
Modélisation des transferts couplés de chaleur et de masse avec changement de phase en milieux poreux

Application au séchage en vapeur d'eau surchauffée

Frédéric Topin — Jean-Vincent Daurelle —
Marie-Christine Donneaud

IUSTI, CNRS UMR 139, Université de Provence, Centre de Saint Jérôme
Av. Escadrille Normandie Niemen, 13397 Marseille cedex 20

fred@iusti.univ-mrs.fr

RÉSUMÉ. Le modèle physique est basé sur l'écriture des équations de bilan à l'échelle du volume élémentaire représentatif. Le milieu considéré est triphasé (liquide, solide et gaz) ; la phase gazeuse comporte deux constituants (air et vapeur). Nous utilisons les équations de bilan masse sur l'air et sur l'eau (liquide + vapeur) ainsi que l'équation de l'énergie pour décrire les phénomènes. La fermeture du système d'équations est réalisée en utilisant les relations classiques dans ces milieux qui permettent d'obtenir un système de trois équations aux dérivées partielles non linéaires couplées. Nous avons appliqué ce modèle au cas du séchage en vapeur d'eau surchauffée. Un module de résolution du système d'équations non-linéaires couplées, basé sur la méthode des éléments finis dans une configuration bidimensionnelle, a été mis au point et validé. Cette approche permet la détermination de l'ensemble des variables du problème et constitue un outil complémentaire d'analyse au travers de l'accès aux grandeurs non-mesurables telles que les vitesses des phases. Ce modèle de calcul a été appliqué à la configuration étudiée expérimentalement, les résultats expérimentaux et numériques en temps adimensionné sont similaires. Cette double approche nous a permis de mettre en évidence et d'interpréter de nouveaux mécanismes caractéristiques de ce mode de séchage.

ABSTRACT. The physical model is based on balance equations at the representative elementary volume. The considered medium has three phases (liquid, solid and gaseous phases). The gaseous phase includes two components (air and steam). We use the mass balance equations over air and water (liquid and steam) as well as heat equation in order to describe the phenomena. The system of equations is closed via classical relations in this media, which lead to a three equations system with coupled nonlinear partial derivatives. We have applied this model to the superheated steam drying. A solution model of the coupled nonlinear equations system based on the finite element method in a 2D configuration was developed and validated. This approach allows to determine the whole variables of the problem. It is a complementary tool of analysis which opens access to non measurable variables, such as phases velocities. This computation model was applied to a configuration studied experimentally. The numerical and experimental results agree in non-dimensional time. This double approach has enabled us to point out and evaluate new mechanisms typical from this drying methods.

MOTS-CLÉS : transfert de chaleur, écoulement, milieux poreux.

KEYWORDS : heat transfer, fluid flow, porous media.

1. Introduction.

De nombreuses études basées sur des analyses physiques ou des approches système sont développées sur la thématique "séchage". La problématique scientifique s'appuie sur la compréhension des mécanismes physiques invoqués dans le processus. Cette approche est développée au travers d'expérimentations dans des configurations particulières et par la modélisation des phénomènes de séchage. Les particularités des différentes configurations de séchage ont été progressivement mises en évidence et intégrées dans les modèles.

La modélisation du séchage haute température reste encore qualitative en dépit des travaux menés par de nombreux auteurs, par exemple [QUI 86; MOY 87; PER 90; TUR 91; COU 95; BRU 80; BAS 85; TOP 95]. En particulier la prédiction du temps de séchage n'est pas précise et l'agrément modèle-expérience n'est obtenu que par ajustement de divers paramètres (propriétés physiques, conditions aux limites ou initiales, ...). Les modèles numériques ne sont donc pas encore prédictifs.

La modélisation se heurte à la méconnaissance des mécanismes couplés de changement de phase et de transferts dans un milieu poreux. Il reste donc de nombreux travaux expérimentaux et théoriques à mener pour déterminer ces mécanismes. Néanmoins l'outil numérique permet d'accéder aux paramètres difficilement mesurables tels que le taux de changement de phase local, les vitesses de chacune des phases, etc. Il constitue donc un outil complémentaire indispensable d'analyse s'associant à des travaux expérimentaux.

Le but de cette étude est le développement d'un modèle numérique des transferts chaleur-masse en milieu poreux avec prise en compte des gradients de pression en phase gazeuse, des effets capillaires et de sorption ainsi que du changement de phase.

Le modèle développé traite des géométries bidimensionnelles et axisymétriques. Il couvre ainsi la majorité des configurations industrielles et permet la simulation des transferts dans les matériaux anisotropes généralement rencontrés en séchage (bois, fourrages...). Le cas monodimensionnel est aussi traité afin de comparer nos résultats avec ceux de la littérature.

Le problème peut être représenté, dans le cas général, sous la forme schématisée sur la figure 1. Le milieu peut être découpé en trois zones (liquide, diphasique, vapeur) séparées par deux interfaces mobiles. Le "front vapeur" limite la zone surchauffée sèche et la zone diphasique, le "front liquide" sépare la zone liquide et la zone diphasique. L'existence de ces différentes zones va dépendre des contraintes auxquelles le milieu va être soumis. Par exemple, dans le cas d'un milieu alimenté en liquide, une zone saturée pourra persister jusqu'à l'état stationnaire (cas de l'ébullition dans un canal poreux, par exemple). Les applications potentielles de ce modèle numérique recouvrent trois configurations particulières de transferts :

- l'imbibition pour laquelle les écoulements sont soit dûs à la capillarité soit associés à un gradient de pression (i.e. forcés),
- le séchage, configuration dans laquelle les écoulements sont induits par le changement de phase et de densité produits par les effets thermiques,
- l'ébullition en milieu poreux avec écoulement forcé qui est un cas de couplage entre l'écoulement et les transferts de chaleur avec changement de phase.

Le problème numérique est complexe car il s'agit de résoudre un système couplé

d'équations aux dérivées partielles fortement non-linéaires. Les qualités principales recherchées pour la méthode sont la robustesse et la souplesse d'utilisation.

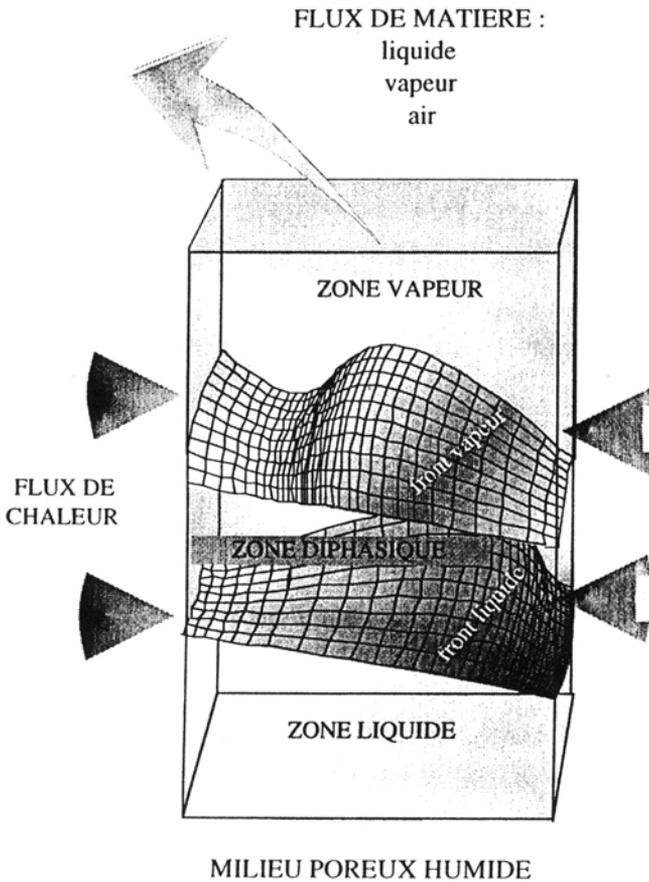


Figure 1. *Modèle physique des transferts couplés de chaleur et de masse avec changement de phase en milieu poreux*

La méthode des éléments finis de type Galerkin est particulièrement bien adaptée à des applications nécessitant l'utilisation d'une grande variété de géométries et de conditions aux limites. L'intégration numérique de Gauss permet de calculer aisément les coefficients de transports complexes et fortement dépendants des inconnues. De plus, l'anisotropie des propriétés de transport est prise en compte sans modification du module de résolution.

A cette problématique numérique s'ajoute une difficulté physique : les propriétés de transports des milieux poreux sont encore mal connues. Les formes des lois phénoménologiques utilisées sont obtenues à partir de corrélations issues de l'expérimentation et non de lois physiques. Les expressions disponibles sont très diversifiées et le choix de l'une ou l'autre ne pourra être justifié que par comparaison avec des expériences spécifiques. Enfin, il n'existe pas de justifications théoriques à

l'emploi de certaines notions telles que la perméabilité relative. C'est pourquoi, la simulation numérique constitue un outil d'analyse complémentaire essentiel pour la compréhension physique et la comparaison des différentes lois de comportement.

Nous développons dans la suite les équations de bilan (masse, énergie) et les relations phénoménologiques permettant de modéliser ce problème, puis nous présentons l'outil numérique développé en vue de la résolution du système obtenu. Enfin, nous comparons les résultats numériques pour l'application au séchage avec nos données expérimentales [TOP 96] et des résultats issus de la littérature [MOY 85].

