement et les contraintes résiduelles peuvent être envisagés dans le modèle sans beaucoup de difficulté. Cependant, cette méthode est pénalisée par le coût de stockage massif des paramètres au cours de résolution numérique. Le choix de la méthode de plastification est donc judicieux. Dans cet article un de nos objectifs est de mettre en évidence les avantages et les inconvénients de chaque méthode en traitant quelques exemples.

Plusieurs schémas d'intégration ont été mis au point pour écrire les équations de plasticité sous une forme incrémentale. Globalement, les schémas de type Euler explicite ont été développés et améliorés dans les travaux précédents. Les schémas implicites et semi-implicites ont été développés et utilisés dans les travaux plus récents [SIM 86], [SIM 93], [IBR 94], [SHA 94], [DOD 87], [GRA 92]. Cependant, ces schémas sont souvent combinés avec le critère de Von Mises et rarement utilisés pour un critère global. D'autre part, des lois totales comme celle de Hencky peuvent également être utilisées dans l'analyse de poutres élasto-plastiques avec la méthode de plastification locale.

Dans cet article, différents schémas d'intégration sont comparés pour montrer leurs efficacité et précision. La méthode de plastification locale (progressive) utilisant le critère de Von Mises est combinée soit avec un schéma direct de la loi totale de Hencky-Mises, soit avec un schéma implicite et une loi incrémentale. La méthode de plastification globale est combinée avec un schéma explicite ou implicite et un critère de plasticité globale. Plusieurs critères globaux sont testés et comparés. La confrontation des résultats numériques aux mesures expérimentales pour un exemple industriel permet aux lecteurs d'avoir une vue globale sur l'ensemble des modèles de poutres 3D élasto-plastiques.

2. Formulation FLAI pour la non linéarité géométrique

Il existe plusieurs types de formulations lagrangiennes pour tenir compte des grands déplacements et grandes rotations dans l'analyse non linéaire des structures minces. Ces formulations sont classées selon le choix de la référence dans l'évaluation des déformations et des contraintes :

- Formulation Lagrangienne Totale (FLT) : la référence est la configuration initiale C^0 (fig. 2),
- Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas (FLAP) : la référence est la dernière configuration connue C^i en état d'équilibre au début du pas de chargement,
- Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI) : la référence est la dernière configuration connue C^i à l'itération i .

Pour obtenir des résultats valables en grands déplacements et grandes rotations, la FLT exige une formulation valable pour les rotations finies [ALM 95] afin de calculer correctement les déformations dans C^i mais mesurées par rapport à la référence éloignée C^0 . La FLAP permet certaines simplifications mais l'incrément du chargement doit rester suffisamment petit pour respecter l'hypothèse de déplacements (rotations) modérés. Quant à la FLAI, la formulation est simplifiée et les contraintes de Cauchy peuvent être utilisées [BAT 88], [GUO 87], [SHA 94]. Cette dernière formulation est utilisée dans ce travail et nous l'expliquons brièvement dans cette section.

Considérons le mouvement d'un élément de poutre 3D au cours de la déformation (fig. 1). En prenant la configuration C^i comme référence (FLAI), l'expression du principe des travaux virtuels (PTV) en état d'équilibre recherché C^2 s'écrit :

$$W^2 = W_{int}^2 - W_{ext}^2 = \int_{V^i} \langle E^* \rangle \{ S^2 \} dV^i - \int_{V^i} \langle u^* \rangle \{ f^2 \} dV^i = 0 \quad \forall u_q^* C.A. \quad [1]$$

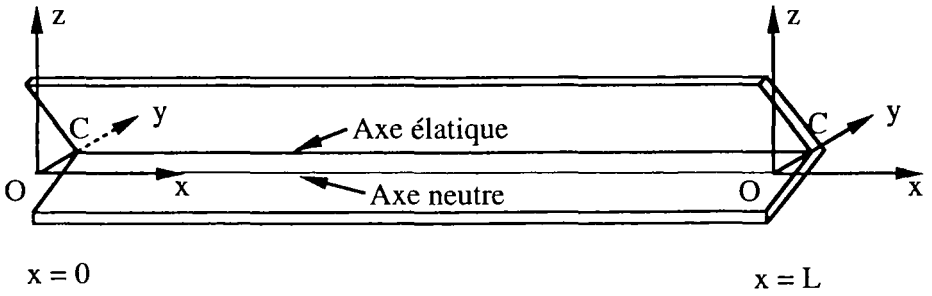
où $\langle u^* \rangle$ représente les déplacements virtuels cinématiquement admissibles, $\langle E^* \rangle$ les déformations virtuelles de Green-Lagrange, $\{ S^2 \}$ les contraintes de Piola-Kirchhoff de second espèce (PK2) dans la configuration C^2 .

Supposons que la configuration courante C^i (connue mais non équilibrée) est une estimation de C^2 , on cherche $\{ \Delta u \}$ pour atteindre l'état d'équilibre C^2 en considérant un développement limité aux termes linéaires :

$$W^2 \approx W^i + \Delta W^i = 0 \quad [2]$$

avec :

$$W^i = \int_{V^i} \langle E^* \rangle \{ S^i \} dV^i - \int_{V^i} \langle u^* \rangle \{ f^i \} dV^i \quad [3]$$



O : centre de gravité

C : centre de cisaillement

y et z axes principaux d'inertie

Figure 1. Poutre droite tridimensionnelle

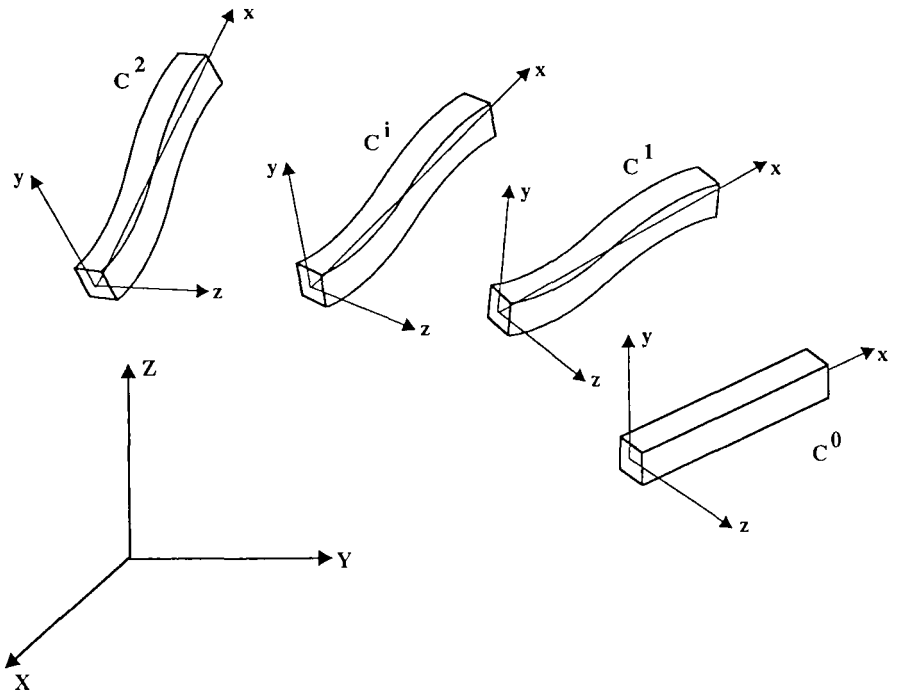


Figure 2. Mouvement d'un élément de poutre 3D au cours de la déformation

$$\Delta W^i = \int_{V^i} \left(\langle E^* \rangle \langle \Delta S^i \rangle + \langle \Delta E^* \rangle \langle S^i \rangle \right) dV^i - \int_{V^i} \langle u^* \rangle \langle \Delta f^i \rangle dV^i \quad [4]$$

Le terme associé aux charges suiveuses disparaît dans le cas des charges mortes ($\langle \Delta f^i \rangle = 0$). D'autres simplifications peuvent être envisagées car la configuration considérée est celle de référence (C^i) :

$$\begin{aligned} \langle S^i \rangle &= \langle \sigma^i \rangle, \quad \langle E^* \rangle = \langle \epsilon^* \rangle \\ \langle E^* \rangle \langle \Delta S \rangle &= \langle \epsilon^* \rangle [H_{ep}] \langle \Delta \epsilon \rangle \end{aligned} \quad [5]$$

où $\langle \epsilon^* \rangle$ représente la partie linéaire des déformations virtuelles de Green-Lagrange, $\langle \sigma^i \rangle$ les contraintes de Cauchy en C^i , $[H_{ep}]$ la matrice élasto-plastique. Nous obtenons ainsi le système d'équations non linéaires suivant que nous pouvons résoudre par la méthode de Newton-Raphson :

$$\int_{V^i} \left(\langle \epsilon^* \rangle [H_{ep}] \langle \Delta \epsilon \rangle + \langle \Delta E^* \rangle \langle \sigma^i \rangle \right) dV^i = \int_{V^i} \langle u^* \rangle \langle f^i \rangle dV^i - \int_{V^i} \langle D^* \rangle \langle \sigma^i \rangle dV^i \quad [6]$$

où $[H_{ep}]$ est la matrice élasto-plastique.

