
Comportement dynamique des poutres continues sollicitées par des charges mobiles

Approches semi-analytiques et éléments finis

Kamel Henchi * — Gouri Dhatt ** — Martin Talbot ***
Mario Fafard *

* Université Laval, Département de Génie Civil, GIREF
Pavillon Adrien-Pouliot, Québec, Canada, G1K 7P4

** INSA de Rouen, Département de Génie Mécanique, Rouen, France

*** Ministère des transports du Québec, Direction des structures
930, Chemin Ste-Foy, Québec, Canada, G1S 4X9

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article une étude comparative des effets de la force et de la masse mobiles sur le comportement dynamique des poutres. Nous présentons une nouvelle approche appelée approche semi-analytique des vibrations des poutres sous les effets des masses mobiles, pour les problèmes de poutres continues ou ponts multi-travées, en utilisant la méthode de la matrice de rigidité dynamique exacte. Une approche par éléments finis pour les problèmes de structures (ponts) sollicitées par des forces et masses mobiles est également présentée. De plus, les résultats obtenus montrent que pour des cas de vitesses importantes et des rapports importants de la masse mobile sur la masse totale de la poutre (cas des ponts rails pour trains à grandes vitesses), la réponse des structures sous masses mobiles doit être prise en compte à cause des effets significatifs d'inertie qui sont négligés dans le modèle des forces mobiles.

ABSTRACT. In this work, a comparative study between the effects of moving force and the moving mass on the dynamic behaviour of beams is presented. A new semi-analytical approach of beam vibrations under the effect of moving masses for the problems of continuous beams or multi-span bridges using the exact dynamic stiffness matrix method is presented. We also present, finite element approach on structural problem (bridges) under mobile forces and masses. Moreover, in this study, we demonstrate that in the case of high mass speed and high ratio between the moving mass and the mass of the beam (case of fast train railway bridges), the structural response under moving masses must be taken into account because of their significant effects which are neglected in moving force models.

MOTS-CLÉS : éléments finis, force mobile, masse mobile, matrice de rigidité dynamique, pont.
KEY WORDS : finite element, moving force, moving mass, dynamic stiffness matrix, bridge.

1. Introduction

Le problème du comportement dynamique des structures soumises à des charges mobiles a toujours suscité un intérêt spécial tant dans les domaines du génie civil et mécanique que dans les domaines naval et aéronautique. L'évolution et la diversité des modes et matériaux de construction des ponts et la tendance vers une utilisation courante de véhicules plus rapides et plus lourds incitent à une révision des différents codes et méthodes de calcul et à une sélection de nouveaux critères limitant les effets nocifs pouvant être causés à ces structures.

Dans le contexte actuel du transport rapide et des ouvrages légers, les sollicitations exercées par les charges circulant à grande vitesse contiennent un large spectre de fréquences. Il est ainsi important de développer des modèles de vibration des ponts qui soient précis et efficaces pour le calcul de fréquences élevées et qui répondent aux exigences économiques et informatiques de la majorité des bureaux d'études (logiciels de calcul pour des ordinateurs personnels). Une évaluation précise des fréquences de vibration est essentielle pour l'étude du comportement dynamique d'une structure à excitation proche de la résonance.

La vibration libre d'une structure est représentée, avec la méthode des éléments finis classique, par un problème linéaire de valeurs propres [CLO 93]. On utilise des fonctions de forme polynomiale qui conduisent à une matrice de masse et une matrice de rigidité. Pour une évaluation précise des fréquences élevées, il est nécessaire d'utiliser beaucoup d'éléments pour chaque membrure ou poutre. La précision dépend ainsi de la finesse du maillage. Si on choisit des fonctions de forme qui représentent la solution d'un problème de vibration libre pour chaque élément, la formulation éléments finis conduit à une matrice unique exacte appelée matrice de rigidité dynamique [WIT 71] [FRI 83] [BAN 89]. Le comportement dynamique d'une structure est alors défini par un problème non linéaire de valeurs propres. La matrice de rigidité dynamique est une fonction non linéaire de la fréquence. Cette formulation fournit des valeurs exactes pour tous les modèles de vibration et cela avec un seul élément fini pour chaque membrure [HEN 97]. Le principe de base de cette méthode consiste à modéliser une structure composée de poutres par des éléments finis exacts de poutres avec une distribution continue de la masse et de la rigidité et qui auront un nombre infini de degré de liberté, donc un nombre infini de fréquences naturelles [WIT 71].

Nous présentons dans les sections suivantes la méthode de rigidité dynamique exacte (M.R.D) [WIT 71] [HAY 81] [HEN 94] [HOO 94] [HEN 97], suivie par l'étude du comportement dynamique des poutres continues sollicitées par des forces et masses mobiles [AYE 50] [FRY 72] [HAY 81] [CHA 94]. Les solutions sont présentées sous forme d'éléments finis dynamiques exactes (M.R.D) [HEN 96] et sous forme d'éléments finis classiques généraux [FEN 62] [LIN 90] [FAF 93] [HEN 95]. L'influence de la masse mobile sur la réponse dynamique est étudiée par une nouvelle approche appelée approche *semi-analytique* [HEN 95] et [HEN 96b]. La résolution du système est obtenue par l'intégration directe pas à pas en utilisant la méthode de Newmark- β . Le problème de poutres continues sous forces mobiles est étudié par une approche exacte en introduisant une méthode de résolution très efficace basée sur la technique modale fréquentielle utilisant l'algorithme FFT [COO 65] [HUM 93] [HEN 95].

2. Matrice de rigidité dynamique exacte

Dans cette étude, les poutres continues sont modélisées en se basant sur l'hypothèse de Bernoulli-Euler (Figure 1), [WIT 71] [HOW 79] [HEN 97]. L'équation du mouvement des vibrations libres de la poutre est donnée par :

$$EI w_{,xxxx} + m_l w_{,tt} = 0 \tag{1}$$

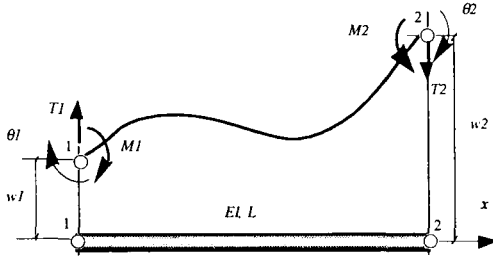


Figure 1. Élément de poutre en flexion avec forces et déplacements aux extrémités

Posons $w(x,t)=w(x) e^{i\omega t}$ ($\delta w(x,t)=\delta w(x) e^{i\omega t}$). En substituant w dans l'équation [1], on obtient :

$$EI (w(x)_{,xxxx} - \alpha^4 w(x)) = 0 \tag{2}$$

$$\alpha^4 = \frac{m_l \omega^2}{EI} ; (EI \text{ et } m_l \text{ sont constants par élément})$$

La solution exacte de l'équation différentielle [2] est donnée par :

$$w(x) = \langle P(\alpha, x) \rangle \{ c \} \tag{3}$$

$$\text{avec } \langle P(\alpha, x) \rangle = \langle \cos \alpha x \quad \sin \alpha x \quad \cosh \alpha x \quad \sinh \alpha x \rangle \tag{4}$$

Les coefficients c_i sont obtenues en fonction des w_i par

$$\{ c \} = [P_n]^{-1} \{ w_n \} \tag{5}$$

De même, le déplacement $w(x)$ s'obtient de [3] et [5] :

$$w(x) = \langle N(\alpha, x) \rangle \{ w_n \} \tag{6}$$

$$\text{avec } \langle N(\alpha, x) \rangle = \langle P(\alpha, x) \rangle [P_n]^{-1} \tag{7}$$

La discrétisation par éléments finis est obtenue avec une approximation infiniment continue pour w et δw :

$$w(x) = \sum_{i=1,4} N_i(x,\alpha)w_i ; \delta w(x) = \sum_{i=1,4} N_i(x,\alpha)\delta w_i \quad [8]$$

avec

$$w_1 = w(x=0) ; w_2 = \theta(x=0) = -w_{,x}(x=0) ; w_3 = w(x=L) ; w_4 = \theta(x=L) = -w_{,x}(x=L)$$

L'expression discrétisée pour W^e est [HEN 97] :

$$W^e = \langle \delta w_n \rangle [k_d(\omega^2)] \{ w_n \} = \langle \delta w_n \rangle \begin{pmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_1 \end{pmatrix} \quad [9]$$

avec

$$T(x) = -EIw_{,xxx} ; M(x) = -EIw_{,xx}$$

et $T_1 = T(x=0) ; T_2 = -T(x=L) ; M_1 = M(x=0) ; M_2 = -M(x=L)$ [10]

On obtient :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = EI \begin{bmatrix} -N_{1,xxx}(0) & -N_{2,xxx}(0) & -N_{3,xxx}(0) & -N_{4,xxx}(0) \\ -N_{1,xx}(0) & -N_{2,xx}(0) & -N_{3,xx}(0) & -N_{4,xx}(0) \\ N_{1,xxx}(L) & N_{2,xxx}(L) & N_{3,xxx}(L) & N_{4,xxx}(L) \\ N_{1,xx}(L) & N_{2,xx}(L) & N_{3,xx}(L) & N_{4,xx}(L) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad [11]$$

$$\langle T_1 \ M_1 \ T_2 \ M_2 \rangle^T = [k_d(\omega^2)] \{ w_n \}$$

avec $\langle N_{,xxx} \rangle = \langle P_{,xxx} \rangle [P_n]^{-1} ; \langle N_{,xx} \rangle = \langle P_{,xx} \rangle [P_n]^{-1}$ [12]

Après assemblage de toutes les matrices élémentaires de chaque membrure (travée) donnée par [11] de la même façon qu'avec la méthode des éléments finis et après l'élimination des lignes et colonnes correspondants aux conditions aux limites, l'équation fréquentielle des vibrations libres des poutres continues devient :

$$[K_d(\omega^2)] \{ X_n \} = 0, \text{ donc } |K_d| = 0 \quad [13]$$

L'annexe 1 donne les termes de la matrice $[K_d(\omega^2)]$

Le développement de ce déterminant donne une équation transcendante en ω , difficile à résoudre analytiquement. L'algorithme de Wittrick et Williams [WIT 71] est une méthode efficace pour trouver les fréquences exactes non amorties ω_n qui représentent les zéros de l'équation [13] [HEN 94] et [HEN 97].

