
Un schéma Volumes-Finis pour la simulation d'un modèle bi-fluide d'écoulements diphasiques compressibles gaz-solide

Laure Combe *, ** — Jean-Marc Hérard **

* *IMFT*

Avenue du Professeur Camille Soula, 31000 Toulouse

** *EDF, Direction des Etudes et Recherches*

*Département Laboratoire National d'Hydraulique
6, quai Watier, 78400 Chatou*

RÉSUMÉ. On présente ici un schéma Volumes Finis permettant de simuler des écoulements diphasiques compressibles gaz-particules à l'aide d'un modèle bi-fluide. L'algorithme instationnaire est mis en œuvre sur maillage non structuré. La technique à pas fractionnaires utilisée permet de préserver le principe du maximum pour la variable taux de présence volumique. Des cas tests bidimensionnels comportant des chocs et des détentes dans chaque phase sont décrits.

ABSTRACT. A Finite-Volume scheme which enables to compute compressible gas-solid two-phase flows using the two-fluid approach is presented herein. The time-dependent scheme is implemented on unstructured meshes. The fractional step method is such that the maximum principle for the volumetric fraction is fulfilled. Some two-dimensional test cases including shocks and rarefaction waves within both phases are described.

MOTS-CLÉS : écoulements diphasiques, modèle bi-fluide, volumes finis, méthode à pas fractionnaires, solveur de Riemann approché, système hyperbolique non conservatif, principe du maximum.

KEYWORDS : two-phase flows, two-fluid model, finite volumes, fractional step method, approximate Riemann solver, non conservative hyperbolic systems, maximum principle.

Introduction

On rencontre des écoulements diphasiques dans nombre d'applications industrielles depuis l'étude des moteurs à combustion (gaz-liquide), des centrales à charbon (gaz-particules) jusqu'aux réacteurs nucléaires (eau-vapeur)... La prédiction de ces phénomènes dépend de leur modélisation (*Cf.* [ISH 75]), du cadre mathématique dans lequel s'insèrent ces modèles et de la possibilité de les simuler par l'outil numérique. Il existe en fait de nombreux modèles continus proposés dans la littérature, et pas de modèle consensuel à l'heure actuelle. La première difficulté réside dans ce seul fait. La seconde est liée à l'absence de résultats théoriques associés à ces modèles mathématiques, hormis les travaux décrits dans [RAV 95] et [SAI 95], où les auteurs ont abordé la caractérisation entropique et la résolution du problème de Riemann associé à un modèle bi-fluide à six équations censé décrire les évolutions d'un «spray». Enfin, il existe de nombreuses difficultés numériques lorsqu'on désire simuler ces modèles, principalement liées au fait que :

- (i) les systèmes convectifs ne sont pas inconditionnellement hyperboliques et ne possèdent pas de forme conservative ; les problèmes de Riemann sont non solvables,
- (ii) les systèmes mettent en compétition plusieurs échelles de temps, associées aux phénomènes de convection, de diffusion et de traînée, qui ne sont pas du même ordre de grandeur.

Ces modèles ne s'inscrivent donc pas dans le cadre théorique des systèmes hyperboliques (*Cf.* notamment [LAX 57], [LAX 72], [SMO 83] et [GOD 92] pour le cadre hyperbolique théorique), et les méthodes de résolution classiques volumes finis des systèmes hyperboliques telles que les solveurs de Godunov [GODU 59] ou de Roe [ROE 81] sont inadaptées pour ces systèmes. En effet, ils nécessitent, pour être mis en œuvre, de connaître la solution du problème de Riemann exact unidimensionnel associé, pour le schéma de Godunov, ou au moins les valeurs propres et les vecteurs propres analytiques de la matrice Jacobienne ou d'une matrice linéarisée au sens de Roe, pour le schéma de Roe. Or, il est indispensable de surmonter ces difficultés numériques, car la simulation précise des phénomènes mis en jeu constitue un des rares éléments de validation a posteriori des modèles mathématiques proposés. Quelques schémas ont été proposés récemment pour une résolution correcte des systèmes diphasiques bi-fluides modélisant les évolutions d'un gaz chargé en gouttelettes dans le cas dilué (*Cf.* [SAI 92]), et d'écoulements de type eau-vapeur ([KUM 93] et [TOU 96]). Ces derniers proposent de résoudre ce type de système par une linéarisation de type Roe associée à des relations de Rankine-Hugoniot approchées du système convectif non conservatif global. D'autre part, dans le cadre d'écoulements eau-vapeur, une décomposition particulière des termes de pression non conservatifs et une résolution du système au moyen d'un schéma cinétique de type volumes

finis, ont été proposées dans [COQ 96]. Rappelons que le cadre théorique associé aux problèmes hyperboliques non linéaires en forme non conservative est analysé dans [LEF 88], [LEF 92], [DAL 95] et [SAI 95]. On renvoie le lecteur à [ECO 96] pour une revue de quelques techniques numériques récentes mises en œuvre dans le domaine des écoulements diphasiques.

La contribution qui est décrite dans cette note est essentiellement numérique et concerne la modélisation des écoulements gaz-solide, pour pouvoir à terme effectuer des simulations réalistes de lits fluidisés denses. Les schémas qui seront mis en œuvre seront spécifiques mais simples et ont trois objectifs privilégiés :

- (i) autoriser le calcul d'écoulements avec vitesses relatives élevées,
- (ii) traiter correctement les effets de compressibilité,
- (iii) permettre des calculs avec des taux de présence faibles à très élevés.

Ce dernier point nécessitera d'examiner en détail les propriétés de positivité de la masse volumique du gaz et du taux de présence volumique de phase. C'est peut-être ici que se situe l'apport principal de ce travail, ce dernier point n'ayant curieusement pas été abordé dans la littérature dédiée.

On décrira tout d'abord le modèle d'écoulements diphasiques gaz-particules à quatre équations (deux équations de conservation de masse et deux équations de quantité de mouvement) que l'on retiendra ici, qui correspond au modèle A de Gidaspow [GID 93], pages 150-151. Il est semblable à un des modèles examinés dans le cadre gaz-goutelettes par Sainsaulieu [SAI 92] et [SAI 95]. Ce système est un sous-système du modèle à cinq équations décrit dans [BAL 95]. Il présente les mêmes pathologies (hyperbolicité conditionnelle, forme non conservative) ; de plus, son domaine d'hyperbolicité est identique, et, de façon équivalente, le problème du respect du principe du maximum reste posé.

On donnera une caractérisation entropique du modèle, et on discutera les conditions d'hyperbolicité et le respect a priori des conditions de positivité des grandeurs ad hoc. La résolution numérique de ce système sur maillage non-structuré devant autoriser des vitesses relatives entre phases élevées, un fonctionnement en régime dilué ou dense, un traitement correct des discontinuités et une rigoureuse conservation des masses partielles et de la quantité de mouvement moyenne, on proposera une méthode de résolution volumes finis basée sur une technique à pas fractionnaires. Rappelons que cette approche a été précédemment testée dans le cadre conservatif hyperbolique monophasique (Cf. [BAR 91], [BAR 92], [BUF 93a] et [BUF 93b]). On décrira ensuite les solveurs de type Roe ou Godunov mis en œuvre dans chaque étape. On présentera enfin des cas tests bidimensionnels non structurés de type tube à choc diphasique, avec ou sans effets de traînée, puis des simulations d'écoulements diphasiques dans une tuyère.

1. Modèle retenu et contexte

1.1. Présentation du modèle

On considère ci-dessous un modèle à quatre équations pour la modélisation des écoulements compressibles diphasiques de type gaz-solide en régime dilué comme chargé. Ce modèle bi-fluide Eulérien (modèle A proposé par Gidaspow Cf. [GID 93], pages 150-151) comprend deux équations de conservation de masse et deux équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P + \underline{I} + \alpha_1 \rho_1 \underline{g} \\ + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{\Sigma}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \langle \underline{u}'_1 \otimes \underline{u}'_1 \rangle) = \underline{0} \quad (1c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P - \frac{\underline{I}}{\rho_2} + \alpha_2 \underline{g} \\ + \nabla \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\rho_2} \underline{\Sigma}_2 \right) + \nabla \cdot (\alpha_2 \langle \underline{u}'_2 \otimes \underline{u}'_2 \rangle) = \underline{0} \quad (1d) \end{aligned}$$

L'indice 1 représente la phase gazeuse et l'indice 2 la phase des particules. Les variables α_k , ρ_k et \underline{U}_k désignent respectivement les moyennes statistiques locales de la fraction volumique, de la densité et du vecteur vitesse de la phase k . La phase particulaire est supposée incompressible (ρ_2 constant) contrairement à la phase gazeuse. Les fractions volumiques vérifient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (2)$$

La pression moyenne de l'écoulement P est supposée indépendante de l'écoulement des particules. Elle est définie par une loi de pression de gaz :

$$P = P(\rho_1) = K \rho_1^n \quad (3)$$

K est une constante positive ; n représentera, dans cette note, l'indice adiabatique du gaz γ . Gidaspow retient, dans certaines configurations, la valeur $n = 1$ (isotherme en gaz parfait). \underline{g} désigne le vecteur accélération de la pesanteur. Le tenseur turbulent de la phase gazeuse $\langle \underline{u}'_1 \otimes \underline{u}'_1 \rangle$ est supposé nul. Si on ne prend pas en compte l'éventuel caractère turbulent de l'écoulement porteur, on considère par contre les effets collisionnels au sein de la phase particulaire :

$$\langle \underline{u}'_2 \otimes \underline{u}'_2 \rangle_{ij} = \beta \langle q_2^2 \rangle \delta_{ij} \quad (4a)$$

$$\text{où} \quad \langle q_2^2 \rangle = \langle q_2^2 \rangle_0 \alpha_2^\beta (1 + g(\alpha_2)) h(\alpha_2) \quad (4b)$$

$$\text{avec} \quad \log h(\alpha_2) = \frac{4}{3} (1 + e_c) \frac{2 \alpha_{max}}{5 \alpha_{max} - 2} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}} \right)^{1 - \frac{5}{2} \alpha_{max}} \quad (4c)$$

$$\text{et} \quad g(\alpha_2) = 2 \alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}} \right)^{-\frac{5}{2} \alpha_{max}} (1 + e_c) \quad (4d)$$

e_c est une constante pour la prise en compte des collisions interparticulaires non élastiques ($0 < e_c < 1$), α_{max} est le taux de compactage maximum des particules supposées sphériques (que l'on prend en pratique égal à 0.64), β vaut 2/3 dans une configuration tridimensionnelle et $\langle q_2^2 \rangle_0$ est une constante de dimension $(m.s^{-1})^2$. On renvoie à [BAL 95] et [GOL 96] pour une analyse fine de ces phénomènes de pression intergranulaire; on détaille dans [COM 96b] plusieurs lois pour g (h étant déduite explicitement de g , en considérant une forme intégrale de l'équation d'énergie interparticulaire) associées à différentes propositions issues de la littérature (voir [GOL 96]). Ces lois sont telles que $\langle q_2^2 \rangle(\alpha_2)$ est monotone croissante, $\langle q_2^2 \rangle(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$ et $\langle q_2^2 \rangle(\alpha_2 = 0) = 0$. Le modèle considéré par Sainsaulieu [SAI 92], [SAI 95] et [RAV 95], pour les écoulements dilués gaz-liquide, est tel que $g(\alpha_2) = 0$ et $h(\alpha_2) = 1$. Le modèle proposé par Saurel *et al* [SAU 94] ne prend pas en compte les collisions intergranulaires (formellement: $g(\alpha_2) = 0$ et $h(\alpha_2) = 0$). On utilisera, dans la suite du document, la notation suivante :

$$\Xi(\alpha_2) = \beta \langle q_2^2 \rangle_0 \alpha_2^\beta (1 + g(\alpha_2)) h(\alpha_2) \quad (5)$$

I désigne le terme de transfert de quantité de mouvement interfacial; on ne considère pas les effets de masse ajoutée et d'histoire (hypothèse classique dans le cadre des écoulements gaz-particules) et les effets de traînée statique sont modélisés comme suit (*Cf.* [BAL 95] et [GID 93]) :

$$I = -\alpha_1 \alpha_2 K_T U_r \quad (6)$$

$$\text{où } K_T = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{C_d}{d_2} \rho_1 \alpha_1^{-2.7} \|\underline{U}_r\| & \text{si } \alpha_2 < 0.2 \\ \frac{\rho_1}{\alpha_1 d_2} \left(\alpha_2 \frac{150}{Re} + 1.75 \right) \|\underline{U}_r\| & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec } Re = \alpha_1 \frac{d_2}{\nu_1} \|\underline{U}_r\|$$

$$\text{et } C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.7}) & \text{si } Re < 1000 \\ 0.44 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\underline{U}_r = \underline{U}_2 - \underline{U}_1$ désigne la vitesse relative entre les deux phases. L'expression de K_T provient de la modélisation de la traînée d'une sphère isolée si $\alpha_2 < 0.2$, de la loi d'Ergun sinon. ν_1 représente la viscosité du gaz et d_2 le diamètre moyen des particules, tous les deux étant supposés constants.