2. Modèle physique

La description est effectuée à l'échelle "macroscopique", pour laquelle le milieu poreux est assimilé à un milieu fictif, continu et homogène. Différentes méthodes et outils, (l'homogénéisation, la prise de moyenne, la percolation et les fractals), sont utilisés pour prévoir les propriétés macroscopiques de transport à partir d'informations sur la microstructure du milieu [GUY 88]. La définition d'un milieu équivalent au milieu étudié et de l'échelle d'applicabilité du modèle macroscopique est un problème délicat, longuement discuté par [MAR 82; BAV 84; WHI 86; AUR 89; BAR 90; QUI 91]. Dans notre approche, nous considérons que le milieu poreux est triphasique (liquide, solide et gaz). La phase gazeuse contient deux composants, la vapeur et l'air (gaz parfaits). Elle se comporte comme un mélange idéal. La phase solide est indéformable, homogène et inerte vis à vis des autres phases. En tout point du milieu continu les trois phases sont en équilibre thermodynamique local ($T_s = T_l = T_v = T$). Dans ces conditions, les équations permettant de décrire les phénomènes sont détaillées dans les paragraphes suivants.

2.1. Equations de bilan

Les bilans de matière s'écrivent pour chacun des composants et/ou des phases:

$$\text{Phase liquide} \quad \varepsilon \frac{\partial \rho_l S}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{\eta}_l - \dot{m} \quad [1]$$

$$\text{Vapeur} \quad \varepsilon \frac{\partial \rho_v (1-S)}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{\eta}_v + \dot{m} \quad [2]$$

$$\text{Air} \quad \varepsilon \frac{\partial \rho_a (1-S)}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{\eta}_a \quad [3]$$

$$\text{Eau} \quad \varepsilon \frac{\partial (\rho_l S + \rho_v (1-S))}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{\eta}_l + \bar{\eta}_v) \quad [4]$$

Où S représente la saturation (i.e. le volume de liquide rapporté au volume des pores), $\bar{\eta}_i$ la vitesse massique (densité de flux de matière) du composant i et, \dot{m} le

taux volumique de production de vapeur.

En négligeant les termes d'énergie cinétique et de pression et en ne considérant qu'une seule température pour toutes les phases, le bilan enthalpique global s'écrit simplement :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \bar{\nabla} \cdot (-\bar{\lambda} \bar{\nabla} T) - \left(\bar{\eta}_l C_{p_l} + \bar{\eta}_v C_{p_v} + \bar{\eta}_a C_{p_a} \right) \bar{\nabla} T - \dot{m} L_v \quad [5]$$

(a) (b) (c) (d)

Ces termes représentent respectivement : (a) l'énergie accumulée, (b) diffusée par conduction (loi de Fourier), (c) transportée par les écoulements de matière et (d) consommée par le changement de phase.

Avec : $\rho C_p = \rho_s (1 - \varepsilon) C_{p_s} + \rho_l S \varepsilon C_{p_l} + \rho_v (1 - S) \varepsilon C_{p_v} + \rho_a (1 - S) \varepsilon C_{p_a}$ capacité calorifique effective du milieu poreux, T température et L_v enthalpie de changement de phase.

Le terme de changement de phase peut être éliminé en utilisant l'équation de bilan masse phase vapeur (2), ce qui nous conduit à :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + L_v \varepsilon \frac{\partial \rho_v (1 - S)}{\partial t} = - \bar{\nabla} \cdot (-\bar{\lambda} \bar{\nabla} T) - \left(\bar{\eta}_l C_{p_l} + \bar{\eta}_v C_{p_v} + \bar{\eta}_a C_{p_a} \right) \bar{\nabla} T - L_v \bar{\nabla} \cdot \bar{\eta}_v \quad [6]$$

La fermeture du système d'équations est réalisée en utilisant les relations classiques dans ces milieux (équations de Darcy généralisées, courbe de sorption, etc.) qui permettent d'obtenir un système de trois équations aux dérivées partielles non linéaires couplées [WHI 77].

2.2. Relations de fermeture

2.2.1. Pressions et masses volumiques dans les fluides.

Nous supposons que la pression totale de la phase gazeuse peut être reliée aux pressions partielles de ses constituants par une loi de Dalton et que les constituants gazeux se comportent comme des gaz parfaits, dans ces conditions il vient :

$$P_g = P_v + P_a = \rho_v \frac{R}{M_v} T + \rho_a \frac{R}{M_a} T \quad [7]$$

$$\rho_g = \rho_v + \rho_a \quad [8]$$

2.2.2. Equilibre des phases

Si l'eau coexiste dans le milieu sous les formes liquide et vapeur alors la pression P_v de la vapeur est donnée par :

$$P_v(S,T) = P_{vs}(T) \Phi(S,T) \quad [9]$$

$\Phi(S, T)$ peut être déduite théoriquement de la loi de Kelvin (eau capillaire) et à partir de modèles d'adsorption pour l'eau liée [DEF 51]. En pratique, nous utilisons des valeurs de Φ tirées de l'expérience.

2.2.3. Pression capillaire

Nous utilisons la formulation proposée par Leverett :

$$P_c = P_g - P_l = F(S) \sigma \sqrt{\frac{\epsilon}{K_{sat}}} \quad [10]$$

La pression capillaire adimensionnée $F(S)$ dépend du choix du modèle utilisé pour représenter les données expérimentales.

2.2.4. Expression des vitesses massiques

A l'échelle du milieu continu équivalent nous admettons la généralisation de la loi de Darcy aux écoulements polyphasiques en milieu poreux [KAL 88; KAV 92]. Celle-ci décrit la relation liant la vitesse massique de la phase i aux gradients de pression (de la même phase) et à la gravité sous la forme suivante :

$$\bar{\eta}_i = -\frac{\bar{K}_i}{v_i} \left(\bar{\nabla} P_i - \rho_i \bar{g} \right) \quad [11]$$

En plus du mouvement global du gaz, il nous faut prendre en compte la diffusion binaire. Cet effet sera modélisé simplement sous la forme d'une loi de Fick avec un coefficient de diffusion d'un constituant dans l'autre \bar{D} modifié pour tenir compte de la matrice poreuse et du liquide [MOY 87].

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_v &= \frac{\rho_v}{\rho_g} \bar{\eta}_g - \rho_g \bar{D} \bar{\nabla} \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} \right) \\ \bar{\eta}_a &= \frac{\rho_a}{\rho_g} \bar{\eta}_g - \rho_g \bar{D} \bar{\nabla} \left(\frac{\rho_a}{\rho_g} \right) \end{aligned} \quad [12]$$

2.3. Système à résoudre

Nous supposons que les phases liquide et gazeuse coexistent en tout point. Pour décrire le milieu, nous utilisons trois variables indépendantes : Température, Saturation, et Pression totale en phase gazeuse. Le choix de la température et de la pression totale en phase gazeuse apparaît naturel puisque ce sont les gradients de ces deux variables qui gouvernent les transferts. En effet, la pression de la phase liquide est directement liée à celle de la phase gazeuse par la pression capillaire.

Les expressions phénoménologiques des flux de chaleur et de matière imposent l'utilisation d'un paramètre lié à la répartition du taux d'humidité. Nous avons choisi la saturation. Les autres grandeurs : pressions partielles des constituants gazeux,

vitesse des différentes phases, taux de changement de phase sont obtenues à partir des trois grandeurs T , S et P_g .

Nous allons utiliser l'équation de l'énergie (6) pour calculer la température, le bilan masse sur l'eau (4) pour obtenir la saturation et, le bilan masse sur l'air (3) pour la pression en phase gazeuse, nous obtenons ainsi le système (13).

Le module de calcul a été testé pour différents jeux de variables de résolution (T, S, P_g) , (T, S, P_a) , (T, S, ρ_a) . Formellement, les systèmes d'équations sont similaires. Les résultats que nous avons obtenus sont identiques. Nous détaillons donc ici le jeu d'équations correspondant aux résultats présentés. Notons que les grandeurs qui interviennent dans ces expressions sont des fonctions des trois variables T, S, P_g . Les expressions de ces coefficients sont développées en annexe I.

$$\begin{aligned} M_{ET} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{ES} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\bar{\nabla} \cdot \left(K_{ET} \bar{\nabla} T + K_{ES} \bar{\nabla} S + K_{EP} \bar{\nabla} P_g \right) + \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} T \\ M_{MT} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{MS} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\bar{\nabla} \cdot \left(K_{MT} \bar{\nabla} T + K_{MS} \bar{\nabla} S + K_{MP} \bar{\nabla} P_g + K_{Mg} \bar{g} \right) \\ M_{AT} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{AS} \frac{\partial S}{\partial t} + M_{AP} \frac{\partial P_g}{\partial t} &= -\bar{\nabla} \cdot \left(K_{AT} \bar{\nabla} T + K_{AS} \bar{\nabla} S + K_{AP} \bar{\nabla} P_g \right) \end{aligned} \quad [13]$$

2.4. Conditions aux limites

Ces limites sont les interfaces entre le milieu extérieur fluide et le domaine modélisé poreux. Ces conditions dépendent des phénomènes considérés se produisant sur ces surfaces lors du séchage en vapeur d'eau surchauffée.

- Du point de vue thermique, deux cas sont envisageables soit les échanges sur la surface sont purement convectifs (cas du séchage en air) soit ils sont modifiés par des phénomènes de condensation en surface (cas du séchage en vapeur d'eau surchauffée, en début de processus).
- Pour les transferts d'humidité, deux cas sont également possibles : soit l'humidité quitte le poreux uniquement sous forme vapeur, soit il y a également des phénomènes de perte en eau en phase liquide (pleurage).
- Suivant les configurations, il y a continuité de la pression de la phase gazeuse ou de la phase liquide à la surface. Ce dernier cas se produit durant le pleurage ou lorsque la condensation produit un film liquide continu sur la surface.