A chaque fréquence ω de la structure correspond un mode propre défini par [HEN 94] et [HEN 97] :

$$\phi_{jr}(x_r) = A_{jr} \cos \alpha_{jr} x_r + B_{jr} \sin \alpha_{jr} x_r + C_{jr} \cosh \alpha_{jr} x_r + D_{jr} \sinh \alpha_{jr} x_r \quad [14]$$

ou
$$\phi_{jr}(x_r) = \sum_{i=1,4} N_i(\alpha_{j,r}, x_r) \phi_{jr}^i \quad [15]$$

où ϕ_{jr} est le j ième mode propre de la travée r (voir figure 2). Pour la structure globale, le j ième mode propre de toute la structure est donné par :

$$\Phi_j(X_r) = \phi_{jr}(x_r) \text{ avec: } X_r = \sum_{i=1, r-1} l_i + x_r$$

3. Réponse dynamique dans le domaine des fréquences

Dans le cas d'une excitation induite par plusieurs forces mobiles, le chargement global $P(x,t)$ qui s'exerce sur la structure illustrée à la figure 2 est donnée par :

$$P(x,t) = \sum_{i=1}^{n_c} \delta(x - \bar{x}_i) F_i \quad [16]$$

où $\delta(x - \bar{x}_k)$ est la fonction de Dirac à la position $x = \bar{x}_k$ avec par exemple en $x=x_i$, $P(x_i,t) = \delta(x_i - x_i) F_i = F_i$

L'écriture faible du travail virtuel des vibrations transversales des poutres est donnée par $(\forall \delta w)$:

$$W = \int_0^L (\delta w m_l w_{,tt} + \delta w c w_{,t} + \delta w_{,xx} EI w_{,xx}) dx - \int_0^L \delta w P(x,t) dx = 0 \quad [17]$$

où n_c est le nombre de charges présentes sur la structure à l'instant t . La sollicitation F_i peut être donnée sous la forme générale suivante: $F_i = F_{i0} + F_{i1} \sin(\Omega_i t + \Phi_i)$

La représentation de l'équation [17] dans l'espace modal conduit à une écriture découplée des équations modales. Pour chaque élément, la représentation modale du déplacement transversal est :

$$w(x_r,t) = \sum_{j=1,n} \Phi_j(X_r) y_j(t) = \sum_{j=1,n} \left(\sum_{i=1,4} N_i(\alpha_{j,r}, x_r) \phi_{jr}^i \right) y_j(t) \quad [18]$$

où ϕ_{jr}^i est le déplacement nodal du nœud i attaché à la travée (élément) r , correspondant au mode j .

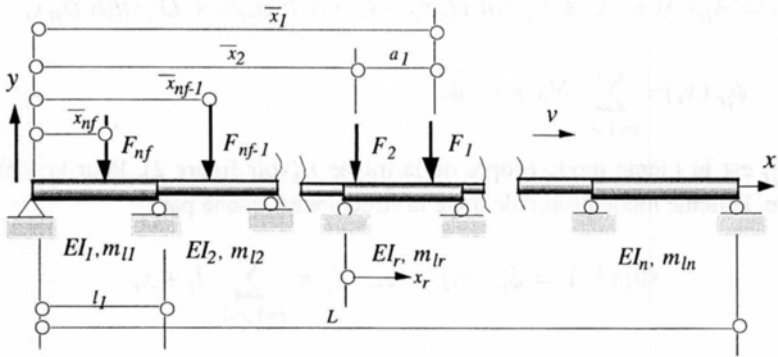


Figure 2. Pont à Multi-travées - n poutres continues

En utilisant les équations [16], [18] et les propriétés d'orthogonalité des modes [HEN 97], l'équation se réécrit dans la base modale :

$$\ddot{y}_j(t) + 2\xi_j\omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = \Delta_{jr} \int_0^L \Phi_j \sum_{i=1}^{n_c} \delta(x- \bar{x}_i) F_i dx \quad [19]$$

avec $\Delta_{jr} = 1 / (m_{lr} \cdot M_j^2)$ [20]

$$\text{et } \int_0^L (\Phi_j^2) dx = M_j^2 = \sum_{r=1, n_{travée}} \frac{l_r}{2} (A_{jr}^2 + B_{jr}^2 + C_{jr}^2 - D_{jr}^2) \quad [21]$$

où l_r est la longueur de la travée r et $L = \sum l_r$ est la longueur totale de la structure. Le déplacement transversal de la travée (élément) r en x_r (coordonnée locale) est donné par :

$$w(x_r, t) = \sum_{j=1}^{n_{mode}} \phi_{jr}(x_r) y_j(t) \quad [22]$$

$w(x_r, t)$ est la flèche transversal de la travée r en x_r (position locale sur la travée r).

Le développement du second terme de l'équation [19] donne l'expression du chargement généralisé $p_j(t)$ du mode j , l'équation [23].

La solution de l'équation [19] peut être facilement obtenue en transformant cette dernière dans l'espace fréquentiel en utilisant la procédure des transformées de Fourier rapides (FFT) [COO 65], [HUM 93], [HEN 95], [HEN 97]. La prise en compte des conditions initiales est présentée en détail dans [HEN 97].

$$\int_0^L \Delta_{jr} \int_0^L \Phi_j \sum_{i=1}^{n_c} \delta(x - \bar{x}_i) F_i dx = \Delta_{jr} \sum_{p=1}^{n_{trav\acute{e}e}} \left(\int_0^{L_p} \phi_{jp} \sum_{i=1}^{n_c} \delta(x - \bar{x}_i) F_i dx \right)$$

$$= \Delta_{jr} \sum_{i=1}^{n_c} \Phi_j(\bar{x}_i) F_i = p_j(t) \quad [23]$$

4. Vibration des poutres sollicitées par des masses mobiles

Dans la plupart des cas pratiques, la force mobile utilisée est due aux effets de la gravitation des masses mobiles ($F = m g$). Dans le cas où la masse mobile est petite, comparée à la masse de la poutre, la solution obtenue sous l'effet de la force $F = m g$ est approximativement correcte par rapport à la solution obtenue avec la masse mobile. Dans le cas contraire, l'étude du comportement du pont sous la sollicitation de la masse mobile est impérative, vu la présence des effets d'inertie de la masse mobile qui s'additionnent à ceux de la charge morte. En général les forces causées par les masses mobiles sont les forces d'inertie (gravitation) verticales, les forces de friction et de freinage longitudinales, les force centrifuges (ponts courbes). Dans notre étude on considère les poutres droites continues où les seules forces présentent sont les forces verticales. D'après la figure 3, la force exercée par la masse mobile sur la poutre est [TIN 74] :

$$P(x, t) = -\delta(x - \bar{x}_1) m (g + \ddot{w}) \quad [24]$$

où \ddot{w} est l'accélération de la poutre au point de contact A (en $x = \bar{x}_1$) entre la masse mobile et la poutre. On applique la méthode modale de la même façon que pour le cas de la force mobile, en utilisant l'équation [22]. En multipliant l'équation [24] par Φ_j et en l'intégrant de 0 à L par rapport à x, on obtient, le chargement généralisé (modal) du mode j:

$$p_j(t) = - \int_0^L \Phi_j \delta(x - \bar{x}_1) m (g + \ddot{w}) dx \quad [25]$$

$$= -m g \phi_{js}(x_s) - m \phi_{js}(x_s) \ddot{w} \quad [26]$$

Le déplacement, vitesse et accélération du point du contact sur la travée s'obtiennent de la façon suivante :

$$\bar{w} = \sum_j \phi_{js}(x_s) y_j, \text{ où } \sum_j = \sum_{j=1}^{nmode} \text{ pour fin de simplification} \quad [27]$$

$$\dot{\bar{w}} = \bar{w}_{,x} \dot{\bar{x}} + \bar{w}_{,t} = \sum_j \phi_{js,x}(x_s) y_j \dot{\bar{x}} + \sum_j \phi_{js}(x_s) \dot{y}_j \quad [28]$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}} &= \bar{w}_{,xx} \dot{\bar{x}}^2 + 2 \bar{w}_{,xt} \dot{\bar{x}} + \bar{w}_{,x} \ddot{\bar{x}} + \bar{w}_{,tt} \\ &= \dot{\bar{x}}^2 \sum_j \phi_{js,xx}(x_s) y_j + \sum_j \phi_{js,x}(x_s) (2 \dot{\bar{x}} \dot{y}_j + \ddot{\bar{x}} y_j) + \\ &\quad + \sum_j \phi_{js}(x_s) \ddot{y}_j \end{aligned} \quad [29]$$

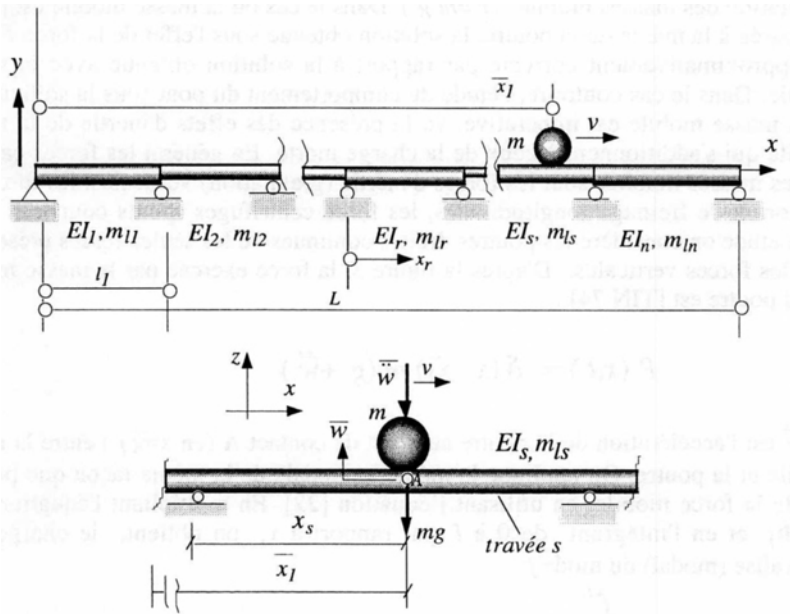


Figure 3. Poutres continues traversées par une masse mobile : cas général

Si nous remplaçons l'équation [29] dans [26], nous obtenons :

$$p_j(t) = -m g \phi_{js}(x_s) - F(y, \dot{y}, \ddot{y}, x_s) \quad [30]$$

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, x_s) = \left\{ m \phi_{js}(x_s) \left(\ddot{x}^2 \langle \phi_{,xx} \rangle_s \{y\} + 2\ddot{x} \langle \phi_{,x} \rangle_s \{\dot{y}\} + \ddot{x} \langle \phi_{,x} \rangle_s \{y\} + \langle \phi \rangle_s \{\ddot{y}\} \right) \right\} \quad [31]$$

Avec cette dernière équation, l'équation modale [19] est de la forme :

$$\ddot{y}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = \Delta_{jr} \left(-mg \phi_{js}(x_s) - F(y, \dot{y}, \ddot{y}, x_s) \right) \quad [32]$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j + \Delta_{jr} m \phi_{js} \langle \phi \rangle_s \{\dot{y}\} + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j + 2\Delta_{jr} \ddot{x} m \phi_{js} \langle \phi_{,x} \rangle_s \{y\} + \omega_j^2 y_j + \\ \Delta_{jr} m \phi_{js} \left(\ddot{x}^2 \langle \phi_{,xx} \rangle_s + \ddot{x} \langle \phi_{,x} \rangle_s \right) \{y\} = -\Delta_{jr} mg \phi_{js}(x_s) \end{aligned} \quad [33]$$

où $\langle \phi \rangle_s$, $\langle \phi_{,x} \rangle_s$ et $\langle \phi_{,xx} \rangle_s$ sont évalués en $x = x_s$.