Les tenseurs visqueux $\underline{\underline{\Sigma}}_k$ sont modélisés de façon classique, les coefficients de viscosité η_k étant des constantes positives :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_k = -\eta_k \left(\nabla \underline{U}_k + \nabla^t \underline{U}_k - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_k) \cdot \underline{\underline{Id}} \right) \tag{7}$$

Ce modèle fermé «simple» a, entre autres, l'intérêt de permettre le calcul d'écoulements dilués ou denses en particules.

1.2. Quelques propriétés du système global

1.2.1. Entropie du système

On donne ici un résultat analogue à celui publié par Sainsaulieu dans le cas d'écoulements gaz-liquide dilués (Cf. [SAI 91]). On pose :

$$\eta = \frac{1}{2} \alpha_1 \rho_1 \|\underline{U}_1\|^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \rho_2 \|\underline{U}_2\|^2 + \alpha_2 \rho_2 H_2(\alpha_2) + \alpha_1 \rho_1 H_1(\rho_1) \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} \underline{F}_\eta &= \frac{1}{2} \alpha_1 \rho_1 \|\underline{U}_1\|^2 \underline{U}_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 \rho_2 \|\underline{U}_2\|^2 \underline{U}_2 + P(\rho_1) (\alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2) \\ &\quad + \alpha_1 \rho_1 H_1(\rho_1) \underline{U}_1 + \alpha_2 \rho_2 (H_2(\alpha_2) + \Xi(\alpha_2)) \underline{U}_2 \end{aligned} \tag{8b}$$

où les fonctions $H_1(\rho_1)$ et $H_2(\alpha_2)$ sont telles que :

$$\rho_1^2 H_1'(\rho_1) = P(\rho_1) \text{ et } \alpha_2 H_2'(\alpha_2) = \Xi(\alpha_2) \tag{9}$$

Soit le vecteur d'état $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$. On peut vérifier que le couple $(\eta(\underline{W}), \underline{F}_\eta(\underline{W}))$ définit un couple entropie-flux d'entropie pour le système (1). L'entropie $\eta(\underline{W})$ d'une solution régulière \underline{W} du système (1), avec les lois de fermeture (2, 3, 4d, 5, 6, 7), vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \nabla \cdot \underline{F}_\eta + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \underline{\Sigma}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2 \underline{\Sigma}_2) = \underline{S}_\eta(\underline{W})$$

Le terme source $\underline{S}_\eta(\underline{W})$ s'écrit :

$$\underline{S}_\eta(\underline{W}) = \frac{\alpha_1}{2} \underline{\Sigma}_1 : (\nabla \underline{U}_1 + \nabla^t \underline{U}_1) + \frac{\alpha_2}{2} \underline{\Sigma}_2 : (\nabla \underline{U}_2 + \nabla^t \underline{U}_2) + \underline{I} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{U}_1)$$

On vérifie simplement que $\underline{S}_\eta(\underline{W}) \leq 0$ dès lors que $\alpha_2 \in [0, 1]$. On observera le comportement numérique de l'inégalité d'entropie dans les zones de choc sur une simulation numérique bidimensionnelle.

1.2.2. Principe du maximum

On ne peut pas démontrer que l'on a préservation du principe du maximum sur le système (1) :

$$0 < \alpha_2 < \alpha_{max} \quad (10)$$

Pour des solutions suffisamment régulières du système (1), on peut néanmoins établir que :

$$0 \leq \alpha_2 \text{ et } 0 \leq \alpha_1 \rho_1 \quad (11)$$

On revient sur ce point fondamental dans les propositions 2 et 3.

1.3. Etude de l'hyperbolicité du système de convection

Le système de convection associé à (1), avec les lois de fermeture (2, 3, 4d, 5) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (12b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (12c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) + \nabla (\alpha_2 \Xi(\alpha_2)) = \underline{0} \quad (12d)$$

Ce système est donc non conservatif du fait de la présence du terme $\alpha_k \nabla P(\rho_1)$ dans les équations de quantité de mouvement. Par contre, l'équation de quantité de mouvement du mélange ($\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \rho_2 \underline{U}_2$) est, quant à elle, conservative. Rappelons que les modèles proposés par Saurel *et al* [SAU 94] et Gidaspow [GID 93] (modèle B, pages 150-151) sont conservatifs. Un inconvénient du modèle B de Gidaspow est que les particules ne sont pas sensibles au gradient de pression du gaz, ce qui conduit à des configurations non physiques lorsque la densité des particules est relativement faible. Soit Ω l'espace des états admissibles et d la dimension spatiale du problème :

$$\Omega = \left\{ \underline{W} \in \mathbb{R}^{2(d+1)}, \rho_1 > 0, 0 < \alpha_2 < \alpha_{max} \right\}$$

On définit le vecteur unitaire $\underline{n} \in \mathbb{R}^d$. On introduit les deux célérités suivantes définies tant que $\underline{W} \in \Omega$:

$$c_1^2 = (P(\rho_1))' \text{ et } c_2^2 = (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))' \tag{13}$$

Il est important de noter que tant que le principe du maximum (10) est vérifié, la célérité c_2 est définie dans \mathbb{R} car la fonction $\Xi(\alpha_2)$ issue de l'équation (5) est telle que $(\alpha_2 \Xi(\alpha_2))' > 0$. On ne peut obtenir l'expression analytique des valeurs propres de la matrice Jacobienne associée au système (12). Cependant, en étudiant le polynôme caractéristique associé, on obtient les conditions suffisantes d'hyperbolicité suivantes dans le cadre bi- ou tridimensionnel (en notant $\underline{U}_r = \underline{U}_r \cdot \underline{n}$) :

$$\mu_1(\underline{W}) = \frac{1}{2} - \frac{|\underline{U}_r|}{c_1} > 0 \tag{14a}$$

$$\mu_2(\underline{W}) = \frac{1}{4} - \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + \frac{\alpha_2 \rho_1}{\alpha_1 \rho_2} \right) > 0 \tag{14b}$$

$$\mu_3(\underline{W}) = \left(\frac{\alpha_1 \rho_2 c_2^2}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2} + 1 \right) \left(1 - \left(\frac{\underline{U}_r}{c_1} \right)^2 \right) - 1 > 0 \tag{14c}$$

Chacune de ces conditions peut être plus ou moins contraignante suivant le type d'écoulement choisi, ici gaz-solide, suivant que l'on est dans un cadre d'écoulement dense ($c_1 \ll c_2$) ou dilué ($c_2 \ll c_1$), avec des particules très lourdes ($\rho_2 \gg \rho_1$) et une vitesse relative entre phases plus ou moins importante. On ne peut, en outre, pas démontrer que la solution $\underline{W}(\underline{x}, t)$ du système (12) vérifie $\mu_i > 0, i = 1, \dots, 3$, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ et à tout instant $t > 0$.

Au voisinage des états physiques caractérisés par une vitesse relative nulle, et dans un cadre bidimensionnel, on peut écrire la forme approchée suivante des valeurs propres du système (12) :

$$\lambda_1 = \mathcal{U}_1 \quad , \quad \lambda_2 = \mathcal{U}_2$$

$$\lambda_{3,4} = \mathcal{U}_M \pm c_1 \sqrt{(X^+)} + \mathcal{O}(\mathcal{U}_r)$$

$$\lambda_{5,6} = \mathcal{U}_M \pm c_1 \sqrt{(X^-)} + \mathcal{O}(\mathcal{U}_r)$$

en définissant la notation $\mathcal{U}_k = \underline{U}_k \cdot \underline{n}$ pour $k = 1, 2, M$ ou r , la vitesse $\underline{U}_M = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2)$ et, X^+ et X^- les racines du polynôme bi-carré suivant :

$$P(X) = X^2 - \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + \frac{\rho_2 \alpha_1 + \rho_1 \alpha_2}{\rho_2 \alpha_1} \right) X + \frac{c_2^2}{c_1^2}$$

Du fait que l'on n'a pas l'expression analytique des valeurs propres, le système (12) est conditionnellement hyperbolique et le problème de Riemann unidimensionnel associé ne peut être résolu pour des conditions initiales arbitraires.

Remarque 1 *Si l'on se place dans un cadre de particules infiniment denses, i.e. ρ_2 tend vers l'infini, alors le terme $\frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1)$ peut être négligé, le système associé à la phase 2 pouvant s'identifier exactement au système d'Euler isentropique. On se retrouve de plus dans un cadre inconditionnellement hyperbolique (dès lors que $P'(\rho_1)$ et $(\alpha_2 \Xi(\alpha_2))'$ restent positifs) et le système admet en dimension 2 les valeurs propres suivantes :*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathcal{U}_1 & \lambda_2 &= \mathcal{U}_2 \\ \lambda_{3,4} &= \mathcal{U}_1 \pm c_1 & \lambda_{5,6} &= \mathcal{U}_2 \pm c_2 \end{aligned}$$

Remarque 2 *Le problème aux valeurs propres est mal conditionné tant dans le cadre d'écoulements dilués, où l'on a $c_2 \ll c_1$, que dans le cadre d'écoulements denses, $c_1 \ll c_2$.*

Remarque 3 *Le modèle proposé dans [SAU 94], réservé à un cadre d'écoulement très dilué sans prise en compte des interactions particulières ni des effets de la pression moyenne de l'écoulement sur la phase dispersée, est un système conservatif inconditionnellement hyperbolique. Le modèle B proposé par Gidaspow [GID 93], pour les écoulements denses ou dilués avec prise en compte des interactions entre particules, est également un système conservatif inconditionnellement hyperbolique.*

1.4. Comparaison avec un modèle simplifié

On s'intéressera également à un modèle à trois équations. Ce modèle non visqueux ($\eta_1 = \eta_2 = 0$) est dérivé du modèle (1) en réécrivant ce dernier en fonction de la vitesse du mélange $\underline{U}_M = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2)/2$ et de la vitesse relative

$\underline{U}_r = (\underline{U}_2 - \underline{U}_1)$. En sommant les deux équations de quantité de mouvement de phase 1 et 2, on obtient une équation de quantité de mouvement du mélange. On introduit également la masse volumique du mélange $\rho_M = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$. On fait alors l'hypothèse que la vitesse relative entre les deux phases \underline{U}_r est nulle; le système, à deux équations de conservation de masse et une équation de conservation de quantité de mouvement moyenne, avec les lois de fermeture (2, 3, 4d, 5), s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_M) = 0 \quad (15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_M) = 0 \quad (15b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_M \underline{U}_M) + \nabla \cdot (\rho_M \underline{U}_M \otimes \underline{U}_M) + \nabla P(\rho_1) + \nabla(\alpha_2 \rho_2 \Xi(\alpha_2)) = -\rho_M \underline{g} \quad (15c)$$

Ce n'est pas un sous-système de (1) pour $\underline{U}_r = \underline{0}$. Ce système conservatif, invariant par rotation, rentre dans le cadre classique des systèmes hyperboliques. Il admet, en dimension 2, les valeurs propres suivantes (en notant $\mathcal{U}_M = \underline{U}_M \cdot \underline{n}$) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathcal{U}_M - \hat{c} \\ \lambda_{2,3} &= \mathcal{U}_M \\ \lambda_4 &= \mathcal{U}_M + \hat{c} \end{aligned} \quad \text{où } \hat{c} = \sqrt{\frac{\rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 \rho_2 c_2^2}{\alpha_1 \rho_M}}$$

Les champs associés aux ondes λ_1 et λ_4 sont vraiment non linéaires et ceux associés à λ_2 et λ_3 sont linéairement dégénérés (c_1 et c_2 étant définis dans l'équation (13)).

Proposition 1 (Cf. [COM 96b]) *Le système (15) admet une caractérisation entropique. Le problème de Riemann unidimensionnel, dans la direction \underline{n} , associé au système (15) admet une unique solution entropique à densité ρ_1 positive et à taux de présence $\alpha_2 \in [0, \alpha_{max}]$ dès lors que les conditions initiales vérifient :*

$$(\mathcal{U}_M)_D - (\mathcal{U}_M)_G < X_G + X_D \quad (16)$$

avec

$$X_i = \int_0^{(\rho_1)_i} \frac{\hat{c}(a, b)}{a(1 + ab)} da, \quad i = G, D$$

où $a = \rho_1$ et $b = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \rho_1}$ et $(.)_G$ et $(.)_D$ désignant respectivement l'état de la variable $(.)$ à gauche et à droite de la discontinuité initiale.

