
Résolution des équations de Navier-Stokes et Détection des bifurcations stationnaires par une Méthode Asymptotique-Numérique

Abdeljalil Tri* — Bruno Cochelin** — Michel Potier-Ferry*

*Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, URA CNRS 1215
ISGMP, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01

**Laboratoire de Mécanique et Acoustique
Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille
ESM2, IMT, Technopôle de Château-Gombert, 13000 Marseille

RÉSUMÉ. Les méthodes de perturbation sont depuis longtemps un moyen efficace de résoudre certaines classes de problèmes non-linéaires dans divers domaines scientifiques. Ces méthodes sont souvent appliquées dans un cadre purement analytique, en se limitant au calcul de quelques termes seulement. Depuis plusieurs années, nous nous attachons à montrer que le couplage d'une technique de perturbation et d'une méthode d'éléments finis peut conduire à des méthodes numériques extrêmement fiables et robustes pour certaines catégories de problèmes non-linéaires. Dans ce papier, nous appliquons ces techniques pour le calcul des branches de solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes. Nous abordons aussi le problème de la détection des bifurcations stationnaires.

ABSTRACT. Perturbation methods (asymptotic expansions) are usually considered as powerful methods for solving many kinds of non-linear problems. However, these methods are very often applied in a purely analytic framework, and the calculation is limited to the first few terms of the series. Since a few years, we have shown that the combination of perturbation techniques and finite element method can lead to a robust numerical method for some categories of non-linear problems. In this paper, we apply these techniques to compute branches of stationary solutions of Navier-Stokes equations and to detect stationary bifurcations.

MOTS-CLÉS : calculs non-linéaires, méthode de perturbation, méthode des éléments finis, équations de Navier-Stokes, bifurcation stationnaire.

KEY WORDS : non-linear computation, perturbation method, finite element method, Navier-Stokes equations, stationary bifurcation.

1. Introduction

En général, les problèmes non linéaires représentant l'écoulement de fluides visqueux en régime stationnaire sont résolus en utilisant des méthodes de prédiction-correction [Hir88], [SCV86] dont la plus standard est le schéma de Newton-Raphson. De tels algorithmes permettent de déterminer des branches de solutions non linéaires, mais les temps de calcul sont souvent assez grands par rapport à une résolution linéaire.

Depuis plusieurs années, nous développons une famille de Méthodes Asymptotiques-Numériques (M.A.N en abrégé) pour résoudre des problèmes non linéaires. Ces méthodes s'appuient sur l'association de techniques analytiques de type "méthode de perturbation" et de calculs par éléments finis. Elles ont été proposées initialement par Damil et Potier-Ferry [DP90] pour le calcul des bifurcations perturbées avec des applications pour les structures élastiques minces. Elles ont ensuite été étendues au calcul des branches de solutions post-critiques des plaques et des coques élastiques [Azr93, ACDP94], et d'une façon générale, au calcul des branches de solutions d'un problème non linéaire dépendant d'un paramètre [CDP94]. Les derniers développements réalisés sur ces méthodes ont concerné la détermination des points de bifurcations sur les branches de solutions linéaires ou non linéaires [Bou94].

Le principe de ces méthodes asymptotiques numériques consiste à représenter les inconnues du problème sous forme de séries entières par rapport à un paramètre de contrôle. Le problème non linéaire est ainsi transformé en une succession de problèmes linéaires bien posés que l'on résout par une méthode d'éléments finis classiques. La M.A.N entre dans la catégorie des techniques de perturbations [Nay73, NP81, Van84, Hin90].

Les représentations en séries entières au voisinage d'un point sont en général limitées par un rayon de convergence fini, mais, nous montrons que l'utilisation d'une représentation fractionnelle utilisant les approximants de Padé [BG81] peut améliorer considérablement le domaine de convergence. Nous montrons aussi comment suivre une branche de solution non linéaire complexe par une méthode de continuation asymptotique numérique, en changeant successivement le point de départ [Coc94].

Notre objectif, dans cet article, est d'élargir le domaine d'utilisation de cette méthode en l'appliquant à la mécanique des fluides et plus précisément aux équations de Navier-Stokes. Ces équations admettent une non linéarité quadratique et se prêtent bien à la résolution par les méthodes asymptotiques-numériques. Dans ce travail, les M.A.N sont adaptées au suivi des branches de solutions stationnaires des problèmes d'écoulements visqueux. Les branches de solutions fondamentales du problème non linéaire sont déterminées en développant la vitesse de l'écoulement, la pression et le nombre de Reynolds en série entière en fonction d'un paramètre bien choisi.

Nous développons aussi une variante de méthodes asymptotiques-numériques pour le calcul des points de bifurcations stationnaires sur une branche de solutions. Pour cela, on introduit un problème linéaire perturbé qui nous permet de définir un indicateur de bifurcation bien adapté aux développements asymptotiques.

2. Équations de base

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible est complètement déterminé par les équations qui dérivent de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Si $u_i(x_i, t)$ et $p(x_i, t)$, représentent respectivement la vitesse et la pression de l'écoulement au point x_i à l'instant t , la conservation de la quantité de mouvement conduit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) + p_{,i} - \mu u_{i,jj} = \rho f_i \tag{1}$$

où $\rho = \rho(x_i, t)$, f_i et μ désignent respectivement la masse volumique, les forces volumiques appliquées et la viscosité dynamique du fluide. L'équation de continuité d'un fluide incompressible qui dérive de la conservation de masse s'écrit :

$$u_{i,i} = 0 \tag{2}$$

En introduisant le nombre de Reynolds :

$$Re = \rho UL / \mu \tag{3}$$

où L et U représentent respectivement une longueur et une vitesse caractéristique, les équations adimensionnelles d'un fluide visqueux dans un écoulement stationnaire se réécrivent sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{Re} u_{i,jj} + u_j u_{i,j} + p_{,i} = f_i \tag{4}$$

où l'on garde les mêmes notations pour la vitesse, la pression et les forces adimensionnelles.

En multipliant les équations précédentes [4] et [2] par les fonctions tests v_i et q et en intégrant sur le domaine d'étude Ω , on obtient la forme faible des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Re} u_{i,j} v_{i,j} + u_j u_{i,j} v_i - p v_{i,i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega \\ \int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

Pour simplifier, on suppose que les conditions aux limites sur le bord de Ω ($\partial\Omega$) sont uniquement de type "vitesse imposée" et que les forces volumiques f_i sont nulles. Le problème d'écoulement stationnaire se formule ainsi :

Trouver u et p vérifiant :

$$\begin{cases} L(u) + Q(u, u) + D^t(p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \lambda u_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad [6]$$

où u_d est un champ de vitesses imposées sur $\partial\Omega$ et λ est un paramètre scalaire. $L(\cdot)$ et $D(\cdot)$ sont des opérateurs linéaires et $Q(\cdot, \cdot)$ est un opérateur bilinéaire non symétrique.

Ces opérateurs sont définis par les formes suivantes :

$$\begin{cases} \langle L(u), v \rangle = \int_{\Omega} \frac{1}{Re} u_{i,j} v_{i,j} d\Omega \\ \langle D^t(p), v \rangle = - \int_{\Omega} p v_{i,i} d\Omega \\ \langle Q(u, u), v \rangle = \int_{\Omega} u_j u_{i,j} v_i d\Omega \end{cases}$$

Dans toute la suite, on s'intéresse à l'évolution du champ de vitesse u et du champ de pression p en fonction du paramètre λ . On s'intéresse plus particulièrement au calcul de la branche qui a pour point de départ $\lambda=0, u=0$ et $p=0$.

3. Méthode Asymptotique Numérique

Il s'agit d'une technique de résolution du problème non linéaire [6] qui s'appuie sur une méthode de perturbation (asymptotique) et sur une méthode d'éléments finis (numérique). La technique de perturbation transforme le problème non linéaire [6] en une succession de problèmes linéaires bien posés admettant le même opérateur tangent. Les problèmes linéaires résultants sont discrétisés et résolus numériquement par une méthode d'éléments finis.

3.1. Méthode de perturbation

Le principe consiste à développer la branche de solution sous forme de séries entières par rapport à un paramètre 'a' qui sera défini par la suite.

