
Analyse linéaire de coques minces élastiques par deux MEF non conformes

Francisco José Palma — Ángeles Vilarino

Universidad de Málaga
Dpto. Análisis Matemático
29080 Málaga, España
palma@anamat.cie.uma.es
vilarino@anamat.cie.uma.es

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous appliquons les méthodes non conformes d'éléments finis de Morley et de Sander à l'approximation de la solution de problèmes généraux de coques minces, suivant le modèle linéaire de Koiter. Nous calculons les fonctions de base et nous analysons les résultats numériques obtenus sur quelques problèmes tests.

ABSTRACT. In this paper, we apply the Morley's and Sander's nonconforming finite element methods to approximate the solution of general thin shell problems, following the Koiter's linear model. We calculate the basis functions and we analyse the numeric results over some test problems.

MOTS-CLÉS : éléments finis, EDP, élasticité linéaire, théorie de coques, code MODULEF.
KEYWORDS : finite element, PDE, linear elasticity, shell theory, code MODULEF.

1 Introduction

Dans ce travail nous analysons l'utilisation de deux méthodes d'éléments finis (M.E.F.) non conformes pour l'approximation de problèmes linéaires généraux de coques minces. Les structures qui ont la forme d'une coque sont très fréquentes (arcades, réservoirs, fuselages, etc.) et les difficultés se présentent car le processus de modélisation (suivant Koiter, par exemple) nous conduit à la formulation variationnelle d'un système d'équations aux dérivées partielles de quatrième ordre avec des coefficients variables. Donc, les M.E.F. conformes deviennent très chères (puisque atteindre la C^1 -continuité nécessaire nécessite

de polynômes de haut degré ou des multi-éléments) mais, par contre, elles sont très précises. Les M.E.F. non conformes, moins précises, donnent aussi de bons résultats et, surtout, elles sont beaucoup plus économiques. De plus, dans certains problèmes non réguliers elles sont très adéquates à cause de leur "souplesse", tandis que l'excès de "rigidité" des méthodes conformes devient dangereux pour traiter les singularités.

Plus précisément, les difficultés se présentent dans l'approximation de la composante normale du déplacement (la solution exacte du problème de coques se trouve dans un sous-espace de $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$). Les deux méthodes que nous étudions se basent sur le choix de l'E.F. de Morley et de l'E.F. "délinquant" de Sander pour cette approximation; ces E.F. ne sont pas de classe C^1 (ni de classe C^0) d'où la non conformité. Les composantes tangentielles du déplacement s'approchent à l'aide d'E.F. de classe C^0 les plus simples possible et on cherche seulement une certaine cohérence parmi tous les degrés de liberté de la méthode. Dans [MOR68], [SAN85] et [BDH92] on utilise les E.F. de Morley et Sander (ou des éléments équivalents) pour le problème de plaque et pour le problème de coque avec une approche par facette plane; ici, nous suivons une description curviligne de la coque.

Dans ce travail, nous commençons par rappeler la formulation du problème de coques, suivant le modèle linéaire de Koiter. Après, nous décrivons et analysons les problèmes discrets associés à l'utilisation des M.E.F. de Morley et Sander (en particulier nous donnons les fonctions de base) et nous finissons par montrer les résultats numériques obtenus sur différents exemples tests.

Dans la suite, nous supposons donnée une coque mince \bar{C} , caractérisée par la surface moyenne \mathcal{S} (laquelle est l'image de Ω , domaine régulier de \mathbf{R}^2 , par l'intermédiaire de la carte $\vec{\phi}$) et par l'épaisseur e . Pour toutes les définitions et notations (en particulier, conventions de notation, définition et utilisation d'éléments de géométrie différentielle de la surface \mathcal{S} , etc.) nous renvoyons à [BER94].

2 Le modèle linéaire de Koiter

Suivant le modèle linéaire de Koiter (voir [KOI70]), la déformation de la coque \bar{C} est caractérisée par le champ de déplacements \vec{u} de la surface moyenne \mathcal{S} , lequel est la solution du problème variationnel:

$$\text{Trouver } \vec{u} \in \vec{V} \text{ tel que } a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}) \text{ pour tout } \vec{v} \in \vec{V}, \quad (1)$$

où

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \{ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega) : v_i = v_{3,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}, \\ a(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} e E^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{u}) + \frac{e^2}{12} \bar{\varrho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) \bar{\varrho}_{\lambda\mu}(\vec{u}) \right) \sqrt{a} \, dx \, dy, \\ f(\vec{v}) &= \int_{\Omega} p^i v_i \sqrt{a} \, dx \, dy + \int_{\Gamma_1} (N^i v_i - M^\alpha \theta_\alpha(\vec{v})) |\vec{\phi}_{,i}| \, d\gamma. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire a , associée à l'énergie de déformation interne de la coque, est fonction des tenseurs de modules élastiques ($E^{\alpha\beta\lambda\mu}$), de déformation ($\gamma_{\alpha\beta}$) et de changement de courbure ($\bar{\varrho}_{\alpha\beta}$) de la surface \bar{S} , dont des expressions sont

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta\lambda\mu} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right), \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} v_3, \\ \bar{\varrho}_{\alpha\beta} &= v_{3|\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} v_3 + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} v_{\lambda|\alpha} - b_{\alpha|\beta}^{\lambda} v_{\lambda}. \end{aligned}$$

La forme linéaire f décrit l'énergie potentielle des forces extérieures; p^i , N^i et M^{α} sont les composantes des densités, superficielles ou linéiques, des charges et des moments appliqués. À nouveau, nous renvoyons à [BER94] pour les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème (1).