L'étude du problème de Riemann associé à ce système nous indique notamment que : dans un champ vraiment non linéaire, la quantité $\alpha_1 \rho_1 / \alpha_2$ ne varie pas, et qu'à la traversée d'un champ linéairement dégénéré la pression totale $P_{tot} = P(\rho_1) + \alpha_2 \rho_2 \Xi(\alpha_2)$ ne varie pas. On observera dans la troisième partie les résultats associés à la simulation de ce modèle et la comparaison avec ceux issus du modèle à quatre équations pour une expérience de type «tube à chocs». Un modèle similaire a été étudié dans [GAV 97].

2. Un schéma volumes finis à pas fractionnaires

La formulation Volumes-Finis permet naturellement d'effectuer des simulations de lois de conservation sur des maillages non structurés. Dans le cadre hyperbolique, les schémas numériques basés sur des techniques de décentrement sont décrits et analysés dans [GOD 92], [GAL 92], [CHA 92], [CHA 93] et [EYM 97], dans le cadre linéaire et non linéaire. Dans le cadre mixte convection-diffusion, on dispose également de résultats de convergence d'un schéma Volumes-Finis, sur maillage triangulaire régulier, pour une loi de conservation scalaire (voir [HERB 95]). Les équations de bilan de masse de chaque phase et l'équation de bilan de quantité de mouvement du mélange admettant une forme conservative, on retient donc ce formalisme, et on détaillera la prise en compte dans ce cadre des termes non conservatifs.

2.1. Principe de la méthode et propriétés

On ne considère ici que les effets dominants et on néglige les effets de diffusion. On réécrit le système (1), avec les lois de fermeture (2, 3, 4d, 5, 6), sous forme matricielle (avec la convention de sommation sur m) :

$$\underline{W}_{,t} + (\underline{F}_1^m(\underline{W}))_{,m} + (\underline{F}_2^{nv}(\underline{W}))_{,m} + \underline{A}_{NC}^m(\underline{W}) \cdot (\underline{F}_3^m(\underline{W}))_{,m} = \underline{S}(\underline{W}) \quad (17)$$

Où $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$ est le vecteur d'état, $(\underline{F}_1 + \underline{F}_2)^m(\underline{W})$ le flux convectif selon la $m^{\text{ième}}$ direction, $\underline{A}_{NC}^m(\underline{W}) \cdot (\underline{F}_3^m(\underline{W}))_{,m}$ les termes non conservatifs associés à la $m^{\text{ième}}$ dimension et $\underline{S}(\underline{W})$ les termes source, traînée statique \underline{I} et gravité (la notation $(\cdot)_{,}$ désigne la dérivée partielle par rapport à \cdot).

Du fait de l'hyperbolicité conditionnelle et de la non conservativité du système de convection associé, le cadre théorique des systèmes hyperboliques ne s'applique pas à ce dernier. Diverses propositions, s'appuyant sur la théorie de résolution des systèmes hyperboliques, ont été faites pour résoudre ce type de système par Sainsaulieu [SAI 92], Toumi et Kumbaro [TOU 96] et [KUM 93] notamment. On souhaite ici développer une méthode numérique instationnaire qui autorise les simulations comportant de fortes vitesses relatives, de forts ou de faibles taux de présence volumiques sur des maillages non structurés. Pour

cela, on choisit de mettre en œuvre une méthode à pas fractionnaires qui résout séparément d’une part le système convectif et les termes sources, mais qui décompose également la partie convective en deux étapes :

- Convection :

$$\text{Etape 1} \quad \underline{W}_{,t} + (\underline{F}_1^m(\underline{W}))_{,m} = \underline{0}$$

$$\text{Etape 2} \quad \underline{W}_{,t} + (\underline{F}_2^m(\underline{W}))_{,m} + \underline{A}_{NC}^m(\underline{W}) \cdot (\underline{F}_3^m(\underline{W}))_{,m} = \underline{0}$$

- Prise en compte des termes sources :

$$\text{Etape 3} \quad \underline{W}_{,t} = \underline{S}(\underline{W})$$

Pour la détermination de $\underline{F}_1^m(\underline{W})$ et de $\underline{F}_2^m(\underline{W})$, on impose le respect des critères suivants :

- préserver la forme «conservative»,
- préserver l’hyperbolicité, i.e. que les deux sous-systèmes associés aux étapes 1 et 2 n’aient pas des domaines d’hyperbolicité plus restreints que celui associé au système (12),
- préserver l’invariance par rotation,
- préserver la positivité des fractions massiques, et éventuellement, s’il y a lieu, le principe du maximum (10).

Pour répondre à ce dernier critère, on examinera la solution du problème de Riemann unidimensionnel associé à chaque étape de convection. Au vu de ces critères, la décomposition que l’on propose (Cf. [HER 94] et [COM 96a]) est la suivante :

- Etape 1, avec les lois de fermeture (4d, 5) :

$$(\alpha_1 \rho_1)_{,t} = 0 \tag{18a}$$

$$(\alpha_2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \tag{18b}$$

$$(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) = \underline{0} \tag{18c}$$

$$(\alpha_2 \underline{U}_2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \Xi(\alpha_2)) = \underline{0} \tag{18d}$$

- Etape 2, avec les lois de fermeture (2, 3) :

$$(\alpha_1 \rho_1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \tag{19a}$$

$$(\alpha_2)_{,t} = 0 \tag{19b}$$

$$(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_{,t} + \alpha_1 \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \tag{19c}$$

$$(\alpha_2 \underline{U}_2)_{,t} + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \tag{19d}$$

Les termes non conservatifs sont regroupés dans l'étape 2. Dans l'étape 1, les deux phases sont découplées, les équations sur la phase 2 pouvant être exactement identifiées aux équations d'Euler isentropique. Le sous-système associé à la deuxième étape est partiellement découplé : on résout le système (19a-19c) qui détermine la solution pour $\alpha_2 \underline{U}_2$ via l'équation (19d). On reconnaît dans (19a,19c), lorsque $\alpha_1 = 1$, le sous-système de propagation acoustique classique dans le cadre monophasique compressible.

Le système associé à l'étape 1 est inconditionnellement hyperbolique car $(\alpha_2 \Xi(\alpha_2))'$ est positif (tant que le principe du maximum (10) est respecté) et admet en dimension 2 les valeurs propres suivantes (en notant $\underline{U}_k = \underline{U}_k \cdot \underline{n}$) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & \mu_1 &= \underline{U}_2 - c_2 \\ \lambda_2 &= \underline{U}_1 & \mu_2 &= \underline{U}_2 \\ \lambda_3 &= 2\underline{U}_1 & \mu_3 &= \underline{U}_2 + c_2 \end{aligned}$$

On trouvera une étude détaillée du problème de Riemann unidimensionnel associé au sous-système de phase 2 dans le rapport [COM 95a].

Proposition 2 *Le problème de Riemann unidimensionnel (selon la direction associée à \underline{n}) associé au système (18) admet une solution unique si :*

$$\underline{U}_{2D} - \underline{U}_{2G} < (X(\alpha_2))_G + (X(\alpha_2))_D \tag{20}$$

$$\text{avec } (X(\alpha_2))_i = \int_0^{(\alpha_2)_i} \frac{\sqrt{(x\Xi(x))'}}{x} dx, \quad i = G, D$$

où $(.)_G$ et $(.)_D$ désignent respectivement l'état de la variable $(.)$ à gauche et à droite de la discontinuité initiale.

On a les résultats suivants :

- les variables $\alpha_1 \rho_1$ et α_2 restent positives,
- la positivité de $(1 - \alpha_2)$ est assurée si $g(\alpha_2)$ est définie par l'expression (4d) ou une expression de même type (Cf. [GOL 96]) qui est telle que $g(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$.

Si l'inégalité (20) n'est pas vérifiée, le vide de particules ($\alpha_2 = 0$) apparaît.

Le système associé à l'étape 2 est inconditionnellement hyperbolique (non strict) et admet, en dimension 2, les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = -c_1, \quad \lambda_i = 0, \quad i = 2, \dots, 5, \quad \lambda_6 = c_1$$

Il est non conservatif et on lui associe les relations de saut approchées suivantes pour connecter les états de part et d'autre d'une discontinuité (Cf. [LEF 88], [LEF 92], [DAL 95] et [SAI 92] pour un cadre théorique) :

$$\sigma [\alpha_1 \rho_1] = [\alpha_1 \rho_1 \mathcal{U}_1] \tag{21a}$$

$$\sigma [\alpha_1] = 0 \tag{21b}$$

$$\sigma [\alpha_1 \rho_1 \mathcal{U}_1] = \overline{\alpha_1} [P(\rho_1)] \tag{21c}$$

$$\sigma [\alpha_2 \mathcal{U}_2] = \overline{\alpha_2} [P(\rho_1)] / \rho_2 \tag{21d}$$

où $\bar{\cdot}$ désigne la moyenne arithmétique, $[\cdot]$ le saut d'une variable à la traversée d'une discontinuité et $\mathcal{U}_k = \underline{U}_k \cdot \underline{n}$ où \underline{n} désigne le vecteur normal à la discontinuité. On trouvera une étude détaillée du problème de Riemann unidimensionnel associé à ce système dans le rapport [HER 94].

Proposition 3 *Pour les relations de saut décrites ci-dessus, le problème de Riemann unidimensionnel (selon la direction associée à \underline{n}) associé au système (19) admet une solution unique si (on retient ici la valeur $n = \gamma$) :*

$$(\alpha_1 \rho_1 \mathcal{U}_1)_D - (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{U}_1)_G < \frac{2}{\gamma + 1} ((\alpha_1 \rho_1 c_1)_G + (\alpha_1 \rho_1 c_1)_D) \tag{22}$$

et on a la préservation de la positivité de $\alpha_1 \rho_1$.

Si l'inégalité (22) n'est pas vérifiée, le vide de gaz ($\rho_1 = 0$) apparaît.

Il est évident que le principe du maximum (10) pour la fraction volumique est satisfait puisque α_2 est stationnaire dans cette étape. Sous l'hypothèse de la décomposition décrite ci-dessus, des relations de saut définies ci-dessus et si $g(\alpha_2)$ est telle que $g(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$, on a alors préservation du principe du maximum (10) pour α_2 et de la positivité de ρ_1 sur l'ensemble des pas fractionnaires. Ceci ne permet toutefois pas d'affirmer que le principe du maximum (10) est vérifié pour le système continu complet (17) (il faudrait pour cela démontrer que l'algorithme global est convergent).

Remarque 4 *Avant de détailler l'algorithme, il faut remarquer que le système conservatif suivant :*

$$(\alpha_1 \rho_1)_{,t} + \nabla(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \tag{23a}$$

$$(\alpha_1)_{,t} = 0 \tag{23b}$$

$$(\rho_1 \underline{U}_1)_{,t} + \nabla P(\rho_1) = 0 \tag{23c}$$

$$(\rho_2 \underline{U}_2 - \rho_1 \underline{U}_1)_{,t} = 0 \tag{23d}$$

est équivalent au système (19) dans les zones régulières et admet les relations de saut équivalentes à (21).

On pourra donc, dans le cas unidimensionnel, préserver numériquement les propriétés de positivité ($\rho_1 > 0$ et $0 < \alpha_2 < \alpha_{max}$), en utilisant un solveur de Godunov dans chaque pas fractionnaire, le système (19) étant réécrit sous la forme (23).

2.2. Algorithme

Pour mettre en œuvre cet algorithme de résolution en dimension 2 d'espace (l'extension au cas tridimensionnel étant naturelle), on choisit un maillage bidimensionnel non structuré composé de cellules de type INRIA construites à partir d'une triangulation du domaine bidimensionnel de l'écoulement (Cf. figure 1). On décrit ci-dessous une formulation volumes finis des deux étapes de convection et de l'étape de prise en compte des termes source de la méthode à pas fractionnaires à partir de solveurs de Godunov, de Roe et de type Roe, et on applique un schéma en temps d'ordre 1 de type Euler explicite de pas de temps Δt .

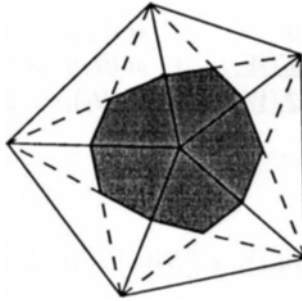


Figure 1 -

Une cellule volume fini bidimensionnelle non structurée de type INRIA.

