
Un schéma de type volumes finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur une triangulation

Sylvain Boivin* — Jean-Marc Hérard**

* *Département d'informatique et de mathématique
Université du Québec à Chicoutimi, G7H 2B1, Canada*

** *Laboratoire National d'Hydraulique - Direction Etudes et Recherches
Electricité de France, 78400 Chatou*

RÉSUMÉ. *On présente un nouveau schéma pour résoudre les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible couplées avec une équation de type convection-diffusion d'un scalaire passif. La discrétisation est basée sur l'extension d'une méthode de projection à des maillages non-structurés. On utilise les triangles comme volumes de contrôle et la solution est cherchée dans un espace d'approximation associé à l'élément fini RT_0 . Le schéma assure la conservation globale et locale de la masse des scalaires passifs. Le schéma de discrétisation de l'opérateur de convection-diffusion des scalaires satisfait la forme discrète du principe du maximum. La pression est définie de manière unique, à une constante près, dans l'espace d'approximation utilisé.*

ABSTRACT. *We present a new scheme to solve the Navier-Stokes equations for incompressible flows, together with a convection-diffusion equation of a passive scalar. The numerical solution is searched in an approximation based on the RT_0 finite element. Control volumes are defined by triangles; both global and local conservation of mass and passive scalars, and the maximum principle, are ensured by approximate convection-diffusion operator. The numerical pressure is uniquely defined, up to a constant.*

MOTS-CLÉS : *Navier-Stokes, maillage non-structuré, volumes finis, pas fractionnaires, principe du maximum, écoulement incompressible.*

KEYWORDS : *Navier-Stokes, unstructured mesh, finite volumes, fractional steps, maximum principle, incompressible flow.*

1. Introduction

Il existe déjà plusieurs schémas numériques pour résoudre les équations de Stokes ([BRE 91], [GIR 86]). En particulier, on trouve dans [BRE 91] des schémas de type éléments finis dont on sait démontrer rigoureusement qu'ils sont stables, convergents et conservatifs sur le domaine. Cependant, dans les modèles mathématiques de problèmes industriels, ces équations sont utilisées sous une forme plus générale: les équations de Navier-Stokes. De plus, elles sont souvent couplées avec des équations de convection-diffusion de scalaires passifs, notamment pour la température, mais aussi pour des variables telles que l'énergie cinétique turbulente, ou la concentration d'un polluant. La généralisation des méthodes numériques pour le problème de Stokes à ces problèmes n'est pas immédiate. Le traitement des termes convectifs non linéaires est une source de difficultés importante. Bien que l'on connaisse plusieurs méthodes donnant des résultats satisfaisants (méthodes des caractéristiques, SUPG, viscosité artificielle), peu satisfont les principes physiques suivants:

- conservation locale de la masse et des scalaires;
- préservation numérique du principe du maximum sur tout maillage pour les scalaires passifs ([GAL 92], [EYM]).

La méthode de volumes finis sur maillage structuré (rectangles dans le cadre bidimensionnel, parallélépipèdes rectangles pour les simulations tridimensionnelles), permet de répondre "naturellement" à la première exigence, et à la seconde pour un choix adéquat des schémas de discrétisation spatio-temporelle. Malheureusement, il existe peu de résultats dans le cadre volumes finis sur maillage non structuré, hormis les contributions récentes dans le cadre hyperbolique ([GAL 92], [EYM], [CHA 92], [VIL 94]), elliptique ([FAI 92a], [GAL 92], [EYM], [FAI 92b]), ou parabolique ([GAL 92], [EYM], [HER 95]).

On propose ici une discrétisation des équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible, couplées avec une équation de type convection-diffusion pour des champ scalaires passifs, qui satisfait les exigences suivantes:

- conservation locale et globale de la masse et des variables scalaires,
- réalisation du principe du maximum discret pour les variables scalaires,
- approximation sur des triangulations non-structurées,
- schéma entièrement itératif, semi-implicite, ne nécessitant pas la formation de matrice.