3. Elément de poutres 3D à sections quelconques

Nous établissons un repère local dans chaque élément de poutre en prenant l'axe x comme l'axe neutre et deux axes principaux d'inertie comme les axes y et z . Le découplage des effets de membrane, flexion et torsion est possible en élasticité lorsque l'effort normal N_x est défini au centre de gravité O et les autres efforts sont définis au centre de torsion C . Le champ de déplacements d'un point quelconque est obtenu en superposant les contributions de différents effets [BAT 90] :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_q \\ v_q \\ w_q \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z \theta_y \\ 0 \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -y \theta_z \\ v \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega \theta_{x,x} \\ -(z - z_c) \theta_x \\ (y - y_c) \theta_x \end{Bmatrix} \\ &\text{membrane} \qquad \text{flexion} \qquad \text{flexion} \qquad \text{torsion} \\ &\qquad \qquad \text{autour de } y \qquad \text{autour de } z \end{aligned} \quad [7]$$

où $\theta_y = -w_{,x}$, $\theta_z = v_{,x}$ dans le cas du modèle de flexion d'Euler-Bernoulli ; y_c, z_c sont les coordonnées du centre de torsion C ; u_0 le déplacement du point O suivant x et v, w les déplacements du point C suivant y, z ; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ les rotations autour de x, y, z ; $\theta_{x,x}$ le taux de torsion associé au gauchissement de la section ; $\omega(y, z)$ la fonction de gauchissement pour les sections pleines ou pour les sections à parois minces et ouvertes.

La formulation FLAI permet d'utiliser ce champ de déplacements linéaire pour traiter les problèmes de grands déplacements, puisque la configuration de référence de la FLAI est très proche (voire confondue) de la configuration étudiée.

Les expressions des déformations $\langle \epsilon^* \rangle$, $\langle \Delta \epsilon \rangle$ et $\langle \Delta E^* \rangle$ sont obtenues avec l'équation [7]. Nous substituons ensuite ces expressions dans [6] et effectuons l'intégration sur les sections des poutres pour un matériau élastique :

$$\begin{aligned} & \sum_{\epsilon} \int_0^L \left(\langle e^* \rangle [C_e] \langle \Delta \epsilon \rangle + \langle L^* \rangle [R] \langle \Delta L \rangle \right) dx \\ & = \sum_{\epsilon} \int_0^L \langle u^* \rangle \langle f_i^* \rangle dx - \sum_{\epsilon} \int_0^L \langle e^* \rangle \langle N \rangle dx \end{aligned} \tag{8}$$

avec :

$$\langle e \rangle = \left\langle u_{0,x} \quad \theta_{x,x} \quad -w_{,xx} \quad v_{,xx} \quad \theta_{x,xx} \right\rangle$$

$$\langle L \rangle = \left\langle \theta_x \quad v_{,x} \quad w_{,x} \quad \theta_{x,x} \right\rangle$$

$$[C_e] = \text{diag.} [EA \quad GJ \quad EI_y \quad EI_z \quad EI_{\omega}]$$

$$\langle N \rangle = \left\langle N_x \quad T_y \quad T_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z \quad M_{\omega} \right\rangle$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & -T_z & T_y & -(T_y y_c + T_z z_c) \\ -T_z & N_x & 0 & (z_c N_x - M_y) \\ T_y & 0 & N_x & -(M_z + y_c N_x) \\ -(T_y y_c + T_z z_c) & (z_c N_x - M_y) & -(M_z + y_c N_x) & M_{\sigma} \end{bmatrix} \tag{9}$$

où I_{ω} est le moment d'inertie sectoriel, M_{ω} le bimoment associé au gauchissement et M_{σ} l'effet de Wagner [CHE 77] :

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad ; \quad M_\omega = \int_A \sigma_x \omega dA \tag{10}$$

$$M_\sigma = \int_A \sigma_x [(z-z_c)^2 + (y-y_c)^2] dA \tag{11}$$

Nous considérons une approximation linéaire pour u_0 et des approximations cubiques de type Hermite pour v, w et θ_x dans [8]. Nous définissons ainsi un élément de poutre à 7 ddl par noeud [BAT 90] :

$$\langle u_n^* \rangle = \left\langle (u_0^*, v^*, w^*, \theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*, \theta_{x,x}^*)_{nd}, nd = 1,2 \right\rangle \tag{12}$$

(avec $\theta_y = -w_{,x}$ et $\theta_z = v_{,x}$)

$$\sum_e \langle u_n^* \rangle ([k] + [k_\sigma]) \{ \Delta u_n \} = \sum_e \langle u_n^* \rangle (\{ f_{ext} \} - \{ f_{int} \}) \tag{13}$$

où $[k], [k_\sigma]$ sont les matrices de rigidité et de contraintes initiales élémentaires, $\{ f_{ext} \}$ et $\{ f_{int} \}$ sont les vecteurs des forces externes et internes évalués dans la configuration C^i .

Après assemblage, nous obtenons un système d'équations non linéaires global de type Newton-Raphson :

$$[K_T] \{ \Delta U_n \} = \{ F_{ext} \} - \{ F_{int} \} \tag{14}$$

Le système ci-dessus donne l'accroissement des déplacements d'une itération $\{ \Delta U^i \}$ dans un pas de chargement. Pour obtenir les déformations cumulées $\{ \Delta \epsilon \}$ (et puis les efforts) dès le début du pas, on peut cumuler les déplacements $\{ \Delta U^i \}$ d'abord ($\{ \Delta U \} = \sum \{ \Delta U^i \}$) et calculer ensuite les déformations de Green-Lagrange du pas $\{ \epsilon(\Delta U) \}$ avec $\{ \Delta U \}$ cumulé. Dans la formulation FLAI, nous procédons d'une façon plus efficace et précise : nous calculons les déformations linéaires d'une itération $\{ \epsilon^i(\Delta U^i) \}$ avec le petit accroissement $\{ \Delta U^i \}$ d'abord et nous cumulons ensuite ces déformations pour obtenir les déformations du pas ($\{ \Delta \epsilon \} = \sum \{ \Delta \epsilon^i \}$). L'intégration élasto-plastique s'effectue sur l'accroissement des déformations d'un pas $\{ \Delta \epsilon \}$ pour éviter la fausse décharge au cours d'itérations d'équilibre.

4. Algorithmes d'intégration plastique

Dans l'analyse élasto-plastique des structures, nous avons les intégrations en temps et en espace. Nous présentons dans cette section les méthodes de plastification progressive et globale (intégration spatiale) combinées avec les algorithmes implicite, explicite ou direct (intégration temporelle).

Dans la méthode de plastification progressive, on tient compte de l'évolution de la plastification dans la section. L'intégration numérique de Lobatto est adoptée pour avoir des points d'intégration sur les peaux extérieures où la plastification commence. Le critère de plasticité est vérifié à tous les points d'intégration. Cette méthode est générale, précise et permet de prendre en compte l'écroûissage et les contraintes résiduelles. Néanmoins elle est pénalisée par un stockage et un coût de calcul importants. Cette méthode d'intégration par couche est combinée avec l'algorithme implicite ou l'algorithme direct (hypothèse de Hencky [LEM 88]).

Quant à la méthode de plastification globale, on admet l'hypothèse qu'une section de la poutre est soit élastique, soit entièrement plastique. Le critère de plasticité dépend uniquement des efforts résultants. Cette hypothèse permet de calculer la matrice élasto-plastique et les efforts résultants plastiquement admissibles en variables globales sans intégration dans la section. La méthode est combinée avec l'algorithme implicite ou explicite.