Soient C_i une cellule du maillage, de volume $|C_i|$, $V(i)$ l'ensemble des cellules ayant une frontière commune avec C_i et \underline{n}_{ij} le vecteur normal à l'interface entre les cellules C_i et C_j , extérieur à C_i ($\underline{n}_{ij} = -\underline{n}_{ji}$), tel que $\underline{n}_{ij} = \int_{\partial C_i} \underline{n} d\Gamma / \int_{\partial C_i} d\Gamma$, l'interface ∂C_{ij} entre les cellules C_i et C_j étant un bisegment (Cf. figure 1). On calcule la valeur moyenne de \underline{W} par cellule C_i à la $n^{\text{ième}}$ itération (temps physique t): $\underline{W}(\underline{x} \in C_i, t) = \underline{W}_i^n$. On a également besoin de certaines valeurs de \underline{W} à l'interface ∂C_{ij} entre les cellules C_i et C_j , on introduit alors les notations suivantes: $[\underline{W}]_{ij} = \underline{W}_j - \underline{W}_i$ le saut de \underline{W} à l'interface, $\tilde{\underline{W}}_{ij} = \tilde{\underline{W}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j)$ la moyenne au sens de Roe et $\overline{\underline{W}}_{ij} = (\underline{W}_i + \underline{W}_j)/2$ la moyenne arithmétique. Les schémas sont détaillés dans [COM 95b].

2.2.1. Etape 1

Comme les systèmes (18a,18c) et (18b,18d) sont découplés, on résout séparément les deux phases, le flux $\underline{F}_1^m(\underline{W})$ pouvant alors se décomposer en :

$$(\underline{F}_{1,1}^m(\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1), \underline{F}_{1,2}^m(\alpha_2, \alpha_2 \underline{U}_2))^t$$

On choisit de mettre en œuvre un schéma de Godunov (Cf. [GODU 59]) avec un flux décentré dépendant du signe de $(\hat{U}_1)_{ij}$ pour résoudre le système (18a,18c) associé à la phase gazeuse. On pose $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)$ le vecteur des variables d'état en dimension d . Le schéma s'écrit avec \underline{W}_i^* la valeur de \underline{W}_i calculée au temps intermédiaire * :

$$\underline{W}_i^* = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \sum_{j \in V(i)} \underline{IF}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) \right\}^n \tag{24}$$

Le flux de Godunov ayant pour expression :

$$\underline{IF}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\underline{U}_1)_i \cdot \underline{n}_{ij} < 0 \text{ et } (\underline{U}_1)_j \cdot \underline{n}_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\hat{U}_1)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\hat{U}_1)_{ij} < 0 \end{cases}$$

où

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) = \sum_{m=1}^d (n_m)_{ij} \underline{F}_{1,1}^m(\underline{W}_i) = (\underline{U}_1)_i \cdot \underline{n}_{ij} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \end{pmatrix}_i$$

avec n_m la $m^{\text{ième}}$ composante du vecteur \underline{n} et $(\hat{U}_1)_{ij} = (\hat{U}_1)_{ij} \cdot \underline{n}_{ij}$ la vitesse définie par :

$$(\hat{U}_1)_{ij} = \frac{(\sqrt{\alpha_1 \rho_1} \underline{U}_1)_i + (\sqrt{\alpha_1 \rho_1} \underline{U}_1)_j}{\sqrt{(\alpha_1 \rho_1)_j}}$$

On décrit maintenant le schéma associé à la phase dispersée. On travaille avec les variables $\underline{W}^t = (\alpha_2, \alpha_2 \underline{U}_2)$ en dimension 2; on peut identifier le système (18b,18d) avec le système de la dynamique des gaz isentropique. La simulation de ce système à l'aide d'un schéma de Godunov a été présentée dans [COM 95a] (pour un cadre dilué avec $g(\alpha_2) = 0$). On présente ici la formulation utilisant un schéma de Roe. Le schéma s'écrit de façon analogue à (24). Soient

$\underline{U} = \underline{U} \cdot \underline{n}$, $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}) = \sum_{m=1}^2 n_m \underline{F}_{1,2}^m$ et $\underline{\mathcal{A}}(\underline{W}, \underline{n}) = \sum_{m=1}^2 n_m \underline{A}^m(\underline{W})$, $\underline{F}_{1,2}^m$ désignant le flux convectif dans la $m^{\text{ième}}$ direction spatiale et \underline{A}^m la matrice jacobienne associée. La matrice $\underline{\mathcal{A}}$ est diagonalisable et admet les valeurs propres μ_1 , μ_2 et μ_3 . L'expression des états moyens sur les interfaces $((\tilde{\underline{U}}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij})$, satisfaisant aux critères de Roe (Cf. [ROE 81]), est un résultat connu de la dynamique des gaz isentropique :

$$(\tilde{U}_2)_{ij} = (\tilde{U}_2)_{ij} \cdot \underline{n}_{ij} \text{ avec } (\tilde{U}_2)_{ij} = \frac{(\sqrt{\alpha_2} U_2)_i + (\sqrt{\alpha_2} U_2)_j}{\sqrt{(\alpha_2)_i} + \sqrt{(\alpha_2)_j}}$$

$$(\tilde{c}_2)_{ij}^2 = \begin{cases} [\alpha_2 \Xi(\alpha_2)]_{ij} / [\alpha_2]_{ij} & \text{si } [\alpha_2]_{ij} \neq 0 \\ ((\alpha_2 \Xi(\alpha_2))'_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Quatre configurations d'écoulement sont envisageables, à savoir deux configurations supersoniques et deux subsoniques ; cependant en pratique on aura fréquemment un comportement supersonique. On choisit donc un flux de Roe décentré à gauche ou à droite suivant le signe de \tilde{U}_2 , à l'interface ∂C_{ij} , auquel on rajoute un terme de correction de flux dans les cas subsoniques. Soient $(\tilde{\mu}_1)_{ij}$, $(\tilde{\mu}_2)_{ij}$ et $(\tilde{\mu}_3)_{ij}$, les valeurs propres prises en l'état moyen $((\tilde{\underline{U}}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij})$, le flux s'écrit alors suivant la configuration dans laquelle on se trouve :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) = \begin{cases} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\tilde{\mu}_1)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) + \underline{\mathcal{A}}^-(\tilde{\underline{W}}_{ij}, \underline{n}_{ij}) \cdot [\underline{W}]_{ij} & \text{si } (\tilde{\mu}_1)_{ij} < 0 \\ & \text{et } (\tilde{\mu}_2)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) - \underline{\mathcal{A}}^+(\tilde{\underline{W}}_{ij}, \underline{n}_{ij}) \cdot [\underline{W}]_{ij} & \text{si } (\tilde{\mu}_2)_{ij} < 0 \\ & \text{et } (\tilde{\mu}_3)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\tilde{\mu}_3)_{ij} < 0 \end{cases}$$

où

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) = \sum_{m=1}^2 (n_m)_{ij} \underline{F}_{1,2}^m(\underline{W}_i) = \left(\begin{array}{c} (\alpha_2 U_2)_i \cdot \underline{n}_{ij} \\ (\alpha_2 U_2)_i \cdot \underline{n}_{ij} (U_2)_i + (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))_i \cdot \underline{n}_{ij} \end{array} \right)$$

et les matrices $\underline{\mathcal{A}}^+$ et $\underline{\mathcal{A}}^-$ sont définies à partir de $\underline{\mathcal{A}} = \underline{\mathcal{P}} \underline{\mathcal{D}} \underline{\mathcal{P}}^{-1}$ (avec $\underline{\mathcal{P}}$ la matrice des vecteurs propres à droite et $\underline{\mathcal{D}}$ la matrice diagonale des valeurs propres de $\underline{\mathcal{A}}$) de la façon suivante :

$$\underline{\mathcal{A}}^+ = \frac{1}{2} \{ \underline{\mathcal{A}} + |\underline{\mathcal{A}}| \}, \quad \underline{\mathcal{A}}^- = \frac{1}{2} \{ \underline{\mathcal{A}} - |\underline{\mathcal{A}}| \}, \quad |\underline{\mathcal{A}}| = \underline{\mathcal{P}} |\underline{\mathcal{D}}| \underline{\mathcal{P}}^{-1}$$

2.2.2. Etape 2

Le système (19) est non conservatif en raison de la présence du gradient de pression associé à $P(\rho_1)$. On propose pour résoudre celui-ci un solveur de type Roe à flux discontinu. Un schéma analogue a également été testé dans un cadre de systèmes hyperboliques non conservatifs issus de la turbulence compressible (Cf. [HER 95] et [BRU 96]). On réécrit le système (19) sous forme matricielle en dimension d :

$$\underline{W}_{,t} + (\underline{F}_2^m(\underline{W}))_{,m} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \nabla P(\rho_1) \\ \alpha_2 \nabla P(\rho_1)/\rho_2 \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{25}$$

ou, dans les zones régulières :

$$\underline{W}_{,t} + \underline{B}^m(\underline{W}) \cdot \underline{W}_{,m} = \underline{0} \tag{26}$$

avec le vecteur des variables d'état : $\underline{W}^t = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$. On propose le schéma explicite centré suivant :

$$\begin{aligned} \underline{W}_i^{**} = \underline{W}_i^* & - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left(\sum_{j \in V(i)} \int_{\partial C_{ij}} \underline{\mathcal{F}}^{ROE}(\underline{W}^*, \underline{n}) \, d\sigma \right) \\ & - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left(\int_{C_i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \nabla P(\rho_1) \\ \alpha_2 \nabla P(\rho_1)/\rho_2 \end{pmatrix}^* \, d\underline{x} \right) \end{aligned}$$

On gèle le terme non conservatif α_k sur la cellule C_i et on prend la moyenne centrée de $P(\rho_1)$ à l'interface ∂C_{ij} :

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \alpha_k \nabla P(\rho_1) \, d\underline{x} & = (\alpha_k)_i \int_{C_i} \nabla P(\rho_1) \, d\underline{x} = (\alpha_k)_i \int_{\partial C_i} P(\rho_1) \, \underline{n} \, d\sigma \\ & = (\alpha_k)_i \sum_{j \in V(i)} \int_{\partial C_{ij}} P(\rho_1) \, \underline{n} \, d\sigma = (\alpha_k)_i \sum_{j \in V(i)} \overline{(P(\rho_1))}_{ij} \, \underline{n}_{ij} \end{aligned}$$

Le flux de Roe à l'interface ∂C_{ij} étant défini comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}_{ij}^{ROE}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) & = \frac{1}{2} (\underline{\mathcal{F}}_2(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) + \underline{\mathcal{F}}_2(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij})) \\ & - \frac{1}{2} \left| \underline{\mathcal{B}}(\tilde{W}(\underline{W}_i, \underline{W}_j), \underline{n}_{ij}) \right| \cdot [\underline{W}]_{ij} \end{aligned} \tag{27}$$

où

$$\underline{\mathcal{F}}_2(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) = \sum_{m=1}^d (n_m)_{ij} \underline{F}_2^m(\underline{W}_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i \cdot \underline{n}_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soulignons que la matrice $\underline{\underline{B}}(\underline{W}, \underline{n}) = \sum_{m=1}^d n_m \underline{\underline{B}}^m(\underline{W})$ satisfait le critère de Roe suivant :

$$[\underline{\mathcal{F}}_2(\underline{W}, \underline{n})]_{ij} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1} [P(\rho_1)] \underline{n} \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_2} [P(\rho_1)] \underline{n} / \rho_2 \end{pmatrix}_{ij} = \underline{\underline{B}}(\tilde{W}(\underline{W}_i, \underline{W}_j), \underline{n}_{ij}) \cdot [\underline{W}]_{ij}$$

La matrice $\underline{\underline{B}}$ dans l'expression (27) prend ainsi en compte les termes conservatifs et non conservatifs pour stabiliser le schéma. On peut également proposer une autre méthode de résolution de ce système en considérant le système «conservatif» (23) que l'on résout avec un solveur de Roe classique. Ces deux algorithmes donnent des résultats identiques (Cf. [COM 95b]).

Remarque 5 Les conditions aux limites d'entrée et de sortie sont traitées de façon similaire au domaine intérieur en décentrant le flux suivant que l'on est dans une configuration subsonique ou supersonique. Pour les conditions aux limites de paroi, on introduit une cellule fictive état miroir de la cellule qui a une frontière commune avec la paroi. On calcule le flux à la paroi à l'aide d'un flux de Roe (cas du double choc symétrique, accumulation de particules ou de gaz) et avec un flux de Godunov en situation inverse (double détente symétrique, disparition de particules ou de gaz). On effectue si cela est nécessaire des approximations quand les invariants de Riemann ne sont pas primitivables (cas de la pression intergranulaire). Cette formulation des conditions aux limites de paroi est essentielle pour assurer le respect du principe du maximum (10) du taux de présence. Le flux calculé, de Godunov ou de Roe suivant la configuration, agit dans le sens physique de l'écoulement.

