

---

# Calcul du champ de contrainte en pointe de fissure en élasticité plane en grandes déformations

**Gilles Loppin**

Groupe de Mécanique des Matériaux et des Structures (EA 1237)  
UFR Sciences, BP 347, 51062 Reims cedex  
gilles.loppin@univ-reims.fr

---

**RÉSUMÉ.** Une procédure itérative de calcul du champ de contrainte à proximité d'une pointe de fissure dans le cadre de l'élasticité plane en déformations finies est proposée. Ce procédé numérique fondé sur la méthode des éléments finis, déjà validé en élasticité linéaire permet d'obtenir en particulier une estimation des coefficients asymptotiques associés à la solution locale dans des matériaux de type caoutchouc. L'un d'entre eux est l'analogue d'un facteur d'intensité de contrainte de la théorie linéaire et intervient à ce titre dans un critère de propagation de fissure en Mécanique de la Rupture non-linéaire. Des tests numériques sont présentés. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les solutions analytiques correspondantes connues.

**ABSTRACT.** An iterative procedure for the computation of the stress field near a crack tip within the frame of large strain plane elasticity is proposed. This numerical process, based on finite element method, has been already verified in linear elasticity context. It permits especially to obtain an estimation of some asymptotic coefficients associated with the local solution for rubberlike materials. One of them can be compared with a stress intensity factor of the linear theory and therefore is involved in a crack propagation criterium of non-linear Fracture Mechanics. Numerical tests are presented. The results obtained are in good agreement with known analytical solutions.

**MOTS-CLÉS :** procédure itérative, éléments finis, élasticité, grandes déformations, fissure, interface, facteur d'intensité de contrainte.

**KEY WORDS :** iterative procedure, finite element, elasticity, large strains, crack, interface, stress intensity factor.

---

## 1. Introduction

Les singularités de contraintes apparaissant en pointe de fissure en élasticité linéaire se rencontrent également dans le cas de l'élasticité en déformations finies. Ce cadre général semble physiquement plus approprié si on considère des matériaux pouvant supporter de grandes déformations réversibles (caoutchouc, élastomères). Les hypothèses de la théorie linéaire sont en effet toujours en défaut près de la pointe de fissure. De plus, le cas d'une fissure située à l'interface de deux matériaux conduit en général, pour ces hypothèses, à une solution asymptotique oscillatoire peu réaliste. (voir Rice & Sih [RIC 68] par exemple)

L'étude analytique des champs élasto-statiques en déformations finies dans le cadre des contraintes planes a été menée pour la première fois par Wong & Shield [WON 68]. Le cas particulier d'une membrane fissurée en traction bi-axiale a été abordé dans ce travail. Par la suite, des auteurs ont proposé des solutions asymptotiques pour les champs en pointe de fissure en élasticité plane. Les techniques analytiques mises en oeuvre sont comparables à celles utilisées en élasticité linéaire (recherche des champs asymptotiques en fonction des coordonnées polaires de pôle la pointe de fissure sous forme factorisée :  $u(r,\theta) \approx g(\theta)r^E$  avec cependant une plus grande complexité du fait des non-linéarités géométriques et de comportement. (voir [KNO 73, STE 82, KNO 83, LE 93]). Ces auteurs ont montré que l'un des coefficients caractérisant la solution asymptotique joue le rôle de facteur d'intensité de contrainte en ce sens que le taux de restitution d'énergie, exprimé par l'intégrale de Eshelby dans le cas d'une fissure rectiligne, dépend explicitement de ce seul coefficient. Sa connaissance permet alors une écriture aisée du critère énergétique de propagation de fissure dès lors que la valeur expérimentale de l'énergie surfacique de liaison du matériau est disponible.

On propose ici une procédure de calcul des solutions asymptotiques fondée sur une technique itérative d'éléments finis exposée dans [LOP 92]. Cette procédure prévue initialement pour les problèmes d'élasticité linéaire a été adaptée aux problèmes non-linéaires.

Le problème test retenu pour valider la procédure a été traité analytiquement par Knowles & Sternberg [KNO 83]. Il consiste en la recherche du champ statique asymptotique près de la pointe d'une fissure rectiligne située à l'interface d'une membrane à plan moyen constituée de deux matériaux hyperélastiques, incompressibles, homogènes et isotropes de type néo-hookien. Le chargement est appliqué loin de la zone fissurée et les lèvres de fissure sont libres de contraintes.

Le choix du matériau hyperélastique néo-hookien est justifié par sa formulation simple. Néanmoins, il rend assez bien compte du comportement des matériaux réels de type caoutchouc pour des rapports d'allongement inférieurs à 3 environ et respecte les tendances pour les valeurs supérieures. (voir Ogden [OGD 72], par exemple).

## 2. Description du problème, solution asymptotique de Knowles & Sternberg

Le plan moyen de la membrane non déformée est rapporté au repère rectangulaire  $(O,1,2)$  où la direction 1 est celle de la fissure dont la pointe est en  $O$ . La direction 3 est normale au plan moyen.

On se place dans le cadre des hypothèses de contraintes planes. Le chargement appliqué loin de la fissure la sollicite en mode d'ouverture (mode I). Il n'y a pas de forces volumiques.

Dans la suite, les indices grecs prennent les valeurs 1, 2 et les indices latins les valeurs 1, 2, 3. On applique la convention de sommation de l'indice muet.

Les coordonnées cartésiennes d'un point du plan moyen de la membrane non déformée de vecteur position  $\mathbf{x}$  sont notées  $(x_\alpha)$  et on désigne par  $(r, \theta)$ ,  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  ses coordonnées polaires de pôle  $O$  dans le plan moyen (voir figure 1).