L'approximation de (1) par une M.E.F. conforme nécessite l'utilisation d'E.F. de classe \mathcal{C}^1 pour ce qui concerne la composante normale u_3 du déplacement; ceci devient, normalement, très coûteux (voir l'E.F. d'Argyris, par exemple). Ici nous faisons l'implémentation de deux M.E.F. non conformes; la non conformité apparaît seulement dans l'approximation de u_3 , car nous utilisons des E.F. qui ne sont pas de classe \mathcal{C}^1 (ni de \mathcal{C}^0). Alors, nous construisons l'espace $\bar{\mathbf{V}}_h$ comme d'habitude; nous avons

$$\bar{\mathbf{V}}_h \subset (H^1(\Omega))^2 \times \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^2(K) \subset (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega), \quad \bar{\mathbf{V}}_h \not\subset \bar{\mathbf{V}}.$$

Nous devons aussi approcher les énergies a et f par

$$\begin{aligned} a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) &= \int_{\Omega} e E^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}_h) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{u}_h) \sqrt{a} \, dx \, dy \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{e^3}{12} E^{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\varrho}_{\alpha\beta}(\vec{v}_h) \bar{\varrho}_{\lambda\mu}(\vec{u}_h) \sqrt{a} \, dx \, dy, \\ f_h(\vec{v}_h) &= \int_{\Omega} p^i v_i \sqrt{a} \, dx \, dy + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \Gamma_1}^{K \cap \Gamma_1 \neq \emptyset} (N^i v_i - M^{\alpha} \theta_{\alpha}(\vec{v})) |\vec{\phi}_{,t}| \, d\gamma. \end{aligned}$$

Le problème discret s'écrit alors:

$$\text{Trouver } \vec{u}_h \in \bar{\mathbf{V}}_h \text{ tel que } a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h) \text{ pour tout } \vec{v}_h \in \bar{\mathbf{V}}_h. \quad (2)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (2) pour chacune des méthodes qui suivent, sera donnée dans la section correspondante. Pour préparer le travail à suivre, il convient de noter que la forme bilinéaire a_h et la forme linéaire f_h peuvent s'écrire sous la forme matricielle (voir [VIL94])

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K [V_{h|K}(x, y)]^t \times [A_{IJ}(x, y)] \times [U_{h|K}(x, y)] \, dx \, dy,$$

$$f_h(\vec{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K [V_{h|K}(x, y)]^t \times [F_{IS}(x, y)] dx dy + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \Gamma_1}^{K \cap \Gamma_1 \neq \emptyset} [V_{h|K}(x, y)]^t \times [F_{IL}(x, y)] d\gamma,$$

où $[A_{IJ}] \in \mathcal{M}_{12 \times 12}$, $[F_{IS}]$, $[F_{IL}] \in \mathcal{M}_{12 \times 1}$ dépendent du modèle choisi, de la géométrie différentielle de la coque et des charges appliquées, et

$$[V_{h|K}] = {}^t [v_{h1|K}; v_{h1|K,1}; v_{h1|K,2}; v_{h2|K}; v_{h2|K,1}; v_{h2|K,2}; v_{h3|K}; v_{h3|K,1}; v_{h3|K,2}; v_{h3|K,11}; v_{h3|K,12}; v_{h3|K,22}].$$

3 La méthode de Morley

La méthode de Morley utilise l'E.F. P_1 -Lagrange pour l'approximation des composantes tangentielles du déplacement et l'E.F. de Morley (voir [MOR68]) pour l'approximation de la composante normale. Donc, nous avons 12 degrés de liberté par élément: la valeur des trois déplacements aux trois sommets et de la dérivée normale du déplacement normal aux trois milieux des côtés. Nous condenseons la définition de ces E.F. dans la Figure 1 en utilisant la notation classique de [GIA78].

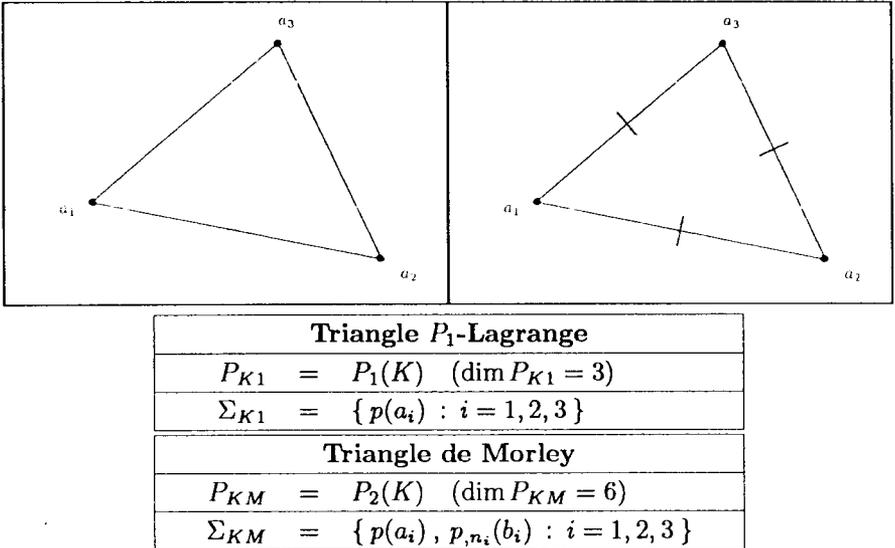


Figure 1: La méthode de Morley

Le calcul des fonctions de base de l'E.F. P_1 -Lagrange est immédiat. Ainsi, pour $v_h \in P_{K1}$ nous avons

$$v_h = \sum_{i=1}^3 p_i^0 v_h(a_i) = [PB_1^K] \times [DL_1^K(v_h)],$$

avec

$$[PB_1^K] = [p_i^0]_{i=1,2,3}, \quad [DL_1^K(v_h)] = {}^t[v_h(a_i)]_{i=1,2,3},$$

et où

$$p_i^0 = \lambda_i \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ sont les coordonnées barycentriques par rapport à } K).$$