2.2.3. Etape 3

Durant l'étape de résolution des termes source, seules les variables de quantité de mouvement sont modifiées. Les termes sources sont discrétisés selon une formulation volumes finis, en semi-implicitant le terme $\underline{S}(\underline{W})$, avec :

$$\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$$

$$\text{et } \underline{S}^t(\underline{W}) = (0, 0, -\underline{I} - \alpha_1 \rho_1 \underline{g}, \underline{I} / \rho_2 - \alpha_2 \underline{g})$$

Le schéma s'écrit alors :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^{**} - \Delta t (\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^{**} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\underline{U}_r)_i^{n+1} \\ (\underline{U}_r)_i^{n+1} / \rho_2 \end{pmatrix} - \Delta t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\alpha_1 \rho_1)_i^{**} \underline{g} \\ (\alpha_2)_i^{**} \underline{g} \end{pmatrix}$$

Il faut noter que d'autres propositions ont été faites récemment [SAI 95] pour traiter les termes source.

3. Tests numériques

Cet algorithme a tout d'abord été testé dans un cadre monophasique pur ne comportant que du gaz ($\alpha_2 = 0$), ou que des particules ($\rho_1 = 0$) (Cf. [COM 95b]).

On présente quelques simulations numériques sur des maillages bidimensionnels non structurés avec des cellules volumes finis de type INRIA. Les tests qui vont suivre ont tous été réalisés avec les constantes physiques suivantes : $n = \gamma = 7/5$, $K = 10^5$ Pa, $\beta = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, $\nu_1 = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho_2 = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\alpha_{max} = 0.64$, $d_2 = 10^{-4} \text{ m}$, $e_c = 1$ et $\underline{g} = \underline{0}$. Dans tous les cas, les effets visqueux sont négligés ($\eta_1 = \eta_2 = 0$). Le pas de temps est adapté en fonction d'une condition CFL basée sur les célérités d'ondes $|U_k \pm c_k|$, $k = 1, 2$, qui constituent une bonne approximation des ondes associées au système de convection (12) quand ρ_2 est grand devant ρ_1 (Cf. remarque 1). Tous les calculs ont été réalisés sur station de travail HP9000-735. On considèrera tout d'abord des cas tests de type «tube à chocs». Ces tests a priori unidimensionnels sont effectués en configuration bidimensionnelle. On présentera ensuite une simulation d'écoulement diphasique compressible dans une tuyère.

3.1. Simulations de type «tube à chocs» diphasiques

Le maillage étant non structuré, la solution numérique verra se développer des effets bidimensionnels (transverses). Le maillage primal, constitué de triangles, comporte 11×1000 nœuds sommets et présente une symétrie par rapport à la droite $y = 0$ (voir la figure 2).

Les résultats sont tracés sur cet axe de symétrie. On a retenu des conditions aux limites de type «paroi» en $y = \pm A$, de manière à conserver le mieux possible le caractère unidimensionnel de la solution. Ces cas tests de «tube à choc» sont traités tout d'abord sans effets de traînée ($\underline{l} = 0$). On présente quelques résultats réalisés à partir des valeurs d'initialisation décrites dans le tableau 1. Ces simulations ont été réalisées avec une CFL égale à 0.5.

Sur le test de la figure 3, sans effets de traînée, se développent quatre ondes : deux ondes de choc (les 2- et 4-ondes) et deux ondes de détente (les 1- et 3-ondes). Les ondes rapides (les 1- et 4-ondes) peuvent être approximativement

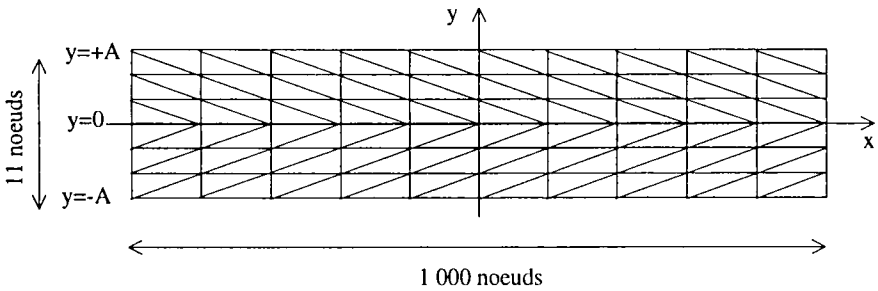


Figure 2 -

Triangulation du domaine avant construction des cellules INRIA.

	FIG. 3 et 4		FIG. 5 et 6	
	G	D	G	D
ρ_1 [kg.m ⁻³]	1	0.3	1	1
α_2	0.5	0.6	0.5	0.5
U_1 [m.s ⁻¹]	0	0	700	-700
U_2 [m.s ⁻¹]	0	0	5	-5

Tableau 1 - Conditions initiales des tests de type tube à choc diphasique, où les états «G» et «D» représentent les valeurs à gauche et à droite d'une variable de part et d'autre de la discontinuité initiale qui est centrée en $x = 0$ par rapport au domaine et U_k désigne la vitesse selon x de la phase k .

assimilées aux ondes de phase 1 isolées (i.e. de vitesse $U_1 \pm c_1$) et les ondes lentes (les 2- et 3-ondes) aux ondes de phase 2 isolées (i.e. de vitesse $U_2 \pm c_2$). On remarque d'ailleurs que ces deux dernières sont très difficiles à distinguer quand l'énergie cinétique turbulente $\langle q_2^2 \rangle_0$ est plus faible. On note également que la phase 1 perturbe peu les variables de phase 2 (voir les courbes associées à α_2 et U_2). On constate toutefois, en observant U_2 , un léger accroissement de vitesse de phase 2 pour $x \in [-0.65, -0.3]$ (effet lié principalement au gradient de pression $P(\rho_1)$ pondéré par α_2/ρ_2); de même, on enregistre un choc de faible amplitude pour $x = 0.73$. La même expérience numérique, réalisée à l'aide du même schéma dans un cadre réellement unidimensionnel permet de vérifier que la légère sur-vitesse observée sur U_1 avant la 4-onde de choc est due au maillage non structuré. Il en est de même pour la perturbation de l'état constant intermédiaire sur U_2 , au voisinage de la 2-onde de choc pour $x \approx -0.1$. Si on effectue une expérience monophasique pure ne comportant que des particules ($\rho_1 = 0$), en retenant les mêmes conditions initiales pour α_2 et U_2 , on obtient un écoulement pratiquement identique. L'effet inverse est évidemment beaucoup plus net, si l'on observe les variables ρ_1 et U_1 . Pour s'en convaincre, il suffit de réaliser une simulation analogue monophasique pure ($\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$) en retenant les mêmes conditions initiales pour ρ_1 et U_1 . Pour cette expérience,

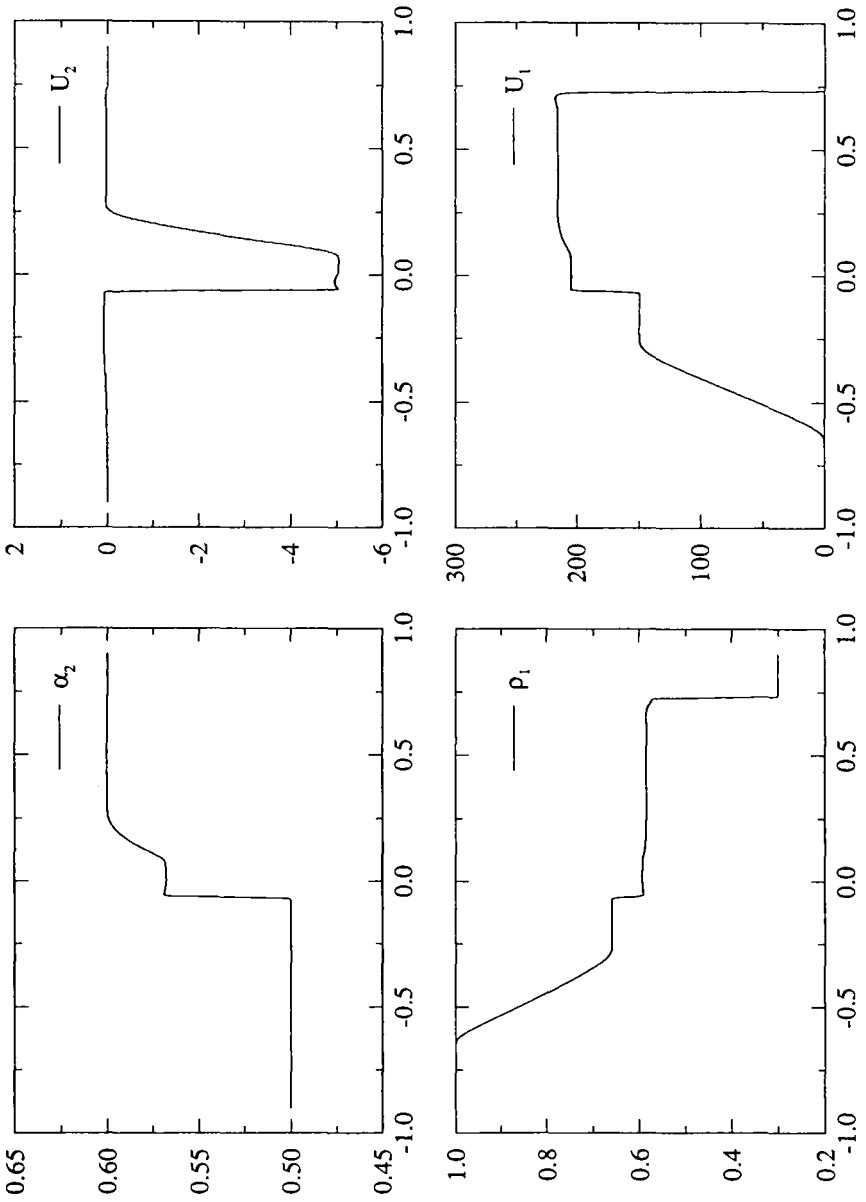


Figure 3 -
Cas test de tube à choc diphasique sans traînée.

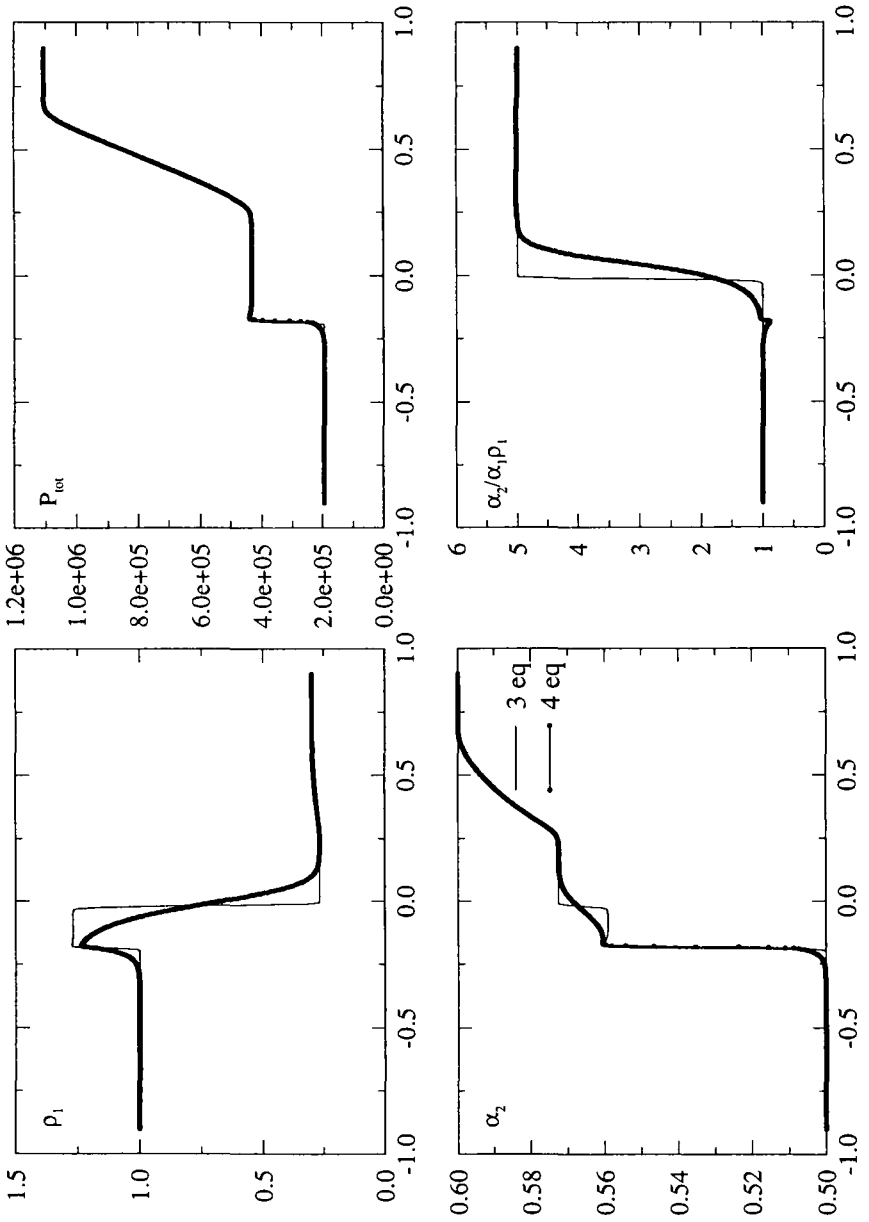


Figure 4 -

Cas test de tube à choc diphasique avec traînée et comparaison avec le modèle à trois équations.