On suppose que (λ_0, u_0, p_0) est une solution du problème [6], c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} L(u_0) + Q(u_0, u_0) + D^t(p_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(u_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_0 = \lambda_0 u_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad [7]$$

On cherche la branche de solution passant par ce point sous forme de séries entières :

$$\begin{cases} u = u_0 + a u_1 + a^2 u_2 + a^3 u_3 + a^4 u_4 + \dots \\ p = p_0 + a p_1 + a^2 p_2 + a^3 p_3 + a^4 p_4 + \dots \\ \lambda = \lambda_0 + a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + a^3 \lambda_3 + a^4 \lambda_4 + \dots \end{cases} \quad [8]$$

En introduisant ces développements dans le problème [6] et en identifiant les termes en puissances de 'a', le problème non linéaire de Navier-Stokes se réduit à la succession suivante de problèmes linéaires :

Ordre 1 :

$$\begin{cases} L(u_0) + Q(u_0, u_0) + D^t(p_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(u_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_0 = \lambda_0 u_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad [9]$$

Ordre p où $p \geq 2$:

$$\begin{cases} L_t(u_p) + D^t(p_p) = - \sum_{r=1}^{p-1} Q(u_r, u_{p-r}) & \text{dans } \Omega \\ D(u_p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_p = \lambda_p u_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad [10]$$

Tous ces problèmes admettent le même opérateur tangent au point (u_0, p_0, λ_0) défini par :

$$L_t(\cdot) = L(\cdot) + Q(u_0, \cdot) + Q(\cdot, u_0) \tag{11}$$

Le problème à l'ordre 1 correspond exactement à un problème de Stokes si u_0 est nul. Dans chacun de ces problèmes, il reste encore une indétermination qui sera levée avec la définition du paramètre 'a'. Ici, ce dernier est identifié à la projection de $u-u_0$ et $\lambda-\lambda_0$ sur le vecteur tangent u_1 et λ_1 :

$$\langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 = a \tag{12}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire ordinaire.

En injectant les développements asymptotiques [8] dans cette définition et en identifiant suivant les puissances de 'a', on obtient une succession d'équations scalaires à chaque ordre :

$$\begin{cases} \text{ordre } 1: & \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \\ \text{ordre } p: & \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Les équations [9], [10] et [13] nous ramènent aux problèmes complets et bien posés suivants :

Ordre 1 :

Trouver (λ_1, u_1, p_1) tels que :

$$\begin{cases} L_t(u_1) + D^t(p_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(u_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = \lambda_1 u_d & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \end{cases} \tag{14}$$

Ordre p où $p \geq 2$:

Trouver (λ_p, u_p, p_p) tels que :

$$\begin{cases} L_t(u_p) + D^t(p_p) = - \sum_{r=1}^{p-1} Q(u_r, u_{p-r}) & \text{dans } \Omega \\ D(u_p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_p = \lambda_p u_d & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

On suppose que l'opérateur tangent L_t est régulier en (λ_0, u_0, p_0) ce qui assure l'existence d'une branche de solutions unique. En pratique, il est commode d'avoir une succession de problèmes linéaires avec des données homogènes sur la frontière.

Pour cela on fait le changement de variable suivant :

$$u_i = w_i + \lambda_i \hat{u} \quad i=1, \dots, p \tag{16}$$

où \hat{u} représente un prolongement de u_d dans Ω tel que :

$$\hat{u} = u_d \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{et } D(\hat{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{17}$$

Introduisons le changement de variable [16] dans les équations [14] et [15] et tenant compte de [17], les problèmes linéaires se réécrivent sous la forme suivante :

Ordre 1 :

Trouver (λ_1, w_1, p_1) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t(w_1) + D^t(p_1) = -\lambda_1 L_t(\hat{u}) & \text{dans } \Omega \\ D(w_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle w_1 + \lambda_1 \hat{u}, w_1 + \lambda_1 \hat{u} \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \end{array} \right. \tag{18}$$

Ordre p :

Trouver (λ_p, w_p, p_p) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t(w_p) + D^t(p_p) = -\lambda_p L_t(\hat{u}) - \sum_{r=1}^{p-1} Q(w_r + \lambda_r \hat{u}, w_{p-r} + \lambda_{p-r} \hat{u}) & \text{dans } \Omega \\ D(w_p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ w_p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle w_p + \lambda_p \hat{u}, w_p + \lambda_p \hat{u} \rangle + \lambda_p \lambda_p = 0 \end{array} \right.$$

[19]

3.2. Discrétisation par éléments finis

La deuxième étape de la M.A.N consiste à résoudre les problèmes linéaires [18] et [19] par une méthode d'éléments finis. Dans cette étude, nous utilisons des approximations avec des fonctions d'interpolation à divergence nulle [SCV86]. Ainsi, on peut éliminer la pression et n'interpoler que la vitesse, la condition d'incompressibilité étant satisfaite automatiquement. Les vecteurs vitesses w_i sont approximés de la manière suivante :

$$[w_i] = [R] [\bar{w}_i] \quad i=1, \dots, p \tag{20}$$

où $[\bar{w}_i]$ représente le vecteur vitesse associée aux fonctions d'interpolations à divergence nulle à l'ordre i et $[R]$ est la matrice de passage de cette transformation. Après discrétisation, les problèmes [18] et [19] seront résolus de la sorte :

1- Évaluation de la solution à l'ordre l :

$$\left\{ \begin{aligned} [\bar{w}_l^*] &= [K_l]^{-1} [\hat{F}] \\ \lambda_l &= \frac{l}{\left(\left([\bar{w}_l^*] + [\hat{w}_l] \right)^t \left([\bar{w}_l^*] + [\hat{w}_l] \right) + l \right)^{1/2}} \\ [\bar{w}_l] &= \lambda_l [\bar{w}_l^*] \end{aligned} \right. \tag{21}$$

2- Évaluation de la solution à l'ordre p où $p \geq 2$:

$$\left\{ \begin{aligned} [\bar{w}_p^{-nl}] &= [K_p]^{-1} [F_p^{nl}] \\ \lambda_p &= -\lambda_l^2 [\bar{w}_l^*]^t [\bar{w}_p^{-nl}] \\ [\bar{w}_p] &= [\bar{w}_p^{-nl}] + \lambda_p [\bar{w}_l^*] \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Dans les formules [21] et [22], $[K_t]$ est la matrice de rigidité tangente au point de départ u_0 , λ_0 et $[F_p^{nl}]$ est un vecteur de forces qui ne dépend que des solutions $\left[\begin{smallmatrix} - \\ w_r \end{smallmatrix} \right]$ aux ordres précédents $r \leq p$.

D'après les formules [21] et [22] on remarque que la résolution de tous les problèmes se fait en décomposant une seule fois la matrice tangente $[K_t]$, et en construisant plusieurs vecteurs $[F_p^{nl}]$. En conséquence, le temps de calcul des séries [8] reste du même ordre de grandeur que la résolution du problème de Stokes.

Il est à noter aussi qu'une fois les vecteurs $\left[\begin{smallmatrix} - \\ w_p \end{smallmatrix} \right]$ et les coefficients λ_p déterminés, il serait très facile de calculer la pression à l'ordre p en utilisant la partie à divergence non nulle de l'approximation [SCV86]. Un tel calcul ne sera pas traité dans ce papier.

Nous sommes limités à des éléments triangulaires non conformes de Crouzeix-Raviart. Ces éléments possèdent trois nœuds à deux d.d.l. par nœud pour la vitesse et un nœud à un d.d.l. pour la pression. Les nœuds de la vitesse occupent les milieux des côtés alors que celui de la pression occupe le centre de l'élément.

La technique asymptotique numérique a été implantée sans difficulté dans le logiciel MODULEF (Volume 36, version 84). On peut bien sûr envisager de résoudre les problèmes [21] et [22] avec d'autres types d'éléments finis ou même avec d'autres méthodes numériques telles que les différences finies ou les éléments de frontières.

3.3. Application numérique

Exemple 1: Problème d'écoulement autour d'un cylindre

Dans les sections précédentes, nous avons présenté une procédure qui nous permet de calculer les termes des séries [8] à tous les ordres. En pratique, nous allons tronquer ces séries à un ordre p , ce qui nous donne une approximation polynomiale de la branche de solution, et nous allons montrer jusqu'à quel point ces développements polynomiaux sont valables. Nous considérons pour cela un exemple classique d'écoulement autour d'un obstacle. Le problème physique est celui de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon $R=0.5$ plongé dans un fluide de viscosité cinématique $\nu=0.1$, animé d'une vitesse uniforme λu_d sur les frontières horizontales. Le nombre de Reynolds est donné par la formule suivante :

$$Re = 2\lambda u_d R / \nu$$

Le maillage et la géométrie du problème sont présentés sur la figure 1.