Le schéma est peu complexe, c'est-à-dire qu'il y a peu de degrés de liberté par élément en 2 et 3 dimensions d'espace, et peu d'opérations arithmétiques à faire à chaque pas.

2. Rappel du modèle mathématique

L'évolution spatio-temporelle d'un écoulement incompressible dans un domaine $\Omega \times (0, T)$ peut être décrite par les équations de Navier-Stokes (voir [GIR 86]):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad [1]$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad [2]$$

où p est la pression cinématique et ν la viscosité cinématique. Un modèle pour la convection et la diffusion d'une quantité physique passive dans un écoulement incompressible est alors obtenu en combinant, aux équations de Navier-Stokes, une équation de la forme

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C\mathbf{u}) - \nabla \cdot (\kappa \nabla C) = 0. \quad [3]$$

Il est essentiel d'adjoindre au système [1]-[3] des conditions aux limites appropriées afin d'obtenir un problème bien posé ([GIR 86]). Cet aspect dépend fortement du cadre d'application et ne sera pas abordé ici. Cependant, les moyens pour prendre en compte différents types de conditions aux limites dans le schéma de résolution seront discutés en détail dans la section 4.

Remarque: Ce modèle, constitué de 4 équations scalaires en 2 dimensions, 5 en trois dimensions, apparaît dans un large éventail de modèles de procédés industriels. \square

3. Discrétisation temporelle du système d'équations

Le schéma numérique pour la discrétisation temporelle est basé sur une variante ([SHE 93]) du schéma de projection initialement proposé par Chorin ([CHO 68]). Une version semi-discrète et semi-implicite du schéma, pour des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes, s'écrit:

$$\frac{(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n)}{\delta t} + (u^n \cdot \nabla) u^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^n - \nabla \cdot (\nu \nabla u^{n+\frac{1}{2}}) = f^n, \quad [4]$$

$$\frac{(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}})}{\delta t} + \theta \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0, \quad [5]$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0, \quad [6]$$

$$\frac{(C^{n+1} - C^n)}{\delta t} + u^{n+1} \cdot \nabla C^{n+1} - \nabla \cdot (\kappa \nabla C^{n+1}) = 0. \quad [7]$$

Rappelons que les équations [5], [6] sont généralement combinées ensemble pour former les équations

$$\nabla \cdot u^{n+\frac{1}{2}} - \theta \delta t \Delta(p^{n+1} - p^n) = 0, \quad [8]$$

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} - \theta \delta t \nabla(p^{n+1} - p^n). \quad [9]$$

Les valeurs les plus courantes du paramètre θ sont $\frac{1}{2}$ et 1 ([SHE 93], [CHO 68], [PER 95]). Si on recherche un état stationnaire, θ peut être vu comme un paramètre de relaxation et on n'est pas limité à ces seules valeurs. Une étude numérique de l'influence de ce paramètre sera présentée à la section 7.

4. Discrétisation spatiale du système d'équations

Ce qui fait l'originalité du schéma présenté ici tient dans la discrétisation spatiale des équations [4] à [7]. En effet, dans cette section nous allons poser les bases d'une discrétisation spatiale sur une triangulation non-structurée. Elle est relativement simple et se généralise directement au cas tridimensionnel. Elle possède en outre plusieurs caractéristiques fondamentales pour son application dans l'industrie.

La méthode de discrétisation est présentée en plusieurs étapes. On introduit d'abord des espaces d'approximation et des opérateurs agissant sur ces espaces. Deux de ceux-ci jouent un rôle clef dans le schéma de résolution et sont détaillés aux sections 4.1 et 4.2. Ce n'est qu'à la section 4.3 que l'on présente l'ensemble de la méthode. Les propriétés particulières du schéma sont décrites et étudiées en détail dans les sections suivantes.