Toutefois, dans la réalité, la plastification est progressive dans la section. La plastification globale est très efficace mais elle confère à la structure une rigidité un peu plus importante pendant la plastification réelle. Par conséquent, dans le cas d'instabilité plastique, les charges ultimes calculées par cette méthode peuvent être surévaluées. D'autre part, la formulation du critère de plasticité en efforts généralisés est délicate.

4.1. Méthode de plastification progressive

Dans l'analyse élasto-plastique, l'intégration sur la section de l'équation [6] permet d'obtenir la même expression que l'équation [8] sauf que :

- la matrice élastique $[C_e]$ est remplacée par la matrice élasto-plastique $[C_{ep}]$,
- les efforts résultants $\{N\}$ doivent être plastiquement admissibles.

L'intégration numérique sur la section est adoptée pour calculer $[C_{ep}]$ et $\{N\}$.

4.1.1. Matrice élasto-plastique/efforts résultants

L'intégration plastique sur la section s'effectue de la façon suivante : à chaque point d'intégration, nous vérifions le critère de plasticité, calculons les contraintes plastiquement admissibles et la loi constitutive et puis nous effectuons l'intégration

numérique sur la section pour obtenir des efforts résultants et la matrice élasto-plastique correspondante.

Dans le cas des poutres minces, les déformations de cisaillement transversal dues aux efforts tranchants sont négligées selon l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. Quant à celles de torsion, il est plus commode d'utiliser leur résultante dans l'équation [6] :

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & \\ & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_T \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \langle \dot{\sigma} \rangle = [H_e] \langle \dot{\epsilon} \rangle \quad [15]$$

avec

$$\dot{\sigma}_T = \sqrt{\dot{\sigma}_{xy}^2 + \dot{\sigma}_{xz}^2} \quad ; \quad \dot{\epsilon}_T = \sqrt{\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{xz}^2}$$

Le taux des déformations peut être obtenu avec le champ de déplacements [7] :

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}_{,x} - y \dot{v}_{,xx} - z \dot{w}_{,xx} + \omega_c \dot{\theta}_{x,xx} \\ \gamma \dot{\theta}_{x,x} \end{pmatrix} \quad [16]$$

avec

$$\omega_c = \omega + y z_c - z y_c \quad , \quad \gamma = \left[(\omega_{,y} - (z-z_c))^2 + (\omega_{,z} - (y-y_c))^2 \right]^{1/2}$$

Nous avons l'équation de Prandtl-Reuss et le critère de Von Mises suivants :

$$[H_{ep}] = [H_e] \left([I] - \frac{\langle F' \sigma \rangle \langle F' \sigma \rangle [H_e]}{E_p + \langle F' \sigma \rangle [H_e] \langle F' \sigma \rangle} \right) \quad (\text{Prandtl-Reuss}) \quad [17]$$

$$F = \left(\sigma_x^2 + 3\sigma_T^2 \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^P) = 0 \quad (\text{Von Mises}) \quad [18]$$

où $E_p = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^P}$ est le module plastique ou la pente de la courbe $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^P$ (obtenue avec

l'essai de traction uniaxiale $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$).

Nous obtenons ainsi l'équation constitutive :

$$[H_{ep}] = \begin{bmatrix} E & \\ & G \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} E^2 \sigma_x^2 & 3 E G \sigma_x \sigma_T \\ 3 E G \sigma_x \sigma_T & 9 G^2 \sigma_T^2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad [19]$$

avec :

$$\beta = E_p \left(\sigma_x^2 + 3 \sigma_T^2 \right) + E \sigma_x^2 + 9 G \sigma_T^2$$

En substituant $[H_{ep}]$ ci-dessus dans l'équation [6], nous pouvons définir la matrice de rigidité $[k]$ comme pour le cas élastique [8] :

$$\langle u_n^* \rangle [k] \langle \dot{u}_n \rangle = \int_{V_e} \langle \dot{\epsilon}^* \rangle [H_{ep}] \langle \dot{\epsilon} \rangle dV = \int_L \langle \dot{e}^* \rangle [C_{ep}] \langle \dot{e} \rangle dx \quad [20]$$

avec :

$$[C_{ep}] = \int_A H \begin{bmatrix} 1 & b \gamma & z & -y & \omega_c \\ & c \gamma^2 & b \gamma z & -b \gamma y & b \gamma \omega_c \\ & & z^2 & -y z & z \omega_c \\ & & & y^2 & -y \omega_c \\ \text{Sym.} & & & & \omega_c^2 \end{bmatrix}$$

où $[C_{ep}]$ est la matrice élasto-plastique associée aux déformations généralisées.

Le taux (ou l'accroissement) des efforts résultants utilisé dans la matrice $[R]$ (équation [9]) est calculé par l'intégration des contraintes dans la section :

$$\begin{aligned} \dot{N}_x &= \int_A \dot{\sigma}_x dA & ; & & \dot{M}_\omega &= \int_A \dot{\sigma}_x \bar{\omega} dA \\ \dot{M}_x &= \int_A \left[\dot{\sigma}_{xz} (y - y_c) - \dot{\sigma}_{xy} (z - z_c) \right] dA & & & & [21] \\ \dot{M}_y &= \int_A \dot{\sigma}_x \cdot z dA & ; & & \dot{M}_z &= \int_A \dot{\sigma}_x \cdot (-y) dA \\ \dot{M}_\sigma &= \int_A \dot{\sigma}_x \left[(z - z_c)^2 + (y - y_c)^2 \right] dA \end{aligned}$$

4.1.2. Algorithme de plasticité implicite

Un algorithme de plasticité implicite a été proposé pour les problèmes de contraintes planes [SIM 86]. En nous inspirant de ce travail, nous obtenons un algorithme implicite simple et efficace pour l'élément de poutres 3D avec le modèle de plastification progressive.

Pour calculer les contraintes plastiquement admissibles vérifiant le critère de plasticité, nous exprimons le critère en fonction du multiplicateur plastique λ et

effectuons une recherche unidimensionnelle de λ tel que le critère de plasticité soit nul.

Le critère de Mises peut être réécrit comme suit :

$$\phi = \frac{1}{2} \langle \sigma \rangle^T [P] \langle \sigma \rangle - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_c^2 (\bar{\epsilon}^P) = \frac{1}{2} \sigma_{eq}^2 - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_c^2 = 0 \tag{22}$$

avec

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_T \rangle^T \quad ; \quad [P] = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente, $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^P)$ (la courbe de l'essai uniaxial). La loi de normalité permet de définir la vitesse de la déformation plastique équivalente $\dot{\bar{\epsilon}}^P$ en fonction de $\dot{\lambda}$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{\epsilon}}_x^P \\ \dot{\bar{\epsilon}}_T^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\epsilon}}_x^P \\ \dot{\bar{\epsilon}}_T^P \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \langle \sigma \rangle} = \dot{\lambda} [P] \langle \sigma \rangle \quad (\text{loi de normalité}) \tag{23}$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \left(\langle \dot{\bar{\epsilon}}^P \rangle [P]^{-1} \langle \dot{\bar{\epsilon}}^P \rangle \right)^{1/2} = \dot{\lambda} \left(\langle \sigma \rangle^T [P] \langle \sigma \rangle \right)^{1/2} = \dot{\lambda} \sigma_{eq} \tag{24}$$

La décomposition des déformations et l'équation [21] permettent d'exprimer la vitesse des contraintes $\langle \dot{\sigma} \rangle$ en $\dot{\lambda}$:

$$\langle \dot{\sigma} \rangle = [H_e] \left(\langle \dot{\epsilon} \rangle - \langle \dot{\bar{\epsilon}}^P \rangle \right) = [H_e] \left(\langle \dot{\epsilon} \rangle - \dot{\lambda} [P] \langle \sigma \rangle \right) \tag{25}$$

L'algorithme implicite est formulé sous une forme incrémentale. Soient $\langle \sigma_0 \rangle$ et $\bar{\epsilon}_0^P$ les contraintes et la déformation plastique équivalente connues au début d'un pas, $\langle \Delta \epsilon \rangle$ l'accroissement des déformations du pas, $0 < \alpha \leq 1$ le paramètre de l'algorithme semi-implicite, alors les contraintes recherchées à l'itération i $\langle \sigma_i(\Delta \lambda) \rangle$ peuvent être obtenues de l'équation [25] :