On note  $(y_\alpha)$  les coordonnées de ce point de vecteur position  $\mathbf{y}$  après transformation (coordonnées actuelles). On introduit les composantes  $(F_{ij})$  du tenseur gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  sur le plan moyen ( $x_3 = 0$ ) définies par  $F_{\alpha\beta} = \partial y_\alpha / \partial x_\beta$ ,  $F_{\alpha 3} = F_{3\alpha} = 0$ ,  $F_{33} = \partial y_3 / \partial x_3 = \lambda(x_1, x_2)$  et les composantes respectives  $(\tau_{ij})$  et  $(\sigma_{ji})$  du tenseur des contraintes nominal  $\tau$  (1<sup>er</sup> tenseur de Piola-Kirchhoff) et du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  sur le plan moyen. Les hypothèses de contraintes planes entraînent :  $\tau_{i3} = \tau_{3i} = 0$  et  $\sigma_{3i} = 0$ .

On rappelle que l'énergie de déformation par unité de volume non-déformé d'un matériau néo-hookien s'écrit de manière générale :  $W = C(I - 3)$  où  $C$  est l'unique coefficient d'élasticité du matériau et où  $I$  est le 1<sup>er</sup> invariant (trace) de l'un ou l'autre des deux tenseurs de déformation de Cauchy-Green définis par  $\mathbf{C} = \mathbf{F}'\mathbf{F}$  (lagrangien) et  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}'$  (eulérien). Dans les hypothèses retenues, l'énergie de déformation et les contraintes sur le plan moyen s'écrivent :

$W = C(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \lambda^2 - 3)$ ,  $\sigma_{\alpha\beta} = 2C(B_{\alpha\beta} - \lambda^2 \delta_{\alpha\beta})$ ,  $\tau_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma}^{-1}$  où  $(B_{\alpha\beta})$  et  $(\delta_{\alpha\beta})$  sont respectivement les composantes du tenseur  $\mathbf{B}$  et du tenseur unité  $\mathbf{1}$ .

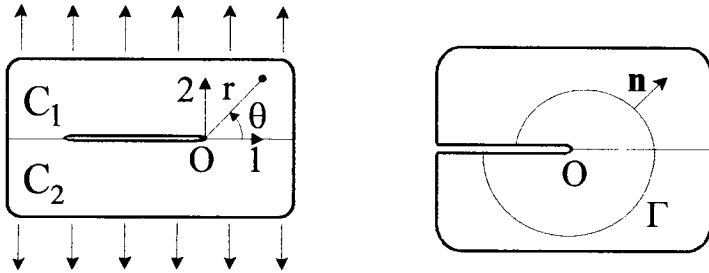
Le terme  $\lambda$  s'interprète comme le rapport de l'épaisseur de la membrane après transformation à l'épaisseur initiale.

Les hypothèses de l'élasticité linéaire (petites déformations et petites transformations) fournissent :  $\tau_{\alpha\beta} \approx \sigma_{\alpha\gamma} \approx 4C(E_{\alpha\beta} - E_{33}\delta_{\alpha\beta})$  (loi de Hooke) où le tenseur  $\mathbf{E}$  de composantes  $(E_{ij})$  est le tenseur des déformations linéarisé défini par  $\mathbf{E} = (\mathbf{F}' + \mathbf{F})/2 - \mathbf{1}$  de sorte que le coefficient d'élasticité du matériau néo-hookien s'identifie au demi-module de cisaillement :  $C = \mu/2$ .

Désignons par  $C_1$  et  $C_2$  les coefficients d'élasticité respectifs de la partie  $x_2 > 0$  et  $x_2 < 0$  de la membrane ( $\mu_1 = 2C_1$  et  $\mu_2 = 2C_2$  sont les modules de cisaillement correspondants). On pose  $s = C_1/C_2 = \mu_1/\mu_2$  et on définit la fonction suivante :  $h(\theta) = s$  si  $-\pi \leq \theta < 0$  et  $= 1$  si  $0 < \theta \leq \pi$ .

Les résultats obtenus par Knowles & Sternberg [KNO 83] montrent que les lèvres de la fissure se déforment localement en deux arcs de parabole d'axe commun  $(O', l')$  où  $O'$  est la pointe de fissure après déformation, sommet commun

de ces deux paraboles (voir figure 2). La solution asymptotique prend une forme assez simple si on exprime les coordonnées actuelles d'un point du plan moyen dans le repère rectangulaire ( $O', 1', 2'$ ). Ces coordonnées seront encore notées ( $y_\alpha$ ).



**figure 1.** Membrane avec fissure interfaciale

On présente la solution asymptotique obtenue par les auteurs sous la forme des premiers termes d'un développement en série en puissances de  $r$  lorsque  $r$  tend vers zéro. Les coefficients du développement dépendent de l'angle polaire  $\theta$  et font intervenir trois coefficients asymptotiques constants notés  $a, b_1$  et  $b_2$ . Le coefficient  $a$  est strictement positif et a la dimension d'une longueur,  $b_1 > 0$  et  $b_2$  sont sans dimension. Plus précisément, on introduit les grandeurs sans dimension suivantes :  $\eta_\alpha = y_\alpha/a, \rho = r/a$  et  $\rho_* = r_*/a$  où  $r_* = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$  est le rayon actuel.