On se donne d'abord une triangulation τ_h du domaine Ω et on introduit les espaces d'approximation suivants, bien connu dans le contexte de l'approximation par éléments finis ([BRE 91]):

$$V_h = \{v \in (L^2(\Omega_h))^2 \mid v|_T \in RT_0(T), \forall T \in \tau_h\}$$

$$V_h^c = \{v \in V_h \mid (v \cdot \mathbf{n}_{ij})_i = -(v \cdot \mathbf{n}_{ji})_j, \forall T_i, T_j \in \tau_h\} = V_h \cap H(\text{div}, \Omega_h)$$

où \mathbf{n}_{ij} est la normale au triangle T_i sur l'arête ij commune aux triangles T_i et T_j , dirigée vers l'extérieur. On a donc $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$.

$$V_h^0 = \{v \in V_h^c \mid \nabla \cdot v|_T = 0, \forall T \in \tau_h\}$$

$$Q_h = \{q \in L^2(\Omega_h) \mid q \in P_0(T), \forall T \in \tau_h\}$$

On vérifie aisément que $V_h^0 \subset (Q_h)^2 \subset V_h^c$ et que l'on a les relations suivantes:

$$V_h^0 \subset V_h^c \subset V_h$$

L'espace dans lequel on cherchera une approximation (u_h^n, p_h^n, C_h^n) de la solution du système [4]-[7], pour un instant t^n , sera $V_h^0 \times Q_h \times Q_h$. Rappelons d'abord quelques particularités de l'espace V_h et quelques opérateurs permettant d'agir sur ses différents sous-espaces.

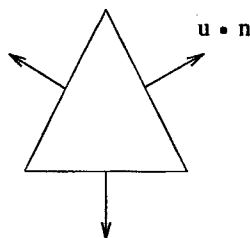


Figure 1. Élément fini de Raviart-Thomas de degré 0.

L'espace d'approximation V_h^0 est défini à partir de l'élément fini de Raviart-Thomas de degré 0, $RT_0(\cdot)$. Sur un triangle T , on sait ([BRE 91]) que l'espace d'approximation associé à l'élément $RT_0(T)$ est de dimension 3 et contient les polynômes de la forme

$$u_1(x, y) = a + cx, \quad u_2(x, y) = b + cy, \quad a, b, c \in \mathbf{R}. \quad [10]$$

On peut caractériser ([BRE 91]) ces polynômes, de manière équivalente, par les 3 constantes a, b et c , ou par les 3 composantes normales du vecteur u sur ∂T , voir la figure 1. La constante c des polynômes [10] revêt une importance particulière de par son interprétation. En effet, en appliquant l'opérateur divergence aux polynômes [10], on trouve $2c = \nabla \cdot u$. Ainsi, **l'approximation de $u \in V_h^0$ sur un triangle $T \in \tau_h$ peut être caractérisée de manière équivalente par 2 constantes $a, b \in \mathbf{R}$ ou par la valeur de $u \cdot n$ sur les 3 faces du triangle.** Dans la suite, dès que nous traiterons d'un vecteur de V_h^0 , nous utiliserons de manière indépendante, l'une ou l'autre des 2 caractérisations.

Dans le but d'introduire le schéma complet de passage d'une solution (u_h^n, p_h^n, C_h^n) au temps t^n , à la solution $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}, C_h^{n+1})$ au temps t^{n+1} , toutes deux dans $V_h^0 \times Q_h \times Q_h$, on introduit 3 opérateurs discrets sur les espaces d'approximations définis ci-dessus:

- un opérateur formel pour la convection et la diffusion d'un scalaire:
 $CD : Q_h \rightarrow Q_h$,
- un opérateur d'extension: $E : (Q_h)^2 \rightarrow V_h^c$,
- un opérateur de projection: $P : V_h^c \rightarrow V_h^0$.