Par contre, pour l'E.F. de Morley, il faut utiliser les paramètres d'excentricité η_i définis par

$$\eta_i = \frac{l_{i-1}^2 - l_{i+1}^2}{l_i^2} \quad (l_i \text{ est la longueur du côté } K_i = \overline{a_{i+1} a_{i-1}} \text{ de } K).$$

Alors, pour $v_h \in P_{KM}$ on obtient

$$v_h = \sum_{i=1}^3 (p_i^0 v_h(a_i) + p_{\perp i}^1 v_{h,n_i}(b_i)) = [PB_M^K] \times [DL_M^K(v_h)],$$

avec

$$[PB_M^K] = [p_i^0; p_{\perp i}^1]_{i=1,2,3}, \quad [DL_M^K(v_h)] = {}^t[v_h(a_i); v_{h,n_i}(b_i)]_{i=1,2,3},$$

et où

$$p_i^0 = \lambda_i^2 + \frac{1 - \eta_{i-1}}{2} \lambda_{i-1} (1 - \lambda_{i-1}) + \frac{1 + \eta_{i+1}}{2} \lambda_{i+1} (1 - \lambda_{i+1}),$$

$$p_{\perp i}^1 = -\frac{|\Delta|}{l_i} \lambda_i (1 - \lambda_i)$$

(on utilise la notation $|\Delta| = 2 \text{mes}(K)$).

L'existence et l'unicité de la solution du problème discret (2) associé à ce choix d'éléments finis a été obtenue dans [TRO90]; dans ce travail on donne aussi l'estimation asymptotique de l'erreur

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h = O(h), \quad (3)$$

où $\|\cdot\|_h$ est la norme de Sobolev habituelle dans $(H^1(\Omega))^2 \times \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^2(K)$.

Donc, si $\vec{v}_h = (v_{h1}, v_{h2}, v_{h3}) \in \vec{\mathbf{V}}_h$ où $\vec{\mathbf{V}}_h$ est l'espace d'E.F. construit à l'aide de la méthode décrite précédemment, pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$ on peut écrire

$$[V_{h|K}] = \begin{bmatrix} [DPB_1^K] & & \\ & [DPB_1^K] & \\ & & [DPB_M^K] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [DL_1^K(v_{h1|K})] \\ [DL_1^K(v_{h2|K})] \\ [DL_M^K(v_{h3|K})] \end{bmatrix},$$

où

$$[DPB_1^K] = \begin{bmatrix} [PB_1^K] \\ [PB_1^K]_{,1} \\ [PB_1^K]_{,2} \end{bmatrix}, \quad [DPB_M^K] = \begin{bmatrix} [PB_M^K] \\ [PB_M^K]_{,1} \\ [PB_M^K]_{,2} \\ [PB_M^K]_{,11} \\ [PB_M^K]_{,12} \\ [PB_M^K]_{,22} \end{bmatrix}.$$

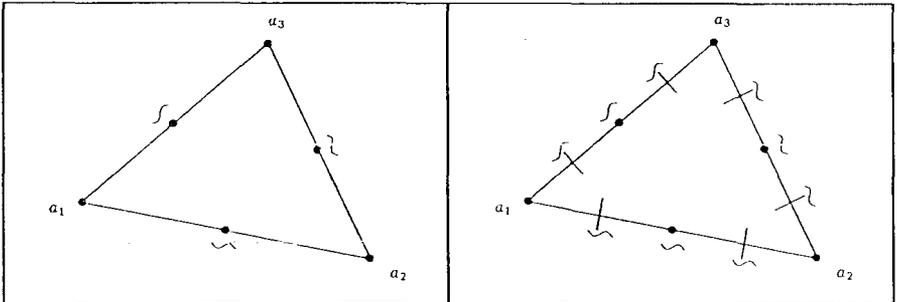
Pour pouvoir assembler les matrices associées à différents éléments $K \in \mathcal{T}_h$, nous devons utiliser un ensemble de degrés de liberté globaux, comme

$$\Sigma'_{KM} = \{ p(a_i), p, n_i^s(b_i) : i = 1, 2, 3 \},$$

où, sur chaque côté K_i de K , on substitue la dérivée normale extérieure unitaire dans la direction \vec{n}_i par une autre direction \vec{n}_i^s globale au sens de la triangulation complète. Le passage de l'ensemble des degrés locaux aux degrés globaux est immédiat, car il suffit de changer le signe de certains degrés de liberté.

4 La méthode de Sander

La méthode de Sander utilise l'E.F. P_2 -Lagrange-arête pour l'approximation des composantes tangentielles du déplacement et l'E.F. "délinquant" de Sander (voir [SAN85]) pour la composante normale. Donc, nous avons 24 degrés de liberté par élément: la valeur des trois déplacements aux trois sommets et la valeur moyenne le long des trois côtés des trois déplacements, de la dérivée normale du déplacement normal et de ses moments d'ordre un. Nous condenseons la définition de ces E.F. dans la Figure 2.



Triangle P_2 -Lagrange-arête	
$P_{K\bar{2}}$	$= P_2(K) \quad (\dim P_{K\bar{2}} = 6)$
$\Sigma_{K\bar{2}}$	$= \left\{ p(a_i), \frac{1}{l_i} \int_{K_i} p d\gamma : i = 1, 2, 3 \right\}$
Triangle "délinquant" de Sander	
P_{KS}	$= P'_3(K) \oplus \langle \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_i \rangle_{i=1,2,3} \quad (\dim P_{KS} = 12)$
Σ_{KS}	$= \left\{ p(a_i), \frac{1}{l_i} \int_{K_i} p d\gamma, \frac{1}{l_i} \int_{K_i} \lambda_{i-1} p, n_i d\gamma, \right.$ $\left. \frac{1}{l_i} \int_{K_i} \lambda_{i+1} p, n_i d\gamma : i = 1, 2, 3 \right\}$