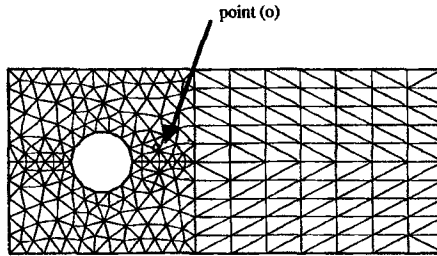


Figure 1. Maillage utilisé pour l'écoulement autour d'un cylindre. Les caractéristiques du système sont : longueur $L=14$, largeur $l=6$, rayon du cylindre $R=0.5$, viscosité cinématique du fluide $\nu=0.1$ et vitesse sur toute la frontière du domaine $u_d=1$. Le nombre de degré de liberté de ce maillage est égal à 1390

Discussion sur les termes de la série

La M.A.N nous permet de déterminer un très grand nombre de termes des séries [8], qui sont visualisés sur la figure 2-a pour les ordres impairs et sur la figure 2-b pour les ordres pairs. La figure 2 nous permet d'observer que les vecteurs d'ordres pairs et ceux d'ordres impairs présentent une certaine colinéarité entre eux respectivement. Une telle observation est confirmée par un calcul de corrélation entre les termes formant la série [8]. On définit une corrélation par la formule suivante :

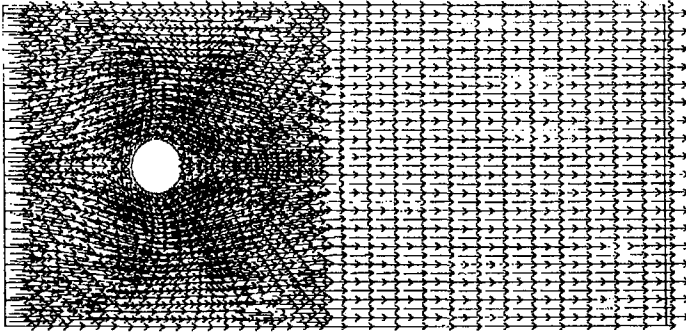
$$\text{cor}(i, j) = \langle u_i, u_j \rangle / (\langle u_i, u_i \rangle)^{1/2} (\langle u_j, u_j \rangle)^{1/2} \quad [23]$$

La valeur de la corrélation entre le vecteur d'ordre 2 et celui d'ordre 4 qui est égale à 0.9 témoigne de cette colinéarité.

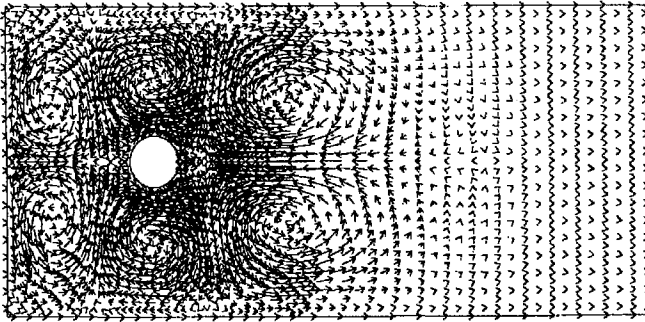
Rayon de convergence

Analysons maintenant la qualité des approximations polynomiales obtenues en tronquant les séries [8] à un certain ordre. La figure (3) présente l'évolution du vecteur vitesse en fonction du nombre de Reynolds pour différentes troncatures des séries [8] en un point situé juste derrière l'obstacle. Nous les avons comparées avec des solutions dites 'exactes' obtenues par des méthodes itératives de type Newton-Raphson ou de points fixes. Ces courbes représentant le vecteur vitesse en fonction du nombre du Reynolds, sont très caractéristiques des approximations polynomiales. Pour des petites valeurs du paramètre 'a', on constate que les solutions asymptotiques numériques coïncident presque parfaitement avec des solution exactes obtenues par la méthode de point fixe ou celle de Newton-Raphson. Au-delà d'une valeur critique 'a', la représentation polynomiale diverge. Cette valeur critique de 'a' représente clairement le rayon de convergence des séries entières [8].

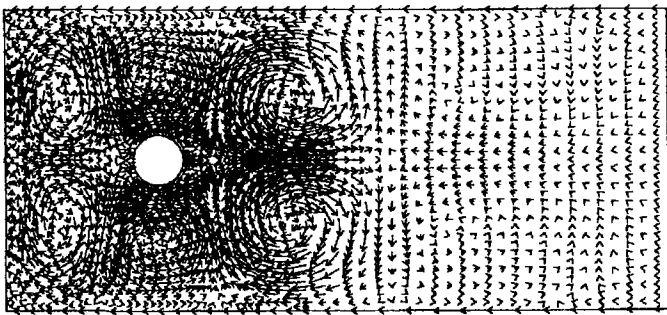
Un simple aperçu mathématique nous permet de montrer que ceci est dû à la représentation polynomiale car pour n grand les fonctions a^n tendent vers 0 lorsque 'a' est assez petit ($a < 1$) mais croissent rapidement lorsque 'a' est grand ($a > 1$).



Vecteur U_1

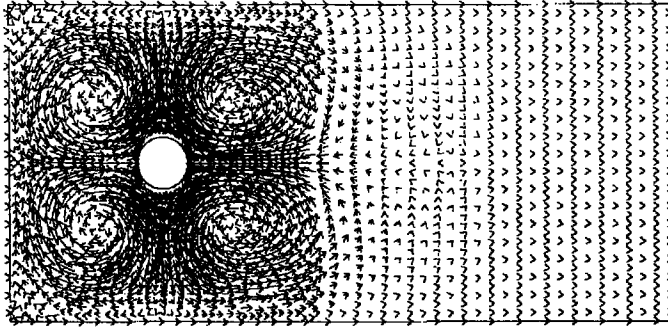


Vecteur U_3

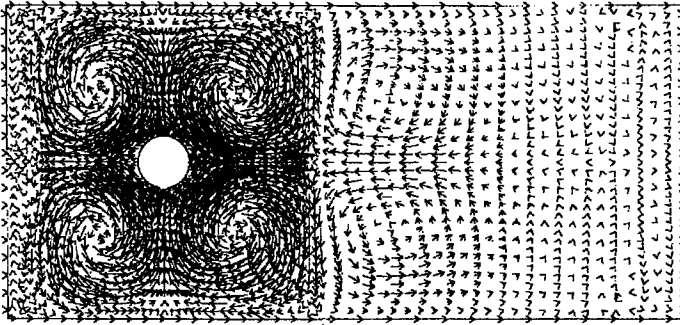


Vecteur U_5

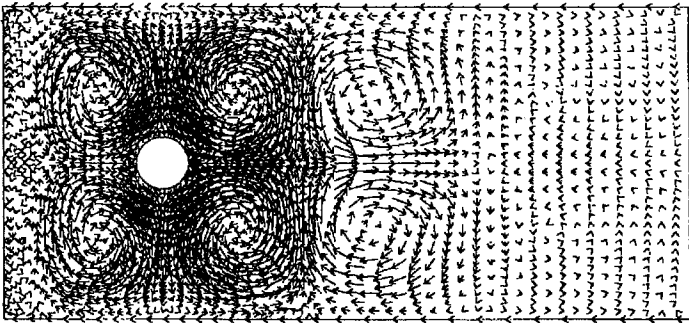
Figure 2a. Visualisation des termes impairs du vecteur vitesse donnés par la série [8]



Vecteur U_2



Vecteur U_4



Vecteur U_6

Figure 2b. Visualisation des termes pairs du vecteur vitesse donnés par la série [8]