Les résultats sont les suivants :

- Coordonnées actuelles et rayon actuel (repère ( $O', 1', 2'$ ))

$$\begin{cases} \eta_1 = b_1 \rho \cos(\theta) + o(\rho) \\ \eta_2 = h(\theta) \sin(\theta/2) \rho^{1/2} + b_2 \rho \cos(\theta) + o(\rho) \\ \rho_* = h(\theta) |\sin(\theta/2)| \rho^{1/2} + o(\rho^{1/2}) \end{cases} \quad [1]$$

- Composantes des contraintes de Cauchy (base ( $1', 2'$ ))

$$\begin{cases} \sigma_{11}/C_1 = o(\rho^{-1/2}) \\ \sigma_{22}/C_1 = \frac{1}{2} h(\theta) \rho^{-1} - 2 b_2 \sin(\theta/2) \rho^{-1/2} + o(\rho^{-1/2}) \\ \sigma_{12}/C_1 = b_1 \sin(\theta/2) \rho^{-1/2} + o(\rho^{-1/2}) \end{cases} \quad [2]$$

- Contraintes principales (Cauchy)

$$\begin{cases} \sigma_1/C_1 = 2b_1^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) / h(\theta) + o(1) \\ \sigma_2/C_1 = \frac{1}{2} h(\theta) \rho^{-1} - 2b_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \rho^{-1/2} + o\left(\rho^{-1/2}\right) \end{cases} \quad [3]$$

- Énergie de déformation par unité de volume non déformé

$$W/C_1 = \frac{1}{4} h(\theta) \rho^{-1} + o\left(\rho^{-1}\right) \quad [4]$$

- Intégrale de Eshelby, version en déformations finies de l'intégrale J classique (ou intégrale de Rice)

$$J = \int_{\Gamma} \left( W n_1 - F_{\alpha 1} \tau_{\alpha \beta} n_\beta \right) d\Gamma = -\frac{1}{4} \pi a C_1 (1+s) \quad [5]$$

où  $\Gamma$  est une courbe régulière du plan moyen non déformé entourant la pointe de fissure tracée à partir des deux lèvres, de normale extérieure unitaire  $\mathbf{n}$  de composantes  $(n_\alpha)$  dans la base (1, 2). (voir figure 1)

Comme indiqué dans l'introduction, cette dernière formule donne la dépendance explicite de J en fonction du coefficient asymptotique  $a$  considéré comme facteur d'intensité de contrainte.

Sur la figure 2, on trouvera une interprétation géométrique du rôle joué par les coefficients asymptotiques dans l'allure de la déformée locale des lèvres de fissure.

Pour mémoire, rappelons qu'en théorie linéaire le développement de chaque composante de contrainte présente le même terme prépondérant en  $r^{-3/2}$  si  $b = 0$  et en une somme de deux termes en  $r^{-3/2} \sin[b \ln(r)]$  et  $r^{-3/2} \cos[b \ln(r)]$  si  $b \neq 0$ , avec  $b = (1/2\pi) \ln[(s+k_1)/(1+sk_2)]$  (constante bi-élastique),  $k_h = (3-\nu_h)/(1+\nu_h)$ ,  $h = 1, 2$  ( $k_h = 3-4\nu_h$  en déformations planes),  $\mu_h$  et  $\nu_h$  sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau de numéro  $h$ , et  $s = \mu_1/\mu_2$  a déjà été défini. Ces résultats sont encore valables pour des matériaux incompressibles. (voir [R&S 68])

La comparaison des deux solutions appelle les commentaires suivants : à l'instar de la théorie linéaire, le terme prépondérant du développement de l'énergie de déformation volumique est en  $r^{-1}$ ; en revanche pour les contraintes, la nature de la singularité dépend des composantes : la contrainte principale prépondérante  $\sigma_2$  (associée à la direction principale la plus proche des directions 2 ou 2') présente une forte singularité en  $r^{-1}$  alors que  $\sigma_1$  est régulière.

Le changement de nature de la solution selon que la fissure est interfaciale ( $b \neq 0$ ) ou non ( $b = 0$ ) n'est pas constaté en déformations finies ce qui semble physiquement plus satisfaisant.

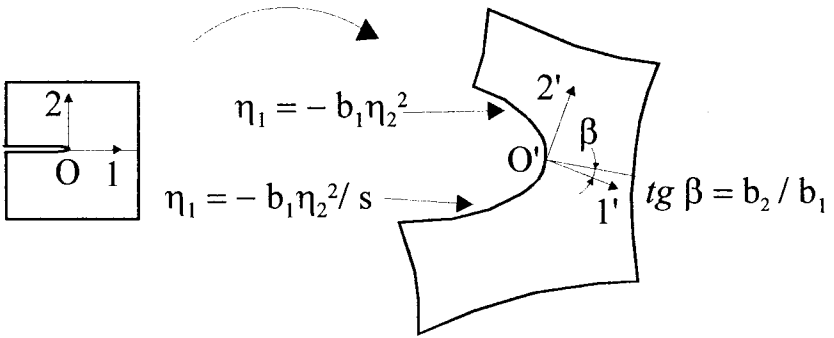


figure 2. *Domaine déformé en pointe de fissure*

### 3. Description de la procédure numérique

L'objectif est d'obtenir à un coût raisonnable une approximation numérique des contraintes près d'un point où des singularités sont attendues comme une pointe de fissure, une interface débouchante, le point d'application d'une force ponctuelle... , et d'en déduire les grandeurs asymptotiques caractéristiques.