L'opérateur de convection et de diffusion CD agit de Q_h vers Q_h . Il est obtenu au terme d'une discrétisation particulière de l'équation [11]. Elle sera décrite en détail à la section 4.1.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (wu) - \nabla \cdot (\kappa \nabla w) = 0. \quad [11]$$

Notons cependant que cet opérateur joue un rôle central dans la méthode. Il sera appliqué à la fois aux composantes de la vitesse et au champ scalaire C_h .

L'opérateur d'extension E agit de $(Q_h)^2$ vers V_h^c et est défini de la manière suivante:

$$\tilde{v}_h \mapsto v_h = E(\tilde{v}_h) \text{ tel que } (v_h \cdot \mathbf{n}_{ij}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\tilde{v}_h(T_i) + \tilde{v}_h(T_j)) \cdot \mathbf{n}_{ij} & \text{arête interne} \\ v_b \cdot \mathbf{n}_b & \text{arête de bord} \end{cases}$$

où v_b est la valeur de v_h au bord et \mathbf{n}_b la normale à l'arête de bord.

L'opérateur de projection P agit de V_h^c vers V_h^0 . A un élément $\hat{v}_h \in V_h^c$, il associe l'élément $v_h = P(\hat{v}_h) \in V_h^0$ obtenu en résolvant un problème elliptique pour la correction de pression δp_h

$$\int_{\partial T} (\theta \delta t \nabla_h \delta p_h \cdot \mathbf{n} - \hat{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0, \quad \forall T \in \tau_h, \quad [12]$$

et ensuite, en posant

$$v_h \cdot \mathbf{n} = \hat{v}_h \cdot \mathbf{n} - \theta \delta t \nabla_h (\delta p_h) \cdot \mathbf{n}.$$

L'opérateur de projection sera revu en détail à la section 4.2.

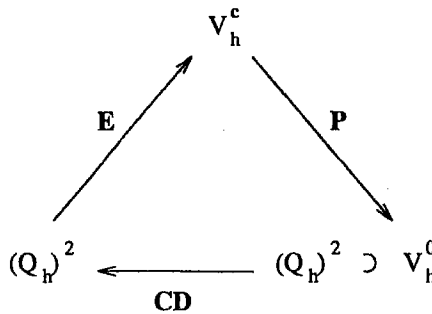


Figure 2. Diagramme des opérateurs CD , E et P .

Les 3 opérateurs introduits ci-dessus donnent un diagramme commutatif sur les espaces d'approximation de la vitesse, figure 2. Notons que l'on y utilise l'opérateur CD de $(Q_h)^2$ vers $(Q_h)^2$. Cet abus de notation est cohérent avec la définition de l'opérateur CD si l'on interprète son action sur un élément de $(Q_h)^2$ comme la convection-diffusion de 2 scalaires indépendants.

4.1 Discrétisation spatiale de l'opérateur de convection et de diffusion

L'opérateur de convection et de diffusion CD est issu d'une discrétisation particulière de l'équation [11] sur une triangulation τ_h du domaine Ω . On note Ω_h l'union des triangles de τ_h . Pour se faire, on revient au principe de conservation sous-jacent à cette équation que l'on écrit sous forme d'un bilan volumique sur les triangles $T \in \tau_h$, et auquel on applique le théorème de Stokes

$$\int_T \frac{\partial w}{\partial t} dx + \int_{\partial T} (wu \cdot \mathbf{n} - \kappa \nabla w \cdot \mathbf{n}) ds = 0, \quad \forall T \in \tau_h.$$

On discrétise en temps par un schéma Euler implicite avec u_h fixe sur tout le pas de temps

$$\int_T \frac{(w_h^{n+1} - w_h^n)}{\delta t} dx + \int_{\partial T} (w_h^{n+1} u_h \cdot \mathbf{n} - \kappa \nabla w_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}) ds = 0, \quad \forall T \in \tau_h.$$