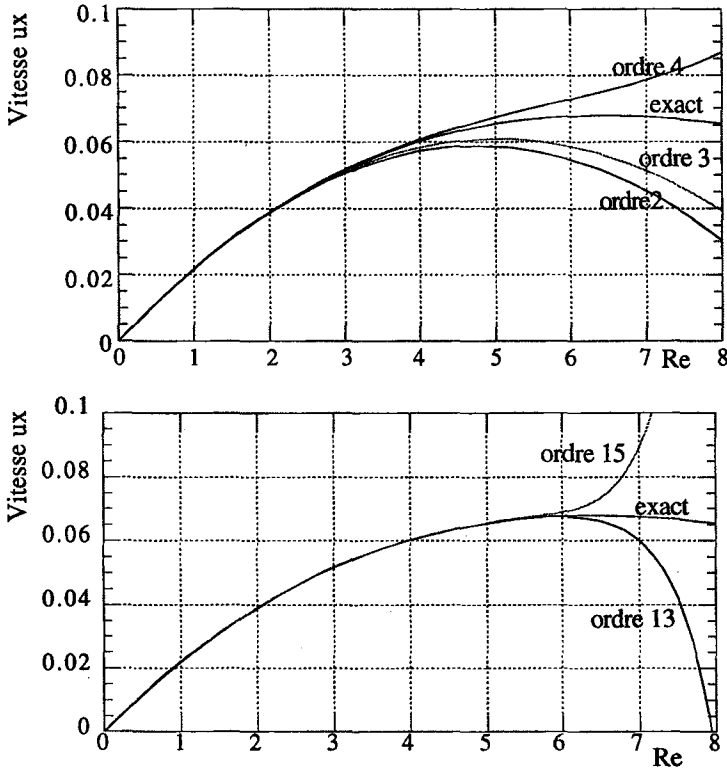


Figure 3. Représentation de la vitesse d'écoulement au point (0) en fonction du nombre de Reynolds pour différentes troncatures des séries [8]. Le rayon de convergence est de l'ordre de $Re \approx 6$. La solution exacte est donnée par la méthode de point fixe

D'après la figure 3, nous observons que les troncatures à l'ordre 3, ..., 15 améliorent notablement la solution à l'ordre 2. Dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre, l'ordre de troncature 13 nous permet de suivre la branche de solution exacte jusqu'à $Re \approx 6$. Ensuite la qualité de la solution asymptotique se dégrade. Dans l'espoir d'améliorer cette solution au-delà de cette valeur, on aborde des techniques d'amélioration des séries telles que les approximants de Padé.

4. Amélioration par les approximants de Padé

La méthode des approximants de Padé permet en général d'améliorer le domaine de convergence d'une série entière. Elle consiste à transformer une série entière en une fraction rationnelle dont le développement de Taylor coïncide avec la série jusqu'à un certain ordre. Pour plus de détails sur ces techniques nous renvoyons le lecteur à [BG81, CDP94].

Un approximant de Padé $P[L/M]$ d'une fonction scalaire $g(x)$ est une fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme de degré L , et le dénominateur un polynôme de degré M avec $b_0 = 1$, et tels que les développements de Taylor coïncident jusqu'à l'ordre $N=M+L$ inclus.

$$g(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_N \cdot x^N + \dots$$

$$P[L/M] = \frac{c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_L \cdot x^L}{b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_M \cdot x^M} \tag{24}$$

Les coefficients c_i et b_i sont déterminés à partir des coefficients a_i de la série en résolvant un système linéaire de taille M .

Dans notre cas, nous avons utilisé des approximants de Padé pour améliorer nos séries vectorielles [8]. Notre procédure se fait alors en deux étapes. La première consiste à construire une base orthogonale u_k^\perp à partir des vecteurs u_p par la procédure de Schmidt :

$$u_p = \sum_{k=1}^p \alpha_k^p u_k^\perp \quad \alpha_k^p = \frac{\langle u_p, u_k^\perp \rangle}{\langle u_k^\perp, u_k^\perp \rangle} \quad \text{pour } 1 < k < p$$

$$\alpha_p^p = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p^1 = 0$$
[25]

Par conséquent l'écriture de la série u dans cette base devient :

$$u = \sum_{k=1}^p a^k f_k(a) \cdot u_k^\perp \quad \text{où} \quad f_k(a) = \sum_{i=k}^p a^{i-k} \alpha_i^k$$
[26]

Dans la deuxième étape, on remplace les polynômes $f_k(a)$ par des approximants de Padé. Le vecteur u se réécrit alors sous la forme suivante :

$$u = \sum_{k=1}^p a^k P_k[L_k/M_k](a) \cdot u_k^\perp$$
[27]

La branche de solutions est alors représentée par l'approximation rationnelle [27]. Le calcul des vecteurs u_k^\perp et $P_k[L_k/M_k]$ se fait d'une manière automatique, seuls les ordres L_k et M_k de chaque approximant doivent être précisément choisis.

Sur la figure 4, nous montrons les améliorations obtenues : la nouvelle représentation est bonne jusqu'à $Re = 9$ avec l'utilisation de cinq termes de la représentation [27], et jusqu'à $Re = 19$ avec six termes.

On constate que les approximations rationnelles sont bien meilleures que les approximations polynomiales. Il est à noter toutefois qu'une amélioration aussi importante n'est pas garantie dans tous les cas.

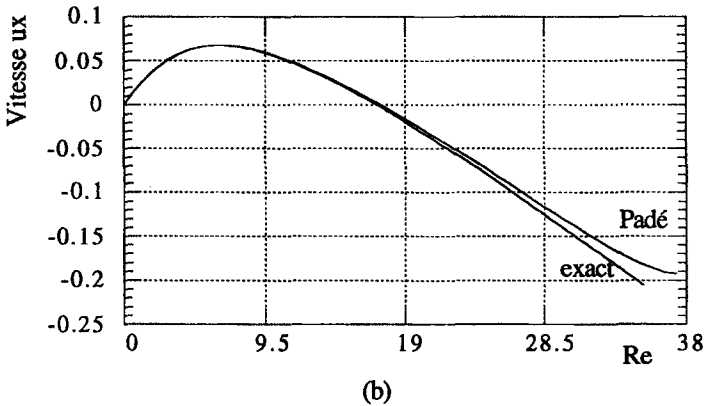
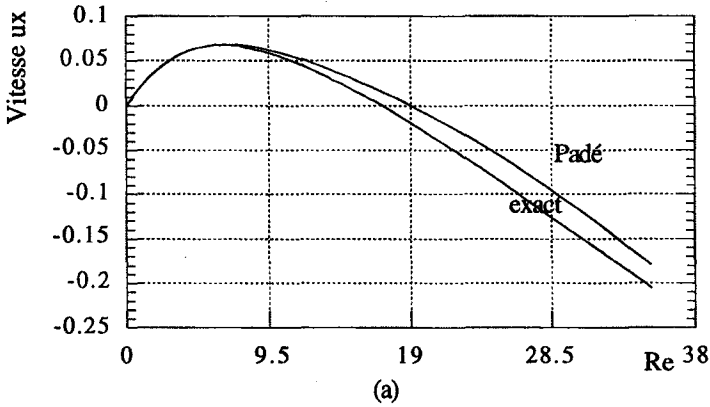


Figure 4. Courbe de la vitesse au point (o) en fonction du nombre de Reynolds pour les approximations de Padé [27]. **4a.** La représentation est satisfaisante jusqu'à $Re \approx 9$ en utilisant les approximants suivants: $[L_2/M_2]=[9/10]$, $[L_3/M_3]=[8/10]$, $[L_4/M_4]=[5/8]$. **4b.** La représentation est satisfaisante jusqu'à $Re \approx 19$ en utilisant les approximants suivants: $[L_2/M_2]=[9/10]$, $[L_3/M_3]=[8/10]$, $[L_4/M_4]=[7/10]$, $[L_5/M_5]=[6/10]$

La représentation de la branche de solutions a un domaine de validité limité, même si ici il est bien plus grand que celui de l'approximation polynomiale. L'utilisation pratique de ces méthodes impose donc une technique de continuation, ce

qui implique une définition automatique du domaine de validité et une stratégie pour définir les pas successifs. Une telle stratégie n'a pas encore été mise au point dans le cas des approximations de Padé. Elle sera décrite au paragraphe suivant dans le cas des approximations polynomiales.