Figure 2: La méthode de Sander

Les fonctions de base de l'élément P_2 -Lagrange-arête sont similaires à celles

de l'élément P_2 -Lagrange classique. Ainsi, pour $v_h \in P_{K\bar{2}}$ nous avons

$$v_h = \sum_{i=1}^3 \left(p_i^0 v_h(a_i) + \tilde{p}_{\perp i}^0 \frac{1}{l_i} \int_{K_i} v_h d\gamma \right) = [PB_2^K] \times [DL_2^K(v_h)],$$

avec

$$[PB_2^K] = [p_i^0; \tilde{p}_{\perp i}^0]_{i=1,2,3}, \quad [DL_2^K(v_h)] = {}^t \left[v_h(a_i); \frac{1}{l_i} \int_{K_i} v_h d\gamma \right]_{i=1,2,3}$$

et où

$$p_i^0 = 3\lambda_i^2 - 2\lambda_i, \quad \tilde{p}_{\perp i}^0 = 6\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}.$$

Pour l'élément "délinquant" de Sander les calculs sont plus compliqués; en utilisant les paramètres d'excentricité et à l'aide d'un logiciel de calcul formel (voir [VIL94] pour les détails), nous obtenons pour $v_h \in P_{KS}$

$$v_h = \sum_{i=1}^3 \left(p_i^0 v_h(a_i) + \tilde{p}_{\perp i}^0 \frac{1}{l_i} \int_{K_i} v_h d\gamma + \tilde{p}_{\perp i,i-1}^1 \frac{1}{l_i} \int_{K_i} \lambda_{i-1} v_{h,n_i} d\gamma \right. \\ \left. + \tilde{p}_{\perp i,i+1}^1 \frac{1}{l_i} \int_{K_i} \lambda_{i+1} v_{h,n_i} d\gamma \right) = [PB_S^K] \times [DL_S^K(v_h)],$$

avec

$$[PB_S^K] = [p_i^0; \tilde{p}_{\perp i}^0; \tilde{p}_{\perp i,j}^1]_{i=1,2,3; j=i-1,i+1}, \\ [DL_S^K(v_h)] = {}^t \left[v_h(a_i); \frac{1}{l_i} \int_{K_i} v_h d\gamma; \frac{1}{l_i} \int_{K_i} \lambda_j v_{h,n_i} d\gamma \right]_{i=1,2,3; j=i-1,i+1}$$

et où

$$p_i^0 = \lambda_i^3 + (\eta_{i-1} + \eta_{i+1}) \lambda_{i-1}^2 \lambda_{i+1} + 2(1 + \eta_{i+1}) \lambda_{i-1}^2 \lambda_i \\ - (5 + 2\eta_{i+1}) \lambda_{i-1} \lambda_i^2 - (5 - 2\eta_{i-1}) \lambda_i^2 \lambda_{i+1} + 2(1 - \eta_{i-1}) \lambda_i \lambda_{i+1}^2 \\ - (\eta_{i-1} + \eta_{i+1}) \lambda_{i-1} \lambda_{i+1}^2 - (8 + \eta_{i-1} + 9\eta_{i+1}) \lambda_{i-1}^2 \lambda_i \lambda_{i+1} \\ + 11(2 - \eta_{i-1} + \eta_{i+1}) \lambda_{i-1} \lambda_i^2 \lambda_{i+1} \\ - (8 - 9\eta_{i-1} - \eta_{i+1}) \lambda_{i-1} \lambda_i \lambda_{i+1}^2, \\ \tilde{p}_i^0 = (6 + 4\eta_i) \lambda_{i-1}^2 \lambda_{i+1} + (11 + \eta_i) \lambda_{i-1}^2 \lambda_i - (11 + \eta_i) \lambda_{i-1} \lambda_i^2 \\ - (11 - \eta_i) \lambda_i^2 \lambda_{i+1} + (11 - \eta_i) \lambda_i \lambda_{i+1}^2 + (6 - 4\eta_i) \lambda_{i-1} \lambda_{i+1}^2 \\ - 20(1 + \eta_i) \lambda_{i-1}^2 \lambda_i \lambda_{i+1} + 40 \lambda_{i-1} \lambda_i^2 \lambda_{i+1} \\ - 20(1 - \eta_i) \lambda_{i-1} \lambda_i \lambda_{i+1}^2, \\ \tilde{p}_{i,i-1}^1 = \frac{4|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1}^2 \lambda_{i+1} + \frac{2|\Delta|}{l_i} \lambda_i^2 \lambda_{i+1} - \frac{2|\Delta|}{l_i} \lambda_i \lambda_{i+1}^2 - \frac{4|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1} \lambda_{i+1}^2 \\ - \frac{22|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1}^2 \lambda_i \lambda_{i+1} - \frac{2|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1} \lambda_i^2 \lambda_{i+1} + \frac{18|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1} \lambda_i \lambda_{i+1}^2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i,i+1}^1 = & -\frac{4|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1}^2 \lambda_{i+1} - \frac{2|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1}^2 \lambda_i + \frac{2|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1} \lambda_i^2 + \frac{4|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1} \lambda_{i+1}^2 \\ & + \frac{18|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1}^2 \lambda_i \lambda_{i+1} - \frac{2|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1} \lambda_i^2 \lambda_{i+1} - \frac{22|\Delta|}{l_i} \lambda_{i-1} \lambda_i \lambda_{i+1}^2. \end{aligned}$$

La méthode de Sander est de convergence quadratique, car dans [TRO92] on montre, d'une part, l'existence et l'unicité de la solution du problème discret associé et, d'autre part, l'estimation asymptotique de l'erreur