Finalement, la forme discrète est obtenue en prenant u dans V_h^0 et en calculant les flux convectifs et diffusifs de la manière décrite ci-dessous. Le système linéaire et non-symétrique à résoudre est alors donné par

$$\int_T \frac{(w_h^{n+1} - w_h^n)}{\delta t} dx + \int_{\partial T} (w_h^{n+1} u_h \cdot \mathbf{n} - \kappa \nabla_h w_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}) ds = 0, \quad \forall T \in \tau_h. \quad [13]$$

Remarque: a priori, les éléments de Q_h n'ont pas la régularité nécessaire pour leur appliquer un opérateur différentiel. Ainsi, l'opérateur discret $\nabla_h w_h^{n+1}$ est à prendre dans un sens formel. \square

Il reste à définir le résidu correspondant à l'équation [13]. Dans ce but, on utilise une discrétisation en espace de l'opérateur de convection et de diffusion semblable à celle considérée dans les références [GAL 92], [EYM], et [HER 95].

Le calcul des flux convectifs et diffusifs sur une arête $ij \in \tau_h$ commune à deux triangles est rappelé ci-dessous. On note T_i et T_j les triangles de part et d'autre de l'arête ij et l_{ij} la longueur de l'arête, ($l_{ij} = l_{ji}$).

Le flux convectif au travers de l'arête ij est donné par

$$\int_{ij} w_h u_h \cdot \mathbf{n} ds = l_{ij} (u_h \cdot \mathbf{n})_{ij} (\alpha_{ij} w_h(T_i) + (1 - \alpha_{ij}) w_h(T_j)) \quad [14]$$

où $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (u_h \cdot \mathbf{n})_{ij} > 0, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$ et donc, on a $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$.

Le flux diffusif au travers de l'arête ij est donné par

$$\int_{ij} \kappa \nabla_h w_h \cdot \mathbf{n} \, ds = l_{ij} \kappa \frac{(w_h(T_j) - w_h(T_i))}{h_{ij}} \quad [15]$$

où h_{ij} est la projection du vecteur liant les points x_i et x_j des triangles T_i et T_j sur la normale à l'arête ij . On a donc : $h_{ij} = (x_j - x_i) \cdot \mathbf{n}_{ij}$, ($h_{ij} = h_{ji}$). Le point x_i désigne soit le barycentre x_i^G du triangle T_i , soit l'intersection des médiatrices (bisecteurs orthogonaux) x_i^T (figure 3); dans ce cas ([GAL 92], [EYM], [HER 95]), la triangulation ne doit faire intervenir aucun angle supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Il est important de noter que la référence [HER 95] donne un résultat de convergence sur des maillages triangulaires non dégénérés, pour le schéma de convection-diffusion mentionné ci-dessus, dans le cas stationnaire linéaire.

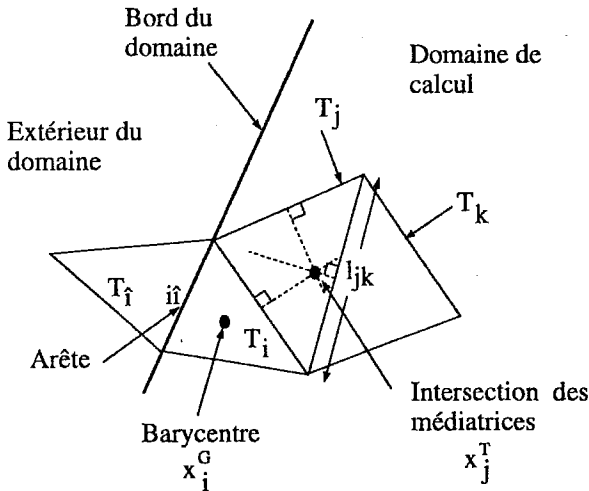


Figure 3. Notation pour les arêtes de bords, les barycentres, l'intersection des médiatrices et les triangles fictifs T_i .