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_0 \rangle + [H_e] \left(\langle \Delta \epsilon \rangle - \Delta \lambda [P] \langle \sigma_\alpha \rangle \right) \tag{26}$$

avec :

$$\langle \sigma_\alpha \rangle = (1 - \alpha) \langle \sigma_0 \rangle + \alpha \langle \sigma_i \rangle \tag{27}$$

ou encore :

$$\{\sigma_i\} = \left([I] + \alpha \Delta\lambda [H_e][P] \right)^{-1} \left(\left([I] - (1 - \alpha) \Delta\lambda [H_e][P] \right) \{\sigma_0\} + [H_e] \{\Delta\varepsilon\} \right) \quad [28]$$

La déformation plastique équivalente peut s'exprimer aussi en fonction de $\Delta\lambda$ selon l'équation [24] :

$$\bar{\varepsilon}_i^p = \bar{\varepsilon}_0^p + \Delta\lambda \left(\{\sigma_\alpha\}^T [P] \{\sigma_\alpha\} \right)^{1/2} \quad [29]$$

Ainsi le critère de plasticité ϕ (équation [22]) devient une fonction de $\Delta\lambda$. La méthode de Newton-Raphson permet de trouver $\Delta\lambda$ vérifiant le critère de plasticité. L'organigramme de l'algorithme implicite est présenté ci-dessous :

$\{\sigma_0\}, \bar{\varepsilon}_0^p, \alpha, \{\Delta\varepsilon\}$ connus ; précision $e = 0.0001$; $\Delta\lambda = 0$

Boucle pour trouver $\Delta\lambda$ tel que $\phi(\Delta\lambda) = 0$

$$\{\sigma_i\} = \frac{\left([I] - \Delta\lambda(1 - \alpha)[H_e][P] \right) \{\sigma_0\} + [H_e] \{\Delta\varepsilon\}}{[I] + \Delta\lambda \alpha [H_e][P]} \quad \text{(contraintes à l'itération i)}$$

$$\{\sigma_\alpha\} = (1 - \alpha) \{\sigma_0\} + \alpha \{\sigma_i\} \quad \text{(contraintes moyennes)}$$

$$\bar{\varepsilon}_i^p = \bar{\varepsilon}_0^p + \Delta\lambda \left(\{\sigma_\alpha\}^T [P] \{\sigma_\alpha\} \right)^{1/2} \quad \text{(déformation plastique équivalente)}$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma} \left(\bar{\varepsilon}_i^p \right) \quad \text{(limite élastique due à l'écrouissage)}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \{\sigma_i\}^T [P] \{\sigma_i\} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \left(\bar{\varepsilon}_i^p \right) \quad \text{(critère de plasticité)}$$

Si $|\phi| > e$ $\phi'(\Delta\lambda) = \frac{\phi(\Delta\lambda + e) - \phi(\Delta\lambda)}{e}$ (dérivée de ϕ par rapport à $\Delta\lambda$)

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda - \frac{\phi(\Delta\lambda)}{\phi'(\Delta\lambda)} \quad \text{(correction de } \Delta\lambda \text{ par N-R)}$$

Si $|\phi| < e \Rightarrow$ fin ($\{\sigma_i\}$ plastiquement admissible)

A la convergence, $\Delta\lambda$, $\{\sigma_i\}$, $\bar{\varepsilon}^p$, $[H_{ep}]$ sont obtenus. L'intégration sur la section permet de calculer la matrice élasto-plastique $[C_{ep}]$ (éq. [20]) et les efforts résultants. Notons que l'intégration de plasticité s'effectue sur un pas (déformations cumulées depuis le début du pas : $\{\Delta\varepsilon\} = \sum \{\Delta\varepsilon^i\}$) et non pas sur une itération afin d'éviter le problème de fausses décharges élastiques causées par les itérations d'équilibre.

4.1.3. *Algorithme de plasticité direct*

Dans l'algorithme direct, la loi intégrée de Hencky [KHA 95], [LEM 88] (*deformation theory of plasticity*) est adoptée pour éviter l'intégration plastique temporelle. Un chargement est dit radial si le tenseur des contraintes en tout point $\{\sigma(x,t)\}$ est proportionnel à un tenseur $\{\sigma(x,t_0)\}$ indépendant du temps, le facteur étant une fonction monotone du temps $\alpha(t)$ telle que :

$$\{\sigma(x, t)\} = \alpha(t) \{\sigma(x, t_0)\} \tag{30}$$

Au cours du chargement, les directions principales des contraintes sont variables en chaque point, mais indépendantes du temps. Nous avons ainsi les relations suivantes pour le vecteur de contraintes et la contrainte équivalente à l'instant t :

$$\{\sigma\} = \alpha(t) \{\sigma^0\} ; \sigma_{eq} = \alpha(t) \sigma_{eq}^0 \tag{31}$$

Cela nous permet d'intégrer directement le taux de déformations plastiques. En utilisant les équations [23], [24], [31], nous avons :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^p\} &= \int_0^t \{\dot{\varepsilon}^p\} dt = \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} [P] \{\sigma\} dt \\ &= \int_0^t [P] \frac{\alpha(t) \{\sigma^0\}}{\alpha(t) \sigma_{eq}^0} \dot{\varepsilon}^p dt = \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\sigma} [P] \{\sigma\} \end{aligned} \tag{32}$$

ou encore :

$$\{\varepsilon^p\} = \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) [P] \{\sigma\} \tag{33}$$

où E_s est le module sécant de la courbe $\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}$.

Enfin, la loi de comportement élasto-plastique de la poutre sous une forme totale est obtenue :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_T \end{Bmatrix} = E_S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3 - (1 - 2\nu) \frac{E_S}{E}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_T \end{Bmatrix} \quad [34]$$

L'hypothèse du chargement radial est discutable dans la réalité, cependant elle permet d'obtenir des résultats relativement bons sans effectuer l'intégration plastique.

4.2. Méthode de plastification globale

Dans les méthodes de plastification globale, la section de la poutre est supposée élastique ou entièrement plastique. Les critères de plasticité s'expriment en efforts résultants. Il n'y a pas d'intégration sur la section. Cela permet d'économiser considérablement l'espace mémoire et le temps de calcul. Cependant, la précision de ces méthodes dépend fortement de la validité du critère de plasticité et du type de plastification étudié (membrane ou flexion dominant).

4.2.1. Critère de plasticité en efforts résultants

Le critère de plasticité en efforts résultants est un critère global de la section. Il varie en fonction des efforts choisis et de la géométrie de la section. Il est impossible d'obtenir un critère général convenable à toutes sortes de sections, en tenant compte de tous les 7 efforts résultants. Nous citons ici deux critères approximatifs proposés dans [ARG 82] :

$$f = n_x^2 + m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 - 1 = 0 \quad [35]$$

$$f = n_x^2 + \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} - 1 = 0 \quad [36]$$

avec

$$n_x = \frac{N_x}{N_x^P} ; \quad m_x = \frac{M_x}{M_x^P} ; \quad m_y = \frac{M_y}{M_y^P} ; \quad m_z = \frac{M_z}{M_z^P}$$

où $N_{xp}, M_{xp}, M_{yp}, M_{zp}$ sont les efforts résultants en état limite plastique.

Nous considérons ici les matériaux à écrouissage isotrope. Ainsi, nous pouvons réécrire ces critères en fonction de l'état d'écrouissage :

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{N_x^2}{A^2} + \frac{M_x^2}{W_{xp}^2} + \frac{M_y^2}{W_{yp}^2} + \frac{M_z^2}{W_{zp}^2} \right) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 = 0 \quad [37]$$

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{N_x^2}{A^2} + \bar{\sigma} \sqrt{\frac{M_x^2}{W_{xp}^2} + \frac{M_y^2}{W_{yp}^2} + \frac{M_z^2}{W_{zp}^2}} \right) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 = 0 \quad [38]$$

où A est la section, W_{xp}, W_{yp}, W_{zp} sont les modules plastiques de torsion et flexion.