Ceci peut être réalisé par un calcul éléments finis global (voir par exemple [LUN 90] ) mais il faut alors raffiner considérablement le maillage dans la zone à fort gradient et ce d'autant plus que l'ordre de la singularité est élevé. Le coût du calcul devient rapidement prohibitif surtout en analyse non-linéaire.

La démarche proposée ici [LOP 92] est différente, elle consiste à réaliser dans un premier temps un calcul éléments finis global avec un maillage relativement grossier puis une suite de calculs éléments finis locaux, posés sur un même domaine, de faible coût unitaire. Chaque itération fournit une approximation du champ de contrainte à une distance du point singulier de plus en plus petite.

Considérons un domaine élastique bi-dimensionnel  $D$  comportant une pointe de fissure en  $O$ . On désigne par  $(P)$  le problème de l'équilibre global de  $D$  soumis à un chargement  $F$  donné sur une partie de sa frontière  $\Gamma_F$ . Sur le complément  $\Gamma_U$  un déplacement  $\hat{u}$  donné est imposé. On note  $(\mathbf{u}, \sigma)$  respectivement le champ de déplacement ( $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ ) et de contrainte solution.

On définit un domaine  $D_0$  contenu dans  $D$  entourant le point  $O$  et ne comportant pas d'autre point singulier. La partie de sa frontière intérieure à  $D$  est notée  $\Gamma_0$ , le reste est constitué par une partie des lèvres de la fissure supposées libres de contraintes.

On note  $(\mathbf{u}_0, \sigma_0)$  la solution du problème  $(P_0)$  de l'équilibre du domaine  $D_0$  pour lequel le déplacement solution du problème  $(P)$  est imposé sur  $\Gamma_0$  sans autre chargement.

Soit alors un nombre  $p$  vérifiant  $0 < p < 1$ .  $M_0$  étant un point de  $D_0$ , on définit respectivement  $M_i$ ,  $\Gamma_i$  et  $D_i$  comme les transformés de  $M_0$ ,  $\Gamma_0$  et  $D_0$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $p^i$  où  $i$  est un entier positif ou nul. Le domaine  $D_0$  peut être considéré comme la réunion des domaines disjoints  $\Omega_i$ ,  $i \geq 0$ , définis par :  $\Omega_i = D_i - D_{i+1}$ . (voir figure 3)

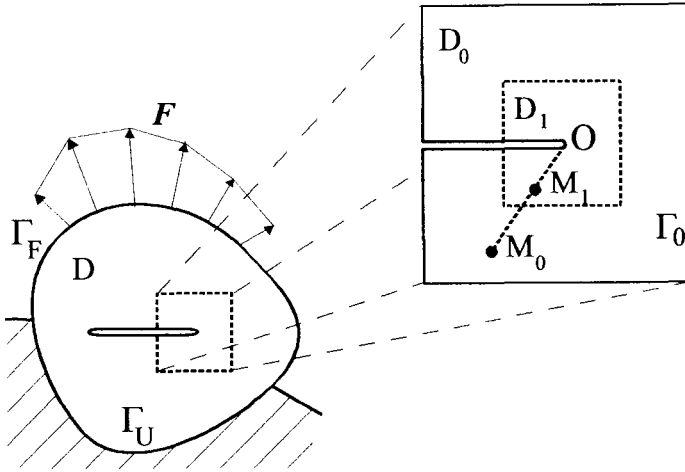


figure 3. Problème global et définition du domaine  $D_0$

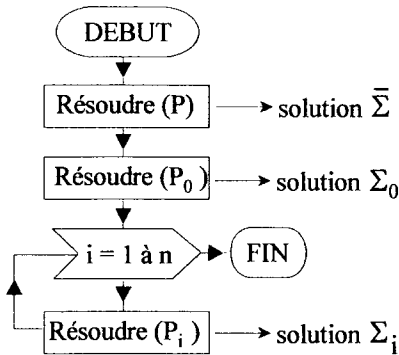
On définit alors de manière récurrente le problème  $(P_i)$ ,  $i \geq 1$ , de solution  $(\mathbf{u}_i, \sigma_i)$ , de l'équilibre du domaine  $D_0$ , sans chargement, dont le déplacement sur  $\Gamma_0$  est prescrit par :  $\mathbf{u}_i(M_0) = p^{-1}\mathbf{u}_{i-1}(M_1)$ ,  $M_0 \in \Gamma_0$ . ( $\mathbf{u}_{i-1}$  est le champ de déplacement solution du problème  $(P_{i-1})$ )

Il est aisé de vérifier que la solution  $\sigma$  du problème global peut être obtenue sur chaque domaine  $\Omega_i$  à partir de la restriction à  $\Omega_0$  de la solution  $\sigma_i$  du problème  $(P_i)$  par :  $\sigma(M_i) = \sigma_i(M_0)$ ,  $M_0 \in \Omega_0$ .

Le processus numérique itératif proposé est fondé sur cette décomposition.

L'initialisation se fait en résolvant d'abord le problème global  $(P)$  puis le problème  $(P_0)$ . Les problèmes  $(P_i)$  sont ensuite résolus successivement de manière automatique jusqu'à la valeur  $i = n$  souhaitée. Si  $L$  est une longueur caractéristique du domaine  $D_0$ , le dernier calcul fournira une valeur numérique des contraintes à une distance d'environ  $p^n L$  de la pointe de fissure mesurée dans la configuration non déformée.