5. Méthode de Continuation asymptotique-numérique

La méthode utilisée ici a été proposée et testée en calcul des structures par Cochelin [Coc94]. Il s'agit d'une méthode pas à pas, où au cours d'un pas de calcul, on cherche une représentation polynomiale de la branche de solution comme il a été décrit au paragraphe 3. Ensuite, on détermine la fin du pas qui doit être suffisamment à l'intérieur du rayon de convergence. Une définition de la fin du pas a été proposée [Coc94] et son efficacité numérique a été établie par de nombreux tests. Cette fin du pas est caractérisée par :

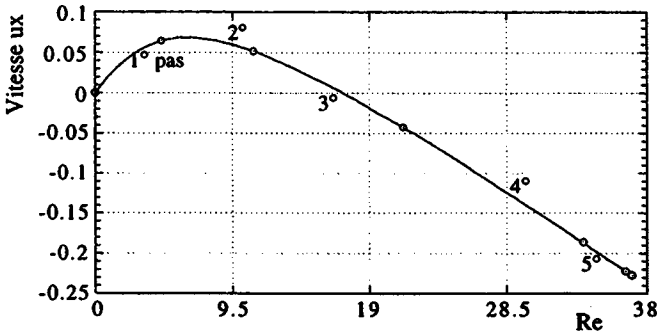
$$a_m = \left(\frac{\langle u_1, u_1 \rangle^{1/2}}{\langle u_p, u_p \rangle^{1/2}} \right)^{1/p-1}$$

où a_m est la valeur du paramètre 'a' à la fin du pas. Le nombre sans dimension ε est assez petit, de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-7} . A partir du point terminal ainsi déterminé, il est possible d'effectuer un nouveau pas de calcul.

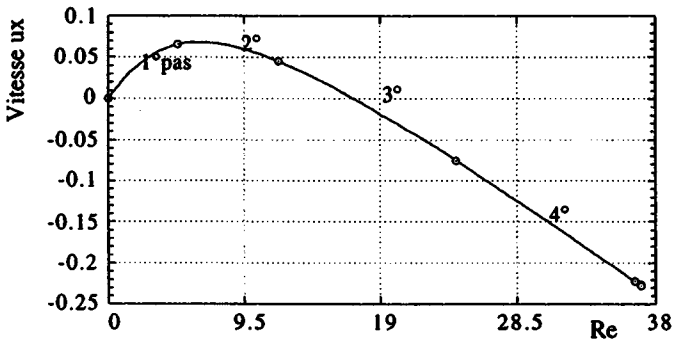
Cet algorithme a été implémenté dans MODULEF. Nous présentons ici trois calculs qui permettent de valider la méthode et de donner un aperçu de son efficacité. Le premier test est l'écoulement autour d'un cylindre fixe déjà décrit précédemment. Dans le second test, on traite l'écoulement d'un fluide à l'intérieur de deux cylindres coaxiaux de rayons $R1=1$ et $R2=1,5$ et de vitesses angulaires respectives $\Omega1 = \lambda$ et $\Omega2 = 0$. Les autres données sont précisées sur la figure (6). Le troisième test est un écoulement dans une conduite divergente.

Pour le premier exemple, on présente la branche de solution décrivant la vitesse de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds pour différentes troncatures des séries [8] et avec le même paramètre $\varepsilon = 10^{-5}$. On constate, figure 5a, qu'une troncature à l'ordre 12 nous permet de suivre la branche de solution jusqu'à $Re = 36$ en 5 pas (c'est-à-dire avec 5 décompositions de la matrice de rigidité), alors que cette branche est obtenue en 4 pas en augmentant l'ordre de troncature jusqu'à 16, figure 5b. Il n'est donc pas inutile de calculer un grand nombre de termes des séries [8], d'autant plus que la qualité de la solution à l'intérieur du rayon de convergence augmente forcément avec l'ordre de troncature et que le coût de calcul n'augmente que modérément avec cet ordre.

A titre comparatif, nous avons tracé cette même courbe jusqu'à $Re = 35$ en calculant 7 points (avec un pas de calcul $\Delta Re = 5$) par une méthode itérative de point fixe. Le calcul a demandé 126 itérations, c'est-à-dire 126 décompositions de la matrice de rigidité tangente. En d'autres termes, le calcul de 7 points par une méthode itérative a demandé presque dix huit fois plus de temps que la présentation d'une branche de solution analytique donnée par la méthode asymptotique numérique et avec la même qualité de précision.

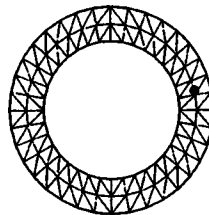


(a)

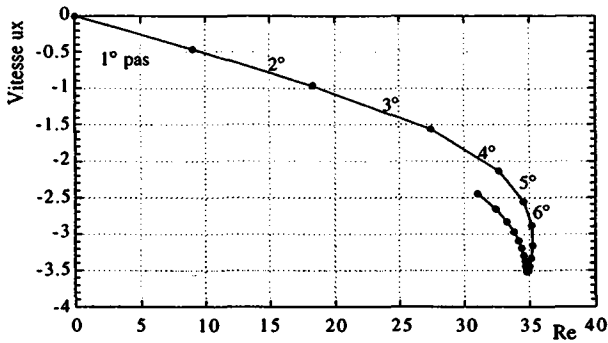


(b)

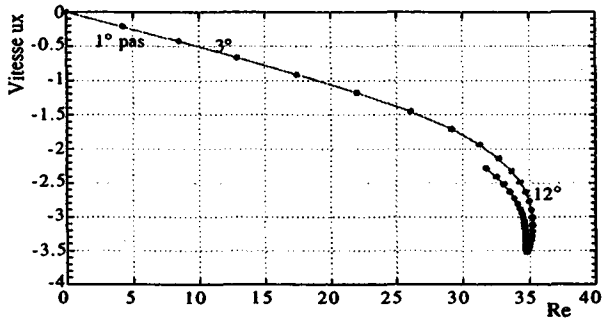
Figure 5. Courbe de la vitesse au point (o) de l'écoulement autour d'un cylindre (exemple 1) en fonction du nombre de Reynolds par une méthode asymptotique numérique de continuation. 5a. A l'ordre 12 et pour $\epsilon = 10^{-5}$, cette méthode suit la branche jusqu'à $Re=36$ en 5 pas. 5b. A l'ordre 16 et pour $\epsilon = 10^{-5}$, cette méthode suit la branche jusqu'à $Re=36$ en 4 pas



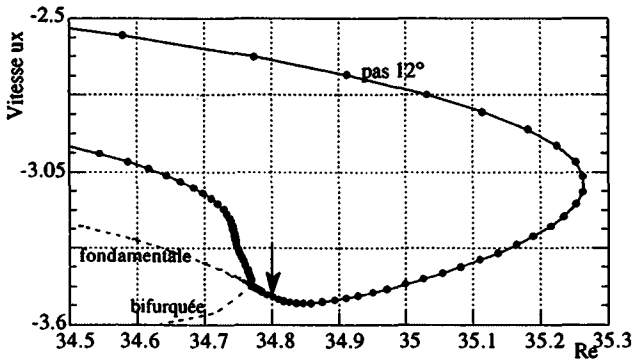
Exemple 2. Écoulement d'un fluide à l'intérieur de deux cylindre coaxiaux (2 Dimensions). Les caractéristiques du système sont : le cylindre intérieur est de rayon $R1= 1$ et à une vitesse angulaire $\Omega1= \lambda$, le cylindre extérieur est de rayon $R2= 1.5$ et à une vitesse angulaire nulle. Le fluide a pour viscosité $\nu = 0.1$. Le nombre de Reynolds est $Re=\lambda R1 (R2-R1)/\nu$. Le nombre de degré de liberté de ce maillage est égal à 504



(a)

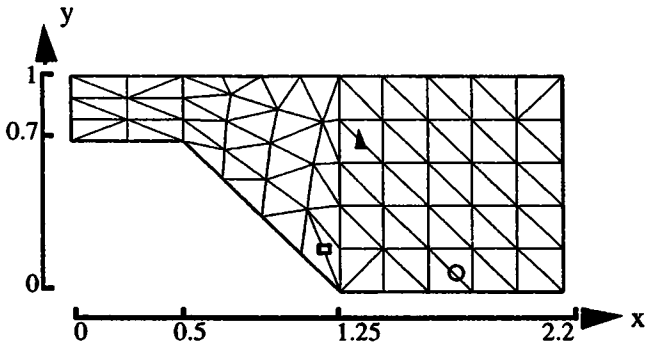


(b)



(c)

Figure 6. Courbe de la vitesse au point (o) de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur de deux cylindres coaxiaux (exemple 2) en fonction du nombre de Reynolds par une méthode asymptotique numérique de continuation. 6a. A l'ordre 7 et pour $\epsilon = 10^{-5}$, cette méthode suit la branche jusqu'à $Re=35$ en 6 pas. 6b. A l'ordre 7 et pour $\epsilon=10^{-7}$, cette méthode suit la branche jusqu'à $Re=35$ en 12 pas. 6c. Un zoom de la figure 6b au voisinage de la zone de forte accumulation de pas. Les courbes en pointillés sont ajoutées à titre explicatif