D'autres critères ont été proposés pour des sections particulières : des sections rectangulaires [CHE 77], des sections I [ORB 82], des cornières [KIT 91]. Ces critères sont obtenus pour des cas particuliers, ils sont donc plus précis mais moins généraux. Nous notons que certains lissages sur la surface d'écoulement (définie par le critère de plasticité) sont nécessaires pour faciliter l'intégration plastique.

4.2.2. Matrice élasto-plastique associée aux efforts résultants

Dans l'analyse élasto-plastique, la matrice élastique $[C_e]$ (éq. [8]) est remplacée par la matrice élasto-plastique $[C_{ep}]$. Pour définir la matrice $[C_{ep}]$, nous utilisons le critère de plasticité, la loi de normalité et l'hypothèse de décomposition des déformations tous associés aux déformations et efforts généralisés :

$$F(\{M\}, K) = 0 \quad ; \quad \text{avec} \quad \dot{K} = \langle \sigma \rangle \langle \dot{\epsilon}^p \rangle = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad [39]$$

$$\langle \dot{\epsilon}_p \rangle = \lambda \langle F, \underline{M} \rangle \quad [40]$$

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle = \langle \dot{\epsilon}_e \rangle + \langle \dot{\epsilon}_p \rangle \quad [41]$$

où K est le travail plastique et $\{M\}$ le vecteur des efforts résultants.

En utilisant les équations [40] et [41] la loi élastique s'écrit :

$$\langle \dot{M} \rangle = [C] \left(\langle \dot{\epsilon} \rangle - \lambda \langle F, \underline{M} \rangle \right) \quad [42]$$

Au cours de la plastification, le critère et sa dérivée doivent rester nuls. Nous avons :

$$\dot{\underline{F}} = \langle \underline{F}, \underline{M} \rangle \{ \dot{\underline{M}} \} + F_{,K} \dot{K} = 0 \quad [43]$$

Les relations [42] et [43] permettent d'obtenir le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\langle \underline{F}, \underline{M} \rangle [C_e] \{ \dot{e} \}}{\mathcal{A} + \langle \underline{F}, \underline{M} \rangle [C_e] \{ \underline{F}, \underline{M} \}} \quad [44]$$

où $\mathcal{A} = -\frac{1}{\lambda} F_{,K} \dot{K}$ est la pente d'écoulement indépendante de $\dot{\lambda}$ et peut être calculée avec [39] et [40]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{1}{\lambda} \left(F_{,\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} d\bar{e}^p} \right) \left(\langle \underline{M} \rangle \dot{\lambda} \{ \underline{F}, \underline{M} \} / A \right) \\ &= -\frac{E_p}{A \bar{\sigma}} F_{,\bar{\sigma}} \langle \underline{M} \rangle \{ \underline{F}, \underline{M} \} \end{aligned} \quad [45]$$

Substituons [44] dans [42], nous obtenons la loi constitutive et la matrice élasto-plastique :

$$\{ \dot{\underline{M}} \} = [C_{ep}] \{ \dot{e} \} \quad [46]$$

avec

$$[C_{ep}] = [C_e] \left([I] - \frac{\{ \underline{F}, \underline{M} \} \langle \underline{F}, \underline{M} \rangle [C_e]}{\mathcal{A} + \langle \underline{F}, \underline{M} \rangle [C_e] \{ \underline{F}, \underline{M} \}} \right)$$

Nous notons que la formule obtenue ci-dessus est similaire à l'équation de Prandtl-Reuss [17].

4.2.3. Algorithme explicite de rabattement

Considérons un état élastique A dans un espace des efforts résultants N, M (fig. 3). Cet état peut dépasser la surface d'écoulement ($F=0$) à cause d'un calcul élastique ($\{ \Delta M^e \}$ de A à C). La partie BC représente les efforts plastiquement inadmissibles et doit être rabattue sur la surface d'écoulement pour vérifier le critère de plasticité ($F=0$).

En utilisant la méthode de Newton-Raphson, nous calculons d'abord le facteur de séparation r ($0 \leq r \leq 1$) satisfaisant le critère de plasticité tel que :

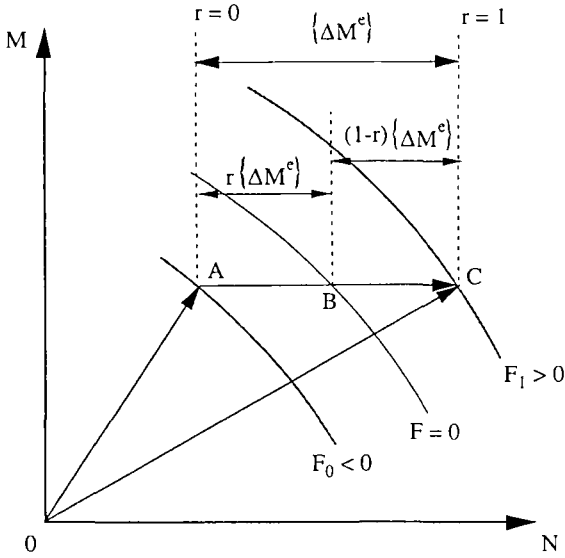


Figure 3. Séparation des efforts plastiquement inadmissibles

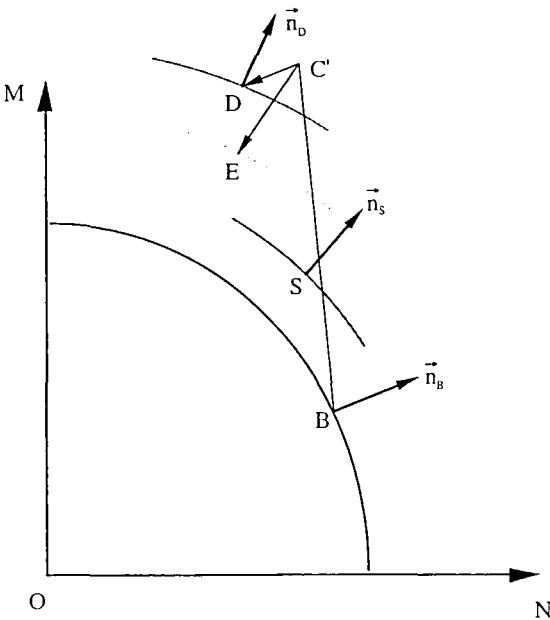


Figure 4. Méthode de la normale moyenne

$$F\left(\{M_I\} + r\{\Delta M^e\}\right) = 0 \quad [47]$$

Nous découpons ensuite la partie BC en nombreux sous-pas et cherchons la direction de rabattement de chaque sous-pas avec la méthode de "normale moyenne". Considérons un sous-pas à rabattre sur la surface d'écoulement (BC' dans fig. 4). Le premier rabattement suivant la normale \bar{n}_B donne l'état D situé sur une nouvelle surface à cause de l'écroutissage. La meilleure direction de rabattement pour BC' n'est ni \bar{n}_B ni \bar{n}_D . Elle est plutôt la moyenne de toutes les normales entre B et D ou la normale \bar{n}_S située au milieu de \overline{BD} . Selon les équations [42] et [44], nous pouvons calculer l'incrément des efforts du premier rabattement :

$$\{\Delta M\}_{BD} = \frac{1-r}{m} \{\Delta M^e\}_{BC} - \lambda_B [C_e] \{F, \underline{M}\}_B \quad [48]$$

avec

$$\lambda_B = \frac{\frac{1-r}{m} \langle F, \underline{M} \rangle_B \{\Delta M^e\}_{BC}}{\mathcal{A}_B + \langle F, \underline{M} \rangle_B [C_e] \langle F, \underline{M} \rangle_B} \quad (m : \text{nombre de sous-pas}) \quad [49]$$

Ainsi, la direction de la normale moyenne est définie par :

$$\{F, \underline{M}\}_S = \left\{ F, \underline{M} \left(\{M\}_B + \frac{1}{2} \{\Delta M\}_{BD} \right) \right\} \quad [50]$$

Le deuxième rabattement permet d'obtenir un meilleur incrément des efforts plastiquement admissibles $\{\Delta M\}_{BE}$, (on remplace l'indice BD par BE et B par S dans [48] et [49]).