Pour établir des conditions aux limites on rencontre deux difficultés successives. La première réside dans l'identification des phénomènes de transferts paroi poreuse-fluide. La deuxième difficulté est la "traduction" ces phénomènes sous forme de relations adaptées à la résolution numérique. Compte tenu des spécificités des conditions sur ce type d'interface, il faut traiter ces difficultés au cas-par-cas. Dans la littérature, les conditions d'échange utilisées pour simuler le processus de séchage en vapeur d'eau surchauffée sont issues de plusieurs approches mais elles ne recouvrent que les transferts sous forme vapeur. Ceci s'explique aisément par le nombre limité de travaux expérimentaux sur le sujet, et par la méconnaissance des phénomènes spécifiques intervenant au début du séchage (condensation, pleurage).

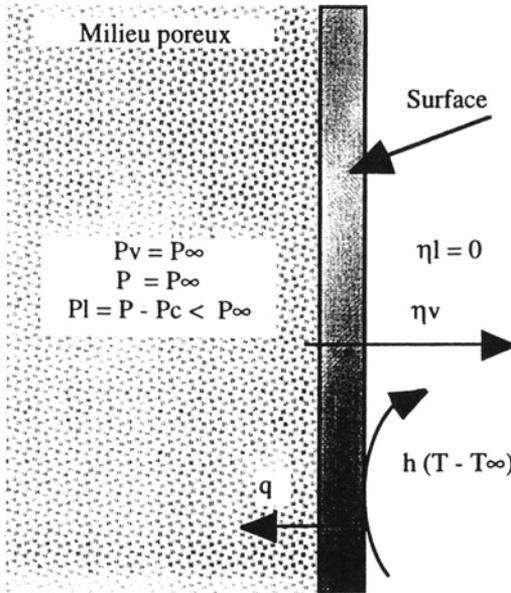


Figure 2. Etat de la surface lorsqu'il n'y a pas d'écoulement liquide.

L'indice ∞ correspond au fluide séchant, et \vec{n} représente la normale à la surface.

Les conditions aux limites que nous utilisons sont schématisées sur la figure 2 et détaillées ci-dessous. Les transferts d'humidité au travers de la surface n'ont lieu qu'en phase vapeur et il ne se produit pas de phénomènes de condensation en surface. L'apport d'énergie est donc effectivement convectif et cette condition se traduit sous la forme (14) pour le bilan énergie. Notons que les échanges radiatifs non négligeables du fait du niveau de température sont linéarisés et introduits dans le terme d'échange.

$$\left(\lambda \nabla T - L_v \vec{\eta}_v \right) \cdot \vec{n} = -h(T - T_\infty) \tag{14}$$

La continuité de la phase gazeuse nous conduit immédiatement à :

$$P_g = P_a + P_v = P_\infty \tag{15}$$

L'expression du flux de vapeur à la surface ne peut être obtenue directement par analogie avec les transferts de chaleur. En effet, les fractions massiques de vapeur sont égales à l'unité dans la vapeur séchante (par hypothèse) et, à la surface (sinon le flux serait infini). Nous avons retenu la forme suivante pour évaluer cette grandeur [PER 93] :

$$\vec{\eta}_v \cdot \vec{n} = K_c M_v \frac{2.2(\omega_v - \omega_{v,\infty})}{2.2 - \omega_v - \omega_{v,\infty}} \tag{16}$$

K_c est un facteur correctif provenant de la théorie du film qui devrait tendre vers l'infini dans le cas du séchage en vapeur d'eau surchauffée, puisque la résistance

externe au transfert s'annule. Néanmoins, cet auteur constate que des valeurs limitées (i.e. 11) de ce paramètre permettent d'obtenir un bon accord entre les valeurs calculées et les valeurs théoriques de la pression de vapeur à la surface. En exprimant la fraction massique de vapeur en fonction des variables de résolution cette relation devient :

$$\bar{\eta}_v \cdot \bar{n} = K_c M_v 2.2 \frac{\left(\frac{\Phi P_{vs}}{M_a P_g + (M_v - M_a) \Phi P_{vs}} - \omega_{v,\infty} \right)}{2.2 - \frac{\Phi P_{vs}}{M_a P_g + (M_v - M_a) \Phi P_{vs}} - \omega_{v,\infty}} \quad [17]$$

3. Formulation éléments finis

La résolution de ce système (13) par la méthode des éléments finis suit la même démarche que pour la résolution de l'équation de la chaleur. Nous utilisons la méthode de discrétisation des formes intégrales de type Galerkin [TOU 84; COM 94]. Nous utilisons donc un schéma centré stable pour des valeurs de Peclet de mailles inférieures à l'unité [DON 94]. Dans les applications envisagées dans notre étude le Peclet est toujours très inférieur à cette valeur critique.

3.1. Discrétisation spatiale

Les fonctions S , T et P_g sont évaluées par interpolation sur l'élément en fonction des valeurs nodales:

$$\begin{aligned} \{T\} &= \langle N_c \rangle \{T_{c_i}\} \\ \{S\} &= \langle N_c \rangle \{S_{c_i}\} \\ \{P_g\} &= \langle N_c \rangle \{P_{g,c_i}\} \end{aligned} \quad [18]$$

Malgré les fortes variations des fonctions inconnues de notre problème, les fonctions d'interpolations quadratiques sont moins efficaces que les fonctions linéaires. En comparant, sur un problème test*, les deux types d'interpolation, il apparaît qu'avec un nombre de noeuds égal les temps de calcul sont beaucoup plus longs avec des éléments quadratiques sans gain de précision significatif. C'est la complexité des coefficients des équations (13) qui entraîne cette augmentation du temps de calcul. Néanmoins, ce n'est pas ce problème qui est à l'origine du choix de l'ordre d'interpolation. Les éléments quadratiques génèrent des valeurs aberrantes des variables physiques qui sont induites par la nature de l'interpolation. Ces valeurs aberrantes entraînent une divergence immédiate de la solution.

Par exemple, la figure 3 schématise le profil de saturation interpolé sur des éléments linéaires et quadratiques au passage du "front" de saturation. Les valeurs non physiques qui apparaissent sur ce graphe ne sont liées qu'à l'ordre de l'interpolation. Ce type de profil se retrouve pour la température et la pression (zones isothermes/isobares bordées par des zones de très forts gradients).

En conséquence le choix d'une interpolation quadratique paraît particulièrement mal adapté aux problèmes physiques étudiés. Enfin, l'erreur induite par l'utilisation d'éléments linéaires (à nombre de noeuds égal) est relativement faible.

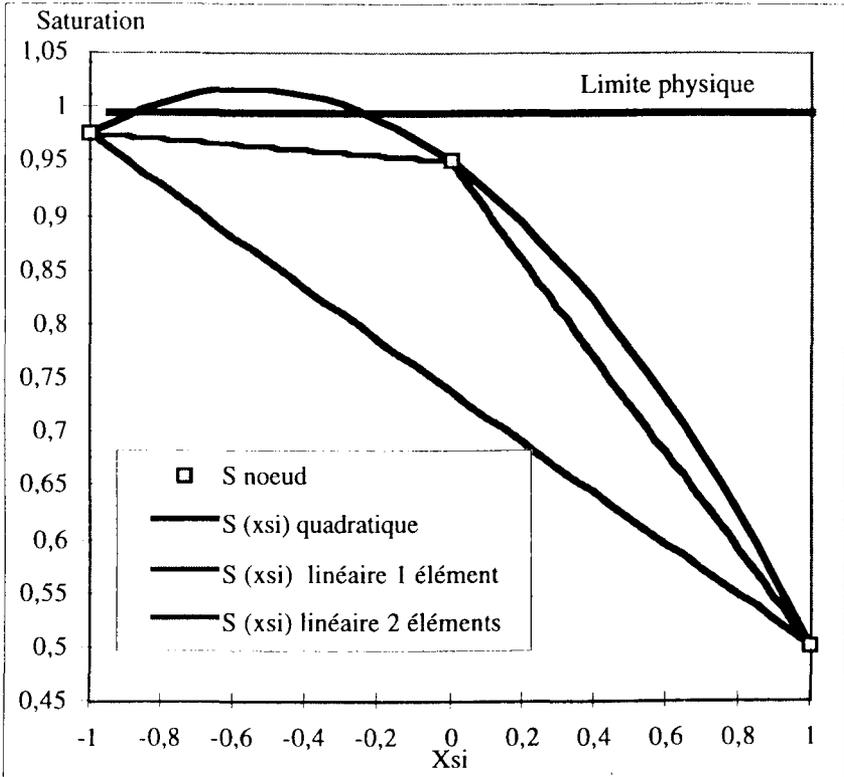


Figure 3. Valeurs de la saturation sur des éléments suivant le type d'interpolation (linéaire ou quadratique).