Donnons maintenant quelques indications sur la prise en compte des conditions aux bords pour cette étape.

- Sur les arêtes par lesquelles le fluide entre ($u_h \cdot \mathbf{n} < 0$):
 - le flux convectif est donné par $l_{ij} (u_h \cdot \mathbf{n})_{ij} w_b$;
 - le flux diffusif est calculé avec la formule [15] dans laquelle on remplace l'état dans le second élément (T_j) par l'état au bord du domaine (b), de même h_{ij} doit être remplacée par la projection du vecteur reliant le point x_i de l'élément au centre de l'arête au bord sur la normale à l'arête. Ainsi, si on note x_{ij} le barycentre de l'arête ij , on a $h_{ib} = (x_{ij} - x_i) \cdot \mathbf{n}_{ij}$.
- Sur les arêtes par lesquelles le fluide sort ($u_h \cdot \mathbf{n} > 0$):
 - le flux convectif est donné par la formule [14];
 - le flux diffusif est fixé à 0.

- Sur les arêtes où on impose une condition d'adhérence ($u = 0$):
 - le flux convectif est 0;
 - le flux diffusif est calculé avec la formule [15] dans laquelle on remplace l'état dans le second élément (T_j) par l'état au bord du domaine (b), de même h_{ij} doit être remplacée par la projection du vecteur reliant le point x_i de l'élément au centre de l'arête au bord sur la normale à l'arête. Ainsi, si on note x_{ij} le barycentre de l'arête ij , on a $h_{ib} = (x_{ij} - x_i) \cdot \mathbf{n}_{ij}$.

4.2 Discrétisation spatiale de l'opérateur de projection

Etant donné un élément générique \hat{v} , on considère l'équation [8] pour calculer une correction de pression δp associée à \hat{v} :

$$\nabla \cdot \hat{v} - \theta \delta t \Delta \delta p = 0 .$$

En intégrant cette équation sur un volume de contrôle T et en appliquant le théorème de Stokes on trouve

$$\int_{\partial T} (\theta \delta t \nabla \delta p \cdot \mathbf{n} - \hat{v} \cdot \mathbf{n}) ds = 0 . \quad [16]$$

On obtient la forme discrète de l'équation en se restreignant aux $\hat{v}_h \in V_h^c$ et en recherchant une solution δp_h dans Q_h

$$\int_{\partial T} (\theta \delta t \nabla_h \delta p_h \cdot \mathbf{n} - \hat{v}_h \cdot \mathbf{n}) ds = 0 , \quad \forall T \in \tau_h .$$

Comme pour le terme de diffusion de l'opérateur de convection et de diffusion, l'opérateur discret $\nabla_h \delta p_h$ est à prendre dans un sens formel; on pose

$$\int_{ij} \nabla_h \delta p_h \cdot \mathbf{n} ds = l_{ij} \frac{(\delta p_h(T_j) - \delta p_h(T_i))}{h_{ij}} \text{ avec } h_{ij} = (x_j - x_i) \cdot \mathbf{n}_{ij} .$$

Le calcul de la solution projetée se fait ensuite en interprétant l'équation [9] dans V_h^c . Ce qui nous donne l'équation

$$v_h \cdot \mathbf{n} = \hat{v}_h \cdot \mathbf{n} - \theta \delta t \nabla_h \delta p_h \cdot \mathbf{n}$$

où $\nabla_h \delta p_h \cdot \mathbf{n}$ est à prendre au sens défini ci-dessus.