L'équation [33] est valide pour la travée r et représente N équations couplées, où N est le nombre de modes nécessaire pour représenter la réponse de la poutre. Ce système d'équations peut être mis sous une forme matricielle, afin de l'adapter facilement aux résolutions numériques standards.

$$\begin{bmatrix} 1+B_{3(1,1)} & B_{3(1,2)} & \dots & B_{3(1,j)} & \dots & B_{3(1,N)} \\ B_{3(2,1)} & 1+B_{3(2,2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{3(j,1)} & \dots & \dots & 1+B_{3(j,j)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{3(N,1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1+B_{3(N,N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \dots \\ \ddot{y}_j \\ \dots \\ \ddot{y}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 + B_{1(1,1)} & B_{1(1,2)} & \dots & B_{1(1,j)} & \dots & B_{1(1,N)} \\ B_{1(2,1)} & 2\xi_2 \omega_2 + B_{1(2,2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1(j,1)} & \dots & \dots & 2\xi_j \omega_j + B_{1(j,j)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1(N,1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & 2\xi_N \omega_N + B_{1(N,N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dots \\ \dot{y}_j \\ \dots \\ \dot{y}_N \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \omega^2_1 + B_{2(1,1)} & B_{2(1,2)} & \dots & B_{2(1,j)} & \dots & B_{2(1,N)} \\ B_{2(2,1)} & \omega^2_2 + B_{2(2,2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{2(j,1)} & \dots & \dots & \omega^2_j + B_{2(j,j)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{2(N,1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \omega^2_N + B_{2(N,N)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} \Delta_{1r}\phi_1 \\ \Delta_{2r}\phi_2 \\ \dots \\ \Delta_{jr}\phi_j \\ \dots \\ \Delta_{Nr}\phi_N \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$B_3(i, j) = \Delta_{ir} m \phi_{is}(x_s) \phi_{js}(x_s) \tag{35}$$

$$B_1(i, j) = 2\Delta_{ir} m v \phi_{is}(x_s) \phi_{js,x}(x_s)$$

$$B_2(i, j) = \Delta_{ir} m \phi_{is}(x_s) (v^2 \phi_{js,xx}(x_s) + v_{,t} \phi_{js,x}(x_s))$$

où $v = \dot{x}$ est la vitesse du chargement. Sous une forme compacte, l'équation [34] s'écrit :

$$[M^*] \{\ddot{y}\} + [C^*] \{\dot{y}\} + [K^*] \{y\} = \{F^*\} \tag{36}$$

Le système [36] est un couplage de N équations différentielles. Une stratégie de résolution numérique de type Newmark- β ou Runge Kutta d'ordre 4 est utilisée pour obtenir la solution. Ainsi, cette approche pour modéliser la sollicitation des poutres continues sous masses mobiles peut être qualifiée de semi-analytique puisque l'équation [36] est obtenue d'une façon analytique et que nous utilisons une technique numérique pour intégrer ce système d'équations.

Si la vitesse v de passage de la masse n'est pas très importante, l'équation [34] devient (en supposant que $C=0$), pour une seule travée simple l'équation [37]. C'est la formulation qui est donnée par plusieurs auteurs dont, entre autres, [BIG 64]. L'utilisation de l'équation [37] peut cependant induire des erreurs importantes pour les cas des masses importantes à grande vitesse (cas des ponts rails pour les trains à grande vitesse).

$$\begin{bmatrix} 1 + \Delta_{11} m \phi_1^2 & \Delta_{11} m \phi_1 \phi_2 & \dots & \Delta_{11} m \phi_1 \phi_j & \dots & \Delta_{11} m \phi_1 \phi_N \\ \Delta_{21} m \phi_2 \phi_1 & 1 + \Delta_{21} m \phi_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{j1} m \phi_j \phi_1 & \dots & \dots & 1 + \Delta_{j1} m \phi_j^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{N1} m \phi_N \phi_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 + \Delta_{N1} m \phi_N^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \dots \\ \ddot{y}_j \\ \dots \\ \ddot{y}_N \end{pmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \omega^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_N^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_j \\ \cdot \\ y_N \end{Bmatrix} = -mg \begin{Bmatrix} \Delta_{11}\phi_1 \\ \Delta_{21}\phi_2 \\ \cdot \\ \Delta_{j1}\phi_j \\ \cdot \\ \Delta_{N1}\phi_N \end{Bmatrix} \quad [37]$$

5. Problème de charges mobiles: approche par éléments finis

5.1. Problème de forces mobiles

L'équation d'équilibre dynamique d'une poutre modélisée par éléments finis est donnée par :

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F(x,t)\} + \{F_{ext}\} \quad [38]$$

où $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure ; $\{F(x,t)\}$ représente le vecteur associé aux forces mobiles ; $\{F_{ext}\}$ est le vecteur des forces extérieures autres que les forces mobiles (sismiques, fixes, vent, poids propre, etc...). Le vecteur $\{F(x,t)\}$, est estimé par :

$$\{F(x,t)\} = \sum_{k=1}^{n_c} \langle N \rangle_k^T F_k(t) \quad [39]$$

où n_c est le nombre de charges présentes à l'instant t et $F_k(t)$ peut être de la forme générale : $F_k(t) = F_{ok} + F_{1k} \sin(\Omega_k t)$, avec l'indice k représentant le numéro de la force mobile. Le vecteur $\langle N \rangle^T$, représente les fonctions de forme évaluées à la position de la force à $x=vt$ si la vitesse v est constante (ou $x_k = x_k(t)$ dans le cas d'une vitesse non constante). Dans l'espace modal, l'équation [38] s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j &= \{\phi_j\}^T (\{F(x,t)\} + \{F_{ext}\}) \\ &= \sum_{k=1}^{n_c} p_j^k + p_j^* = p_j \end{aligned} \quad [40]$$

Le vecteur $\langle N \rangle^T$ ne contient que quelques termes non nuls correspondant aux nœuds des éléments sur lesquels les forces mobiles sont situées. Cela revient à calculer les forces nodales à chaque instant (voir figures 4).

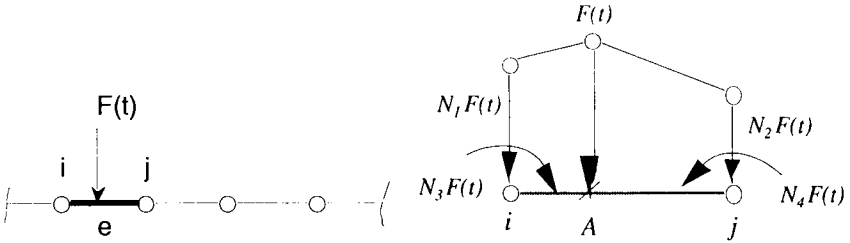


Figure 4. Distribution de la charge mobile sur les nœuds voisins d'un élément de poutre à 2 nœuds

Prenons l'exemple d'un élément de poutre à 2 nœuds et 2 d.d.l par nœud (figure 4) ; son vecteur force élémentaire est :

$$\{N\}_e F(t) = \{F\}_e, \{N\}_e = \langle N_1 \ N_3 \ N_2 \ N_4 \rangle^T$$

et les $N_i (i=1,4)$ sont évaluées au point A. Le vecteur $\{F\}_e$ est stocké dans le vecteur des forces globales $\{F(x,t)\}$ et se décale dans celui-ci avec la position de la force à chaque instant. Le vecteur $\{N_e\}$ est évalué à la position $x = \bar{x}(t) - \sum_{k=1}^{e-1} l_k$ où l_k est la longueur de l'élément k (voir figure 5).

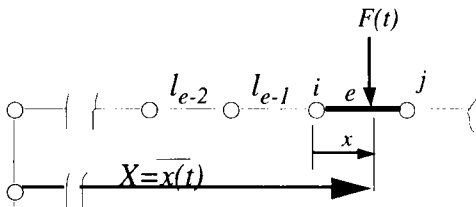


Figure 5. Représentation de la longueur locale parcourue par la force mobile $F(t)$

On résout l'équation [38] en utilisant, soit le schéma d'intégration numérique de Newmark- β pour une intégration complète, soit la méthode de superposition modale, (équation [40]).

Dans l'espace modal, nous utilisons l'approche fréquentielle avec l'algorithme FFT pour obtenir la solution d'une manière efficace [HEN 95] [HUM 93].

6.2. Problème de masses mobiles

La modélisation du problème de masse mobile est similaire à celle de la force mobile présentée auparavant :

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F(x, t)\} \tag{41}$$

Avec la méthode des éléments finis, la force produite par la masse mobile est représentée par:

$$\{F(x,t)\} = -\{N\} m (g + \ddot{\bar{w}}) \tag{42}$$

Le déplacement \bar{w} au point de contact A est représenté par :

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{NN} N_i w_i^e \tag{43}$$

où NN est le nombre de nœuds de l'élément.