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_h = O(h^2). \tag{4}$$

Pour l'implémentation, si $\vec{v}_h = (v_{h1}, v_{h2}, v_{h3}) \in \vec{V}_h$ où \vec{V}_h est l'espace d'E.F. construit à l'aide de la méthode de Sander, pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$ on peut écrire

$$[V_{h|K}] = \begin{bmatrix} [DPB_2^K] & & \\ & [DPB_2^K] & \\ & & [DPB_S^K] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [DL_2^K(v_{h1|K})] \\ [DL_2^K(v_{h2|K})] \\ [DL_S^K(v_{h3|K})] \end{bmatrix},$$

où

$$[DPB_2^K] = \begin{bmatrix} [PB_2^K] \\ [PB_2^K]_{,1} \\ [PB_2^K]_{,2} \end{bmatrix}, \quad [DPB_S^K] = \begin{bmatrix} [PB_S^K] \\ [PB_S^K]_{,1} \\ [PB_S^K]_{,2} \\ [PB_S^K]_{,11} \\ [PB_S^K]_{,12} \\ [PB_S^K]_{,22} \end{bmatrix}.$$

À nouveau, nous sommes obligés d'utiliser un ensemble de degrés de liberté globaux, en prenant le vecteur normal unitaire standard \vec{n}_i^s à chaque côté K_i . Donc, nous définissons

$$\begin{aligned} \Sigma'_{KS} = & \left\{ p(a_i), \frac{1}{l_i} \int_{K_i} p \, d\gamma, \frac{1}{l_i} \int_{K_i} \lambda_{i-1} p_{,n_i^s} \, d\gamma, \right. \\ & \left. \frac{1}{l_i} \int_{K_i} \lambda_{i+1} p_{,n_i^s} \, d\gamma : i = 1, 2, 3 \right\} \end{aligned}$$

et le passage d'un ensemble de degrés de liberté à l'autre s'effectue seulement en changeant le signe de certains degrés, car $\vec{n}_i^s = \pm \vec{n}_i$.

5 Résultats numériques

Les méthodes de Morley et de Sander décrites précédemment, ont été implémentées dans la bibliothèque MODULEF (voir [BGH88]) pour pouvoir tester numériquement les résultats théoriques. Nous présentons ici trois exemples différents, classiques dans la théorie de coques, qui ont la particularité de traiter une charge superficielle, une charge linéique et, finalement, une charge ponctuelle.

5.1 Toiture cylindrique

Le premier test traite la simulation de la déformation d'une toiture cylindrique chargée par son poids propre (de densité de charge q), simplement supportée à ses extrémités par des diaphragmes rigides et libre sur les autres côtés (voir la Figure 3). La symétrie du problème nous permet de nous limiter à la partie $ABCD$ de la toiture, en imposant des conditions aux limites convenables.

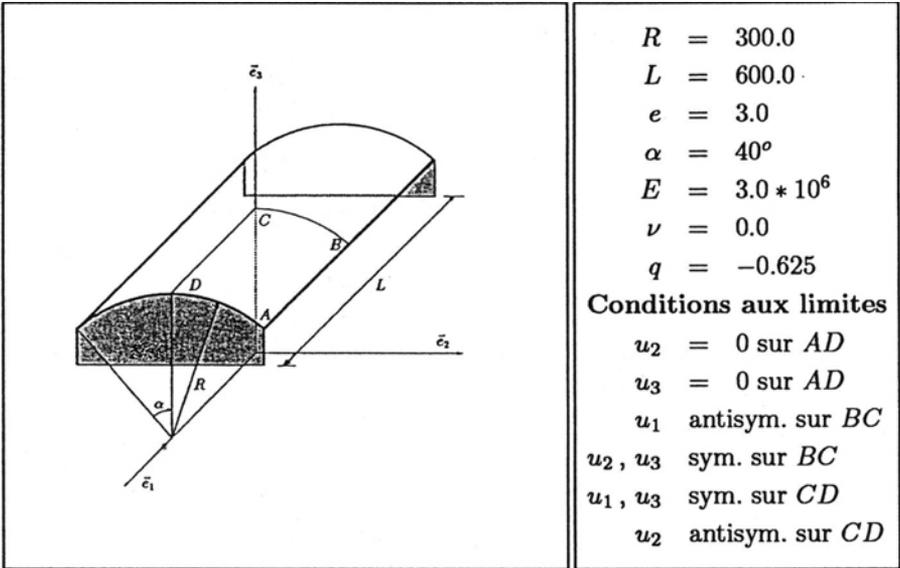


Figure 3: Toiture cylindrique

Dans la Figure 4-gauche, nous donnons le déplacement vertical dans un repère global au point B en fonction du nombre total de degrés de liberté, c'est-à-dire, la dimension de \vec{V}_h ; on remarque, comme prévu, le meilleur comportement de la méthode de Sander (représentée par des \circ sur le graphique) par rapport à la méthode de Morley (représentée par des $*$), où un phénomène de blocage en membrane apparaît.

Cependant, il est aussi intéressant analyser les résultats donnés dans la Figure 4-droite, où on compare le nombre total de degrés de liberté et le temps de calcul des matrices élémentaires. On remarque une économie de plus du 60% de la méthode de Morley par rapport à celle de Sander; ceci est conséquence de deux effets différents: d'un part, la taille des matrices élémentaires de Morley est 12×12 , tandis que pour Sander elle est 24×24 (il y a aussi une grande économie en place de mémoire); d'autre part, pour pouvoir traiter de coques de géométries arbitraires, nous sommes obligés d'utiliser un schéma d'intégration numérique, et pour conserver l'ordre, linéaire ou quadratique, de convergence de la méthode, suivant [BER94] ce schéma doit être exact pour des polynômes de degré 0 dans le cas de Morley (il suffit d'un noeud d'intégration par élément) et de degré 4 dans le cas de Sander (6 noeuds, au minimum, sont nécessaires).