Donnons maintenant quelques indications sur la prise en compte des conditions aux bords pour cette étape: pour résoudre l'équation [16], on impose implicitement ([PER 95]) des conditions de Neumann sur la variable δp_h en

entrée et sur les parois imperméables. En fait, si g_h représente les valeurs prescrites de $v_h \cdot \mathbf{n}$ sur ces parties du bord, on impose

$$v_h \cdot \mathbf{n} = g_h$$

et donc implicitement

$$-\theta \delta t \nabla_h \delta p_h \cdot \mathbf{n} = g_h - \hat{v}_h \cdot \mathbf{n}.$$

Il faut noter que tout le membre de droite est une donnée pour cette étape. Typiquement, pour un écoulement dans un canal, g_h vaut identiquement 0 sur les parois imperméables et représente un profil parabolique en entrée (voir les expériences numériques de la section 7).

Sur les bords où le fluide sort, on peut imposer une condition de type Dirichlet homogène pour la pression à l'extérieur du domaine; on est alors en mesure de calculer la composante normale du gradient de pression en sortie.

4.3 Schéma complet de résolution

L'algorithme de résolution du système [4]-[7], est basé sur la composition des opérateurs discrets introduits ci-dessus. Cependant, leur application n'est pas immédiate, notamment pour l'équation vectorielle [4]. Notons tout d'abord que le fait d'expliciter le champ convectif découple les 2 composantes de la vitesse. L'ajout d'un terme source volumique et explicite ne pose pas de problème particulier. Cependant, le traitement du terme explicite en pression demande quelques explications.

A priori, $\nabla_h p_h|_T = 0$, $\forall T \in \tau_h$ car p_h est constante par triangle. Cependant, ce terme joue un rôle important dans l'équilibre entre les différents termes de l'équation [4]. En effet, le schéma implique alors un défaut de conservation pour la quantité de mouvement associée à la contribution de pression. Nous allons donc le traiter en prenant une approximation du flux de pression d'interface consistante et assurant la continuité entre les triangles. On définit donc une pression P_h d'interface sur les arêtes ij des triangles

$$P_h|_{ij} = \frac{1}{2}(p_h(T_i) + p_h(T_j)), \quad \forall ij \in \tau_h \quad [17]$$

pour ensuite appliquer le théorème de Stokes afin de transformer l'intégrale de volume de $\nabla_h p_h$ en une intégrale de surface

$$\int_T \nabla_h p_h \, dx = \int_{\partial T} p_h \mathbf{n} \, ds \approx \sum_{ij \in T} P_h|_{ij} \mathbf{n}_{ij} l_{ij}. \quad [18]$$

Ce terme est pris en compte en tant que terme source dans l'opérateur de convection diffusion des composantes de vitesse, on le note alors CD_s .

Algorithme de résolution:

- étant donnée une solution initiale $u_h^{-1} \in V_h^c$, $C_h^0 \in Q_h$,
- poser $p_h^{-1} = 0$,
- projeter la vitesse $u_h^0 = P(u_h^{-1})$, qui nous donne aussi p_h^0 ,
- étant données u_h^n , p_h^n , C_h^n , on obtient u_h^{n+1} , p_h^{n+1} , C_h^{n+1} par
 - prédiction du champ de vitesse
 - calculer la pression d'interface P_h^n à partir de p_h^n , via [17],
 - former le terme source de $CD_s(\cdot)$, via [18],
 - convecter et diffuser la vitesse $\tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}} = CD_s(u_h^n)$,
 - étendre la vitesse $u_h^{n+\frac{1}{2}} = E(\tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}})$,
 - projeter la vitesse $u_h^{n+1} = P(u_h^{n+\frac{1}{2}})$, qui nous donne aussi p_h^{n+1} ,
 - convecter et diffuser le champ $C_h^{n+1} = CD(C_h^n)$.

5. Compléments

Terminons la présentation par quelques remarques et propositions sur le schéma exposé dans les sections précédentes. Notons d'abord que les espaces d'approximation choisis ne sont pas assez réguliers pour discrétiser par éléments finis une formulation mixte vitesse-pression des équations de Navier-Stokes. Cependant, ce choix d'espaces satisfait des conditions de stabilité de type inf-sup pour la formulation mixte de problèmes apparentés ([BRE 91]). Nous allons montrer, de manière élémentaire, que la pression est définie de manière unique dans Q_h/\mathbf{R} et aussi que l'opérateur discret de convection-diffusion respecte le principe du maximum.