Par la suite, par simplicité d'écriture, on prend $w = w^e$ et on prend la vitesse du chargement $v = \dot{\bar{x}}$. La vitesse et l'accélération du point de contact masse-structure sont alors données par :

$$\dot{\bar{w}} = \bar{w}_{,x} x_{,t} + \bar{w}_{,t} = \langle N_{,x} \rangle \{w\} v + \langle N \rangle \{w_{,t}\} \tag{44}$$

$$\ddot{\bar{w}} = \langle N_{,xx} \rangle \{w\} v^2 + 2 \langle N_{,x} \rangle \{w_{,t}\} v + \langle N_{,x} \rangle \{w\} v_{,t} + \langle N \rangle \{w_{,tt}\} \tag{45}$$

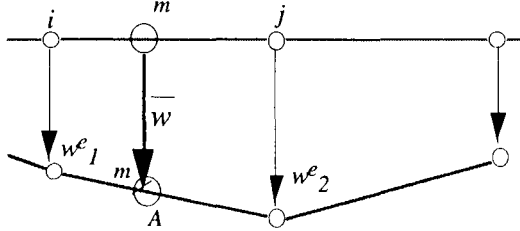


Figure 6. Calcul du déplacement \bar{w} au point de contact pont-masse mobile pour un élément de poutre à 2 nœuds

La représentation de $\{w^e\}$ dans l'espace modal est donnée par :

$$\{w^e\} = [\bar{\phi}] \{y\} \tag{46}$$

$$\ddot{\bar{w}} = \langle N_{,xx} \rangle [\bar{\phi}] \{y\} v^2 + 2 \langle N_{,x} \rangle [\bar{\phi}] \{\dot{y}\} v + \langle N \rangle [\bar{\phi}] \{\ddot{y}\} + \langle N_{,x} \rangle [\bar{\phi}] \{y\} v_{,t} \tag{47}$$

où $[\bar{\phi}]$ est la matrice des vecteurs propres dont les composantes non nulles correspondent aux directions des composantes de $\{w^e\}$. L'analyse modale nous permet d'écrire l'équation [41], sous la forme suivante :

$$\ddot{y}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = \{\phi_j\}^T \{F(x,t)\} = p_j \tag{48}$$

$$\text{où } p_j = - \{\phi_j\}^T \{N\} m (g + \ddot{w})$$

$\{N\}$ est le vecteur des fonctions de forme fonction du temps, calculé à la position de la masse mobile. En remplaçant le chargement généralisé du mode j , p_j et l'accélération donnée par [47] dans l'équation [48], on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j + m \{\phi_j\}^T \{N\} \langle N \rangle [\bar{\phi}] \{\ddot{y}\} + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j + 2m v \{\phi_j\}^T \{N\} \langle N_x \rangle [\bar{\phi}] \{\dot{y}\} + \omega_j^2 y_j \\ + m v^2 \{\phi_j\}^T \{N\} \langle N_{xx} \rangle [\bar{\phi}] \{y\} + m v_x \{\phi_j\}^T \{N\} \langle N_x \rangle [\bar{\phi}] \{y\} = - \{\phi_j\}^T \{N\} mg \end{aligned} \tag{49}$$

Posons :

$$\begin{aligned} m [\bar{\phi}]^T \{N\} \langle N \rangle [\bar{\phi}] &= [B_3] \\ 2mv [\bar{\phi}]^T \{N\} \langle N_x \rangle [\bar{\phi}] &= [B_1] \\ m (v^2 [\bar{\phi}]^T \{N\} \langle N_{xx} \rangle [\bar{\phi}] + v_x [\bar{\phi}]^T \{N\} \langle N_x \rangle [\bar{\phi}]) &= [B_2] \end{aligned} \tag{50}$$

Le couplage des équations modales [49] donne l'équation [51].

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1+B_3(1,1) & B_3(1,2) & \dots & B_3(1,j) & \dots & B_3(1,N) \\ B_3(2,1) & 1+B_3(2,2) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_3(j,1) & \dots & \dots & 1+B_3(j,j) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_3(N,1) & \dots & \dots & \dots & \dots & 1+B_3(N,N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_N \end{Bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 + B_1(1,1) & B_1(1,2) & \dots & B_1(1,j) & \dots & B_1(1,N) \\ B_1(2,1) & 2\xi_2 \omega_2 + B_1(2,2) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1(j,1) & \dots & \dots & 2\xi_j \omega_j + B_1(j,j) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1(N,1) & \dots & \dots & \dots & \dots & 2\xi_N \omega_N + B_1(N,N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dots \\ \dot{y}_j \\ \dots \\ \dot{y}_N \end{Bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \omega^2_1 + B_2(1,1) & B_2(1,2) & \dots & B_2(1,j) & \dots & B_2(1,N) \\ B_2(2,1) & \omega^2_2 + B_2(2,2) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_2(j,1) & \dots & \dots & \omega^2_j + B_2(j,j) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_2(N,1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \omega^2_N + B_2(N,N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_N \end{Bmatrix} = -mg \begin{Bmatrix} \langle \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_2 \rangle \\ \dots \\ \langle \phi_j \rangle \\ \dots \\ \langle \phi_N \rangle \end{Bmatrix} \{N\} \end{aligned} \tag{51}$$

ce qui se ramène à :

$$[M^*] \{\ddot{y}\} + [C^*] \{\dot{y}\} + [K^*] \{y\} = \{F^*(t)\} \quad [52]$$

Le système d'équations [52] est résolu par le schéma implicite de Newmark- β .

7. Exemples numériques

Le but de cet article est de mettre en évidence la différence et les effets d'inertie de la masse mobile par rapport à la force mobile. Dans un premier cas, nous présentons un exemple pour permettre de comparer les résultats obtenus par chacune des deux approches (éléments finis dynamique et éléments finis standards). Le deuxième exemple est une étude comparative entre la masse mobile et la force mobiles en fonction de quelques paramètres physiques.

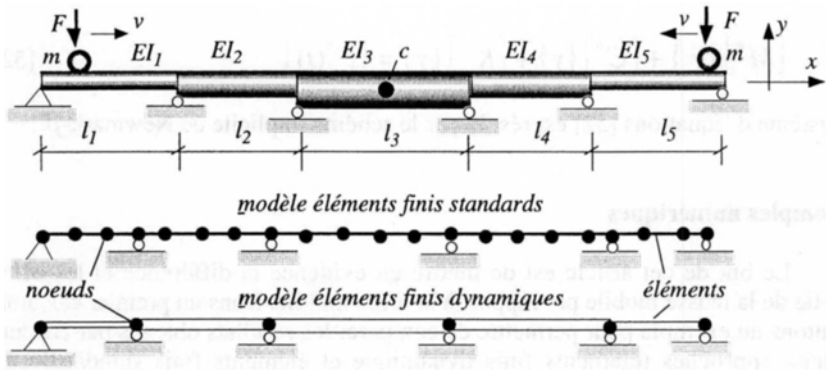
7.1. Poutre continue à cinq travées sous force et masse mobiles

C'est un exemple comparatif entre les deux approches, éléments finis dynamique (semi-analytique) et éléments finis standards. Il s'agit d'une poutre continue à cinq travées de sections non constantes sur appuis simples [YAN 95] (voir figure 7), les différentes propriétés pour chaque travée sont données sur la figure 7. Pour le modèle semi-analytique, la poutre continue est modélisée par 5 éléments de poutres et 6 nœuds (un nœud à chaque appui), alors que pour le modèle éléments finis nous avons utilisé le même modèle que celui de la référence [YAN 95], soit 21 éléments de poutres (Euler-Bernoulli) et 22 nœuds (figure 7).

Les 5 premières fréquences naturelles calculées pour étudier le problème dynamique sont présentées à la table 1. Le modèle semi-analytique avec la rigidité dynamique exacte est meilleur que le modèle éléments finis si le maillage de ce dernier n'est pas fin.

étude	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
éléments finis	173.2	221.25	261.30	309.80	384.95
semi-analytique	173.14	231.15	261.16	309.54	383.39

Table1. Les cinq premières fréquences naturelles (rad/s) pour le cas de la poutre multi-travées de la figure 7



$EI_i = 114.61 \times 10^3; 342.77 \times 10^3; 264.22 \times 10^4; 108.18 \times 10^4; 165.136 \times 10^3 [\text{N} \cdot \text{m}^2]$
 $l_i = 1.83; 2.438; 3.048; 2.743; 2.1336 [\text{m}]$
 $m_i = 0.48; 1.081; 3.00; 1.922; 0.75 [\text{kg/m}]$
 $F = -89 \text{ KN}, m = F/g = 9072.3 \text{ kg}$
 $v = 24.4 \text{ m/s}$

Figure 7. Poutre multi-travées sur appuis simples sous force (ou masse) mobile, avec les données du problème [YAN 95]

Les figures 8 à 11 représentent le rapport de la flèche dynamique sur la flèche statique maximale au point c (milieu de la travée centrale).

La figure 8 représente le cas d'une seule force mobile d'amplitude $F=89\text{KN}$ qui traverse la poutre avec une vitesse $v=24.4 \text{ m/s}$. Les deux modèles (E.F et semi-analytique) donnent quasiment la même réponse. La figure 9 représente le même cas que le précédent, sauf que la charge est une masse mobile $m=F/g$; les mêmes remarques que le cas précédent sont relevées et les deux modèles donnent aussi le même résultat.

La figure 10 représente le cas de deux forces mobiles circulants dans des sens opposés à vitesses constantes et égales ($v=24.4 \text{ m/s}$) et l'amplitude de chaque force est $F=89\text{KN}$. La figure 11 représente le même cas sauf que nous remplaçons les forces mobiles par des masses mobiles d'intensités égales ($m=F/g$). Sur les figures 10 et 11, nous remarquons que les deux modèles E.F et semi-analytique donnent aussi pour ce cas des réponses très similaires.