L'organigramme de la procédure peut se résumer comme suit :



Solution numérique en  
contrainte  $\Sigma$  retenue pour  
le problème global (P) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \bar{\Sigma} \text{ sur } D - D_0 \\ \Sigma (M_i) = \Sigma_i (M_0), \quad M_0 \in \Omega_0 \\ \text{pour } 0 \leq i \leq n \end{array} \right.$$

#### 4. Tests numériques

Le domaine  $D$  est confondu avec  $D_0$ . Il est constitué d'un carré de côté  $2L$ , La fissure est située sur la médiane horizontale et débouche sur l'arête droite, la pointe  $O$  est au centre. On impose des conditions de symétrie sur les arêtes gauche et inférieure. Le chargement est constitué par un déplacement vertical  $d$  imposé sur l'arête supérieure.

Pour les deux cas présentés, le maillage du domaine  $D_0$  est identique. Il est constitué d'environ 100 éléments quadrilatères à 8 noeuds pour un demi-domaine. Le rapport d'homothétie choisi est  $p = 0.25$ . Il y a 32 éléments frontaliers à  $\Gamma_0$  (16 par demi-domaine). Les contraintes seront calculées à chaque itération au centre d'inertie géométrique de ces éléments.

- Cas 1 : Un seul matériau (pas d'interface). Le problème est symétrique par rapport à la médiane horizontale de sorte que le domaine d'étude est réduit à la moitié (supérieure) du carré. Dans ce cas, les directions (1, 2) et (1', 2') sont confondues. La fonction  $h(\theta)$  est constante :  $h = 1$  et le coefficient  $b_2$  est nul.

- Cas 2 : La fissure est interfaciale. Le demi-domaine supérieur est constitué du matériau référencé 1. La valeur de  $s$  retenue est 0.5 (la raideur du matériau 2 est double de celle du matériau 1)

Les données de calcul sont résumées sur la figure 4. La valeur du déplacement imposé  $d$  est relativement faible (0.5% du côté du carré), on peut donc considérer que les hypothèses de la théorie linéaire sont satisfaites en dehors d'une zone de faible extension autour de la pointe de fissure.

Dans les deux cas, le nombre d'itérations atteint dans la procédure est approximativement de 20. Des problèmes de convergence dus à la trop grande distorsion de certains éléments apparaissent si on poursuit le calcul. Ce nombre est cependant largement suffisant pour déduire les grandeurs asymptotiques.



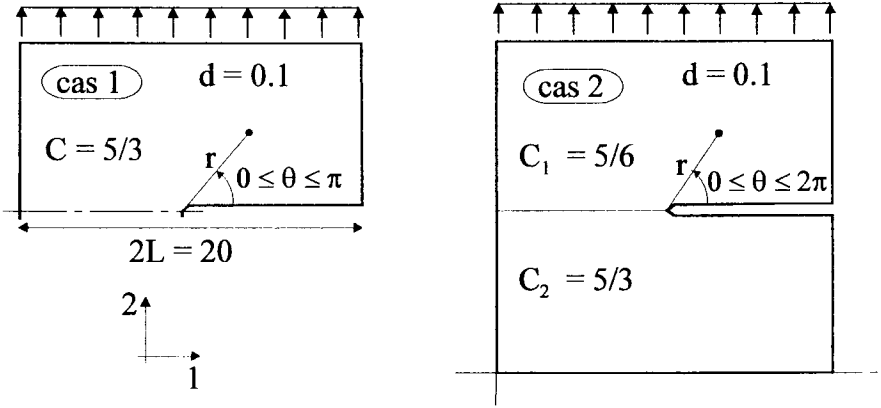


figure 4. Problèmes tests - Données de calcul

Dans la suite, les notations adoptées pour la présentation des résultats sont les suivantes :

- Contraintes de Cauchy dans la base (1, 2) :  $S_{\alpha\beta} \approx G_{\alpha\beta}(\theta) r^{-E_{\alpha\beta}}$
- Contraintes principales :  $S_{\alpha} \approx G_{\alpha}(\theta) r^{-E_{\alpha}}$
- Rayon actuel :  $r_{*} \approx G_r(\theta) r^{-E_r}$

La figure 5 montre le domaine initial et le domaine déformé pour l'itération 8 (problème (P<sub>8</sub>)). Le domaine D<sub>8</sub> correspond au carré de côté p<sup>8</sup>L ≈ 1.5.10<sup>-5</sup>L entourant la pointe de fissure. Les déformations constatées sont déjà importantes. Ce résultat et les résultats obtenus pour les itérations suivantes montrent que les lèvres de la fissure se déforment comme le prévoit la théorie : ouverture à 180° en pointe de fissure, forme parabolique.

On a rassemblé sur les figures 6 et 7 les principaux résultats asymptotiques obtenus respectivement pour les deux cas testés. Dans le deuxième cas, pour lequel les directions (1, 2) et (1', 2') sont distinctes, on ne présente que les résultats relatifs aux contraintes principales.

Pour les exposants, les valeurs obtenues sont pratiquement constantes vis-à-vis de l'angle polaire et correspondent à ce que prévoit la théorie. On remarque que dans le premier cas on obtient E<sub>11</sub> = 0 ce qui est plus précis que le résultat théorique [2.a].

Compte tenu de la définition de l'angle polaire la forme théorique des fonctions présentées est la suivante (d'après [1] - [4]) :

Cas 1 :  $G_r = a^{1/2} \cos(\theta/2)$ ,  $G_1 = 2C b_1^2 \sin^2(\theta/2)$ ,  $G_2 = G_{22} = 0.5 C a$ ,  
 $G_{12} = C b_1 a^{1/2} \cos(\theta/2)$ .