Exemple 3. *Écoulement dans un tunnel. Les caractéristiques du système sont : viscosité du fluide $\nu = 0.1$, vitesse d'entrée par $u_x(y) = \lambda (1.5 - 6.667(y - 0.85)^2)$, $u_y = 0$. Le nombre de degré de liberté de ce maillage est égal à 312.*

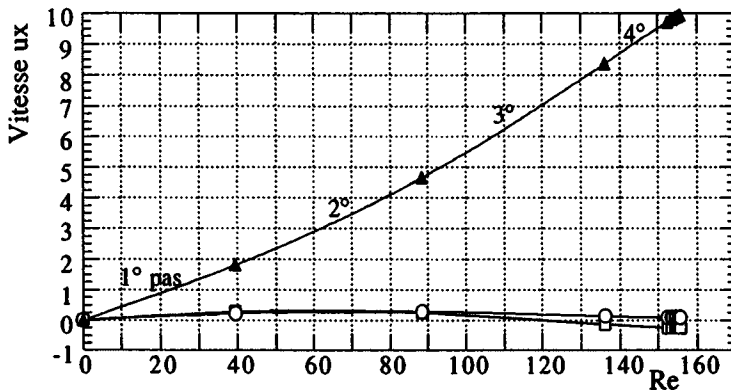


Figure 7. *Représentation de la vitesse d'écoulement dans un tunnel (exemple 3) en fonction du nombre de Reynolds par une méthode asymptotique numérique de continuation pour différents points de l'écoulement. À l'ordre 16 et pour $\varepsilon = 10^{-5}$, cette méthode suit la branche jusqu'à $Re=155,65$.*

Dans le second exemple, on a calculé la branche de solution pour deux valeurs de ε ($\varepsilon = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-7}$) avec le même ordre de troncature. Le second choix, plus sévère, a conduit à une augmentation du nombre de pas, mais la qualité de la solution numérique s'en trouve augmentée de façon significative. On constate aussi que la technique choisie permet de calculer la branche instable au-delà du point limite et de suivre automatiquement des branches de solutions fortement non linéaires, comme dans beaucoup d'autres applications [CDP94].

D'après le zoom présenté sur la figure 6c, on pressent qu'il y a un point de bifurcation juste après le point limite et que la dernière partie de la branche correspond à une branche bifurquée. En fait, nous sommes convaincus que l'on a bien une bifurcation simple, car en modifiant le paramètre ϵ et l'ordre de troncature, il arrive que l'algorithme de continuation suive l'autre partie de la branche bifurquée représentée en pointillés sur la figure 6c, ou même la branche fondamentale (cas de la figure 6a). Cette analyse confirme la robustesse de cette méthode de suivi de courbes qui raccourcit automatiquement la longueur de ses pas lorsqu'une difficulté s'annonce. Cette robustesse est due au choix du paramètre [12] et au critère de fin de pas qui est assez restrictif lorsque ϵ est petit.

Les résultats de troisième test sont présentés sur la figure 7.

Discussion sur les exemples tests

Dans le troisième exemple comme dans le premier, on constate que les pas de calcul finissent par se raccourcir, et on note une accumulation de pas à une sorte de zone d'arrêt pour des valeurs respectives du nombre de Reynolds voisines de 155 et 37. Dans le second exemple, notre calcul fait apparaître une zone où la longueur de pas se raccourcit fortement. Elle correspond à l'approche d'un point de bifurcation et au branchement sur la solution bifurquée, ce que nous avons aussi observé sur des cas de mécanique des structures. Les exemples 1 et 3 sont les seuls cas où l'accumulation de pas a conduit à un arrêt de la méthode numérique. Il est intéressant de savoir si le phénomène d'arrêt numérique est lié à la méthode numérique ou à une singularité intrinsèque aux problèmes physiques considérés. Cette question sera discutée dans le paragraphe suivant où l'on s'intéresse à la détection des bifurcations.

Notons aussi que Kawahara et al. [KYNO74] ont calculé les solutions stationnaires du problème 3 et que le calcul s'arrête aussi pour $Re \approx 155$.

Notons aussi que les branches de solutions sont parfois très sensibles à la finesse du maillage, mais ce n'est pas la question qui nous intéresse ici. Dans le cadre de cet article, il nous suffit de constater que dans leur domaine de validité, les méthodes itératives et les méthodes asymptotiques donnent exactement le même résultat pour un même maillage.

6. Détection de points de bifurcation stationnaire par une méthode asymptotique numérique

La détermination des instabilités s'effectue souvent grâce à des indicateurs de points singuliers tels que le déterminant de la matrice de rigidité tangente ou le plus petit pivot de cette même matrice. Ces indicateurs sont difficilement adaptables aux méthodes asymptotiques. Pour cela, on introduit un indicateur de point de bifurcation $\Delta\chi(a)$ bien adapté aux méthodes asymptotiques. Le point de bifurcation est atteint lorsque l'indicateur passe par zéro. Une première présentation de cet indicateur se trouve dans la thèse de Boutyour [Bou94] dédiée aux structures élastiques. Son adaptation pour les équations de Navier-Stokes est présentée dans ce paragraphe.

6.1. Un critère de détection des singularités du problème stationnaire

Pour étudier la stabilité de la solution $(u(a), p(a), \lambda(a))$, on considère des perturbations Δv et Δp respectivement de la vitesse du fluide et de la pression.

$$v = u(a) + \Delta v \quad q = p(a) + \Delta p$$

En injectant ces équations dans [6] et en négligeant les termes non-linéaires, on obtient un problème de valeurs propres, qui dans notre formalisme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(\Delta v) + Q(u(a), \Delta v) + Q(\Delta v, u(a)) + D^t(\Delta p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(\Delta v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad [28]$$

L'analyse linéaire du problème [28], consiste à trouver la valeur critique de 'a' (on en déduira la valeur critique du nombre de Reynolds car il dépend de 'a') pour laquelle la solution fondamentale $(u(a), p(a), \lambda(a))$ perd son unicité. En cas de bifurcation stationnaire, cette perte d'unicité est caractérisée par un changement de signe d'une valeur propre réelle de l'opérateur tangent du problème aux valeurs propres associé à [28]. En effet, la recherche du point de bifurcation est liée à la recherche d'une valeur propre réelle nulle. Dans les codes de calcul actuels, la détermination de ces points de bifurcation stationnaire est souvent liée au plus petit pivot de la matrice de rigidité tangente ou au changement de signe de son déterminant. Ces méthodes ne sont pas très adaptables dans un cadre asymptotique numérique, c'est pourquoi, nous proposons une autre méthode qui s'appuie sur la définition d'un indicateur de bifurcation bien adapté. En un point de la solution fondamentale, on introduit dans le système [28] une "force de perturbation" $h(x_i)$ donnée aléatoirement dont l'intensité est mesurée par un scalaire inconnu $\Delta\chi$. Le triplet $(\Delta v, \Delta p, \Delta\chi)$ est maintenant solution de l'équation perturbée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t^a(\Delta v) + D^t(\Delta p) = \Delta\chi \ h & \text{dans } \Omega \\ D(\Delta v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad [29]$$

avec L_t^a est l'opérateur tangent pris en un point de la branche fondamentale,

$L_t^a(.) = L(.) + Q(u(a), .) + Q(. , u(a))$. A ce niveau, il reste encore une indétermination dans le problème [29], et on s'impose la condition supplémentaire suivante :

$$\langle \Delta v - \Delta v_0, \Delta v_0 \rangle = 0 \quad [30]$$

où Δv_0 est la réponse à la perturbation h à l'origine.

En principe le choix d'une perturbation aléatoire permet d'éviter que la perturbation Δv soit orthogonale à Δv_0 . Dans le cas contraire, un autre indicateur a été proposé [Bou94] utilisant deux forces de perturbations.

On s'intéresse alors à l'évolution de la solution $(\Delta v, \Delta p, \Delta \chi)$ lorsqu'on parcourt la branche fondamentale. C'est donc la fonction scalaire $\Delta \chi(a)$ qui est l'indicateur de bifurcation annoncé. La technique consiste à calculer cet indicateur et à chercher les valeurs du paramètre 'a' qui l'annulent.