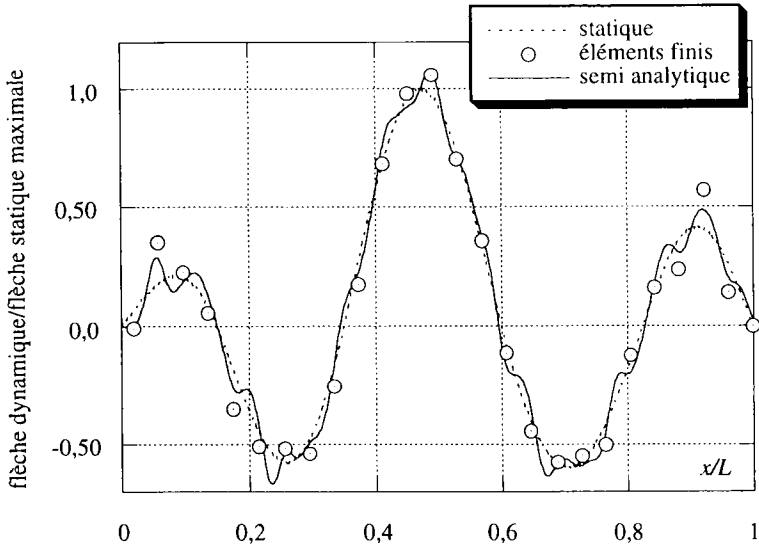


Figure 8. Réponse dynamique normalisée au point c , pour le cas d'une seule force mobile circulant de la gauche vers la droite avec une vitesse $v=24.4$ m/s

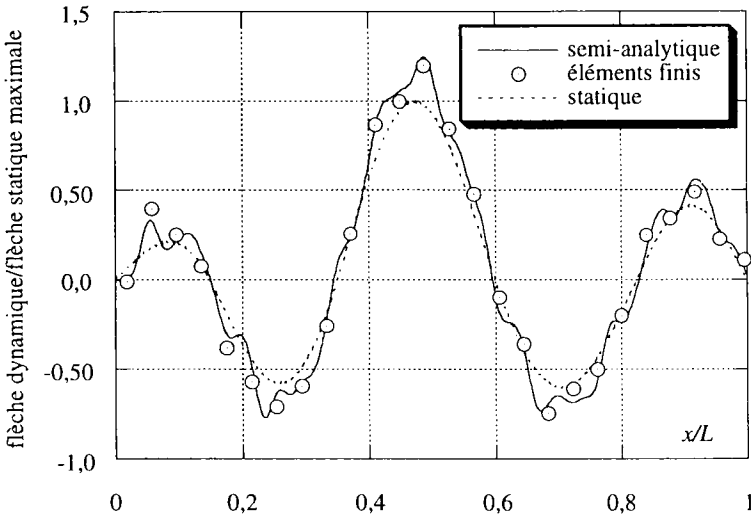


Figure 9. Réponse dynamique normalisée au point c , pour le cas d'une seule masse mobile circulant de la gauche vers la droite avec une vitesse $v=24.4$ m/s

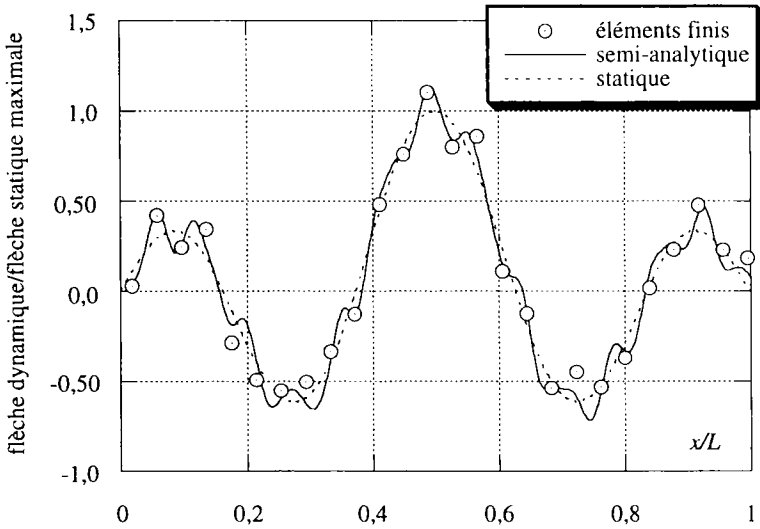


Figure 10. Réponse dynamique normalisée au point *c*, pour le cas de deux forces mobiles circulants dans des sens opposés avec une vitesse $v=24.4$ m/s

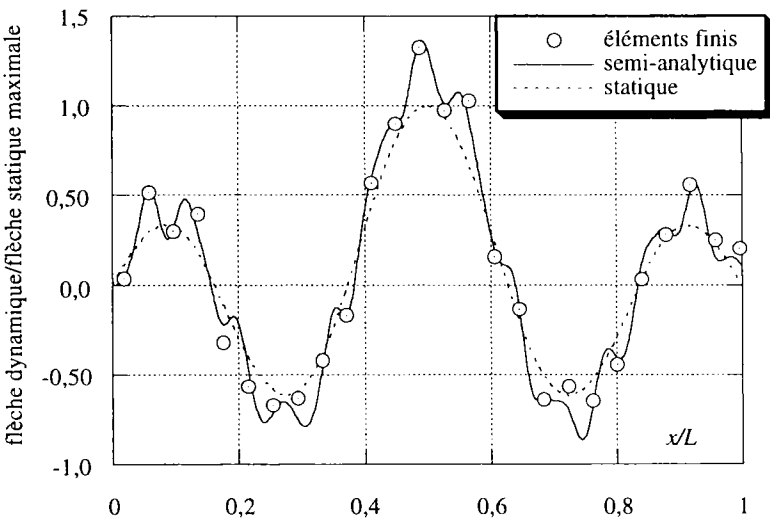


Figure 11. Réponse dynamique normalisée au point *c*, pour le cas de deux masses mobiles circulants dans des sens opposés avec une vitesse $v=24.4$ m/s

En général d'après les formulations des deux approches il est prévisible que les deux méthodes donnent les mêmes résultats si et seulement si le modèle par éléments finis donne les bons modes et fréquences propres (c'est à dire que le modèle éléments finis nécessite un maillage plus fin)

7.2. Poutre sur appuis simples sous force et masse mobiles

Une étude comparative est faite pour distinguer les effets importants de la masse mobile en fonction de la vitesse et du rapport de la masse mobile sur la masse de la poutre (pont) notée α_m .

Dans cette exemple nous étudierons le comportement dynamique d'une poutre mince non amortie sur appuis simples (figure 12), sous les sollicitations de force et de masses mobiles à vitesse constante. On examine trois cas du rapport de la masse mobile m sur la masse de la poutre m_p :

1. $\alpha_m = m / m_p = 1.0$;
2. $\alpha_m = m / m_p = 0.5$;
3. $\alpha_m = m / m_p = 0.2$

Les objectifs sont d'étudier des degrés de contribution et de participation des matrices [B1] et [B2] définies aux équations [34] et [35] et de comparer les effets de la masse et de la force mobiles en fonction de la vitesse et du rapport α_m .

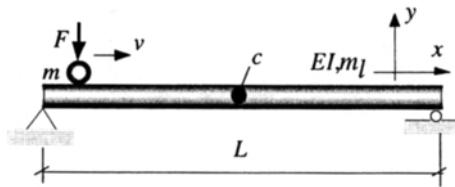
La pulsation analytique est donnée par : $\omega_j = (j\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_l L^4}}$; $T_1 = 0.13$ s

La solution analytique du déplacement w (pour le problème de la force mobile) est [HUM 90]:

$$w(x,t) = \frac{2F}{m_l L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j \frac{\pi v t}{L})}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left\{ \sin(\Omega_j t) - \frac{\Omega_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right\}, \quad \Omega_j = j \frac{\pi v}{L} \text{ et } 0 \leq t \leq L/v$$

a flèche statique au point c (force appliquée au point c) est $w_{st} = FL^3 / 48EI$

Dans cet exemple, on a utilisé une analyse modale avec les 10 premiers modes. La poutre est considérée comme étant initialement au repos.



Données du problème [CHA 94a]

$L = 25$ m ; $g = 9.81$ m/s² ; $m_l = 5.96 \times 10^3$ kg/m ; $A = 2.384$ m² ; $I = 2.222$ m⁴ ; $E = 2.5 \times 10^{10}$ N/m² ; $m_p = 149000$ kg .

Charge mobile : $F = -m g$; 1. $m / m_p = 1.0$; 2. $m / m_p = 0.5$; 3. $m / m_p = 0.2$.

Figure 12. Poutre sur appuis simples (avec les données du problème)

La méthode de résolution numérique utilisée pour le problème de masse mobile est celle de Newmark- β . Elle est inconditionnellement stable. Le pas de temps Δt a été fixé à $0.13 \cdot 10^{-3}$ s et pour le problème de force mobile, on a utilisé la méthode modale fréquentielle FFT. Pour éviter le phénomène d'aliasing [HEN 95], on prend $\Delta t \leq (1/2f_s)$ où f_s est la plus grande fréquence présente dans le signal. Dans notre cas, $f_s = f_{10} = 1/(0.13 \times 100)$ et $\Delta t \leq 0.65 \cdot 10^{-3}$ s. Les différentes vitesses de passage utilisées pour les études comparatives sont:

1. $v_1 = 20$ m/s
2. $v_2 = 40$ m/s
3. $v_3 = 60$ m/s
4. $v_4 = 100$ m/s

La position relative de la masse mobile (force mobile) sur la poutre est notée x/L . Dans la légende des figures 13 à 17, $B_i = 0$ signifie que la matrice B_i est négligée alors que $B_i \neq 0$ signifie que la matrice B_i est prise en compte dans la réponse dynamique.

La figure 13 représente la réponse dynamique au centre de la poutre pour le cas d'une masse mobile avec $\alpha_m = 1.0$, circulant à 60 m/s (216 Km/h), et les figure 14 à 17 pour le cas d'une masse mobile $\alpha_m = 0.5$, circulant respectivement à des vitesses de 20, 40, 60 et 100 m/s (72, 144, 216 et 360 Km/h). Ces figures illustrent l'effet de la prise en compte ou non des matrices [B1] et [B2]. La solution "exacte" correspond au cas où $[B1] \neq 0$ et $[B2] \neq 0$

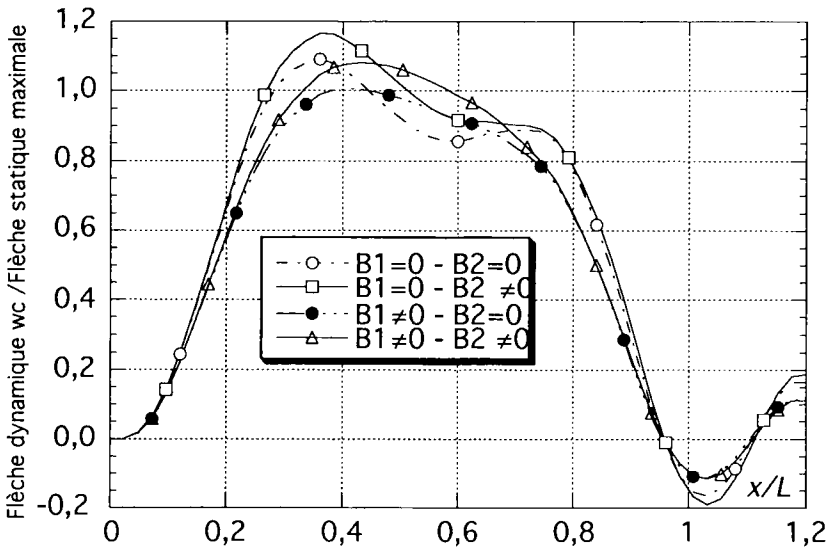


Figure 13. Influence des matrices $B1$ et $B2$ sur la réponse dynamique sous l'effet de la masse mobile avec $\alpha_m = 1.0$ et $v = 60$ m/s