3.2. Résidus pondérés

Les résidus des équations (13) sont les quantités suivantes:

$$\begin{aligned}
 R^E(T) &= M_{ET} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{ES} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (K_{ET} \bar{\nabla} T + K_{ES} \bar{\nabla} S + K_{EP} \bar{\nabla} P_g) - \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} T \\
 R^M(S) &= M_{MT} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{MS} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \left(K_{MT} \bar{\nabla} T + K_{MS} \bar{\nabla} S + K_{MP} \bar{\nabla} P_g + \frac{k_l \rho_l}{v_l} \bar{g} \right) \\
 R^A(P_g) &= M_{AT} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{AS} \frac{\partial S}{\partial t} + M_{AP} \frac{\partial P_g}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (K_{AT} \bar{\nabla} T + K_{AS} \bar{\nabla} S + K_{AP} \bar{\nabla} P_g)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

La résolution des équations aux dérivées partielles (13) revient à rechercher les fonctions qui annulent les formes intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \delta T \rangle R^T(T) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \langle \delta S \rangle R^M(S) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \langle \delta P_e \rangle R^A(P_e) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad [20]$$

3.3. Formulation faible

Après intégration par parties la formulation faible s'écrit:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta T \left(M_{ET} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{ES} \frac{\partial S}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \delta T \cdot \left(K_{ET} \vec{\nabla} T + K_{ES} \vec{\nabla} S + K_{EP} \vec{\nabla} P_e \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{ET}} \delta T \left(K_{ET} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{ES}} \delta T \left(K_{ES} \vec{\nabla} S \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{EP}} \delta T \left(K_{EP} \vec{\nabla} P_e \cdot \vec{n} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \delta T \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T d\Omega = 0 \\ & \int_{\Omega} \delta S \left(M_{MT} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{MS} \frac{\partial S}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \delta S \cdot \left(K_{MT} \vec{\nabla} T + K_{MS} \vec{\nabla} S + K_{MP} \vec{\nabla} P_e \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{MT}} \delta S \left(K_{MT} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{MS}} \delta S \left(K_{MS} \vec{\nabla} S \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{MP}} \delta S \left(K_{MP} \vec{\nabla} P_e \cdot \vec{n} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \delta S \vec{\nabla} \cdot \frac{k_l \rho_l}{v_l} \vec{g} d\Omega = 0 \\ & \int_{\Omega} \delta P_e \left(M_{AT} \frac{\partial T}{\partial t} + M_{AS} \frac{\partial S}{\partial t} + M_{AP} \frac{\partial P_e}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \delta P_e \cdot \left(K_{AT} \vec{\nabla} T + K_{AS} \vec{\nabla} S + K_{AP} \vec{\nabla} P_e \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{AT}} \delta P_e \left(K_{AT} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{AS}} \delta P_e \left(K_{AS} \vec{\nabla} S \cdot \vec{n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{AP}} \delta P_e \left(K_{AP} \vec{\nabla} P_e \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad [21]$$

Les intégrales de contours font apparaître les conditions aux limites de type flux :

$$- \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \delta u_{\alpha} \left(K_{\alpha\beta} \vec{\nabla} u_{\beta} \cdot \vec{n} \right) d\Gamma_{\alpha\beta} \quad [22]$$

Le terme $\left(-K_{\alpha\beta} \vec{\nabla} u_{\beta} \cdot \vec{n} \right)$ représente le flux d'énergie et les flux de matière (air,

eau) pour $\alpha = E, A$ et M , dûs respectivement au gradient de température, de saturation ou de pression pour $u_\beta = T, S$, et P_g .

3.4. Discrétisation des formes intégrales

Après introduction des fonctions d'interpolations (2) dans (21), nos équations s'écrivent alors sous forme matricielle :

$$W^\alpha = \sum_c^{NEL} \left(\langle \delta u_{c\alpha} \left(\sum_\beta^{T,S,P_g} [M_{\alpha\beta}] \{u_{c\beta}\} + \sum_\beta^{T,S,P_g} [K_{\alpha\beta}] \{u_{c\beta}\} + \sum_\beta^{T,S,P_g} \{f_\alpha\} \right) \right) \quad [23]$$

Les matrices $[M_{\alpha\beta}]$, $[K_{\alpha\beta}]$, et les vecteurs $\{f_{\alpha\beta}\}$ sont les grandeurs élémentaires du système et sont explicités au § 3.5.

Le couplage existant entre les trois équations complique la résolution de notre système. Deux stratégies sont possibles. La première consiste à résoudre chaque système séparément. Cette approche présente de nombreux avantages : système de taille réduite, expression matricielle simplifiée. Mais l'expérience a montré que dans le cas de couplages forts avec de fortes variations des coefficients, cette approche découplée est peu robuste [BON 91]. Nous avons donc choisi la deuxième stratégie qui consiste à regrouper les équations (23) en un seul système global.

$$[M(U)] \{\dot{U}\} + [K(U)] \{U\} - \{F(U)\} = 0 \quad [24]$$

où $\{U\}$ est la table des valeurs des degrés de liberté : Température, Saturation et

Pression aux noeuds du maillage : $\{U\} = \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{S\} \\ \{P_g\} \end{Bmatrix}$ et $\{\dot{U}\}$ la table de leurs dérivées

par rapport au temps. Les inconnues étant regroupées dans une matrice globale, le vecteur d'interpolation N devient la matrice N :

$$\begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{S\} \\ \{P_g\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{NN} N_i T_i \\ \sum_{i=1}^{NN} N_i S_i \\ \sum_{i=1}^{NN} N_i P_{g_i} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \dots N_i \dots N_{NN} & 0 \dots 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots 0 & N_1 \dots N_i \dots N_{NN} & 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \dots 0 & N_1 \dots N_i \dots N_{NN} \end{bmatrix}}_{[N]} \begin{Bmatrix} \{T_i\} \\ \{S_i\} \\ \{P_i\} \end{Bmatrix} \quad [25]$$

3.5. Expression des grandeurs élémentaires

La matrice masse est le résultat de l'assemblage des matrices masses élémentaires. Celles-ci sont calculées par arrangement des matrices masses relatives à chaque équation et chaque degré de liberté soit :

$$[M] = \sum_{c=1}^{NEL} \begin{bmatrix} [M_{ET}]_c & [M_{ES}]_c & 0 \\ [M_{MT}]_c & [M_{MS}]_c & 0 \\ [M_{AT}]_c & [M_{AS}]_c & [M_{AP_g}]_c \end{bmatrix} \quad [26]$$

Les lignes correspondent ainsi aux équations de l'énergie, de bilan masse sur l'eau et sur l'air alors que les colonnes sont relatives aux degrés de liberté, Température, Saturation et Pression. Soit pour $\alpha = E, M, A$ et $\beta = T, S, P_g$:

$$[M_{\alpha\beta}]_c = \int_{\Omega_c} M_{\alpha\beta} \{N_{c\alpha}\} \langle N_{c\beta} \rangle d\Omega_c \quad [27]$$

La matrice de rigidité du système aura la forme suivante :

$$[K] = \sum_{c=1}^{NEL} \begin{bmatrix} [K_{ET}^d + K_{ET}^c]_c & [K_{ES}^d]_c & [K_{EP_g}^d]_c \\ [K_{MT}^d + K_{MT}^g]_c & [K_{MS}^d + K_{MS}^g]_c & [K_{MP_g}^d]_c \\ [K_{AT}^d]_c & [K_{AS}^d]_c & [K_{AP_g}^d]_c \end{bmatrix} \quad [28]$$

Nous avons ici deux types de contributions correspondant à des phénomènes physiques différents, celles données par les termes diffusifs (exposant d) et celles dues aux termes convectifs (exposant c) dans l'équation de l'énergie et celles induites par la gravité dans l'équation de bilan masse sur l'eau (exposant g). Les contributions diffusives s'écrivent sous forme élémentaire pour $\alpha = E, M, A$ et $\beta = T, S, P_g$:

$$[K_{\alpha\beta}^d]_c = \int_{\Omega_c} \left[\left\langle \frac{\partial N_{c\alpha}}{\partial x} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N_{c\alpha}}{\partial y} \right\rangle \right] \overline{\overline{K}}_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_{c\beta}}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N_{c\beta}}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} d\Omega_c \quad [29]$$

Pour la convection dans l'équation de l'énergie, le vecteur $\overline{\overline{V}}$, explicité en annexe I, est la somme des vitesses massiques des phases multipliées par leurs capacités calorifiques.

$$[K_{ET}^c]_c = \int_{\Omega_c} \{N_c\} \left(V_x \left\langle \frac{\partial N_c}{\partial x} \right\rangle + V_y \left\langle \frac{\partial N_c}{\partial y} \right\rangle + V_z \left\langle \frac{\partial N_c}{\partial z} \right\rangle \right) d\Omega_c \quad [30]$$

Les termes induits par la gravité dans l'équation de bilan masse sur l'eau sont formés par les produits scalaires du vecteur gravité avec les gradients des variables :

$$[K_{MT}^g]_c = \int_{\Omega_{c...}} \{N_c\} \left(- \frac{\partial \bar{\xi}_{\Delta g}}{\partial T} |\bar{g}| \left\langle \frac{\partial N_c}{\partial z} \right\rangle \right) d\Omega_c$$

$$[K_{MS}^g]_c = \int_{\Omega_c} \{N_c\} \left(- \frac{\partial \bar{\xi}_{\Delta g}}{\partial S} |\bar{g}| \left\langle \frac{\partial N_c}{\partial z} \right\rangle \right) d\Omega_c \quad [31]$$

Enfin, le vecteur sollicitation qui comprend les termes sources volumiques de matière et d'énergie ainsi que les conditions aux limites de flux, sera exprimé de manière suivante :

$$\{F(U)\} = \sum_{e=1}^{NEL} \left\{ \begin{matrix} \{F_{Te}\} \\ \{F_{Se}\} \\ \{F_{Pg}\} \end{matrix} \right\} = \sum_{e=1}^{NEL} \left\{ \begin{matrix} \int_{\Gamma_c} \{N_{cT}\} \dot{Q}_E d\Gamma_c \\ \int_{\Gamma_c} \{N_{cS}\} \dot{Q}_M d\Gamma_c \\ \int_{\Gamma_c} \{N_{cPg}\} \dot{Q}_A d\Gamma_c \end{matrix} \right\} + \{F_{CL}\} \quad [32]$$

3.6. Discrétisation des conditions aux limites

Pour la simulation du séchage, les conditions aux limites présentent des difficultés importantes. Ces conditions aux limites sont de deux types, flux ou Dirichlet. Il convient d'abord de différencier les conditions de symétries des autres conditions aux limites.