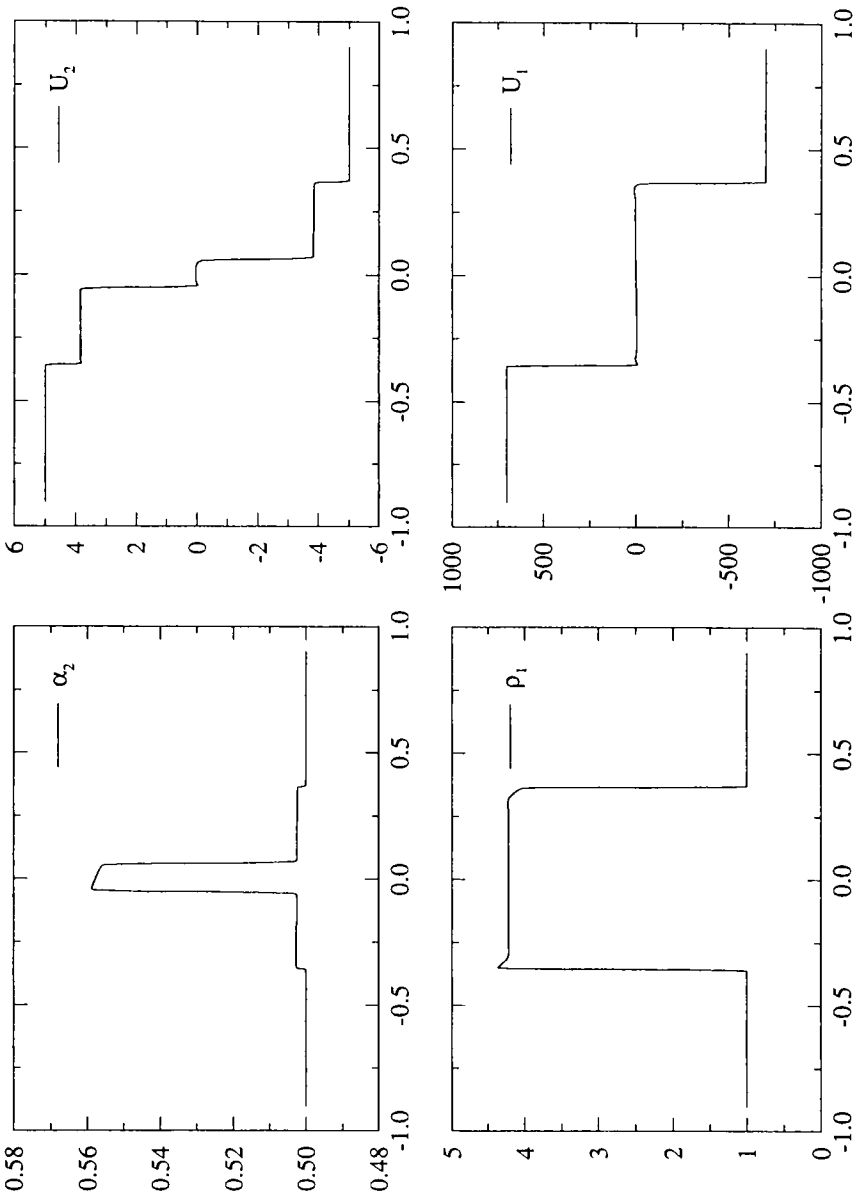


Figure 5 -

Cas test de tube à choc diphasique comportant quatre ondes de choc sans traînée.

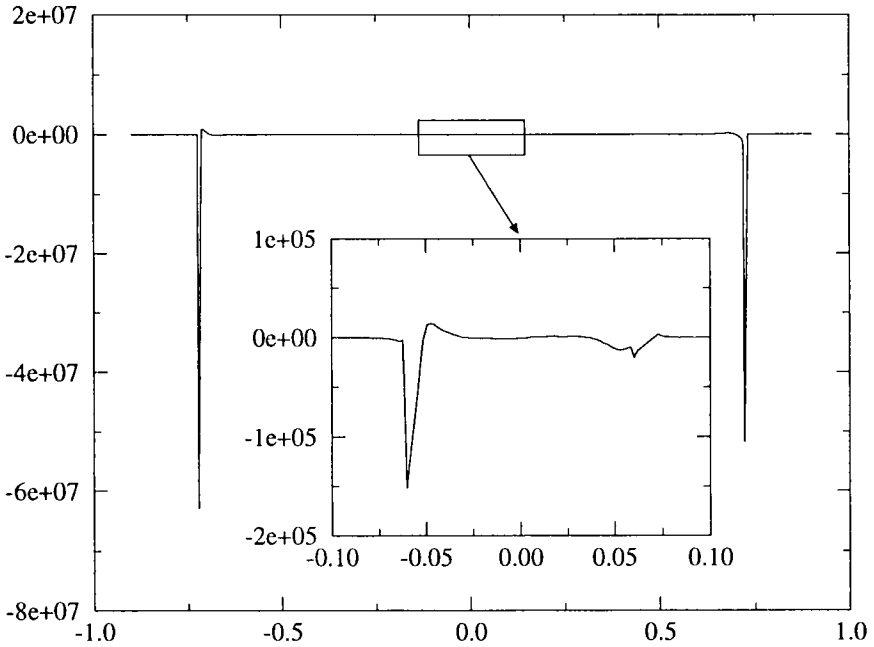


Figure 6 -

Comportement de l'inégalité d'entropie $-\sigma[\eta] + [F_\eta] \leq 0$ sur le cas test du tube à choc diphasique comportant quatre ondes de choc.

le nombre de «Mach» maximal, $M_k = |U_k|/c_k$ associé à la phase k , vaut 0.078 pour la phase 2 et 0.65 pour la phase 1.

On effectue maintenant (Cf. figure 4) le même test en incluant les effets de traînée modélisés dans l'équation (6). Pour ce régime dense en particules, la traînée tend à annuler la vitesse relative, on compare ainsi les résultats de simulation avec ceux issus d'une simulation du modèle à trois équations (15) avec les lois de fermeture (2, 3, 4d, 5) (Cf. paragraphe 1.4.). La mise en œuvre du schéma de Godunov est a priori délicate pour le modèle à trois équations, du fait de la complexité des invariants de Riemann; de plus, on ne peut exhiber de linéarisée de Roe simple dans ce cas. Gallouët a proposé récemment des solveurs de Riemann simples à mettre en œuvre lorsque le formalisme de Roe atteint ses limites (Cf. [GAL 96b], [GAL 96a] et [MAS 96]). On choisit donc de résoudre le système (15) à l'aide du solveur VFROE en variables caractéristiques (Cf. [BUF 96]); les simulations numériques de ce système nous donnent des éléments de comparaison avec le système à quatre équations (17) avec les lois de fermeture (2, 3, 4d, 5, 6). Sur les résultats de la simulation du modèle à trois équations, on observe sur les variables ρ_1 et α_2 une 1-onde de

choc (à travers laquelle ρ_1 et α_2 croissent), suivi d'une discontinuité de contact puis d'une 3-onde de détente (à travers laquelle ρ_1 et α_2 croissent). On vérifie bien que $P_{tot} = P(\rho_1) + \alpha_2 \rho_2 \Xi(\alpha_2)$ ne varie pas à la traversée de la discontinuité de contact, et que le rapport des masses partielles $\alpha_2/\alpha_1 \rho_1$ ne varie ni dans la 1-onde de choc ni dans la 3-onde de détente. Dans cette configuration d'écoulement dense, où les effets de traînée sont importants, on constate que, qualitativement, le modèle à quatre équations se comporte sensiblement comme le modèle à trois équations.

On considère enfin un cas test symétrique sans effets de traînée comportant quatre ondes de choc (Cf. la figure 5). Les conditions initiales associées à ce cas sont données dans le tableau 1. On observe une accumulation de particules au centre du domaine avec préservation du principe du maximum sur la fraction volumique: $\alpha_2 < \alpha_{max} = 0.64$. Le maillage bidimensionnel étant non structuré, on note que les résultats ne sont pas parfaitement symétriques.

On reprend le test précédent, mais avec la fonction $\Xi(\alpha_2)$ définie de la façon suivante :

$$\alpha_2 \Xi(\alpha_2) = \beta < q_2^2 >_0 \frac{\alpha_2}{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}}} \quad (28)$$

Cette fonction $\Xi(\alpha_2)$ présente les mêmes caractéristiques que celle définie dans l'équation (5), à savoir qu'elle modélise les écoulements denses $\Xi(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$; sa forme simplifiée permet d'exhiber la fonction $H_2(\alpha_2)$ telle qu'elle est définie dans l'équation (9). Sur la figure 6, on observe que l'inégalité d'entropie $-\sigma[\eta] + [F_\eta] \leq 0$ est respectée au niveau des quatre ondes de choc (σ désigne la vitesse du choc).

3.2. Simulation d'un écoulement diphasique dans une tuyère

On observe maintenant la simulation numérique bidimensionnelle d'un écoulement diphasique dans une demi-tuyère, incluant les effets de traînée (système (17) avec les lois de fermeture (2, 3, 4d, 5, 6). Le maillage associé est de l'ordre de 8500 nœuds. Le calcul est effectué avec une CFL égale à 0.3. Les conditions initiales à l'intérieur de la tuyère et les conditions aux limites que l'on impose, sont détaillées dans le tableau 2.

L'axe de symétrie de la tuyère est représenté par des conditions aux limites de symétrie. On observe sur les figures 8 à 11 un historique des variables α_2 , ρ_1 , U_1 et U_2 . On remarque une très importante accumulation de particules au niveau de la paroi du convergent de la tuyère ainsi qu'au niveau de l'axe de symétrie à l'aval du col de la tuyère. Les valeurs maximales de la fraction volumique ($\max(\alpha_2) = 0.627$) sont très proches du taux de compactage maximum $\alpha_{max} =$

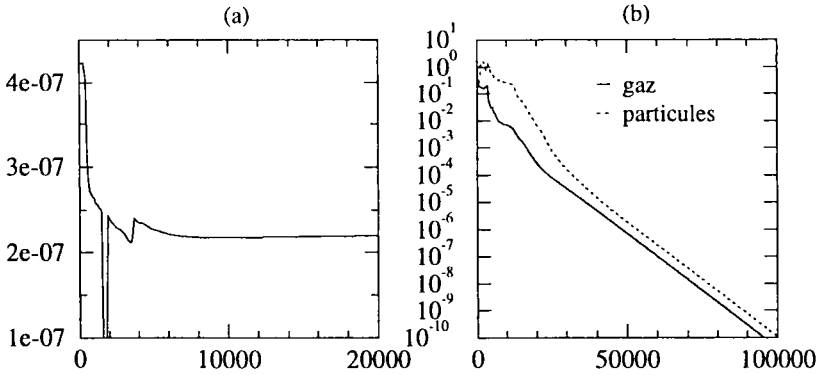


Figure 7 –

Simulation d'écoulement dans une tuyère : en fonction du nombre d'itérations, (a) évolution du pas de temps (en s.), (b) résidus de masse par phase.

C.I. Intérieur		C.L. Entrée		C.L. Sortie	
$\rho_1 = 1$	$\alpha_2 = 10^{-6}$	$\rho_1 = 1.1$	$\alpha_2 = 10^{-2}$	$\rho_1 = 1$	$\alpha_2 = 10^{-6}$
$U_1 = 0$	$U_2 = 0$	$U_1 = 200$	$U_2 = 200$	$U_1 = 0$	$U_2 = 0$
$V_1 = 0$	$V_2 = 0$	$V_1 = 0$	$V_2 = 0$	$V_1 = 0$	$V_2 = 0$

Tableau 2 – Conditions initiales de la simulation d'écoulement diphasique dans une tuyère. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse $\underline{U}_k = (U_k, V_k)^t$ de la phase k sont exprimées en $m.s^{-1}$ et la densité du gaz en $kg.m^{-3}$.