On note que la précision de l'intégration plastique dépend fortement de la direction de rabattement par rapport à la surface d'écoulement : une direction quasi-tangentielle à la surface va introduire de grosses erreurs ; la forte non linéarité du critère peut rendre le rabattement difficile. En général, la méthode de normale moyenne permet d'obtenir de bons résultats si un nombre suffisant de sous-pas est utilisé. Ce nombre peut être déterminé par la formule empirique suivante :

$$m = \text{Integer} \left(\frac{F\left(\underline{M}_0 + \Delta \underline{M}^e\right)}{C \sigma_e} \right) \quad [51]$$

où σ_e est la limite élastique et C un coefficient numérique (nous prenons C=0.05 ou m=40).

4.2.4. *Algorithme implicite en efforts résultants*

L'algorithme explicite de rabattement (§ 4.2.3) exige de nombreux sous-pas pour assurer la précision du rabattement. L'algorithme implicite en efforts résultants (plastification globale) présenté ci-dessous est plus efficace et précis. Cet algorithme est formulé d'une manière similaire à celle de l'algorithme implicite en contraintes (plastification progressive). Nous réécrivons le critère [37] sous une forme quadratique comme l'équation [22] :

$$F = \frac{1}{2} \langle M \rangle [P_M] \langle M \rangle - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 = 0 \tag{52}$$

A partir de l'équation [42] nous obtenons une expression explicite de $\{M_i\}$ (à l'itération i) sous une forme incrémentale en fonction de $\Delta\lambda$ comme les équations [26], [27] et [28] :

$$\{M_i\} = \{M_0\} + [C_e] \left(\langle \Delta e \rangle - \Delta\lambda [P_M] \langle M_\alpha \rangle \right) \tag{53}$$

$$\langle M_\alpha \rangle = (1-\alpha) \langle M_0 \rangle + \alpha \langle M_i \rangle \tag{54}$$

$$\{M_i\} = \frac{\left([I] - (1-\alpha) \Delta\lambda [C_e] [P_M] \right) \{M_0\} + [C_e] \langle \Delta e \rangle}{[I] + \Delta\lambda \alpha [C_e] [P_M]} \tag{55}$$

L'autre critère [38] ne peut pas être écrit sous une forme quadratique comme [52] et cela rend la dérivée $\{F, \underline{M}\}$ très complexe. Donc nous ne pouvons obtenir qu'une expression implicite de $\{M_i\}$ en fonction de $\Delta\lambda$:

$$\{M_i\} = g \left(\{M_0\}, [C], \langle \Delta e \rangle, \alpha, \Delta \right) \tag{56}$$

De toute manière, ces deux critères peuvent toujours être exprimés en fonction de $\Delta\lambda$ (explicitement ou implicitement), et nous cherchons $\Delta\lambda$ tel que $F(\Delta\lambda) = 0$ avec un processus de Newton-Raphson.

L'organigramme de l'algorithme implicite en efforts résultants est écrit en s'inspirant de celui présenté dans § 4.1.2.

$\{M_0\}, W_0^P, \alpha, \{\Delta e\}$ connus ; précision $e = 0.0001$; $\Delta\lambda = 0$

Boucle de l'algorithme implicite

$$\{M_i\} = \frac{([I] - (1 - \alpha) \Delta\lambda [C_e][P_0]) \{M_0\} + [C_e] \{\Delta e\}}{[I] + \Delta\lambda \alpha [C_e][P_0]} \quad (\text{efforts à l'itération } i)$$

$$\{M_\alpha\} = (1 - \alpha) \{M_0\} + \alpha \{M_i\} \quad (\text{efforts moyens})$$

$$W_i^P = W_0^P + \frac{\Delta\lambda}{A} \langle M_i \rangle \{F_{M_i}\} \quad (\text{travail plastique cumulé})$$

$$W_i^P \Rightarrow \bar{\sigma}_i \quad (\text{état d'écroutissage})$$

$$F = F(\Delta\lambda, \bar{\sigma}_i, \{M_i\}) \quad (\text{critère de plasticité})$$

$$\text{Si } |F| > e \quad F = \frac{F(\Delta\lambda + e) - F(\Delta\lambda)}{e} \quad (\text{dérivée de } F \text{ par rapport à } \Delta\lambda)$$

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda - \frac{F(\Delta\lambda)}{F'(\Delta\lambda)} \quad (\text{correction de } \Delta\lambda \text{ par N-R})$$

$$\text{Si } |F| < e \Rightarrow \text{fin} \quad (\{M_i\} \text{ plastiquement admissible})$$

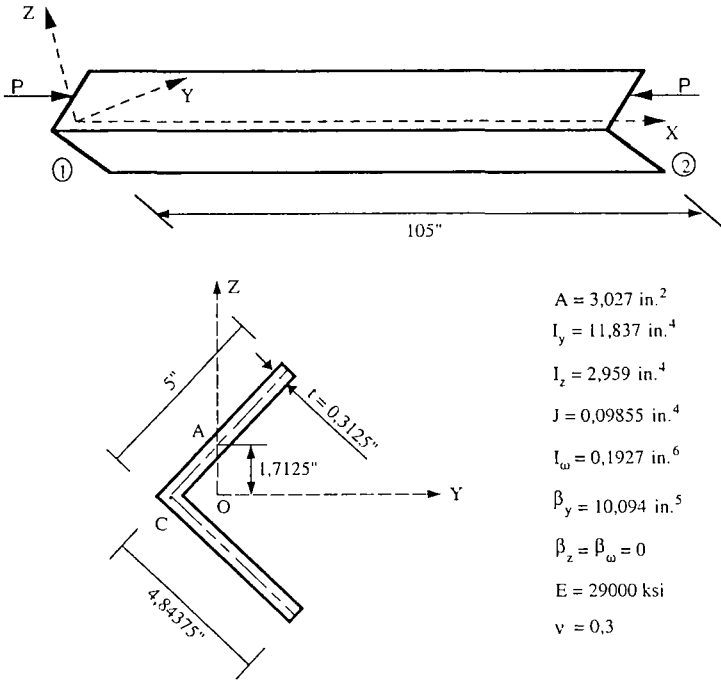
5. Résultats numériques

Deux exemples sont présentés ci-dessous pour comparer la précision et l'efficacité de différents algorithmes de plasticité et confronter nos résultats avec d'autres résultats numériques et expérimentaux.

5.1. Cornière en compression excentrée

Le problème a été étudié par plusieurs chercheurs [JAA 87], [SHA 94]. Il s'agit d'une cornière soumise à deux forces de compression axiales (fig. 5). Les excentricités de la charge, du support et du centre de torsion par rapport au centre de gravité, provoquent un flambement élasto-plastique avec un couplage flexion-torsion. Ce problème est considéré comme un test sévère pour les modèles d'éléments finis de poutres ainsi que ceux de coques.

Un maillage de 128 éléments de coque quadrilatéraux a été utilisé par Jaamei [JAA 87]. Nous utilisons un maillage de 10 éléments de poutre égaux. Nous



Conditions aux limites:

Au nœud ① : $u_A = v_A = w_A = \theta_X^A = 0$

Au nœud ② : $v_A = w_A = \theta_X^A = 0$

Figure 5. Cornière soumise aux charges excentrées

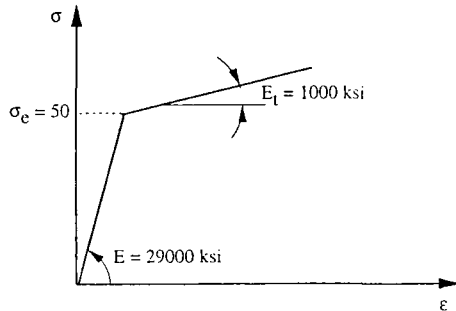


Figure 6. Courbe d'écrouissage du matériau de la cornière

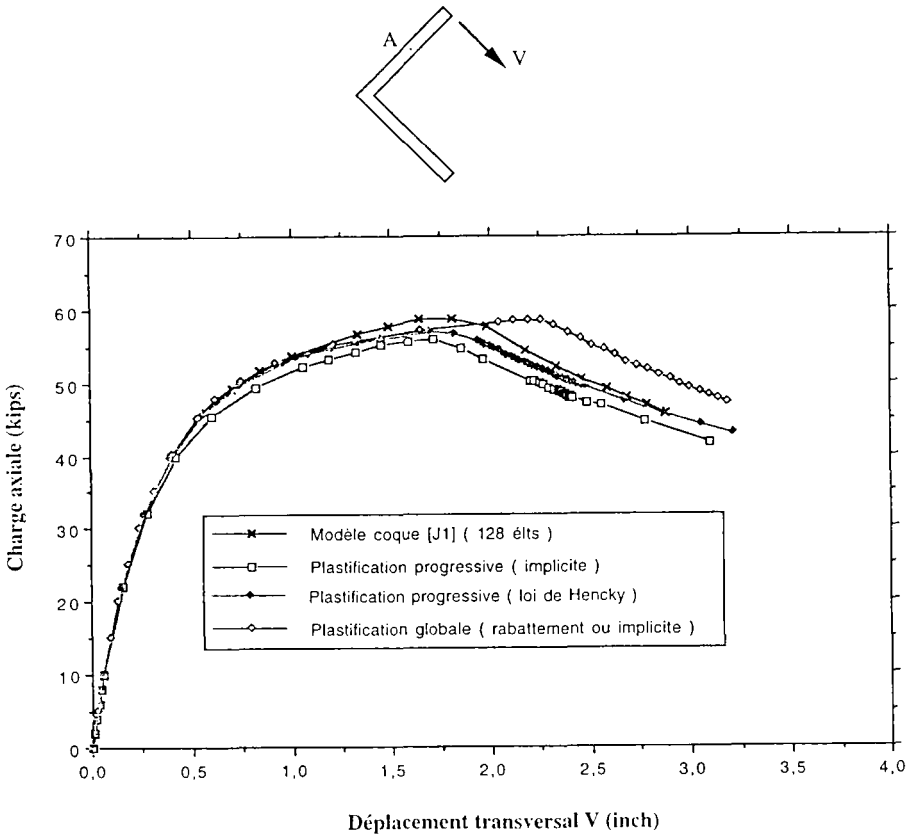


Figure 7. Comportement élasto-plastique de la cornière soumise aux charges excentrées

Méthodes de plastification		Nb. de points de Gauss par élément	Nb. de mots réels utilisés	Temps CPU* (Secondes)	Temps CPU* moyen / itération (Secondes)
Progressive	Hencky	3 x 27	41372	139.79	0.879
	Implicite	3 x 27	41372	115.78	1.124
Globale	Rabattement	3	2520	35.51	0.348
	Implicite	3	2520	23.75	0.270

* Sur une station de travail VAX 3100-73

Tableau 1. Comparaison de l'efficacité des quatre algorithmes de plasticité pour la cornière en compression

constatons que nos résultats sont en très bon accord avec ceux du modèle de coque (fig. 7). Cela montre que l'hypothèse de la section indéformable reste valable au cours de déformation pour la cornière. D'autre part, l'écart entre les résultats des méthodes de plastification globale et progressive confirme que la méthode globale surestime la capacité de charge à cause de l'hypothèse de plastification saturée. L'efficacité des deux méthodes (globale et progressive) combinées avec différents algorithmes est comparée dans le tableau 1. Nous constatons que la méthode progressive nécessite un espace mémoire et un temps de calcul importants à cause de l'intégration des contraintes sur la section. L'algorithme direct de Hencky consomme moins de temps de calcul à chaque itération mais il exige de petits pas de chargement par rapport à l'algorithme implicite. Quant à la méthode de plastification globale, l'algorithme implicite est plus rapide que l'algorithme de rabattement.

5.2. Ruine d'une console en treillis

Une console de pylône à haute tension a été conçue et réalisée par l'EDF pour une étude expérimentale sur son comportement jusqu'à la ruine. Les résultats des essais servent à valider notre modèle d'éléments finis et à évaluer différents algorithmes de plasticité.

La structure-test est composée de quatre membrures et de six barres en cornière (fig. 8). L'assemblage se fait avec les boulons. La console est fixée à l'extrémité droite et soumise à une force verticale au nez à gauche. La courbe d'écroutissage du matériau est présentée dans la figure 9. Les excentricités du centre de torsion et des points d'assemblage dans les membrures et les barres sont prises en compte dans notre modèle.

La console est discrétisée en 72 éléments de poutre 3D. Quatre calculs ont été effectués. La méthode de plastification globale combinée avec l'algorithme implicite ou celui de rabattement, et la méthode de plastification progressive combinée avec les algorithmes direct ou implicite ont été utilisées. Les résultats numériques sont comparés aux mesures expérimentales (fig. 10). Etant donné que la console est assez rigide, la plasticité joue un rôle dominant sur la ruine et le comportement non linéaire apparaît à cause de la plastification des deux membrures en compression. La comparaison montre que la charge ultime de la console est bien estimée par les quatre modèles de plasticité et qu'elle est en très bon accord avec la charge ultime expérimentale. La différence de la rigidité entre les résultats numériques et expérimentaux avant la charge ultime est attribuable aux jeux, à la plastification locale autour des boulons, et aux appuis non parfaitement rigides dans les essais qui ne sont pas pris en compte dans les modèles numériques. Par ailleurs, la méthode de plastification progressive estime une rigidité plus forte pour la structure, car l'intégration s'effectue sur une section un peu plus grande en négligeant les arrondis aux coins des cornières. Les comportements post-flambement sont différents selon le modèle utilisé. Les résultats des méthodes globales sont influencés par le choix

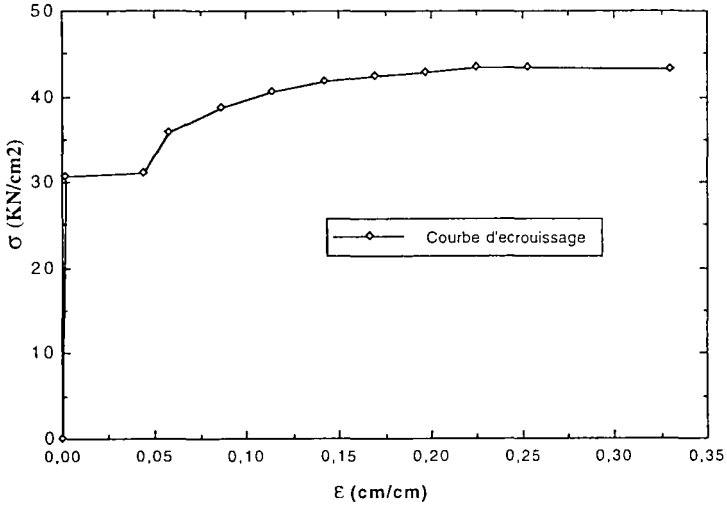


Figure 9. Courbe de l'essai uniaxial du matériau de la structure-test

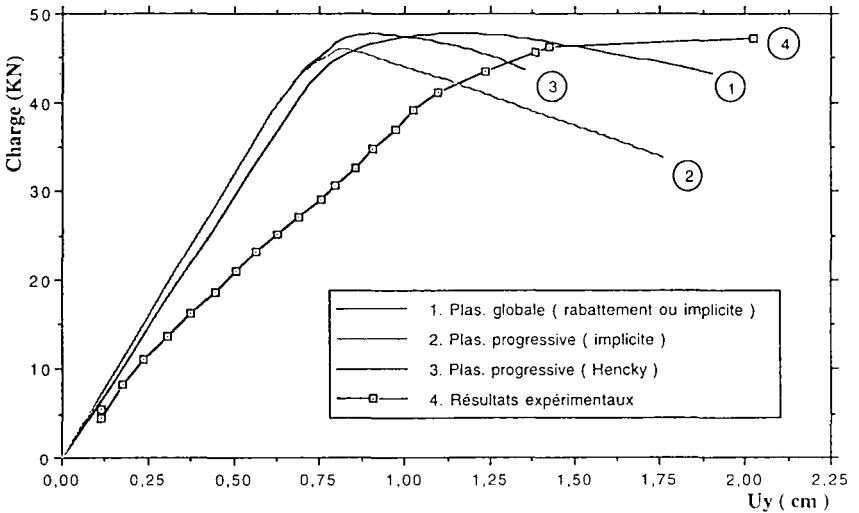
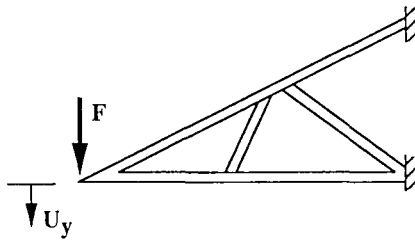


Figure 10. Comparaison des résultats obtenus par quatre algorithmes de plasticité avec des mesures expérimentales

du critère de plasticité (voir [Sha 94] pour les détails). Enfin, la différence entre les courbes 2 et 3 provient des hypothèses simplificatrice de Hencky.