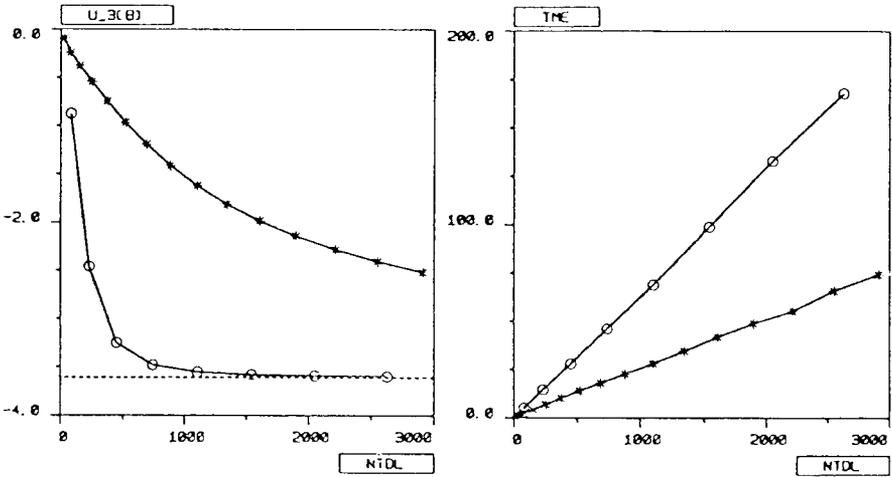


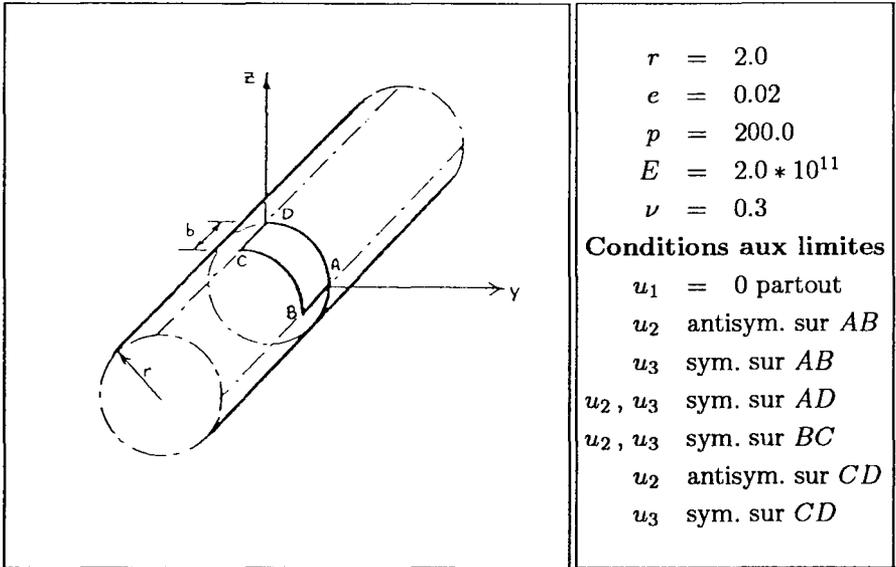
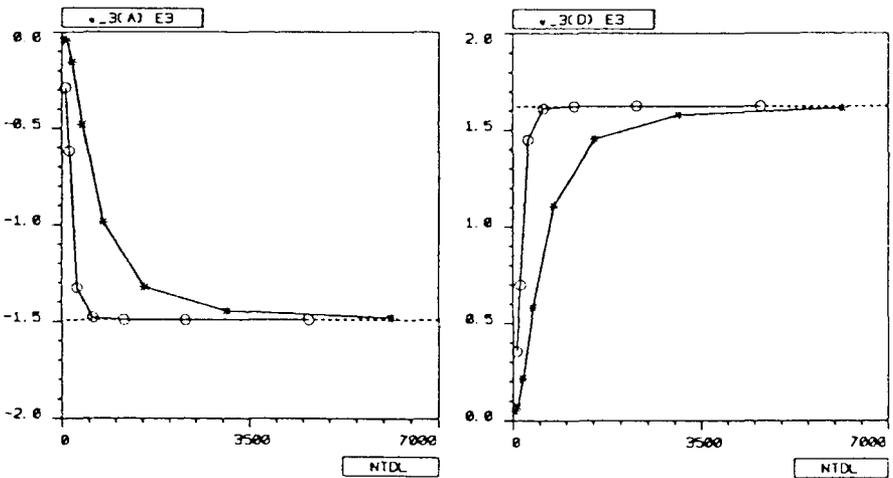
Figure 4: Toiture cylindrique: résultats

5.2 Cylindre infini

Maintenant nous considérons un cylindre circulaire de longueur infinie, chargé le long de deux génératrices opposées (voir la Figure 5). À nouveau, la symétrie du problème nous permet de nous limiter à un quart $ABCD$ d'une bande de longueur b , en imposant les conditions aux limites nécessaires. La charge linéique, de densité p , est imposée le long du segment CD (et le long du segment opposé) et elle est adressée vers l'axe du cylindre.

Nous étudions le déplacement normal à la surface moyenne des points A et D (bien sur, ce déplacement est constant le long des droites parallèles à l'axe du cylindre). On remarque que suite à la symétrie du problème, le seul déplacement non nul de ces points est justement le normal. Ces déplacements, en fonction du nombre total de degrés de liberté, sont donnés dans la Figure 6.

Dans la Figure 7 nous donnons, en fonction du diamètre h des maillages et en échelle logarithmique, l'erreur relative des déplacements précédents. On remarque que la pente des lignes sert à retrouver une estimation de l'ordre de l'erreur de chacune des méthodes étudiées pour la norme de la convergence uniforme (en pointillé apparaissent quelques valeurs de référence). Nous rappelons que les estimations 3 et 4 sont en norme $\| \cdot \|_h$; donc, ces sont des estimations locaux et en norme de L^2 de la dérivée seconde du déplacement normal, tandis que la Figure 7 montre des estimations ponctuelles et en norme de L^∞ de la valeur de déplacement. En tout cas, il serait souhaitable d'atteindre une pente 3 pour la méthode de Morley, d'où on peut déduire à nouveau un phénomène de blocage.