3.6.1. Les conditions de symétries.

Les conditions de symétries proviennent de considérations sur la configuration géométrique du matériau et sur les transferts. Elles se traduisent simplement par la nullité des flux sur les surfaces de symétrie. Ces conditions sont simples, identiques pour toutes les variables et fixes au cours du temps ; elles n'introduiront de difficultés supplémentaires ni pour l'analyse ni pour la résolution. Dans le système éléments finis un flux nul est une condition implicite car elle se traduit par la disparition des termes (20) sur les frontières concernées.

3.6.2. Les conditions aux limites sur les autres surfaces

Les conditions aux limites s'écrivent dans ce cas à partir des relations (14, 17, 15).

Sur l'équation de l'énergie, la condition de flux convectif, classée en éléments finis, conduit à rajouter au système une matrice et un vecteur second membre:

$$\begin{aligned} [K_{ET}]_e &= \int_{\Gamma_e} \{N_e\} h \cdot d\Gamma_e \\ \{F_{TCL}\}_e &= \int_{\Gamma_e} \{N_e\} h T_\infty \cdot d\Gamma_e \end{aligned} \quad [33]$$

La condition de flux imposé sur l'équation de conservation de la masse d'eau conduit à l'ajout du vecteur second membre:

$$\{F_{SCL}\}_e = \int_{\Gamma_e} \{N_e\} \left(K_c M_v 2.2 \frac{\left(\frac{\Phi P_{vs}}{M_a P + (M_v - M_a) \Phi P_{vs}} - \omega_{v,\infty} \right)}{2.2 - \frac{\Phi P_{vs}}{M_a P_g + (M_v - M_a) \Phi P_{vs}} - \omega_{v,\infty}} \right) d\Gamma_e \quad [34]$$

Ce flux dépend de la température de la saturation et de la pression. Cette condition se traduit numériquement par une non-linéarité supplémentaire du système.

Sur l'équation de conservation de la masse d'air on impose une condition de Dirichlet. Elle se traduit par une disparition des équations relatives aux noeuds de frontières imposés.

3.6. Schéma temporel

Le système matriciel (21) est discrétisé en temps par un schéma implicite ou semi-implicite de Euler.

$$\left[M(U_{t+\zeta\Delta t}) \right] \left(\frac{\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\}}{\Delta t} \right) + \left[K(U_{t+\zeta\Delta t}) \right] \{U_{t+\zeta\Delta t}\} - \{F(U_{t+\zeta\Delta t})\} = 0 \quad [35]$$

La simulation complète du séchage comporte des phases critiques durant lesquelles les coefficients varient fortement et d'autres phases où ces coefficients sont plus stables. Pour assurer la convergence du système durant ces phases critiques sans augmenter inutilement les temps de calcul, il est nécessaire d'utiliser un algorithme de pas autoadaptatif. Les techniques généralement utilisées sont basées sur la détermination des temps caractéristiques de diffusion. Dans le cas du séchage, cette démarche n'est pas applicable. En effet, il faudrait déterminer neuf temps

caractéristiques de diffusion, un par inconnue et par équation. Le calcul de ces temps caractéristiques est long et difficile du fait des fortes variations spatio-temporelles des coefficients.

Un algorithme purement numérique, appliqué au séchage en air humide, a été proposé par [COU 95]. Cet auteur présente également une revue des principaux critères utilisés pour gérer l'ajustement du pas de temps dans les codes de simulation du séchage. Nous avons implanté une méthode similaire de pas autoadaptatif [TOP 95]. Cet algorithme consiste à fixer un nombre d'itérations maximum N_{\max} au-delà duquel le calcul est repris au pas précédent en diminuant le pas de temps d'un coefficient κ^- . Si le nombre d'itérations est inférieur à un minimum N_{\min} le pas de temps suivant est augmenté d'un coefficient κ^+ . Dans les autres cas ($N_{\min} < \text{nombre d'itérations} < N_{\max}$) le pas reste inchangé. Cette approche s'est révélée très efficace une fois les paramètres N et κ déterminés empiriquement.

Cette méthode ne nécessite pas de calculs supplémentaires pour l'ajustement du pas de temps. D'autre part, en cas de divergence le nombre d'itérations inutiles est limité à N_{\max} . Bien que le choix des multiplicateurs du pas de temps soit empirique, les valeurs ($\kappa_0^- = 1/2$ et $\kappa_0^+ = 3/2$) se sont révélées efficaces dans tous les problèmes testés. Les valeurs optimales des κ sont toujours proches des valeurs de κ_0 .

3.7. Résolution du système matriciel

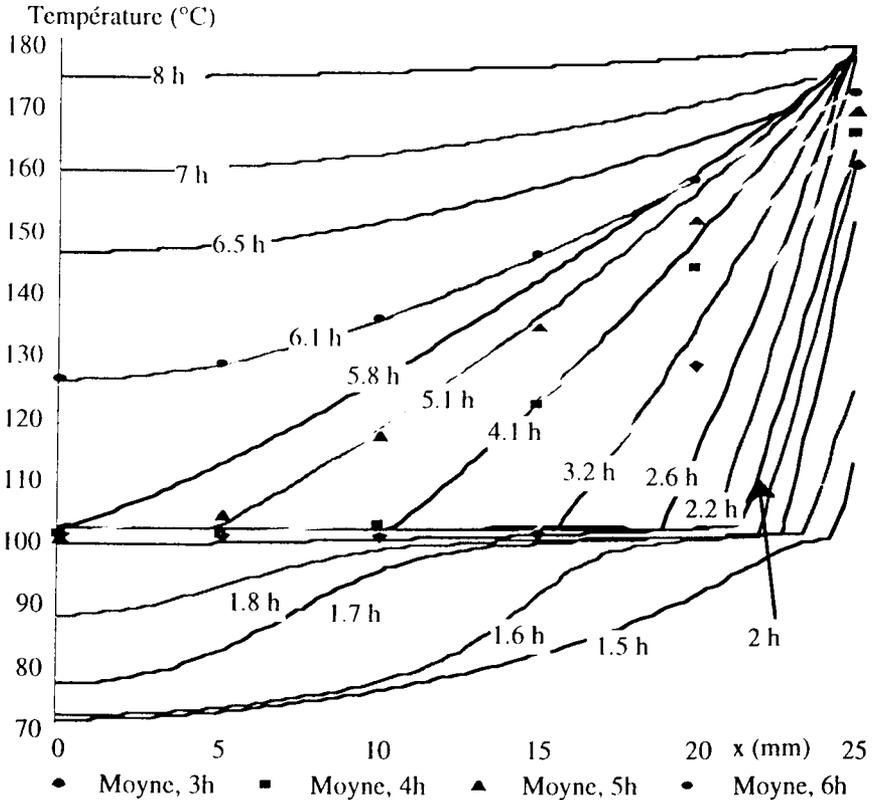
A chaque pas de temps, le système (24) non linéaire est résolu par une méthode de substitution [TOU 84]. Une comparaison avec la méthode de Newton Raphson fait apparaître que celle-ci n'est pas adaptée à notre problème. Le calcul de la matrice tangente se révèle très long car les expressions des dérivées des coefficients sont complexes. Sur les exemples que nous avons traités, la rapidité de convergence de Newton Raphson n'a jamais compensé le surcoût de temps de calcul occasionné par l'expression de la matrice tangente. De plus, cette méthode s'est révélée peu robuste. Il est difficile de fournir une solution initiale dans le rayon de convergence, surtout lors des phases critiques. Ces difficultés de convergence ont pour origine l'expression de la matrice tangente. En effet, cette matrice est constituée de dérivées des coefficients de la matrice de rigidité. Ces coefficients sont eux mêmes des fonctions de grandeurs expérimentales et de leurs dérivées. La matrice tangente comprend des dérivées secondes de lissage de valeurs expérimentales. Elle peut prendre des valeurs très éloignées de la réalité. Dans certains cas, ces valeurs sont même aberrantes ou non définies, ce qui conduit à une divergence rapide du système.

4. Résultats

4.1 Comparaison avec un cas monodimensionnel de la littérature

Nous comparons nos résultats à ceux proposés par [MOY 85]. En effet, cet auteur présente une modélisation par éléments finis monodimensionnelle du séchage convectif en vapeur d'eau surchauffée d'un béton cellulaire autoclavé. Il obtient

qualitativement un bon accord simulation-expérience. Il s'agit d'une plaque plane infinie d'épaisseur 0.05 m soumise à un échange convectif de chaleur sur ses deux faces, le coefficient d'échange est fixé à $h = 50 \text{ W/m}^2/\text{°C}$. La pression totale en phase gazeuse est fixée à la pression atmosphérique. La température du fluide séchant est de 180 °C . L'auteur ne précise pas la configuration du maillage. Pour notre part, nous avons utilisé un maillage régulier constitué de 100 éléments. Nous obtenons un bon accord avec les résultats proposés par Moyne (figure 4). Les profils de température, pression et saturation sont similaires. Quelques écarts temporels sont cependant observables. Nos résultats conduisent à une durée légèrement plus grande du séchage. L'écart reste toujours faible, il est au maximum de 5 % en début de simulation : 2h06 pour 2 h.