0.64 mais le principe du maximum (10) n'est pas violé. A l'état stationnaire, le maximum de α_2 vaut 0.623 pour ce maillage. La figure 7 montre d'une part l'évolution du pas de temps adapté au cours de la simulation, qui varie de façon conséquente jusqu'à ce que le gaz et les particules atteignent la sortie de la tuyère, et l'évolution des résidus de masse qui atteignent approximativement 10^{-4} au bout de 30000 itérations et 10^{-10} au bout de 120000 itérations. La très forte variation du pas de temps, aux alentours de la 2000^{ième} itération, est liée à la formation d'un «cluster» sur la paroi dans le convergent.

Remarque 6 Au cours du régime transitoire, aucune perte de positivité discrète des variables α_2 , $(1 - \alpha_2)$ et ρ_1 n'a été enregistrée.

Remarque 7 Cette simulation met en évidence des vitesses relatives localement très importantes (zone de proche paroi en début de divergent), $\|\underline{U}_2 - \underline{U}_1\|/c_1$ pouvant atteindre 1 par endroits.

Cette dernière remarque montre bien qu'un modèle à trois équations de type (15) est totalement inadéquat dans ce cas.

Conclusion

On a présenté ici un modèle bi-fluide à quatre équations, pour la simulation des écoulements compressibles diphasiques gaz-solide. Les principales propriétés de ce système (domaine d'hyperbolicité, caractérisation entropique) ont été rappelées. On a proposé un algorithme instationnaire de type Volumes-Finis, basé sur une technique de splitting d'opérateurs, pour résoudre ce système conditionnellement hyperbolique non conservatif. Le schéma utilise des techniques de décentrement pour le calcul des effets convectifs. Notons que ce type de schémas, avait été préalablement testé dans le cadre monophasique conservatif (Cf. [BAR 91], [BAR 92], [BUF 93a], [BUF 93b]), et que cette approche a également été analysée dans le cadre diphasique des écoulements pétroliers (Cf. [MAS 97]). Le schéma répond aux exigences sus-citées : il autorise le calcul d'écoulements présentant des discontinuités, des vitesses relatives élevées ; de plus, il permet les calculs avec apparition du taux de compactage maximal (formation de clusters) ; rappelons que la forme de la pression intergranulaire est déterminante pour obtenir le principe du maximum (Cf. [COM 96b]). L'algorithme est simple et peu coûteux, ce qui est essentiel dans un contexte industriel. L'extension à l'ordre 2 des schémas de convection, par le biais de la technique MUSCL, est facile à mettre en œuvre. Elle est particulièrement intéressante pour la phase des particules. L'algorithme a été implémenté dans un code qui utilise des recouvrements Volumes-Finis non structurés de type INRIA, où les effets diffusifs sont pris en compte au moyen d'une formulation Éléments Finis Galerkin P1. Le schéma est actuellement utilisé pour la prédiction de lits fluidisés denses ; dans cette configuration d'écoulement, qui nécessite un algorithme instationnaire, il est fondamental de respecter le principe du maximum pour la variable taux de présence volumique. La même méthode à pas fractionnaires s'applique à la résolution du système à cinq équations comprenant l'équation d'évolution d'énergie turbulente relative à la phase des particules (Cf. [BAL 95], [BOE 95] et [GOL 96]) pour des modèles plus complexes ; ce type de modèle est actuellement exploré. Dans ce cadre, les remarques concernant le principe du maximum pour α_2 restent valables (Cf. [COM 97]). De manière générale, les résultats présentés dans cette note confirment l'intérêt de l'utilisation des solveurs de Riemann (approchés) pour la simulation d'écoulements diphasiques (Cf. [SAI 95]).

Nous remercions vivement Jean Fabre et Thierry Gallouët pour les encouragements prodigués, et pour leurs nombreuses remarques qui nous ont permis d'améliorer le manuscrit initial. Nous tenons également à remercier Georges Balzer, Jean-Paul Chabard, Germain Pot et Olivier Simonin, pour leurs diverses contributions.

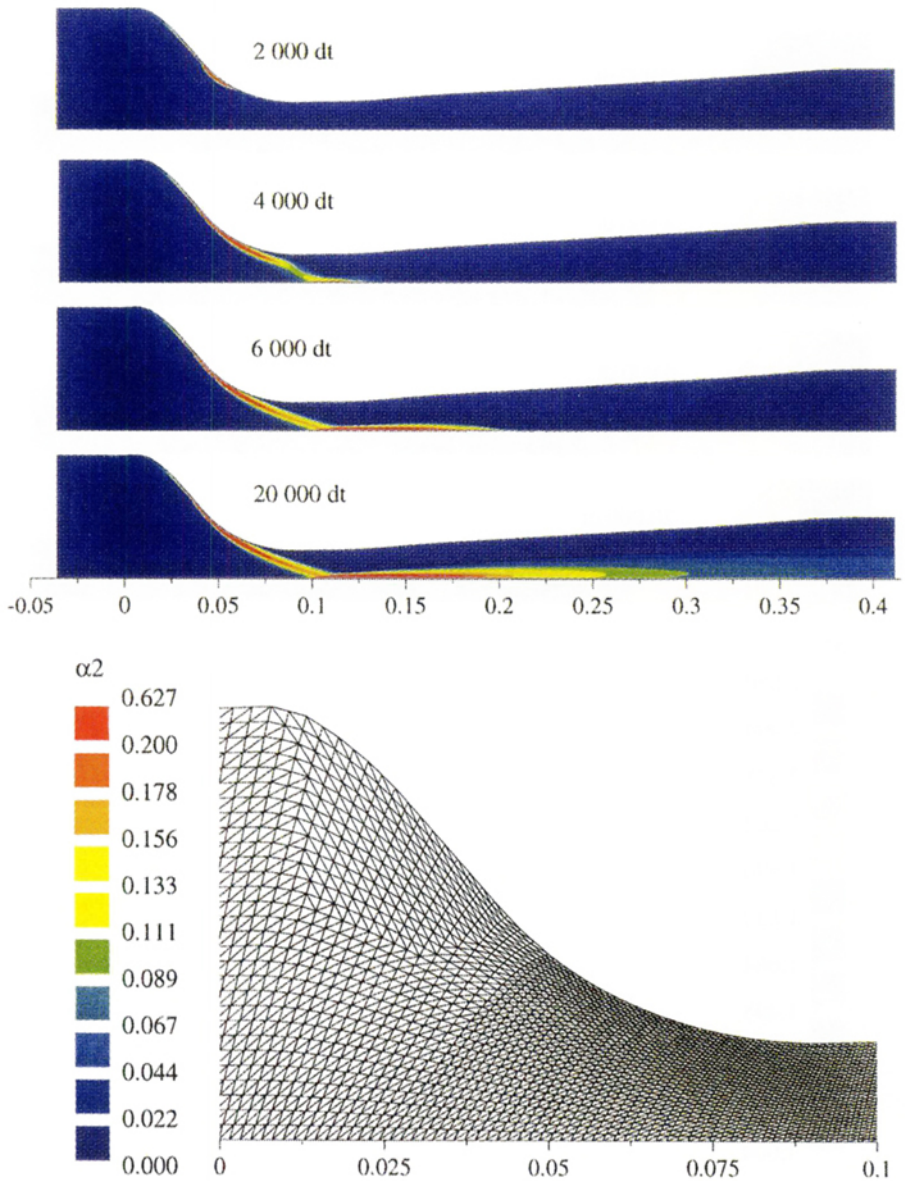


Figure 8 -

Simulation d'écoulement dans une tuyère : fraction volumique des particules et zoom du maillage primal du convergent de la tuyère.

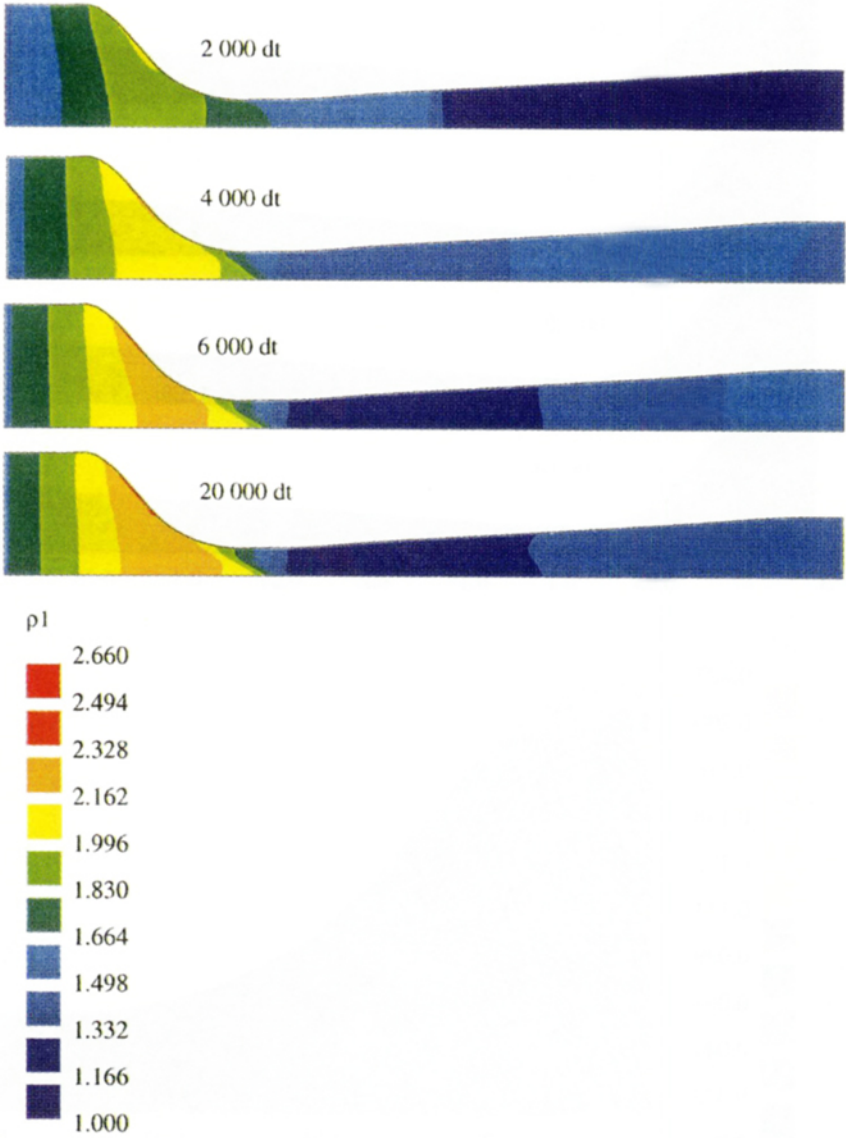


Figure 9 -
Simulation d'écoulement dans une tuyère: densité du gaz.

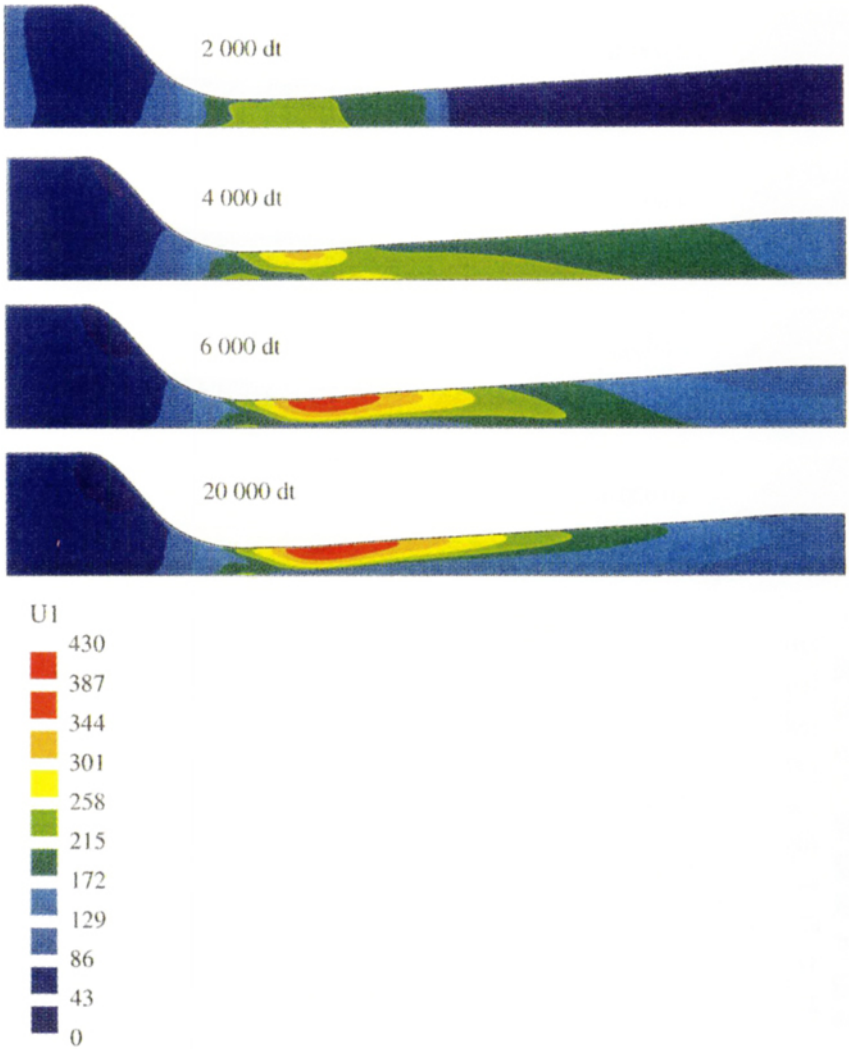


Figure 10 -

Simulation d'écoulement dans une tuyère : Composante horizontale de la vitesse du gaz.