Cas 2 :  $G_r = h(\theta) a^{1/2} |\cos(\theta/2)|$ ,  $G_1 = 2C_1 b_1^2 \sin^2(\theta/2) / h(\theta)$ ,  $G_2 = 0.5 h(\theta) C_1 a$   
 avec  $h(\theta) = 1$  si  $0 \leq \theta < \pi$  et  $0.5$  si  $\pi < \theta \leq 2\pi$ .

On constate la bonne adéquation entre ces formules et les résultats numériques. On peut ainsi obtenir très simplement les coefficients  $a$  et  $b_1$  à partir des graphiques et en déduire une valeur pour l'intégrale  $J$  ([5]) :

Cas 1 :  $a = \underline{3.30.10^{-3}}$  ,  $b_1 = \underline{1.23}$  ,  $J = -0,5 \pi C a = \underline{-8.64.10^{-3}}$   
 Cas 2 :  $a = \underline{1.46.10^{-3}}$  ,  $b_1 = \underline{1.22}$  ,  $J = -0.375 \pi C_1 a = \underline{-1.43.10^{-3}}$

On présente sur la figure 8.a les résultats asymptotiques obtenus par la procédure itérative dans le premier cas en retenant cette fois les hypothèses de l'élasticité linéaire. On retrouve par cette voie l'exposant commun 0.5 à toutes les composantes de contraintes et les classiques fonctions  $G_{\alpha\beta}(\theta)$  dont on ne rappellera pas les expressions. On peut déduire des graphiques la valeur des deux facteurs d'intensité de contrainte ainsi que de l'intégrale  $J$  par la formule d'Irwin :

$$K_I = (2\pi)^{1/2} G_{II}(\pi) = \underline{0.3}$$
 ,  $K_{II} = (2\pi)^{1/2} G_{I2}(\pi) = \underline{0}$  ,  $J = -(K_I^2 + K_{II}^2)/(3\mu) = \underline{-9.0.10^{-3}}$

On remarque que les valeurs de  $J$  obtenues pour les deux théories sont proches, ceci est cohérent avec le choix des données qui assure que les hypothèses de l'élasticité linéaire sont satisfaites assez loin de la pointe de fissure.

Plus précisément, on compare sur la figure 8.b les composantes de contrainte en fonction de la distance à la pointe de fissure (en échelle  $\log_{10}/\log_{10}$ ) pour une valeur fixée de l'angle polaire. La divergence entre les deux théories apparaît nettement pour  $r/L < 6.10^{-5}$  environ, cette valeur étant pratiquement indépendante de l'angle polaire. Pour le cas 2, malgré la différence de nature de la solution asymptotique en théorie linéaire, on trouve un résultat sensiblement identique.