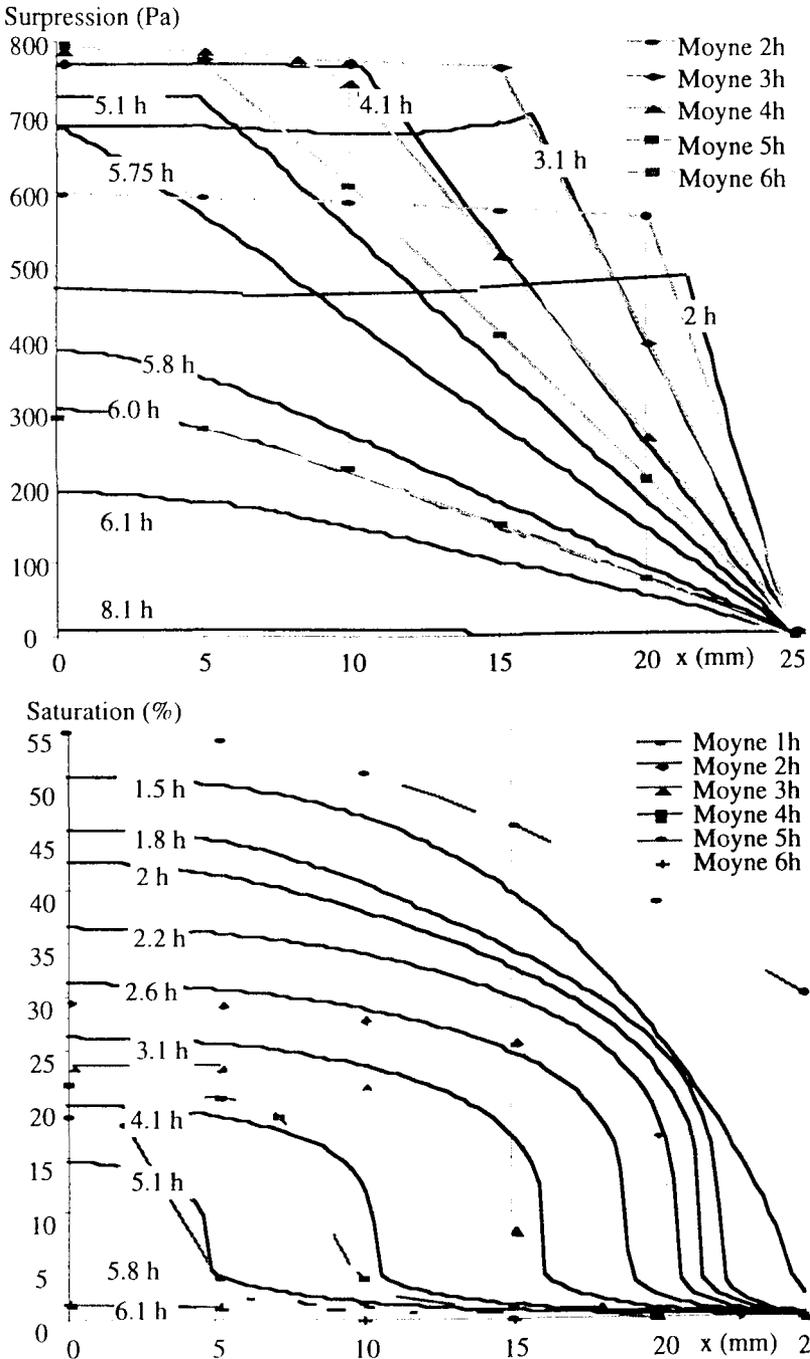


Figure 4.- Evolution des profils de température , de pression et de saturation au cours de séchage. Comparaison de nos résultats avec ceux de [MOY 87]

Cet écart s'atténue au cours du temps. Ceci peut s'expliquer au travers des différences entre les deux simulations. Tout d'abord, les conditions initiales que nous avons utilisées sont obtenues par interpolation graphique sur les figures données par cet auteur. De plus, les expressions phénoménologiques ne sont pas toutes strictement identiques. Enfin, les maillages sont probablement différents.

Nous avons évalué la qualité des solutions obtenues en vérifiant la conservation de l'énergie par le système. En moyenne, l'écart est d'environ 1%. En revanche au cours des pas de temps nous pouvons observer des écarts instantanés plus importants durant les phases critiques. Cet écart reste toujours inférieur à 10%.

4-2- Cas bidimensionnel : Etude du séchage convectif d'un cylindre en vapeur d'eau surchauffée.

Nous modélisons la configuration étudiée expérimentalement [TOP 95, 96]. Il s'agit du séchage de cylindres de béton cellulaire autoclavé placés dans un courant de vapeur d'eau surchauffée. Nous ne simulons que la moitié de la section médiane horizontale par raison de symétrie.

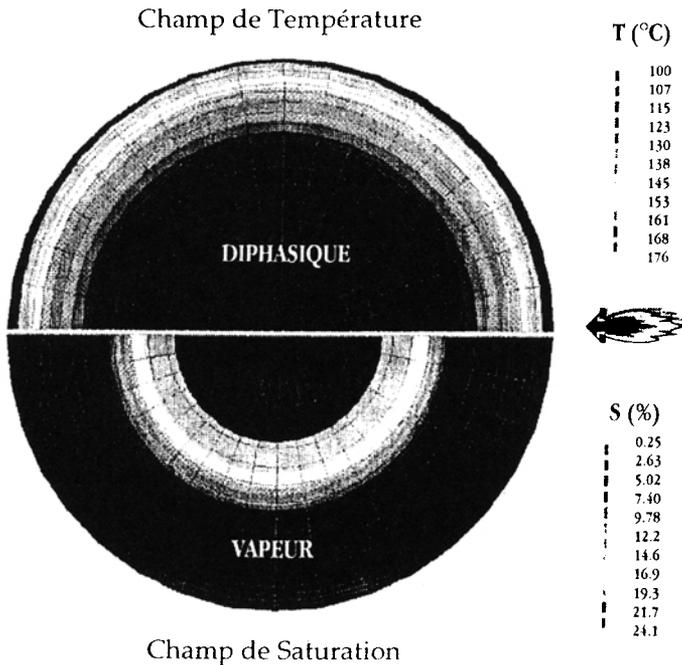


Figure 5. Champs de température et de saturation dans la section médiane horizontale de l'échantillon.

Maillage : 360 éléments de surface (T3 et Q4) ; 18 éléments de bord (L2)

Quatre tailles de cylindres ($D = 100, 50, 30, 10$ mm) sont étudiées, dans des conditions de séchage identiques : $T_{\infty} = 180$ °C, $V_{\infty} = 5$ m/s. La structure du

maillage utilisé est la même pour toutes les tailles. Le volume est maillé avec 360 éléments linéaires T3 et Q4. La surface du cylindre est maillée avec 18 éléments d'échange de type L2.

Les conditions initiales sont obtenues à partir des résultats expérimentaux. Les échantillons sont supposés isothermes à température ambiante ($T_{init} = 20\text{ °C}$), la pression est supposée uniforme et égale à la pression atmosphérique ($P_{init} = 101325\text{ Pa}$), le taux d'humidité, déduit de l'expérience, est supposée uniforme ($S_{init} = 0.4$). Nous avons choisi d'initier tous les calculs avec des conditions identiques afin de faciliter la comparaison des résultats numériques. Du fait de la géométrie cylindrique le coefficient d'échange de chaleur varie avec l'azimut. Celui-ci est déterminé à partir de la corrélation de Zukauska pour la valeur moyenne et à partir de celle proposée par Martinelli pour les variations azimutales dans la plage 0 - 80 degrés [KNU 58]. Nous avons utilisé une variation linéaire dans la plage 80 - 180 degrés [TOP 95].

Nous présentons les évolutions de température sur l'axe central de l'éprouvette ainsi que les évolutions de la pression au centre de l'échantillon et de l'humidité moyenne. Nous obtenons qualitativement un bon accord entre les résultats simulés et expérimentaux. Les allures des évolutions de pression et de température sont similaires. Néanmoins, la pression est surestimée par rapport aux résultats expérimentaux. Ceci est vraisemblablement dû à une mauvaise estimation du facteur correctif K_c dans la condition aux limites (34). Pour le vérifier il faudrait utiliser un facteur proportionnel aux coefficients d'échange de chaleur local. En effet dans le cas monodimensionnel cette surestimation de la pression n'apparaît pas.