L'efficacité des quatre algorithmes de plasticité est comparée dans le tableau 2. Nous constatons à nouveau que la méthode de plastification progressive est pénalisée par l'espace mémoire et le temps de calcul. Elle nécessite 11~12 fois plus d'espace mémoire et de temps de calcul.

Méthodes de plastification		Nb. de points de Gauss par élément	Nb. de mots réels utilisés	Temps CPU* (Secondes)	Temps CPU* moyen / itération (Secondes)
Progressive	Hencky	3 x 27	282702	475	1.64
	Implicite	3 x 27	282702	782	1.92
Globale	Rabattement	3	25158	148	0.494
	Implicite	3	25158	65	0.394

* Sur une station de travail VAX 4000

Tableau 2. Comparaison de l'efficacité des quatre algorithmes de plasticité pour la structure-test

6. Conclusion

Un modèle d'éléments finis de poutre pour l'analyse non linéaire est présenté. La non linéarité géométrique est prise en compte en considérant une Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI). Quatre algorithmes de plasticité sont étudiés et évalués : la méthode de plastification globale avec l'algorithme implicite ou celui de rabattement, la méthode de plastification progressive avec les algorithmes direct ou implicite. La comparaison des résultats numériques montre que la méthode progressive a l'avantage d'être précise si elle est combinée avec un algorithme implicite. Cependant, cette méthode nécessite un espace mémoire et un temps de calcul très élevés qui pénalisent son utilisation dans l'analyse des structures de grande taille. La méthode globale avec un algorithme implicite permet de diminuer considérablement l'espace mémoire et le coût du calcul mais beaucoup d'efforts sont encore nécessaires afin d'obtenir des critères de plasticité en efforts résultants convenables pour différentes sections de poutres.

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans cet article, ont été réalisés dans la division "Modélisation Numérique en Mécanique" de l'Université de Technologie de Compiègne sous la direction de Jean-Louis Batoz. Les auteurs remercient le Professeur Batoz pour son soutien constant tout au long de cette étude. Nous remercions également la direction des études et recherches de l'EDF et notamment Messieurs Pons, Penserini et Fléjou pour la collaboration entre l'EDF et l'UTC.

7. Bibliographie

- [ARG 82] ARGYRIS J.H., BONI B., HINDENLANG U., KLEIBER M., « Finite element analysis of two- and three-dimensional elasto-plastic frames. The natural approach », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 35, p. 221-248, 1982.
- [ALB 92] AL-BERMANI F.G.A., KITIPORNCHAI S., « Nonlinear analysis of transmission towers », *Eng. Struct.*, Vol. 14, N° 3, p. 139-151, 1992.
- [ALM 95] AL MIKDAD M., IBRAHIMBEGOVIC A., « Interpolation non linéaire pour un élément fini de poutre en grandes rotations tri-dimensionnelles », *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 4, No. 5-6, p. 693-718, 1995.
- [BAT 90] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol. 2, Poutres et plaques, Hermès, Paris, 1990.
- [BAT 88] BATOZ J.L., GUO Y.Q., POL P., « Grands déplacements de coques minces élastoplastiques (modèles et exemples) », *StruCoMe* 88, Paris, p. 81-94, novembre 1988.
- [CHE 77] CHEN W.F., ATSUTA T., *Theory of beam-columns*, Vol. 2, Space behavior and design, McGraw-Hill, New-York, 1977.
- [CRI 79] CRISFIELD M., Ivanov's yield criterium for thin steel shells, U.K. Transport and Road research Laboratory, report 919, 1979.
- [CRI 91] CRISFIELD M.A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1991.
- [CON 90] CONCI A., GATTASS M., « Natural approach for geometric non linear analysis of thin-walled frames », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, p. 1653-1679, 1990.
- [CHE 95] CHEN W. F., SOHAL I., *Plastic design and second-order analysis of steel frames*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [DUR 89] DURBAN D., « An approximate analysis of elastoplastic torsion », *Int. J. Mech. Engng Education*, Vol. 17, No.4, p. 235-242, 1989.
- [DOD 87] DODDS R. H., « Numerical techniques for plasticity computations in finite element analysis », *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 5, p. 767-779, 1987.
- [GJE 81] GJELSVIK A., *The theory of thin walled bars*, John Wiley & Sons, 1981.
- [GEN 93] GENDY A. S., SALEEB A.F., « Generalized yield surface representations in the elasto-plastic three-dimensional analysis of frames », *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 2, p. 351-362, 1993.

- [GRA 92] GRATACOS P., MONTMITONNET P., CHENOT J.L., « An integration scheme for Prandtl-Reuss elastoplastic constitutive equations », *New Advances in Computational Structural Mechanics*, P. Ladevèze and O. C. Zienkiewicz (Editors), Elsevier Science Publishers B.V., 1992.
- [GUO 87] GUO Y.Q., « Analyse non linéaire statique et dynamique des poutres tridimensionnelles élasto-plastiques », Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1987.
- [HAL 87] HALPHEN B., SALENÇON J., « Elasto-plasticité », Ponts et Chaussées, 1987.
- [IBR 94] IBRAHIMBEGOVIC A., « On implicit integration of a general form of rate-independent plasticity », *Engineering Modelling*, Vol. 7, No. 1-2, p. 21-27, 1994.
- [JAA 87] JAAMEI S., JETTEUR P., FREY F., « Numerical tests with the Jet shell element », Part I : Introduction and introductory tests, IREM Internal Report 87/9, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1987.
- [KIT 91] KITIPORNCHAI S., ZHU K., XIANG Y., AL-BERMANI F.G.A., « Single-equation yield surfaces for monosymmetric and asymmetric sections », *Eng. Struct.*, Vol. 13, 1991.
- [KHA 95] KHAN A. S., HUANG S., *Continuum theory of plasticity*, John Wiley & Sons, 1995.
- [LEM 88] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 2^e édition, Paris, 1988.
- [MEE 90] MEEK J. L., LOGANATHAN S., « Geometric and material non-linear behaviour of beam-columns », *Computers & Structures*, Vol. 34, No. 1, p. 87-100, 1990.
- [MAR 94] MARUR S.R., KANT T., « A stress correction procedure for analysis of inelastic frames under transient dynamic loads », *Computers & Structures*, Vol. 50, No. 5, p. 603-613, 1994.
- [OWE 80] OWEN D.R.J., HINTON E., *Finite elements in plasticity*, Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [ORB 82] ORBISON J.G., MCGUIRE W., ABEL J.F., « Yield surface applications in non linear steel frame analysis », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 33, p. 557-573, 1982.
- [POW 86] POWELL G. H., CHEN P. F., « 3D beam-column element with generalized plastic hinges », *J. Engng. Mech.*, Vol. 112, No.7, 1986.
- [SIM 86] SIMO J.C., TAYLOR R.L., « A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, p. 649-670, 1986.
- [SIM 93] SIMO J.C., MESCHKE G., « A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains », *Computational Mechanics*, Vol. 11, p. 253-278, 1993.
- [SHA 94] SHAKOURZADEH H., « Modélisation des structures-poutres tridimensionnelles à parois minces et simulation du comportement non linéaire géométrique et élasto-plastique », Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1994.
- [SCH 79] SCHREYER H.L., KULAK R.F., KRAMER J.M., « Accurate numerical solutions for élasto-plastic models », *J. Pressure Vessel Technology*, No. 101, p. 226-237, 1979.

- [TOI 93] TOI Y., ISOBE D., « Adaptively shifted integration techniques for finite element collapse analysis of framed structures », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 36, p. 2323-2339, 1993.
- [WUN 86] WUNDERLICH W., OBRECHT H., SCHRODTER V., « Nonlinear analysis and elastic-plastic load-carrying behaviour of thin-walled spatial beam structures with warping constraints », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 22, p. 671-695, 1986.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The finite element method*, Vol. 2, McGraw-Hill, 4th edition, 1991.

Article reçu le 15 février 1996
Version révisée le 15 mars 1997