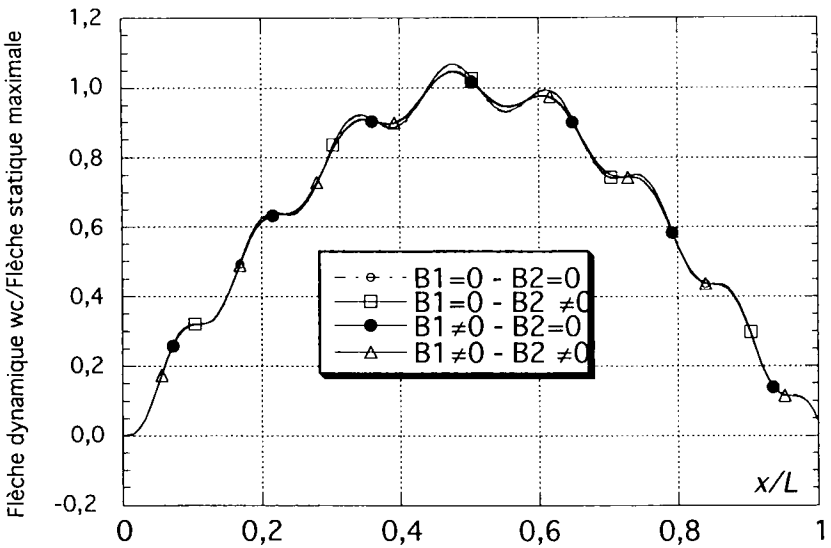


Figure 14. Influence des matrices B_1 et B_2 sur la réponse dynamique sous l'effet de la masse mobile avec $\alpha_m = 0.5$ et $v = 20$ m/s

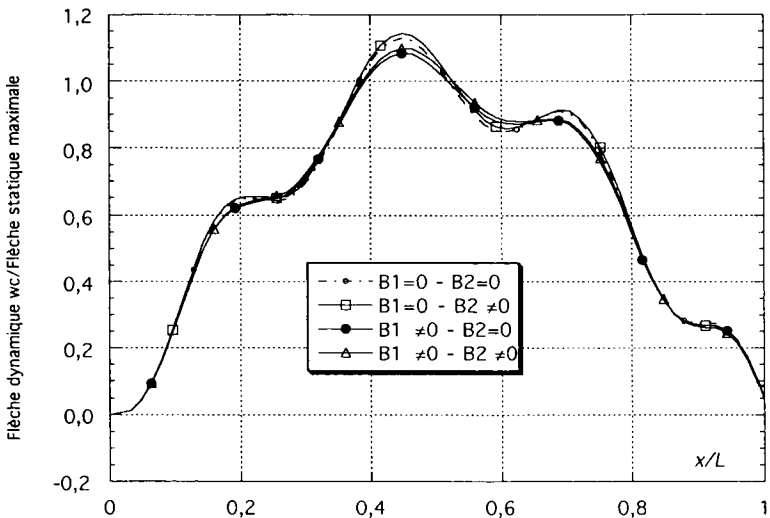


Figure 15. Influence des matrices B_1 et B_2 sur la réponse dynamique sous l'effet de la masse mobile avec $\alpha_m = 0.5$ et $v = 40$ m/s

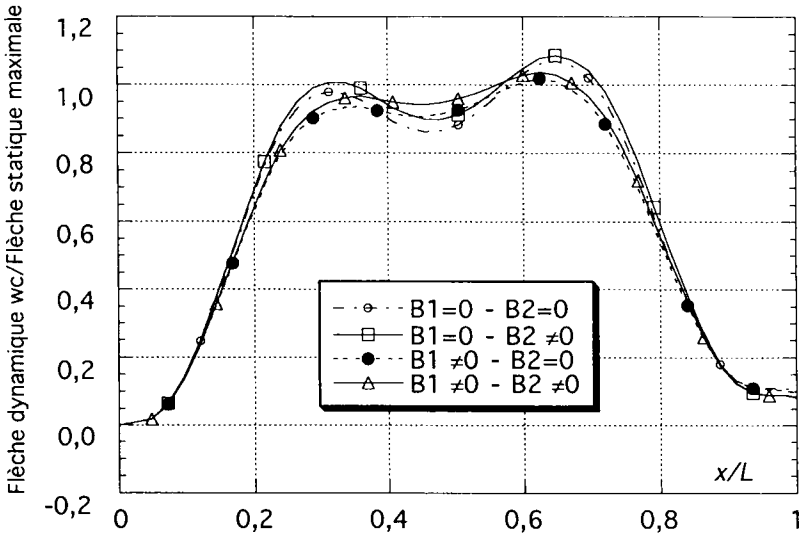


Figure 16. Influence des matrices B_1 et B_2 sur la réponse dynamique sous l'effet de la masse mobile avec $\alpha_m=0.5$ et $v=60$ m/s

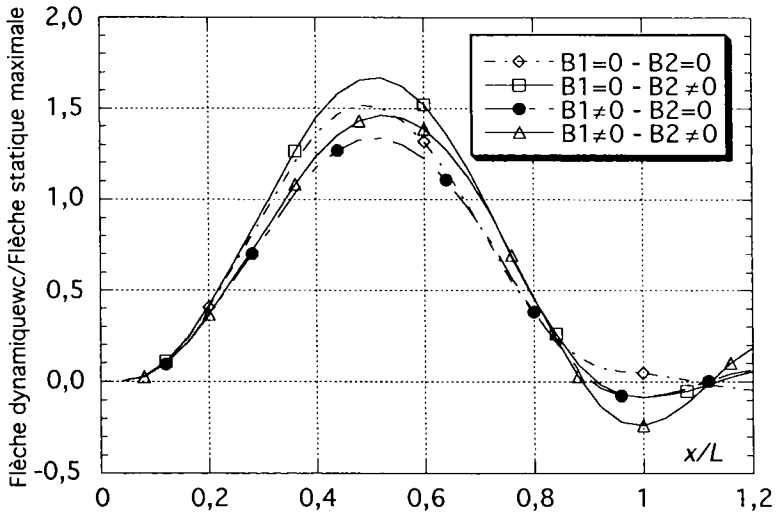


Figure 17. Influence des matrices B_1 et B_2 sur la réponse dynamique sous l'effet de la masse mobile avec $\alpha_m=0.5$ et $v=100$ m/s

Les effets et la participation des matrices [B1] et [B2] sur la réponse dynamique w_c sont visiblement importants dans le cas des grandes vitesses ($T_1/\tau \geq 0.2$ ou $v > 20$ m/s) et aussi quand le rapport α_m augmente ($\alpha_m \geq 0.5$). Donc pour des rapports α_m importants et pour des vitesses moins importantes on peut prendre directement la formulation [37] proposée par [BIG 64] pour traiter les problèmes des poutres sous masses mobiles.

La matrice [B1] représente une matrice d'amortissement additionnelle (amortissement numérique). Sa présence est plus importante que la matrice B2 surtout dans les problèmes à grandes vitesses (figures 16 et 17). On remarque aussi que les contributions des matrices B1 et B2 modifient la position des maxima des flèches dynamiques.

Afin de quantifier l'importance d'utiliser un modèle de masse mobile par rapport au modèle de type force mobile, nous avons étudié la même structure avec différents rapport de masses α_m circulant à différentes vitesses.

La figure 18 illustre la réponse au centre de la poutre pour un rapport de masses $\alpha_m = 1.0$ circulant à 60 m/s. Les figures 19 à 22 représentent les résultats pour $\alpha_m = 0.5$ avec des vitesses 20, 40, 60 et 100 m/s respectivement et celles de 23 et 24 représentent les résultats pour un rapport $\alpha_m = 0.2$ et des vitesses de 40 et 60 m/s. Finalement, la figure 25 donne les résultats de la force de contact relative à la charge statique pour une masse mobile circulant à 40 m/s et pour deux rapport de α_m qui sont respectivement 0.2 et 1.0. Ces résultats ont été obtenus avec les dix premiers modes.

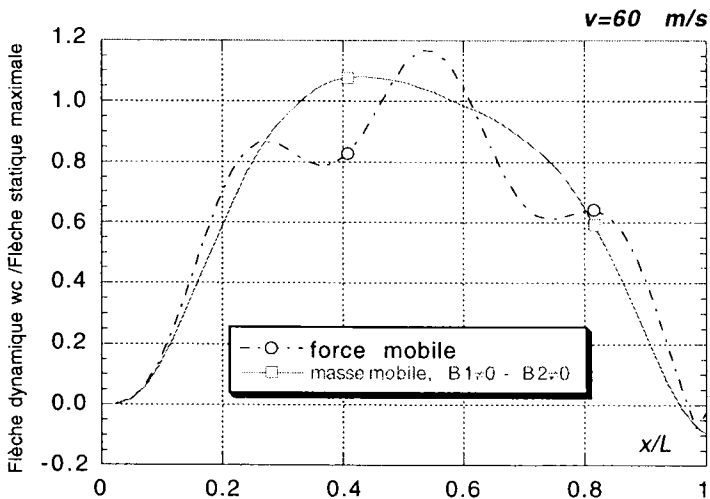


Figure 18. La réponse dynamique sous les sollicitations de la masse mobile et de la force mobile avec $\alpha_m = 1.0$ et $v = 60$ m/s

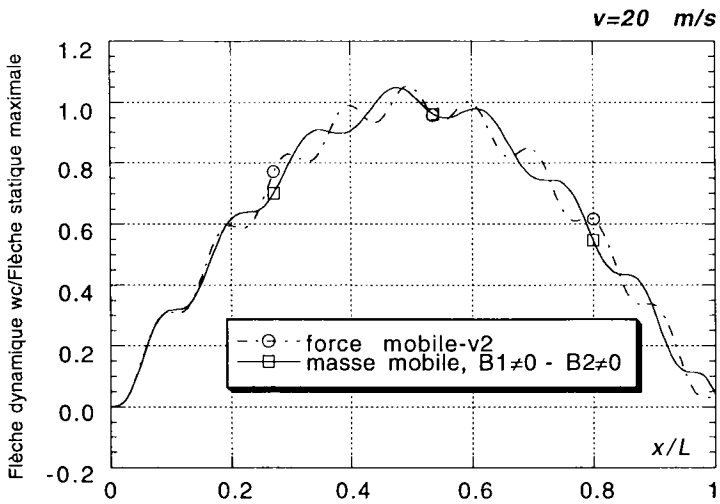


Figure 19. La réponse dynamique sous les sollicitations de la masse mobile et de la force mobile avec $\alpha_m=0.5$ et $v=20$ m/s