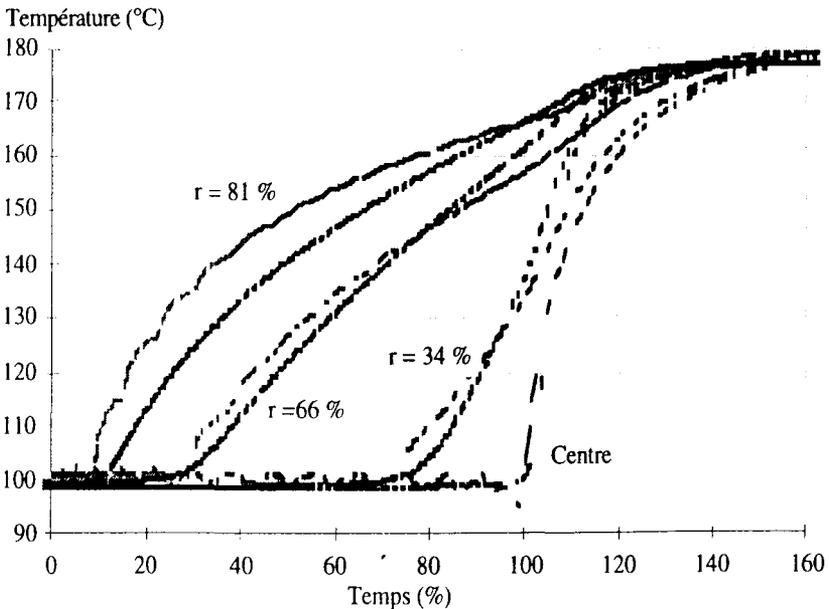


Figure 6. Profil de température sur l'axe de symétrie de la section
 Comparaison Expérience - Numérique

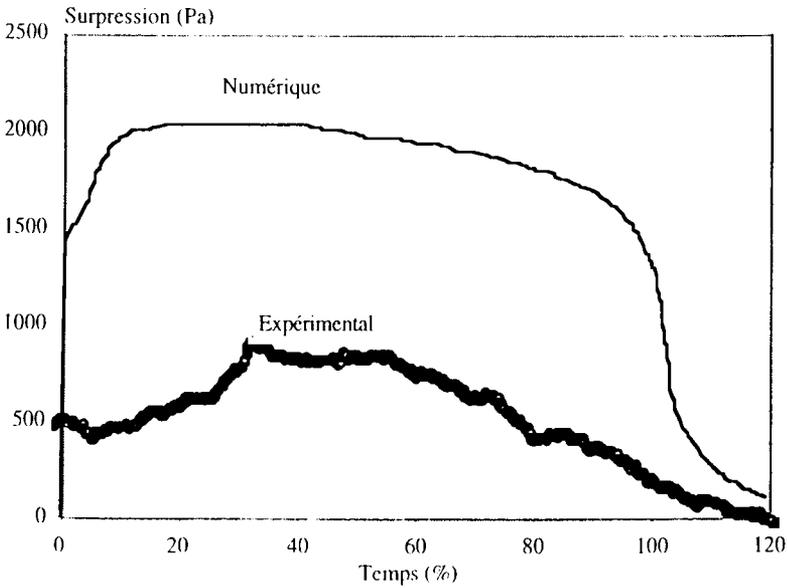


Figure 7. Evolution temporelle de la pression au centre de l'échantillon
Comparaison Expérience - Numérique

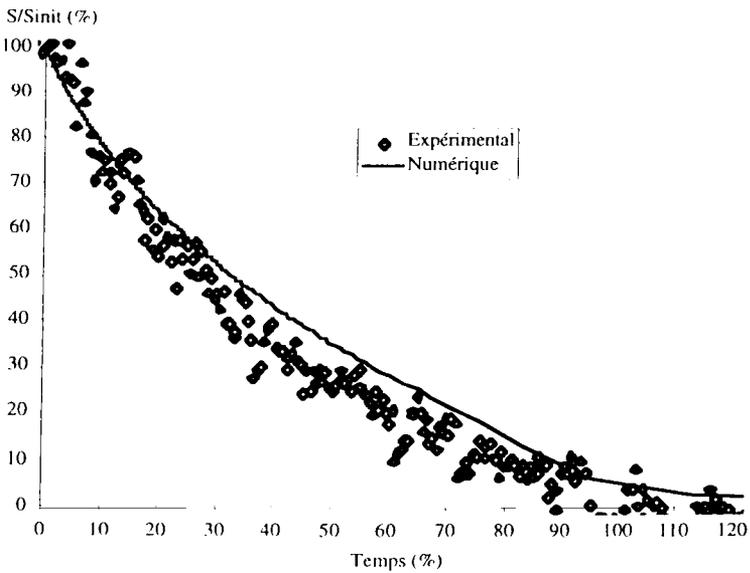


Figure 8. Evolution temporelle de la saturation moyenne.
Comparaison Expérience - Numérique

5. Conclusions.

Nous avons développé un modèle des phénomènes de transferts avec changement de phase en milieu poreux. La résolution du système d'équations non-linéaires couplées est effectuée par la technique des éléments finis dans une configuration bidimensionnelle. Nous avons intégré une méthode d'adaptation du pas de temps.

Nous avons validé notre code de calcul sur un cas issu de la littérature. Nous l'avons ensuite appliqué à notre configuration expérimentale. Un bon accord qualitatif est obtenu.

Cette approche doit être approfondie en vue de mieux prendre en compte les conditions aux limites. Etant donné la complexité du système d'équations à résoudre et la méconnaissance des lois physiques qui sous-tendent cette approche, il est nécessaire de confronter ces résultats avec d'autres développements dans la configuration bidimensionnelle et pour l'imbibition et l'ébullition dans un canal poreux.

Il serait de plus possible d'améliorer la convergence en utilisant une méthode de Newton-Raphson modifiée. Seuls les termes les plus significatifs seraient pris en compte dans la matrice tangente. Elle permettrait une bonne vitesse de convergence sans augmentation excessive du temps de calcul.

Références

- [AUR 89] Auriault J. L. and Caillerie D. (1989). "Quelques remarques sur les méthodes d'homogénéisation." Rev. fran. de géotechnique Vol 49: pp 43-50.
- [BAR 90] Barrere J. (1990). Modélisation des écoulements de Stokes et Navier-Stokes en milieu poreux. Thèse, Bordeaux I.
- [BAS 85] Basilico C. (1985). Le sechage convectif a haute temperature du bois massif. Thèse d'état INP Lorraine.
- [BAV 84] Baveye P. and Sposito G. (1984), "The operational significance of the continuum hypothesis in the theory of water movement through soils and aquifers." Water Resources Research Vol 20, N° 5: pp 74-102.
- [BON 91] Bonneau P. (1991), "Modélisation du séchage d'un matériau hétérogène : Application à un bois de résineux", Thèse, Bordeaux I.
- [BRU 80] Bruin S. and Luyben K. (1980). "Drying of food materials: A review of recent developments." Drying'80 : pp 155-215.
- [COM 94] Comini G., Del Giudice S. and Nomino C. (1994). Finite Element Analysis in Heat Transfer, Basic Formulation and Linear Problem. Saylor and Francis.
- [COU 95] Couture F. (1995). Modélisation fine d'un problème de séchage. Thèse Bordeaux I.
- [DEF 51] Defay R. and Prigogine I. (1951). Traité de thermodynamique Tome 3 "Tension Superficielle et adsorption". Liege, Editions Desoer.

- [GUY 88] Guyon E. (1988). "Matériaux fortement hétérogènes: effets d'échelles et lois de comportement..." Material and structures : pp 97 - 105.
- [KAL 88] Kalaydjian F (1988). Couplage entre phases fluides dans les écoulements diphasiques en milieux poreux. Thèse, Bordeaux I.
- [KAV 92] Kaviany M (1992). Principles of heat transfer in porous media. Springer-Verlag.
- [KNU 58] Knudsen J.G. and Katz D.L., (1958) *Fluid dynamic and Heat transfer..* Mac graw hill Compagny.
- [MAR 82] Marle C. (1982). "on macroscopic equation governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media." int j eng sci 20 n°5:
- [MOY 87] Moyne C. (1987). Transferts couples chaleur-masse lors du séchage: prise en compte du mouvement de la phase gazeuse. INP Lorraine.
- [PER 90] Perre P. and Basilico C. (1990). "Simulation par volumes finis des transferts couples en milieux poreux anisotropes : séchage du bois à basse et haute température." Int. J. Heat Mass Transfer 33, N° 11: pp 2463 - 2478.
- [PER 93] Perre P., Moser M. and Martin M. (1993). "Advances in transport phénoména during convective drying with superheated steam and moist air." Int. J. Heat Mass Transfer 36, N° 11: pp 2725 - 2446.
- [QUI 86] Quintard M. and Puiggali J.R. (1986). "Numerical modelling of transport processes during the drying of a granular porous medium." Heat and Technology 2(4): pp 37-57.
- [QUI 91] Quintard M. and Whitaker S. (1991). Transport Process in ordered and disordered porous media. 1991 ICHMT International Seminar on heat and mass transfer in porous media, Hemisohere pub corporation.
- [TOP 95] Topin F. (1995). Etude expérimentale et numérique du séchage de particules en vapeur d'eau surchauffée. Thèse, Université de Provence.
- [TOP 96] Topin F. and Tadriss L., Analysis of transport phenomena during convective drying in superheated steam. *Drying Technology Journal*. 1996.
- [TOU 84] Touzot G. and Dhatt G., (1984). Une présentation de la méthode des éléments finis. Paris, Maloine S.A. Editeur.
- [TUR 91] Turner I. W. (1991). The modelling of combined microwave and convective drying of wet porous material. Dept. Mech. Eng. University of Queensland.
- [WHI 77] Whitaker S. (1977). Heat, mass and momentum transfer in porous media: a theory of drying. New York, Academic press.
- [WHI 86] Whitaker S. (1986). "Flow in porous media I: A théoretical dérivation of Darcy's law." *Transport in Porous Media Vol 1, N° 1*: pp 3-25.