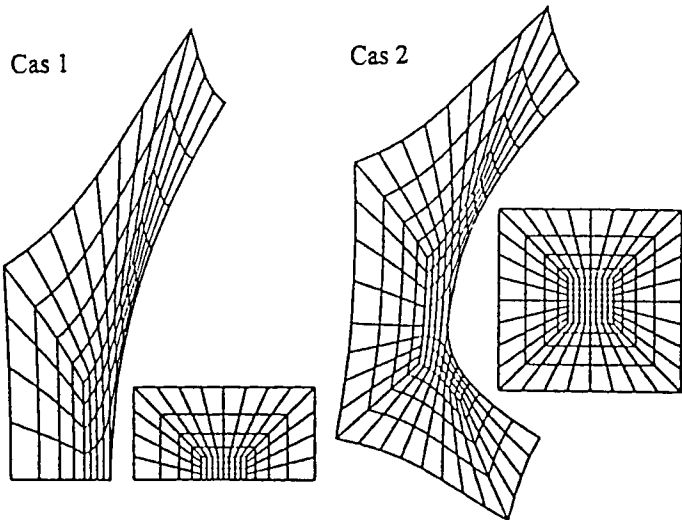


figure 5. Problème  $P_8$  - Domaine déformé pour les cas 1 et 2

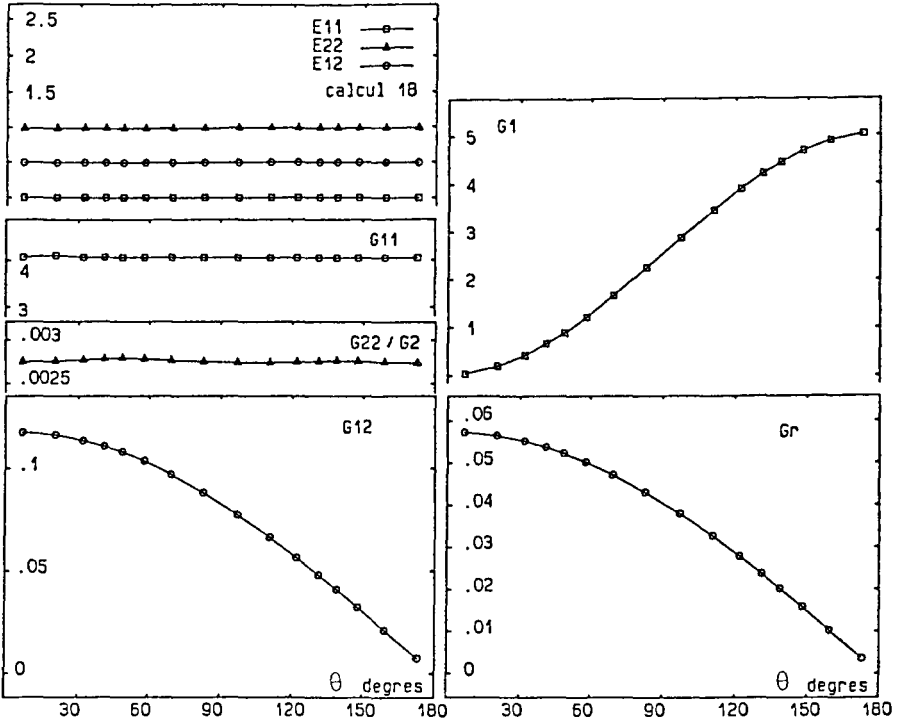


figure 6. Principaux résultats asymptotiques - Cas 1

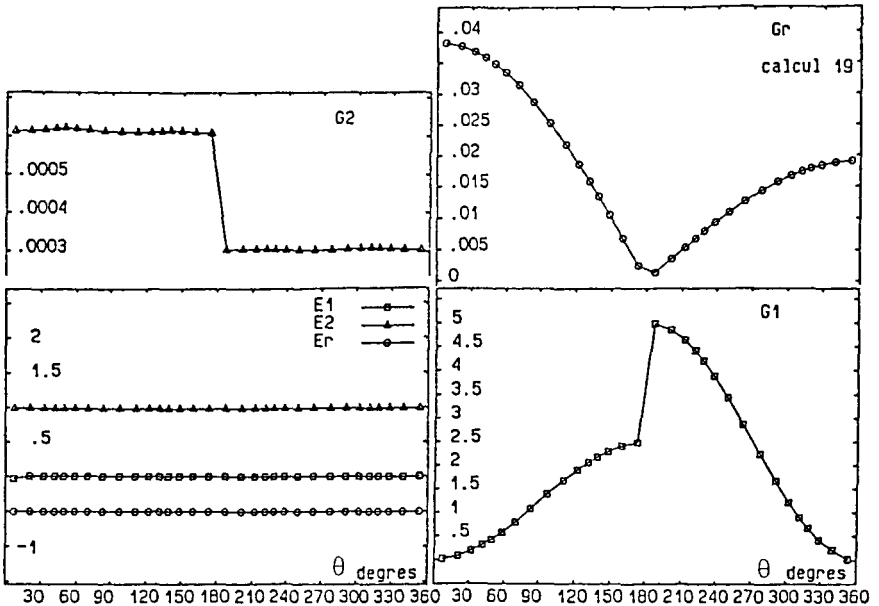


figure 7. Principaux résultats asymptotiques - Cas 2

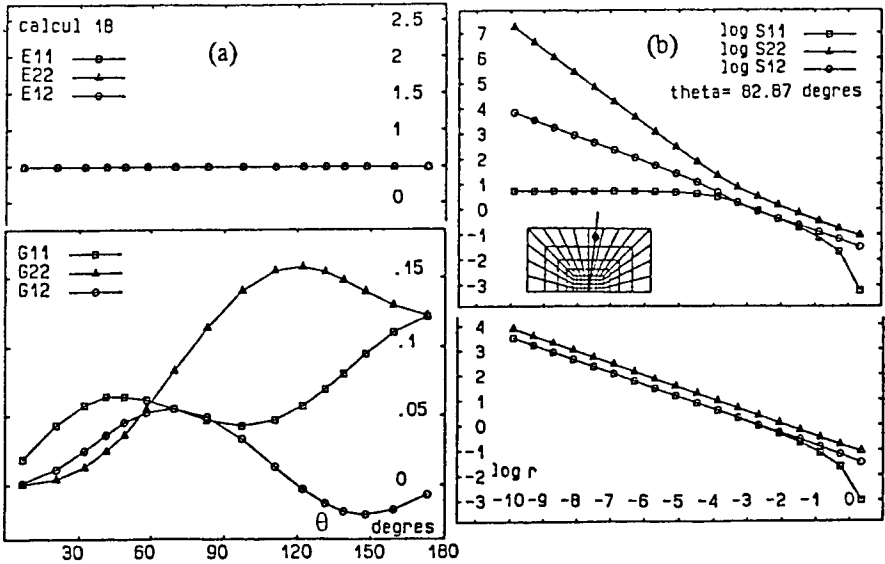


figure 8. Cas 1. - Résultats asymptotiques en théorie linéaire (a)  
 - comparaison théorie non-linéaire / théorie linéaire (b)

### 5. Discussion - conclusion

L'application de la procédure itérative d'éléments finis a permis d'obtenir une évaluation des contraintes en pointe de fissure en bon accord avec la solution asymptotique de référence. En outre, les valeurs calculées sont peu sensibles à un changement de type d'élément ainsi qu'à une variation de la valeur du rapport d'homothétie  $p$  introduit dans la procédure.

En principe, il n'y a pas d'obstacle théorique à utiliser cette procédure dans des situations plus variées : lois hyperélastiques plus complexes, problèmes tridimensionnels.

Il existe cependant une difficulté importante liée à la formulation lagrangienne du problème. En effet, au delà d'un certain nombre d'itérations, des éléments proches de la pointe de fissure subissent une distorsion si grande qu'elle entraîne la divergence de l'algorithme de résolution (Newton-Raphson) du problème courant. Dans certaines situations, le nombre d'itérations réalisées avant divergence se révèle insuffisant pour dégager des valeurs asymptotiques significatives. C'est le cas par exemple pour une fissure sollicitée en mode II ou pour les problèmes en déformations planes où l'incompressibilité du matériau nécessite l'utilisation d'éléments spéciaux (éléments hybrides) plus sensibles aux fortes distorsions.