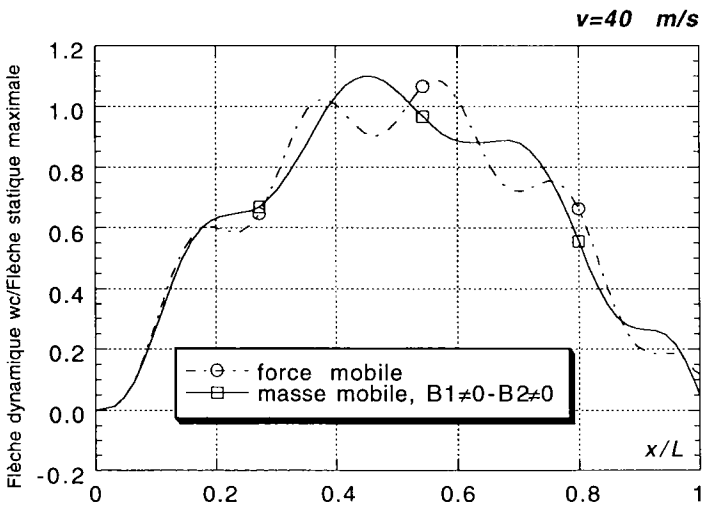


Figure 20. La réponse dynamique sous les sollicitations de la masse mobile et de la force mobile avec $\alpha_m=0.5$ et $v=40$ m/s

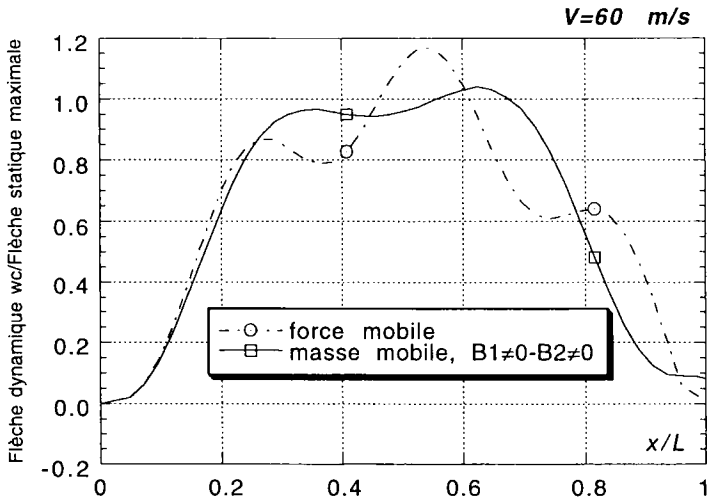


Figure 21. La réponse dynamique sous les sollicitations de la masse mobile et de la force mobile avec $\alpha_m = 0.5$ et $v=60 \text{ m/s}$

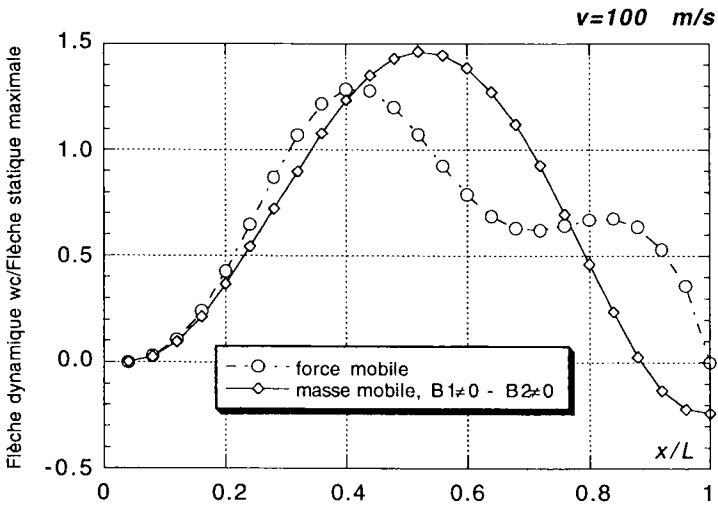


Figure 22. La réponse dynamique sous les sollicitations de la masse mobile et de la force mobile avec $\alpha_m = 0.5$ et $v=100 \text{ m/s}$

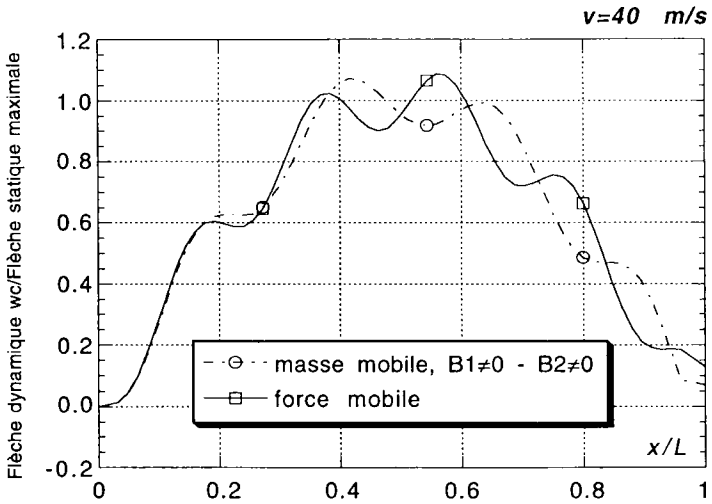


Figure 23. La réponse dynamique sous les sollicitations de la masse mobile et de la force mobile avec $\alpha_m = 0.2$ et $v = 40$ m/s

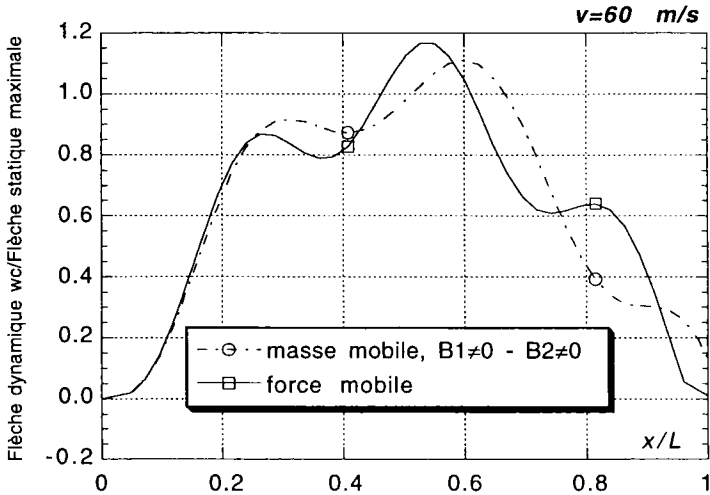


Figure 24. La réponse dynamique sous les sollicitations de la masse mobile et de la force mobile avec $\alpha_m = 0.2$ et $v = 60$ m/s

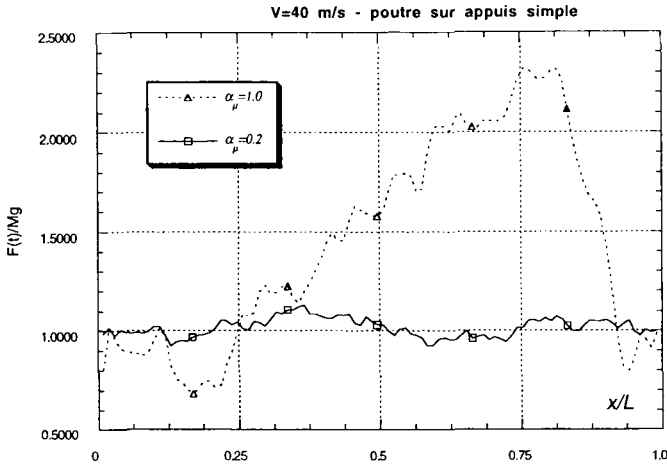


Figure 25. Force de contact normalisée dans les cas $\alpha_m = 0.2$ et $\alpha_m = 1.0$ avec $v=40m/s$.

L'étude comparative a démontré que les réponses dynamiques provoquées respectivement par la force mobile et par la masse mobile ne sont pas forcément les mêmes, surtout pour les problèmes de charges mobiles à grandes vitesses. Pour les problèmes où le rapport $\alpha_m \geq 0.5$, la différence entre les réponses de la masse mobile et de la force mobile devient importante pour des vitesses telles que : $T_j/\tau = T_j v/L \geq 0.2$ (voir figures 18 à 22). Pour les problèmes où le rapport $\alpha_m < 0.5$, la différence entre les réponses de la masse mobile et de la force mobile devient importante pour des vitesses telles que : $T_j/\tau = T_j v/L \geq 0.31$ (voir figures 23 et 24). Si le rapport $\alpha_m < 0.5$ avec une vitesse de parcours moins importante, le problème de la masse mobile est réduit à un problème de force mobile (car la solution est identique) puisque l'effet d'inertie de la masse mobile est négligeable (voir figure 14). La figure 25 donne une explication au phénomène de l'interaction masse-structure. Si α_m augmente (cas où $\alpha_m = 1.0$), alors la différence entre les réponses de la force mobile et de la masse mobile sont forcément différentes car la force de contact normalisée est différente de 1.0. Quand le rapport α_m devient petit (cas où $\alpha_m = 0.2$), la réponse dynamique due à la force mobile est similaire à celle due à la masse mobile car le rapport de la force normalisée devient pratiquement égale à 1.0. En général, l'erreur entre les maxima des flèches dynamiques obtenues dans le cas de la force mobile et de la masse mobile (voir les courbes 18 à 24) varie de 9 % à 15 % selon le rapport α_m et la vitesse de passage. Pour la conception des ouvrages d'art, une erreur de 15 % est importante et peut induire des conséquences importantes. Donc la prise en compte des effets de la masse mobile est conseillée pour des rapports $\alpha_m \geq 0.5$ ainsi que pour des vitesses importantes dans le cas des ouvrages tels que les ponts rails pour les T.G.V.

8. Conclusion

On a présenté deux nouvelles approches d'analyses dynamiques des poutres continues (ponts) sous les forces et les masses mobiles par l'approche des matrices de rigidité dynamique. Celles-ci sont faciles à implémenter sur les ordinateurs personnels pour traiter des problèmes de ponts de degré de complexité plus ou moins élevé à une ou plusieurs charges mobiles par convoi.