Glossaire

$d\Gamma$	Surface élémentaire de Γ	
$d\Omega$	Volume élémentaire	
$\{f_{\alpha\beta}\}$	Vecteur des sollicitations de l'équation de conservation α	
$F(S)$	Pression capillaire adimensionnée	
$\{F(U)\}$	Vecteur second membre global du système	
$\overline{\overline{K}}_i = \overline{\overline{K}}_{sat} k_{ri}$	Tenseur de perméabilité effective de la phase i ,	en m^{-2}
k_{ri}	Perméabilité relative de la phase i	
K_{sat}	Perméabilité intrinsèque du milieu	en m^{-2}
$[K(U)]$	Matrice de rigidité globale du système	
$[K_{\alpha\beta}]$	Matrice de rigidité de l'équation de conservation α de diffusion de l'inconnue β	
$\overline{\overline{K}}_{\alpha\beta}$	Tenseur de diffusivité du degré de liberté β dans l'équation α	
L_v	Enthalpie de changement de phase liquide-vapeur	J/kg
\dot{m}	Taux de changement de phase	en $kg/s\ m^3$
M_i	Masse molaire du composant i	kg/mole
$[M(U)]$	Matrice masse globale du système	
$[M_{\alpha\beta}]$	Matrice masse de l'équation de conservation α de l'inconnue β	
$\langle N \rangle$ ou $\{N\}$	Vecteurs des fonctions d'interpolations	
NEL	Nombre total d'éléments	
$\{Pg_i\}$	Vecteur des pressions nodales	en Pa
P_{vs}	Pression de vapeur saturante	en Pa
\dot{Q}_E	Source d'énergie	en $J/s\ m^3$
\dot{Q}_M	Source d'eau	en $kg/s\ m^3$
\dot{Q}_A	Source d'air	en $kg/s\ m^3$
R^E	Résidu de l'équation de l'énergie	
R^M	Résidu de l'équation de conservation de la masse d'eau	
R^A	Résidu de l'équation de conservation de la masse d'air	
$\{S_i\}$	Vecteur des saturations nodales	
T	Température	en K
$\{T_i\}$	Vecteur des températures nodales	en K

$\{\hat{u}_\alpha\}$	Vecteur des valeurs nodales de la dérivée temporelle de l'inconnue de l'équation de conservation α .	
W^E	Forme intégrale des résidus pondérés de l'équation de l'énergie	
W^M	Forme intégrale des résidus pondérés de l'équation de conservation de la masse d'eau	
W^A	Forme intégrale des résidus pondérés de l'équation de conservation de la masse d'air	
ζ	Coefficient de la méthode d'intégration de Euler	
δP_g	Première variation de l'inconnue P_g	
δS	Première variation de l'inconnue S	
δT	Première variation de l'inconnue T	
δu	Première variation de l'inconnue u	
$\langle \delta u_{e\alpha} \rangle$	Vecteur des premières variations de l'inconnue α au noeuds de l'élément e	
$\langle \delta u_{e\alpha} \rangle$	Vecteur de l'inconnue α au noeuds de l'élément e	
Δt	Pas de temps	
ϵ	Porosité du milieu	
Γ	Limite du domaine Ω	
$\Gamma_{E\beta}$	Limite du domaine où interviennent des conditions de flux d'énergie Ω dues au gradient de β	
$\Gamma_{M\beta}$	Limite du domaine où interviennent des conditions de flux d'eau Ω dues au gradient de β	
$\Gamma_{A\beta}$	Limite du domaine où interviennent des conditions de flux d'air Ω dues au gradient de β	
$\bar{\lambda}$	Tenseur de conductivité thermique effectif du milieu	en W/mK
$\bar{\eta}_\alpha$	Vitesse massique du fluide α .	en kg/s m ²
Φ	Réduction de pression due aux effets de sorption.	
$\langle \psi \rangle$	Fonctions de pondérations	
ν_i	Viscosité cinématique de la phase i	m ² s
ρ_α	Masse volumique du composant α	en kg/m ³
σ	Tension interfaciale	en N/m
Ω	Domaine modélisé	
ω_v	Fraction massique de vapeur dans le gaz	

ANNEXE I : Développement des coefficients des équations [13]

Expression des vitesses massiques.

Celles-ci sont déduites de la loi de Darcy généralisée [11]. Pour l'eau liquide, P_l est remplacée par son expression en fonction de la saturation et de la pression en phase gazeuse par le biais de la pression capillaire. P Pour la vapeur et l'air la diffusion binaire vient s'ajouter au mouvement global de la phase gazeuse. En développant selon les variables choisies, il vient pour $\alpha = l, a, v$

$$\bar{\eta}_\alpha = \bar{\xi}_{\alpha t} \bar{\nabla} T + \bar{\xi}_{\alpha s} \bar{\nabla} S + \bar{\xi}_{\alpha p} \bar{\nabla} P_g + \bar{\xi}_{\alpha g} \bar{g} \tag{36}$$

avec :

$$\bar{\xi}_{\alpha t} = \frac{\bar{K}_l}{v_l} \frac{\partial P_c}{\partial T} \quad \bar{\xi}_{\alpha s} = \frac{\bar{K}_l}{v_l} \frac{\partial P_c}{\partial S} \quad \bar{\xi}_{\alpha p} = -\frac{\bar{K}_l}{v_l} \quad \bar{\xi}_{\alpha g} = \rho_l \frac{\bar{K}_l}{v_l} \tag{37}$$

Pour les composants gazeux la gravité a été négligée et :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{\alpha t} &= \frac{\bar{D} M_a M_v \Phi P_g \frac{\partial P_{vs}}{\partial T}}{R T \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} \\ \bar{\xi}_{\alpha s} &= \frac{\bar{D} M_a M_v P_{vs} P_g \frac{\partial \Phi}{\partial S}}{R T \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} \\ \bar{\xi}_{\alpha p} &= \frac{-\bar{D} M_a M_v P_{vs} P_g \Phi}{R T \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} \frac{\bar{k}_g M_v P_{vs} \Phi}{v_g \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} \\ \bar{\xi}_{\alpha t} &= \frac{-\bar{D} M_a M_v \Phi P_g \frac{\partial P_{vs}}{\partial T}}{R T \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} \\ \bar{\xi}_{\alpha s} &= \frac{-\bar{D} M_a M_v P_{vs} P_g \frac{\partial \Phi}{\partial S}}{R T \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} \\ \bar{\xi}_{\alpha p} &= \frac{\bar{D} M_a M_v P_{vs} P_g \Phi}{R T \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} + \frac{\bar{k}_g M_a (P_{vs} \Phi - P_g)}{v_g \left((M_a - M_v) \Phi P_{vs} - M_a P_g \right)} \end{aligned} \tag{38}$$

Les coefficients "K" des dérivées spatiales des variables sont tirés des expressions de ces vitesses massiques. Notons que la double barre indiquant un tenseur a été omise pour ces coefficients afin de ne pas alourdir inutilement les notations.

$$\begin{aligned}
 K_{ET} &= -\bar{\lambda} + L_v \bar{\xi}_{vt} \\
 K_{ES} &= L_v \bar{\xi}_{vs} \\
 K_{EP} &= L_v \bar{\xi}_{vp} \\
 K_{MT} &= \bar{\xi}_{at} + \bar{\xi}_{vt} \\
 K_{MS} &= \bar{\xi}_{as} + \bar{\xi}_{vs} \\
 K_{MP} &= \bar{\xi}_{ap} + \bar{\xi}_{vp} \\
 K_{Mg} &= \bar{\xi}_{g} \\
 K_{AT} &= \bar{\xi}_{at} \\
 K_{AS} &= \bar{\xi}_{as} \\
 K_{AP} &= \bar{\xi}_{ap}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Pour la convection dans l'équation de l'énergie, le vecteur \vec{V} est la somme des vitesses massiques des phases multipliées par leurs capacités calorifiques :

$$\vec{V} = -\bar{\eta}_l C_{p_l} - \bar{\eta}_v C_{p_v} - \bar{\eta}_a C_{p_a} \tag{40}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \vec{V} &= - \left(C_{p_l} \bar{\xi}_{at} + C_{p_v} \bar{\xi}_{vt} + C_{p_a} \bar{\xi}_{at} \right) \vec{V} T \\
 &\quad - \left(C_{p_l} \bar{\xi}_{as} + C_{p_v} \bar{\xi}_{vs} + C_{p_a} \bar{\xi}_{as} \right) \vec{V} S \\
 &\quad - \left(C_{p_l} \bar{\xi}_{ap} + C_{p_v} \bar{\xi}_{vp} + C_{p_a} \bar{\xi}_{ap} \right) \vec{V} P_g - C_{p_l} \bar{\xi}_{g} \vec{g}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Les coefficients des dérivées temporelles des inconnues sont obtenus à partir de l'expression de la capacité calorifique effective du milieu (5) et du développement des masse volumiques des constituants.

$$\begin{aligned}
 M_{ET} &= C p_s \rho_0 + \varepsilon \left(C p_l \rho_l S + \frac{M_v C p_v \Phi P_{vs} (1-S)}{R T} \right) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon M_v L_v \Phi (1-S) \left(T \frac{\partial P_{vs}}{\partial T} - P_{vs} \right)}{R T^2} \\
 M_{ES} &= \frac{\varepsilon M_v L_v P_{vs} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial S} (1-S) - \Phi \right)}{R T} \\
 M_{MT} &= \frac{\varepsilon M_v \Phi (1-S) \left(T \frac{\partial P_{vs}}{\partial T} - P_{vs} \right)}{R T^2} + S \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \\
 M_{MS} &= \rho_l + \frac{\varepsilon M_v P_{vs} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial S} (1-S) - \Phi \right)}{R T} \\
 M_{AT} &= \frac{\varepsilon M_a (1-S) \left(\Phi P_{vs} - \Phi T \frac{\partial P_{vs}}{\partial T} - P_g \right)}{R T^2} \\
 M_{AS} &= \frac{\varepsilon M_a \left(P_{vs} \left(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial S} (1-S) \right) - P_g \right)}{R T} \\
 M_{AP} &= \frac{\varepsilon M_a (1-S)}{R T}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Les valeurs numériques des coefficients ainsi que les lois phénoménologiques utilisées sont détaillées dans [TOP 95].