6.2. Détermination de l'indicateur par une méthode asymptotique numérique

Dans les paragraphes précédents, nous avons calculé la branche de solutions fondamentale (u, p, λ) sous forme de séries entières par rapport au paramètre 'a' au voisinage d'une solution connue (u_0, p_0, λ_0) . En restant dans la même logique, nous développons les perturbations $\Delta v, \Delta p$ et $\Delta \chi$ en fonction du même paramètre 'a'

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = \Delta v_0 + a \Delta v_1 + a^2 \Delta v_2 + a^3 \Delta v_3 + a^4 \Delta v_4 + \dots \\ \Delta p = \Delta p_0 + a \Delta p_1 + a^2 \Delta p_2 + a^3 \Delta p_3 + a^4 \Delta p_4 + \dots \\ \Delta \chi = 1 + a \Delta \chi_1 + a^2 \Delta \chi_2 + a^3 \Delta \chi_3 + a^4 \Delta \chi_4 + \dots \end{array} \right. \quad [31]$$

où Δv_0 et Δp_0 représentent la réponse à la perturbation h au point (u_0, p_0, λ_0) . En injectant les développements [8] et [31] dans les formules [29] et [30], et en identifiant suivant les puissances de 'a', on obtient la série de problèmes linéaires suivants :

ordre 0 :

Trouver $(\Delta v_0, \Delta p_0, \Delta \chi_0)$.vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t^{a=0} (\Delta v_0) + D^t (\Delta p_0) = h & \text{dans } \Omega \\ D(\Delta v_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta v_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad [32]$$

ordre p :

Trouver $(\Delta v_p, \Delta p_p, \Delta \chi_p)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_t^{a=0}(\Delta v_p) + D^t(\Delta p_p) = \Delta \chi_p h - \sum_{r=1}^p Q(u_r, \Delta v_{p-r}) - \sum_{r=1}^p Q(\Delta v_{p-r}, u_r) \text{ dans } \Omega \\ D(\Delta v_p) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Delta v_p = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \langle \Delta v_p, \Delta v_0 \rangle = 0 \end{array} \right. \quad [33]$$

où $L_t^{a=0}$ est l'opérateur tangent au point régulier (u_0, p_0, λ_0) donné par la formule [11].

Pour résoudre ces problèmes nous adoptons une démarche éléments finis analogue à celle du paragraphe 3.2. Il suffit de décomposer une seule fois la matrice de rigidité tangente $[K_t]$, ce qui a déjà été fait pour calculer la branche fondamentale. La tâche la plus importante dans cette résolution reste alors la construction du second membre à chaque ordre qui dépend des termes de la série [8] et des termes Δv_i calculés précédemment. En résumé, la M.A.N présentée ici nous permet de déterminer un grand nombre des termes des séries [31] pour un faible coût de calcul. Ces séries ont bien sûr un rayon de convergence fini qui semble souvent très voisin de celui de la série initiale [8]. Bien entendu, on ne prendra en considération que les zéros de $\Delta \chi(a)$ à l'intérieur du rayon de convergence.

Nous appliquons la démarche présentée ci-dessus pour le test des deux cylindres (exemple 2). Nous avons calculé les séries [31] en chaque pas de la branche fondamentale et nous avons représenté l'indicateur $\Delta \chi(a)$ en fonction du paramètre 'a'. La figure 8a montre la fonction $\Delta \chi(a)$ obtenue pour le premier pas de la branche fondamentale à partir de la vitesse nulle. On voit que l'indicateur ne s'annule pas à l'intérieur du rayon de convergence qui semble être autour de $a = 4.5$. Il n'y a donc ni bifurcation stationnaire, ni point limite (ce qui est évident) au cours de ce premier pas. Si on recommence la même procédure à partir du point (indiqué par une flèche sur la figure 6c) défini au voisinage de la zone d'accumulation de pas, on montre que $\Delta \chi(a)$ s'annule pour un $a = 0,00165$ ce qui correspond au point de bifurcation.

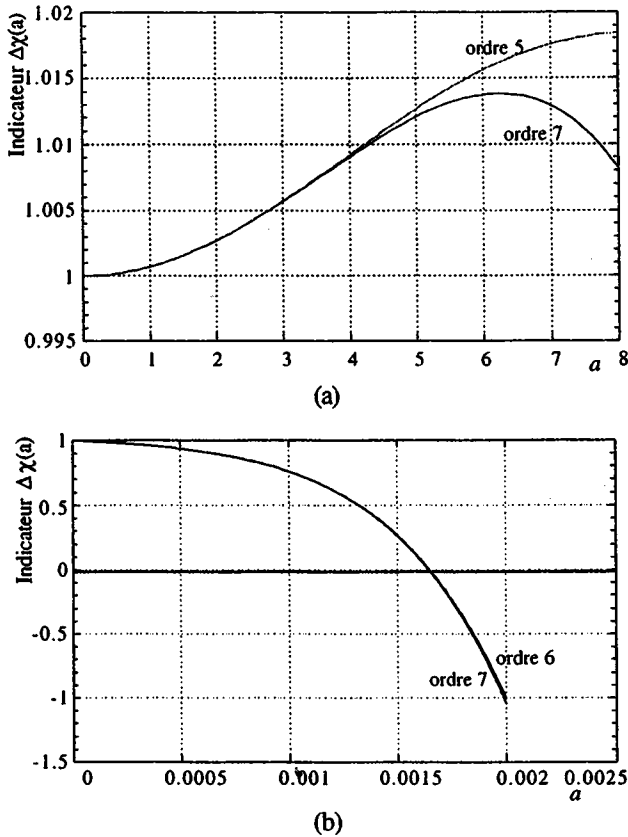


Figure 8. Représentation polynomiale de l'indicateur de bifurcation $\Delta\chi(a)$ en fonction du paramètre 'a'. 8a. L'indicateur ne s'annule pas car on est loin de la bifurcation (premier pas $Re=0$). 8b. Le point de départ est donné pour $Re=34.8$ (point indiqué par une flèche dans la figure 6c). L'indicateur s'annule pour $a=0,00165$ correspondant au point de bifurcation

6.3. Comparaison

Pour comparer ces résultats, nous avons calculé $\Delta\chi(a)$ d'une manière directe (dite exacte). Après discrétisation du problème [29] et de l'équation [30], la formule exacte de $\Delta\chi(a)$ est donnée comme suit :

$$\Delta\chi(a) = \frac{[\Delta v_0]^t \cdot [\Delta v_0]}{[K_r^a]^{-1} [h]^t [\Delta v_0]} \quad [34]$$

où $[K_r^a]$ représente la matrice discrétisée de l'opérateur L_r^a .

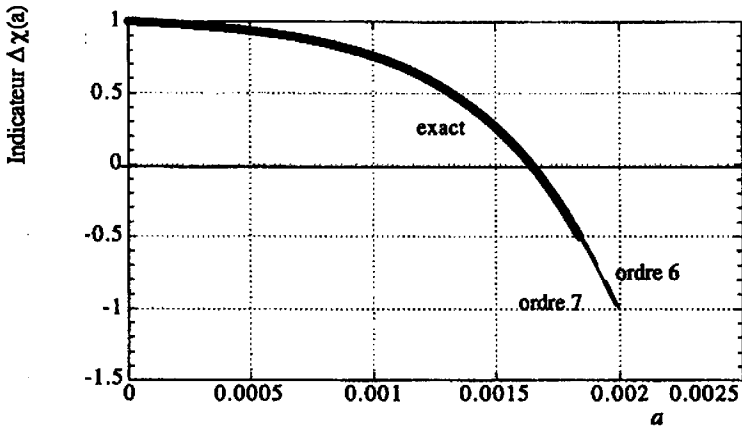


Figure 9. Représentation polynomiale de $\Delta\chi(a)$ en fonction du paramètre 'a'. L'indicateur s'annule pour $a=0,00165$ aussi bien par la méthode asymptotique que par la méthode exacte

Un tel calcul, figure 9, a donné la même valeur critique de 'a' (qui annule l'indicateur) que celle donnée par la méthode asymptotique numérique.

Les outils présentés ici sont performants pour le cas d'une bifurcation simple c'est-à-dire d'une bifurcation isolée.

6.4. A propos des zones d'arrêt numériques

Nous avons observé que notre méthode de continuation fait apparaître une accumulation de pas et une zone d'arrêt dans les exemples 1 et 3 pour des Reynolds voisins de 37 et de 155. Des phénomènes d'accumulations semblables, mais sans zone d'arrêt ont été trouvés dans le cas des deux cylindres et ils correspondent à des quasi-bifurcations. On peut se demander si ces zones d'arrêt correspondent aussi à des bifurcations, mais qui seraient plus difficiles à appréhender numériquement.