Figure 5: *Cylindre infini*Figure 6: *Cylindre infini: déplacement*

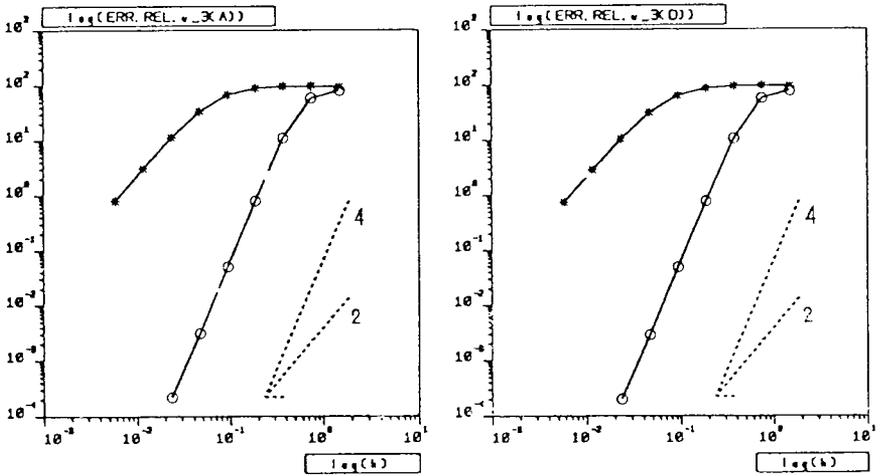


Figure 7: *Cylindre infini: erreurs*

5.3 Cylindre pincé

Nous finissons en considérant une coque cylindrique, décrite sur la Figure 8, librement supportée à ses deux extrémités par un diaphragme rigide, et chargée par deux forces concentrées de densité p , diamétralement opposées et agissant au centre de la coque. Nous nous limitons aussi à un huitième $ABCD$ du cylindre en imposant des conditions de symétrie.

Nous étudions les déplacements aux sommets A et C ; nous remarquons que seulement $u_1(A)$ (direction de l'axe du cylindre) et $u_3(C)$ (direction normale à la surface moyenne) sont non nuls. Nous donnons dans la Figure 9 les résultats de convergence. Nous indiquons que les différents tests ont été réalisés sur des maillages tout à fait réguliers, i.e., nous n'avons pas fait un raffinement autour du coin pincé, ce qui serait de nature à améliorer la vitesse de convergence.

6 Conclusion

Nous avons pu apprécier le comportement numérique de deux M.E.F. non conformes pour les problèmes de coques minces élastiques (avec une description curviligne de la surface moyenne): la méthode de Morley, qui est de convergence linéaire, et la méthode de Sander, de convergence quadratique; cette différence a pu être constatée sur les tests réalisés.

Le grand intérêt des méthodes non conformes réside, surtout, dans l'économie de sa mise en oeuvre par rapport aux M.E.F. conformes. Un second intérêt de ces méthodes réside dans leur utilisation possible pour approcher des problèmes de jonctions de coques minces.

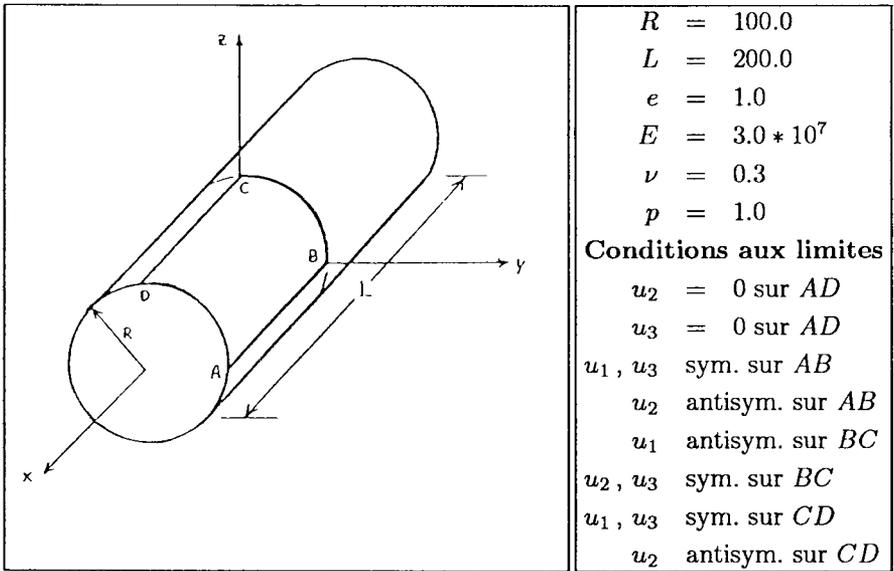


Figure 8: *Cylindre pincé*

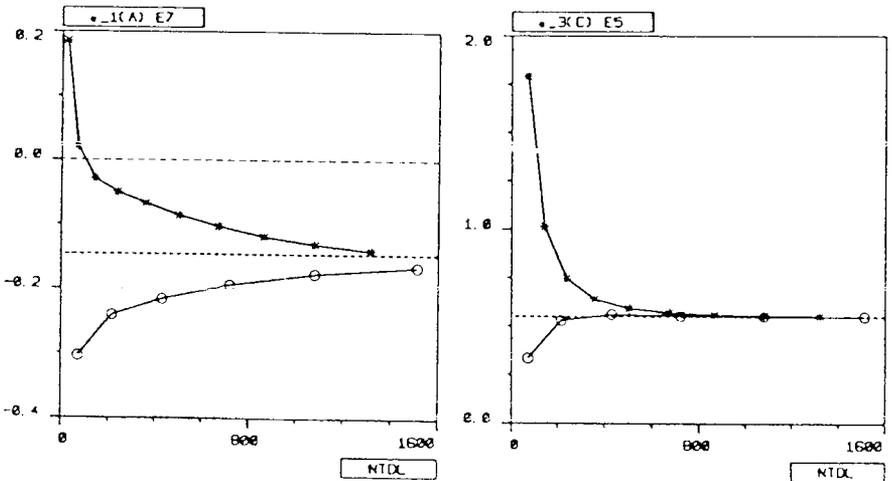


Figure 9: *Cylindre pincé: résultats*

Remarque: Nous donnons en annexe différents tableaux avec les valeurs numériques obtenues sur tous les exemples traités; ces valeurs sont la base des Figures montrées précédemment.