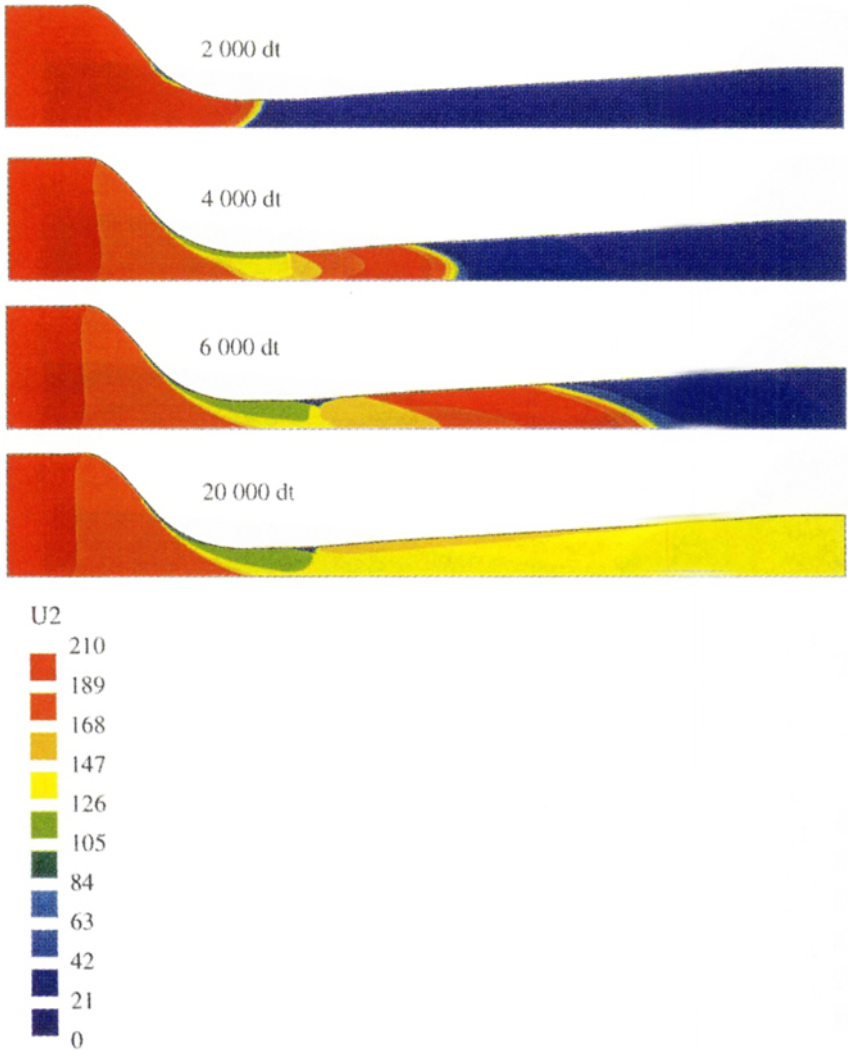


Figure 11 –
Simulation d'écoulement dans une tuyère : Composante horizontale de la vitesse des particules.

Bibliographie

- [BAL 95] BALZER G., BOELLE A., SIMONIN O., «Eulerian gas-solid flow modeling of dense fluidized bed», *Proceedings of the International Symposium of the Eng. Foundation Fluidization VIII*, Tours, 14-19 mai, 1995.
- [BAR 91] BARAILLE R., Développement de schémas numériques adaptés à l'hydrodynamique, Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux I, 13 décembre 1991.
- [BAR 92] BARAILLE R., BOURDIN G., DUBOIS F., LE ROUX A.Y., «Une version à pas fractionnaires du schéma de Godunov pour l'hydrodynamique», *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1992, t 314, Série I, p. 147-152.
- [BOE 95] BOELLE A., BALZER G., SIMONIN O., «Second-order prediction of the particle-phase stress tensor of inelastic spheres in simple shear dense suspensions», *Proceedings of ASME*, ASME FED Vol. 228, p. 9-18, 1995.
- [BRU 96] BRUN G., HERARD J.M., LEAL DE SOUSA L., UHLMANN M., «Numerical modelling of turbulent compressible flows using second order models», *Proceedings of the first International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Rouen, France, July 15-18, 1996, pp 337-346.
- [BUF 93a] BUFFARD T., Analyse de quelques méthodes de volumes finis non structurés pour la résolution des équations d'Euler, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 1993.
- [BUF 93b] BUFFARD T., HERARD J.M., «Un schéma conservatif à pas fractionnaires pour résoudre les équations d'Euler en maillage non structuré», *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1993, t 316, Série II, p. 575-582.
- [BUF 96] BUFFARD T., GALLOUET T., HERARD J.M., Schéma VFROE en variables caractéristiques - Principe de base et application aux gaz réels, Rapport EDF HE41/96/41/A.
- [CHA 92] CHAMPIER S., GALLOUET T., «Convergence d'un schéma décentré amont sur un maillage triangulaire pour un problème hyperbolique linéaire», *M²AN*, 1992, Vol 26(7), p. 835-853.
- [CHA 93] CHAMPIER S., GALLOUET T., HERBIN R., «Convergence of an upstream finite volume scheme on a triangular mesh for a nonlinear hyperbolic equation», *Numer. Math.*, 1993, Vol 66, p. 139-157.
- [COM 95a] COMBE L., Solveur de Godunov pour les équations d'Euler isentropique, Rapport EDF HE41/95/008/A.
- [COM 95b] COMBE L., HERARD J.M., Modélisation numérique des écoulements diphasiques gaz-solide (Modèles bi-fluides)- Rapport d'avancement 1, Rapport EDF HE41/95/043/A.
- [COM 96a] COMBE L., FABRE J., HERARD J.M., SIMONIN O., «On the numerical preservation of the maximum principle for gas-solid flows», *Proceedings of A.S.M.E. Fluids Engineering*, Summer Meeting, San Diego, California, July 7-11, 1996. ASME FED vol.236, p. 181-188.
- [COM 96b] COMBE L., HERARD J.M., Principe du maximum pour un modèle diphasique gaz-solide à trois équations, Rapport EDF HE41/96/045/A.

- [COM 97] COMBE L., Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, France, en préparation.
- [COQ 96] COQUEL F., EL AMINE K., GODLEWSKI E., PERTHAME B., RASCLE P., Numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows, Publications du laboratoire d'analyse numérique, Université Paris VI, juillet 1996, R 96014.
- [DAL 95] DAL MASO G., LE FLOCH P., MURAT F., «Definition and weak stability of nonconservative products», *J. Math. Pures Appl.*, Vol 74, p. 483-548, 1995.
- [ECO 96] ECOLE CEA-EDF-INRIA, Problèmes non linéaires appliqués, *Méthodes numériques pour les écoulements diphasiques*, INRIA Rocquencourt, 18-21 novembre 1996.
- [EYM 97] EYMARD R., GALLOUET T., HERBIN R., *Finite volume methods*, En préparation pour Handbook of Numerical Analysis, Editions P.G. Ciarlet et J.L. Lions, North Holland.
- [GAL 92] GALLOUET T., *An introduction to finite volume methods*, Ecole CEA-EDF-INRIA, 1992.
- [GAL 96a] GALLOUET T., «Rough schemes for complex hyperbolic systems», *Proceedings of the first International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Rouen, France, july 15-18, 1996, Ed. Hermès, pp 5-14.
- [GAL 96b] GALLOUET T., MASELLA J.M., «Un schéma de Godunov approché», *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1996, t. 323, Série I, p. 77-84.
- [GAV 97] GAVRILYUK S.L., FABRE J., «Lagrangian coordinates for a drift-flux model of a gas-liquid mixture», à paraître dans *Int. J. of Multiphase Flow*.
- [GID 93] GIDASPOW D., *Multiphase flow and fluidization*, Academic Press, 1993.
- [GOD 92] GODLEWSKI E., RAVIART P.A., *Hyperbolic systems of conservation laws*, coll. SMAI n° 3/4, 1992, Ellipses.
- [GODU 59] GODUNOV S.K., «A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics», *Math. Sb.*, 47(89), p. 271-300, 1959.
- [GOL 96] GOLDSTEIN A., SHAPIRO M., GUTFINGER C., «Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 3. Self-similar shock wave propagation», *J. Fluid Mech.*, 1996, Vol 316, p. 29-51.
- [HER 94] HERARD J.M., COMBE L., Un système diphasique bi-fluide pour la modélisation des écoulements gaz-solide, Coll. notes internes DER 95NB00077.
- [HER 95] HERARD J.M., Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible, Rapport EDF HE41/95/009/A.
- [HERB 95] HERBIN R., «An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh», *Numer. Meth. Part. Diff. Equations*, Vol. 11, 1995.

- [ISH 75] ISHII M., *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles, 1975.
- [KUM 93] KUMBARO A., Modélisation, analyse mathématique et numérique des modèles bifluïdes d'écoulement diphasique, Thèse de doctorat de l'université Paris XI, France, 1993.
- [LAX 57] LAX P.D., «Hyperbolic systems of conservation laws II», *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, Vol X, p. 537-566.
- [LAX 72] LAX P.D., «Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of the shock waves», *C.B.M.S. Regional Conference Series in Applied Mathematics 11*, SIAM, Philadelphia, 1972.
- [LEF 88] LE FLOCH P., «Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form», *Commun. Partial Diff. Equations*, 1988, Vol 13(6), p. 669-727.
- [LEF 92] LE FLOCH P., LIU T.P., Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in non-conservative form, Publication Ecole Polytechnique-Centre de Mathématiques Appliquées, jan. 1992, n° 254.
- [MAS 96] MASELLA J.M., FAILLE I., GALLOUET T., «A rough Godunov scheme», soumis à publication.
- [MAS 97] MASELLA J.M., Quelques méthodes numériques pour les écoulements diphasiques bi-fluïdes en conduites pétrolières, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 1997.
- [RAV 95] RAVIART P.A., SAINSAULIEU L., «A non conservative hyperbolic system modeling spray dynamics. Part 1: Solution of the Riemann problem», *Math. Models Methods Appl. Sciences*, 1995.
- [ROE 81] ROE P.L., «Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes», *J. Comput. Phys.*, 1981, Vol 43, p. 357-372.
- [SAI 91] SAINSAULIEU L., «Ondes progressives solutions de systèmes convectifs-diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs», *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1991, t. 312, Série I, p. 491-494.
- [SAI 92] SAINSAULIEU L., «Finite volume approximation of two phase-fluid flows based on an approximate Roe-type Riemann solver», *J. Comput. Phys.*, 1995, Vol 121, p. 1-28.
- [SAI 95] SAINSAULIEU L., Contribution à la modélisation mathématique et numérique des écoulements diphasiques constitués d'un nuage de particules dans un écoulement de gaz, Thèse d'habilitation, 20/01/95, Paris VI, France.
- [SAU 94] SAUREL R., FORESTIER A., VEYRET D., LORAUD J.C., «A finite volume scheme for two-phase compressible flows», *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1994, Vol 18, p. 803-819.
- [SMO 83] SMOLLER J., *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [TOU 96] TOUMI I., KUMBARO A., «An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model», *J. Comput. Phys.*, 1996, Vol 124, p. 286-300.