Bien que les hypothèses concernant la forme asymptotique de l'énergie de déformation du matériau hyperélastique soient différentes pour les auteurs cités en introduction (matériau de type Blatz-Ko dans [KNO 73], Ogden-Ball dans [LE 93], matériau incompressible tel que  $W \approx A I^n + B I^{n-1}$  si  $I \rightarrow \infty$  dans [STE 82], le cas

$n=1$  correspondant au matériau néo-hookien), l'existence d'un unique facteur d'intensité de contrainte en élasticité plane est confirmé par les auteurs cités. Ceux-ci ont également montré que l'état de contrainte prépondérant près de la pointe de fissure est toujours un état de traction uniaxiale selon la direction tangente à la déformée des lèvres de la fissure dont l'ouverture atteint  $180^\circ$ . Ces résultats, indépendants du chargement extérieur, pourvu que les lèvres de fissure soient libres de contraintes, sont en particulier valables pour un chargement sollicitant la fissure en mode de glissement (mode II). Dans le cas d'un matériau unique, Stephenson [STE 82] a montré que contrairement à ce que prévoit la théorie linéaire, le mode de transformation antisymétrique associé au mode II n'existe pas. En particulier, la fissure s'ouvre en pointe de fissure pour un chargement de ce type. Il semble bien qu'un mécanisme de roulement d'une lèvre sur l'autre se mette en place. Le fond de fissure devient alors une courbe régulière et la pointe de fissure se retrouve dans une situation asymptotique correspondant au mode I, ce qui est cohérent avec l'existence d'un seul facteur d'intensité de contrainte.

Ce mécanisme est bien mis en évidence par un calcul numérique utilisant la procédure itérative proposée pour laquelle 10 itérations ont pu être réalisées avant divergence (rapport d'homothétie :  $p = 0.25$ ). Le chargement en mode II retenu pour le problème global est, là encore, suffisamment faible pour que, sauf en pointe de fissure, les hypothèses de la théorie linéaire soient satisfaites. On peut voir sur la figure 9 l'allure du domaine déformé obtenue pour le problème  $P_{10}$ .

En conclusion, l'application de la procédure itérative d'éléments finis a permis de retrouver fidèlement les résultats théoriques de Knowles et Sternberg et d'évaluer le facteur d'intensité de contrainte. Le chargement global retenu pour les calculs correspond à une sollicitation en mode I. Pour un chargement de mode II, il n'a pas été possible d'obtenir les grandeurs asymptotiques visées faute d'avoir pu poursuivre le processus itératif assez loin. Néanmoins, les résultats obtenus montrent bien comment s'effectue localement la transition vers le mode d'ouverture.

Une procédure de remaillage sur un critère de distorsion excessive des éléments dans l'algorithme de résolution non-linéaire pourrait être appliquée pour augmenter le nombre d'itérations dans les cas délicats.

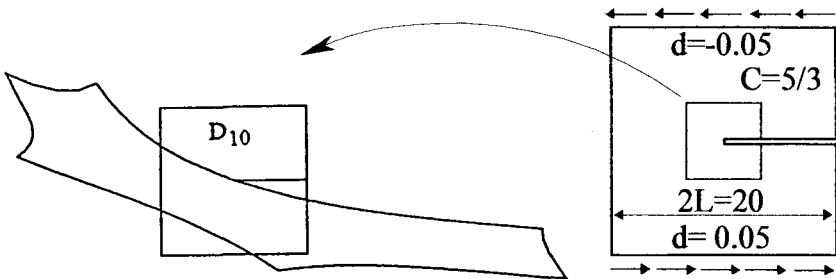


figure 9. Déformée locale en mode II - problème ( $P_{10}$ )

## 6. Bibliographie

- [KNO 73] Knowles J. K. & Sternberg E. , "An asymptotic finite-deformation analysis of the elastic field near the tip of a crack", *J. of Elasticity*, 3, 67-107, 1973.
- [KNO 83] Knowles J. K. & Sternberg E. , "Large deformation near a tip of an interface-crack between two neo-hookean sheets", *J.of Elast.*, 13, 257-293, 1983.
- [LE 93] Le K. C. & Stumpf H., "The singular elastostatic field due to a crack in rubberlike materials", *J. of Elasticity*, 32, 183-222, 1993.
- [LUN 90] Lund R. A. & Westmann R. A., "Finite element analysis of hyperelastic large deformation crack tip fields", *Int. J. of Fracture*, 43, 257-270, 1990.
- [LOP 92] Loppin G. & Rigolot A., "A numerical approximation for the analysis of angular singularities in plane classical elasticity", *Eur. J. of Mech./ Solids*, 11, n°3, 305-321, 1992.
- [OGD 72] Ogden R. W., "Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids", *Proc. Roy. Soc. London*, A.326, 565-584, 1972.
- [R&S 68] Rice J. R. & Sih G. C., "Plane problems of cracks in dissimilar media", *J.of Appl. Mech.*, 32, 418-423, 1968.
- [RIC 68] Rice J. R., "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *J. of Appl. Mech.*, 35, 379-386, 1968.
- [STE 82] Stephenson R. A., "The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic material", *J. of Elasticity*, 12, 65-99, 1982.
- [WON 69] Wong F. S. & Shield R.T., "Large plane deformations of thin elastic sheets of neo-hookean material", *Zeitschrift für Ang. Math. und Phys.*, 20, 176-199, 1969.

Article soumis le 25 mai 1996.  
Version révisée le 30 janvier 1997.