L'approche de la matrice de rigidité dynamique facilite beaucoup la tâche dans le calcul des fréquences et modes propres d'une manière exacte, des structures à plusieurs poutres (ponts multi-travées, structures à treillis, portiques, etc.).

Les résultats obtenus justifient la bonne implémentation des algorithmes. Notons que cette approche peut être appliquée aussi dans les cas des grues et dans le cas des ponts roulants, qui supportent des charges mobiles.

En conclusion, on a remarqué, que le comportement dynamique des poutres sous forces ou masses mobiles n'est pas le même pour des rapports $\alpha_m \geq 0.2$ et pour des vitesses importantes. Cela signifie qu'il faut prendre des précautions dans la modélisation des charges mobiles dans les ouvrages légers (ponts mixtes) afin d'avoir une meilleure prise en compte de tout les effets importants, selon la nature et la vitesse de la charge.

Dans le cas de l'approche par éléments finis, on peut obtenir les mêmes résultats que l'approche *semi-analytique*, si et seulement si les modes et fréquences propres obtenus par E.F. sont exactes. Ce qui revient à mailler d'une façon très raffinée la structure, alors que dans l'approche *semi-analytique*, on n'a pas besoin de mailler les travées, voir [HEN 94] et [HOO94].

9. Bibliographie

- [AYE 50] S. AYER, G. FORD, L. S. JACOBSEN, « Transverse Vibration of Two span Beam Under Action of Moving Constant Forces », *J. of Applied Mechanics*, March 1-12 (1950).
- [BAN 89] J. R. BANERJEE, « Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam element », *Int. J. for Num. Methods in Engng*, 28, 1283-1298 (1989).
- [BIG 64] J. M. BIGGS, *Introduction to Structural Dynamics*. McGraw Hill, New York. 1964.
- [CHA 94] P. K. CHATTERJEE, « Dynamic Analysis in of Highway Bridges under Moving Vehicles », *J. of Sound & Vibration.*, 169 (2), 619-632 (1994).
- [CHA 94a] D. CHANG, H. LEE, « Impact Factors for Simple-Span Highway Girder Bridges », *J. of Structural Eng.* (ASCE). vol 120, N°3, pp 704-715(1994).
- [CLO 93] R. W. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York. 1993.
- [COO 65] J. W. COOLEY, J.W. TUKEY, « An algorithm for the machine calculation of complex fourier series », *Math. Comput*, 19, 297-301 (1965).
- [FAF 93] M. FAFARD, MALLIKARJUNA, M. SAVARD, « Dynamic of bridge-vehicle interaction », *Proc., EURO DYN'93 Struct. Dynamics, Balkema*, Rotterdam, The Netherlands, 2, 951-960 (1993).

- [FEN 62] J. S. FENVES, A. S. VELETOS, S. P. SISS, « Dynamic studies of bridge on the AASHO road test, Highway Research Board », Reports 71 et 73, National Academy of Sciences, Washington, DC (1962).
- [FRI 83] P. O. FRIBERG, « Coupled vibrations of beams - An exact dynamic element stiffness matrix for beam », *Int. J. for Num. Methods in Engng*, 19, 479-493 (1983).
- [FRY 72] L. FRYBA, *Vibration of Solids & Structures Under Moving Loads*, Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.
- [HAY 81] T. HAYASHITAWA, N. WATANABE, « Dynamic behavior of continuous beams with moving loads », *J. Struct. Mech. Div., ASCE*, 107 (EM1), 229-246 (1981).
- [HEN 94] K. HENCHI, H. BADRAOUI, G. DHATT, D. SELIGMANN, « Calcul non-linéaire des valeurs et vecteurs propres par l'approche des matrices de rigidité dynamiques exactes », Rapport N° 01/94. Université de Technologie de Compiègne-Electricité de France, service M.M.N. Paris Clamart 1994.
- [HEN 95] K. HENCHI, « Analyse dynamique des ponts par éléments finis sous la sollicitation des véhicules mobiles », Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France. 1995.
- [HEN 96a] K. HENCHI, W. HOORPAH, G. DHATT, Analyse dynamique des structures à poutres par les matrices de rigidité dynamique. 4^e Colloque National AFPS. Génie parasismique et aspect vibratoire dans le génie civil, Saint-Rémy-lès-Chevreuse (France), 10-12 avril 1996, pp. 460-470.
- [HEN 96b] K. HENCHI, W. HOORPAH, G. DHATT, M. TALBOT, Calcul dynamique des structures sous charges roulantes par la méthode des éléments finis. 4^e Colloque National AFPS. Génie parasismique et aspect vibratoire dans le génie civil, Saint-Rémy-lès-Chevreuse (France), 10-12 avril 1996, pp. 283-292.
- [HEN 97] K. HENCHI, G. DHATT, M. TALBOT, M. FAFARD, « Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads », *Journal of Sound and Vibration*. 199 (1), 33-51 (1997)
- [HOO 94] W. HOORPAH, K. HENCHI, G. DHATT, « Calcul exact des fréquences de vibration des structures à poutres par les matrices de rigidité dynamique. Application aux ponts mixtes bipoutres », *Journal de la construction métallique*. 4, 19-41 (1994).
- [HOW 79] W. P. HOWSON, « A compact method for computing the eigenvalues and eigenvectors of plane frame », *Advances in Engeneering Software*, 1 (4) (1979).
- [HUM 90] J. L. HUMAR, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1990.
- [HUM 93] J. L. HUMAR, H. XIA, « Dynamic Response Analysis in the Frequency Domain », *Earthquake eng. stuct. dyn*, 22, 1-12 (1993)
- [LIN 90] Y. H. LIN, M. W. TRETHERWEY, « Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads », *Journal of Sound and Vibration*, vol 136 (2), 323-342 (1990).
- [TAL 92] M. TALBOT, G. DHATT, K. HENCHI, « A new shell element applied to the 3-D Analysis of bridges-structures », *Annual Conference of the Canadian Society for Civil Engineering*, May 27-29, Québec, QC (1992).

[TIN 74] E.C. TING, J. GENIN, J. H. GINSBERG, « A General Algorithm for Moving Mass Problems », *J. of Sound & Vibr.* vol 33(1), pp 49-58 (1974).
 [YAN 95] Y. B. YANG, B. H. LIN, « Vehicle-Bridge Interaction Analysis by Dynamic Condensation Method », *J. Struct. Engng, ASCE*, 121 (11), 1636-1643 (1995).
 [WIT 71] W. H. WILTTRICK, F. W. WILLIAMS, « A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures », *Quarterly journal of mechanics and applied maths*, vol XXIV, Pt 3 (1971).

Article reçu le 30 août 1996
 Version révisée le 20 mars 1997

Annexe 1. Matrice de rigidité dynamique

Le développement de l'équation 11 donne la matrice de rigidité dynamique élémentaire suivante :

$$[K_d(\alpha)] = \frac{EI}{L^3(1-cC)} \begin{bmatrix} Kd_{1,1} & Kd_{1,2} & Kd_{1,3} & Kd_{1,4} \\ & Kd_{2,2} & Kd_{2,3} & Kd_{2,4} \\ & & Kd_{3,3} & Kd_{3,4} \\ \text{Sym.} & & & Kd_{4,4} \end{bmatrix}$$

avec : $c = \cos\alpha L$; $s = \sin\alpha L$; $C = \cosh\alpha L$ et $S = \sinh\alpha L$.

$$\begin{aligned} Kd_{1,1} &= \alpha^3 L^3 (Cs + Sc) & Kd_{2,2} &= \alpha L^3 (Cs + Sc) \\ Kd_{1,2} &= \alpha^2 L^3 Ss & Kd_{2,3} &= \alpha^2 L^3 (C-c) \\ Kd_{1,3} &= \alpha^3 L^3 (s+S) & Kd_{2,4} &= \alpha L^3 (S-s) \\ Kd_{1,4} &= \alpha^2 L^3 (C-c) & Kd_{3,3} &= \alpha^3 L^3 (Cs + Sc) \\ Kd_{4,4} &= \alpha L^3 (Cs + Sc) & Kd_{3,4} &= -\alpha^2 L^3 Ss \end{aligned}$$

Annexe 2. Notations

- A Aire de la section du pont (ou de la poutre)
- $\delta(x - \bar{x}_k)$ Fonction de Dirac à la position $x = \bar{x}_k$
- d.d.l Degré de liberté
- Δt Pas de temps
- E Modules de Young
- Φ_n, ϕ_{nr} Mode propre n de la structure continue complète et mode propre n de la travée r

FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> (Transformée de Fourier rapide)
$F_k(t)$	Intensité de la charge mobile k
$\phi_n(x)$	Vecteur propre (continu) correspondant au mode n
$[\Phi], \Phi$	Matrice modale des N vecteurs propres
$\{F\}^*$	vecteur de chargement généralisé
$\{F\}_e$	Vecteur de chargements élémentaire
$\{\phi\}_m$	Vecteur propre nodal correspondant au mode m
$\{F(x,t)\}$	Vecteur associé aux forces mobiles
$\phi_{n,x}(x)$	Dérivée par rapport à x du vecteur propre n
$\phi_{n,xx}(x)$	Dérivée seconde par rapport à x du vecteur propre n
g	Gravité (= 9.81 m/s ²)
K^*, M^*, C^*	Matrices de rigidité, de masse et d'amortissement généralisées
l_r	Longueur de la travée r
$[K], [M], [C]$	Matrices de rigidité, de masse et d'amortissement de la structure
L	Longueur totale du pont (pont ou poutre)
m	Masse mobile
m_p	Masse du pont (ou poutre)
$\langle N_{,x} \rangle$	Dérivée de la fonction de forme par rapport à x
$\langle N_{,xx} \rangle$	Dérivée seconde de la fonction de forme par rapport à x
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
$\{N\}_e$	Vecteur élémentaire des fonctions de forme
$\{N\}_k$	Vecteur des fonctions de forme évalué à la position de contact de la charge mobile k et du pont (structure)
$p_n(t)$	chargement généralisé du mode n
m_l	Masse de la poutre par unité de longueur
T_l, f_l, ω_l	Période, fréquence et pulsation fondamentales
w^e	Vecteur élémentaire des déplacements w (de l'élément e)
\ddot{x}	Accélération de la charge mobile (véhicule mobile)
$y_m, \dot{y}_m, \ddot{y}_m$	Déplacement, vitesse et accélération généralisés du mode m
α_m	Rapport de la masse mobile sur la masse totale de la poutre