Remerciements: Les auteurs tiennent à remercier M. Bernadou (Pôle Univ. L. de Vinci-I.N.R.I.A.) et P. Trouvé (Thomson CSF) pour l'intérêt qu'ils ont montré dans la réalisation de ce travail.

This work is part of the Human Capital and Mobility Program "Shells: Mathematical Modeling and Analysis, Scientific Computing" of the Commission of the European Communities (Contract ERBCHRXCT940536).

Bibliographie

- [BDH92] BATOZ J.L., DHATT G.S., *Modélisation des structures par éléments finis, Coques*, Hermès, 1992.
- [BER94] BERNADOU M., *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, Masson, 1994.
- [BGH88] BERNADOU M., GEORGE P.L., HASSIM A., JOLY P., LAUG P., MULLER B., PERRONNET A., SALTEL E., STEER D., VANDERBORK G., VIDRASCU M., *MODULEF: une bibliothèque modulaire d'éléments finis*, Editions INRIA, 1988.
- [CIA78] CIARLET P.G., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.
- [KOI70] KOITER W.T., "On the foundations of the linear theory of thin elastic shells", *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.*, B73, 1970, p. 169-195.
- [MOR68] MORLEY L.S.D., "The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems", *Aero. Q.*, 19, 1968, p. 149-169.
- [SAN85] SANDER G., "Modèles d'éléments finis délinquants", *Groupe de travail sur les méthodes numériques pour les problèmes de coques de l'Université de Liège*, 1985.
- [TRO90] TROUVÉ P., "Sur la convergence des méthodes d'éléments finis nonconformes pour des problèmes linéaires de coques minces", *Numer. Math.*, 57, 1990, p. 481-524.
- [TRO92] TROUVÉ P., L'élément fini délinquant de Sander, *Communication personnelle*, 1992.
- [VIL94] VILARIÑO M.A., "Modelo lineal de láminas delgadas de W.T. Koiter: fundamentación matemática y aproximación mediante el método no conforme de elementos finitos delincuente de Sander", *Tesis Doctoral de la Universidad de Málaga*, 1994.

Annexe

Dans les tableaux qui suivent nous faisons un recueil des valeurs numériques exactes obtenues sur les différents tests réalisés. Nous utilisons les notations suivantes:

- NE nombre d'élément du maillage;
 DDL nombre total de degrés de liberté (exclus les blocages);
 $TCME$ temp de calcul des matrices élémentaires
(en secondes sur HP/Apollo DN4500);
 u_i i-ème composante du déplacement dans le repère local;
 U_i i-ème composante du déplacement dans le repère global.

Toiture cylindrique								
Méthode de Morley								
NE	288	360	440	528	624	728	840	960
DDL	882	1100	1342	1608	1898	2212	2550	2912
$TCME$	22.6	28.0	34.5	41.8	48.9	55.3	65.8	74.3
$-U_3(B)$	1.413	1.621	1.812	1.986	2.142	2.281	2.404	2.513
Méthode de Sander								
NE	8	24	48	80	120	168	224	288
DDL	80	228	448	740	1104	1540	2048	2628
$TCME$	5.1	14.5	28.0	46.1	68.9	98.9	132.9	167.9
$-U_3(B)$	0.874	2.461	3.250	3.478	3.551	3.579	3.591	3.598
Cylindre infini								
Méthode de Morley								
NE	16	32	64	128	256	512	1024	2048
DDL	47	95	191	383	767	1535	3071	6143
$TCME$	2.0	3.3	5.6	10.6	21.0	42.1	81.4	159.7
$-u_3(A) * 10^3$	0.031	0.045	0.152	0.479	0.984	1.322	1.445	1.480
$u_3(D) * 10^3$	0.048	0.075	0.216	0.582	1.108	1.453	1.578	1.612
Méthode de Sander								
NE		8	16	32	64	128	256	512
DDL		69	141	285	573	1149	2301	4605
$TCME$		5.3	9.7	19.3	38.3	74.1	148.3	298.0
$-u_3(A) * 10^3$		0.287	0.617	1.326	1.479	1.491	1.491	1.491
$u_3(D) * 10^3$		0.357	0.698	1.449	1.612	1.623	1.624	1.624

Cylindre pincé								
Méthode de Morley								
<i>NE</i>	48	80	120	168	224	288	360	440
<i>DDL</i>	144	240	360	504	672	864	1080	1320
<i>TCME</i>	4.4	6.9	10.4	13.9	18.7	23.5	29.8	35.7
$-u_1(A) * 10^8$	0.293	0.500	0.676	0.860	1.037	1.191	1.317	1.417
$u_3(C) * 10^6$	10.138	7.467	6.397	5.922	5.698	5.588	5.535	5.511
Méthode de Sander								
<i>NE</i>			8	24	48	80	120	168
<i>DDL</i>			72	216	432	720	1080	1512
<i>TCME</i>			5.2	14.5	28.5	47.1	70.6	99.0
$-u_1(A) * 10^8$			3.042	2.413	2.162	1.944	1.776	1.666
$u_3(C) * 10^6$			3.340	5.292	5.590	5.531	5.499	5.496

Article soumis le 5 septembre 1995.
Version révisée le 10 novembre 1996.