A cet effet, nous avons calculé l'indicateur de bifurcation le long des branches présentées aux figures 5 et 7. La représentation exacte [34] est plus fiable que la représentation en série [31], car le rayon de convergence de la série est souvent voisin du point de bifurcation.

Dans les deux cas, nous avons trouvé que l'indicateur donné par [34] s'annule plusieurs fois au voisinage de la zone d'arrêt. Ceci semble indiquer que le problème d'arrêt numérique est dû à l'existence de plusieurs points de bifurcation rapprochés et notre technique de continuation ne permet pas encore d'avancer à travers le grand nombre de branches de solutions dues à ces bifurcations multiples ou quasi multiples.

On peut aussi se demander si ces zones d'arrêt, observées sur le système discret, sont représentatives du modèle continu, ce qui ne semble pas en accord avec la théorie des équations aux dérivées partielles. Nous avons constaté qu'un raffinement de maillage ne conduit qu'à un léger déplacement de ces zones.

Des études récentes mais non publiés de J.M. Cadou ont été menées avec un modèle numérique assez différent. Il n'a pas trouvé de telles zones d'arrêt, mais seulement quelques bifurcations stationnaires pour des nombres de Reynolds un peu plus élevés, de l'ordre de 50.

Nous pensons que le comportement observé dans l'exemple 1 pour des nombres de Reynolds entre 35 et 40 n'est pas complètement représentatif des équations de Navier-Stokes. Le modèle numérique mérite donc d'être amélioré, sans que la méthode asymptotique-numérique soit remise en cause.

7. Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes attachés à la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires par les méthodes asymptotiques-numériques. Les points importants qui se dégagent sont les suivants.

Les équations de Navier-Stokes admettent une non linéarité quadratique, et il est donc facile de calculer un grand nombre de termes d'une série de perturbation régulière. Ce faisant, on obtient une représentation analytique locale de la branche pour un coût de calcul faible, car il suffit d'une seule factorisation de la matrice globale.

L'amélioration des séries par des approximations de Padé est prometteuse car bien souvent, on améliore considérablement le domaine de convergence pour un coût de calcul insignifiant. Il se pose cependant le problème de choix des approximations et de la présence de pôles indésirables sur certains approximations.

En enchaînant plusieurs pas de calcul, on arrive à décrire complètement une branche non-linéaire avec quelques factorisations de matrices seulement. Le paramètre de chemin défini par l'équation [12], permet de franchir tous les points limites, et seules les bifurcations peuvent poser des problèmes, comme cela a été montré sur les tests numériques.

Lorsque l'on se trouve proche d'une bifurcation, les séries ont un rayon de convergence qui est imposé par la distance entre le point de départ et la bifurcation. Comme on définit les nouveaux points de départ à l'intérieur du rayon de convergence, on constate une accumulation de pas à l'approche des bifurcations. Ce phénomène d'accumulation, propre à notre algorithme, est toujours annonciateur d'une difficulté sur la courbe : bifurcation ou quasi bifurcation.

Nous avons testé un indicateur de bifurcation bien adapté aux techniques de développement en série. Il permet de localiser précisément un point de bifurcation sur une branche non-linéaire, et de calculer le mode de bifurcation. Il est plus fiable et plus facile à utiliser que les indicateurs classiques par le fait que l'on exploite pleinement la représentation analytique de la branche fondamentale.

En conclusion, nous confirmons sur ces exemples de mécanique des fluides, que les méthodes asymptotiques-numériques sont performantes pour effectuer le suivi de branches de solutions non-linéaires et pour détecter les éventuelles bifurcations.

Afin d'étendre le champ d'application de ces méthodes, nous développons actuellement des algorithmes pour des problèmes de dynamique non-linéaire et pour la détection des points de bifurcations de Hopf.

8. Bibliographie

- [Azr 93] AZRAR L., «Étude du comportement post-critique des coques cylindriques par une Méthode Asymptotique Numérique», Thèse de l'Université de Metz, février 1993.
- [ACDP 92] AZRAR L., COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., «An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches» *New Advances in Computational Structural Mechanics*, P. Ladevèze and O.C. Zienkiewicz Eds, *Studies in Applied Mechanics* Vol. 32, pp117-131, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [ACDP 93] AZRAR L., COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., «An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp1251-1277, 1993.
- [BG 81] BAKER G.A., GRAVES MORRIS P., *Padé Approximants, Part I : Basic Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 13, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1981.
- [Bat67] BATCHELOR G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [Ben95] BEN SAADI E.H., Calcul des branches de solutions périodiques et des points de bifurcation de Hopf par une Méthode Asymptotique Numérique, Thèse de l'Université de Metz, mars 1995.
- [Bou94] BOUTYOUR E.H., Calculs non-linéaires par des Méthodes Asymptotiques Numériques : applications aux structures élastiques, Thèse de l'Université de Metz, septembre 1994.
- [CDP94] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., «Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants for non-linear elastic structures», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp 1187-1213, 1994.
- [CDP94] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., «The Asymptotic Numerical Method, an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics», *Revue Européenne des Elements Finis*, Vol. 3, N° 2, pp 281-297, 1994.
- [Coc94] COCHELIN B., «A path following technique via an Asymptotic Numerical Method», *Computers and Structures*, Vol. 53, N° 5, pp 1181-1192, 1994.
- [Coc94] COCHELIN B., Méthodes Asymptotiques Numériques pour le calcul non linéaire géométrique des structures élastiques, Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, mars 1994.
- [Dam90] Damil N., De la théorie de bifurcation au calcul des structures, Thèse d'état, Université Hassan II, Casablanca, juin 1990.
- [DP90] DAMIL N., POTIER-FERRY M. «A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures», *International Journal of Engineering Sciences*, Vol 28, N° 3, pp704-719, 1990.
- [DPB94] DAMIL N., POTIER-FERRY M., BRAIKAT B., «Une technique de perturbation pour le calcul des structures avec fortes non linéarités», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t 318, série II, pp 713- 719, 1994.

- [Hin91] HINSH F.J., *Perturbation methods*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Hir88] HIRSH C., *Numerical computation of internal and external flows, Vol. 1: fundamentals of numerical discretisation*, Eds John Wiley and Sons, New York, 1988.
- [IJ91] IOOSS G., JOSEPH D.D., *Elementary stability and bifurcation theory*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [KYNO74] KAWAHARA M., YOSHIMURA N., NAKAGAWA K., OHASAKA H., 1974, «Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid», *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 10, pp 436- 456, 1974.
- [Nay73] NAYFEH A., *Perturbation methods*, Eds John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [NP81] NOOR A.K., PETERS J.M., «Tracing post-limit paths with reduced basic technique», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 28, pp 217-240, 1981.
- [Pot 87] POTIER-FERRY M., «Foundations of elastic post-buckling theory», in Buckling and Post-Buckling, Lecture Notes in Physics, Vol. 288, pp 1-82 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [RL93] RAFFAI R., LAURE P., 1993, «The influence of an axial mean on the Couette Taylor problem», *Europeen Journal of Mechanics*, B/fluids 12 n°3, pp 277-288, 1993.
- [SCV86] SEGAL A., CURVELIER C., VAN STEENHOVEN A.A., *Finite element methods of Navier-Stokes equations*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, Netherland, 1986.
- [Sey88] SEYDEL R., *For equilibrium to chaos. Pratical bifurcations theory and stability analysis*, Elsevier, New York, 1988.
- [Tem77] TEMAM R., *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, 2° edition, North Holland, Amsterdam, 1977.
- [TC84] THOMASSET F., CAUSSIGNAC P., *Équations de Navier-Stokes bidimensionnelles*, Bibliothèque MODULEF, Vol. 36, Version 84.
- [Van70] VAN DYKE M., «Analysis and improvement of perturbation series», *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 27, n° 4, pp 423-450, 1970.
- [Van84] VAN DYKE M., «Computer-extended series» *Ann. Review of Fluid Mechanics*, Vol. 16, pp 287-309, 1984.
- [WW91] WAGNER W., WRIGGERS P., *Calculation of bifurcation points via fold curves, Non linear Computational Mechanics*, Wagner W., Wriggers P., Eds, pp 64-84, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [ZT91] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The finite element method*, Fourth edition, Mac Graw Hill, London, 1991.