Proposition 1: Dans le schéma proposé, la pression est définie de manière unique dans Q_h/\mathbf{R} .

Démonstration: Soit s le vecteur dont les composantes sont

$$s_i = \frac{1}{\theta \delta t} \int_{\partial T} \hat{u} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \forall T \in \tau_h$$

et soit $V(i)$ l'ensemble des trois triangles voisins par arête d'un triangle T_i . Afin de définir $V(i)$ pour tous les triangles, y compris ceux aux bords du domaine, on introduit des triangles fictifs. Ainsi, le voisin de T_i par une arête de bord

sera un triangle fictif T_i , qui est l'image renversée de T_i lui-même et que l'on appelle "triangle miroir de T_i ". Si on convient de calculer p_h directement, plutôt que la correction δp_h , le système à résoudre est

$$\int_{\partial T} \nabla_h p_h \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{j \in V(i)} (p_j - p_i) \frac{l_{ij}}{h_{ij}} = s_i$$

où le triangle T_j est en fait le triangle fictif T_i lorsque ij est une arête de bord, aussi noté \tilde{ii} .

Si m est le nombre de triangles de τ_h , l'ensemble des m équations forme un système linéaire pour la pression:

$$Ap = s, \quad A \in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$$

Montrons que l'ensemble $Ker(A)$ est un espace de dimension un. On a

$$p^t Ap = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in V(i)} p_i (p_j - p_i) \beta_{ij}, \quad \text{avec } \beta_{ij} = \frac{l_{ij}}{h_{ij}}$$

et en réorganisant les sommes de manière à séparer les contributions des arêtes internes (somme sur ij) de celles des arêtes de bord (somme sur \tilde{ii}), on trouve

$$p^t Ap = - \sum_{ij} (p_j^2 + p_i^2 - 2p_i p_j) \beta_{ij} + \sum_{\tilde{ii}} p_i (p_i - p_i) \beta_{\tilde{ii}},$$

ou encore,

$$p^t Ap = - \sum_{ij} (p_j - p_i)^2 \beta_{ij} + \sum_{\tilde{ii}} p_i (p_i - p_i) \beta_{\tilde{ii}}. \tag{19}$$

Si on impose des conditions de type Neumann $\nabla p \cdot \mathbf{n} = g$, sur tout le bord, [19] s'écrit

$$p^t Ap = - \sum_{ij} (p_j - p_i)^2 \beta_{ij} + \sum_{\tilde{ii}} p_i g(\tilde{ii}) l_{\tilde{ii}}.$$

Or, par définition de s , le dernier terme, linéaire selon p , doit être mis au second membre du système à résoudre; la forme quadratique se réduit à

$$p^t Ap = - \sum_{ij} (p_j - p_i)^2 \beta_{ij},$$

Ce scalaire est nul, si et seulement si $p_i = p_j$, $\forall T_i, T_j \in \tau_h$. La pression est alors définie à une constante près.

Si on impose des conditions de type Dirichlet $p_i = p_i^D$, sur le bord, [19] s'écrit

$$p^t Ap = - \sum_{ij} (p_j - p_i)^2 \beta_{ij} + \sum_{\tilde{ii}} p_i p_i^D \beta_{\tilde{ii}} - \sum_{\tilde{ii}} p_i^2 \beta_{\tilde{ii}}.$$

Ici encore, les termes linéaires selon p font partie du second membre du système à résoudre, et la forme quadratique devient

$$p^t A p = - \sum_{ij} (p_j - p_i)^2 \beta_{ij} - \sum_{ii} p_i^2 \beta_{ii},$$

qui est nul, si et seulement si $p_i = 0$, $\forall T_i \in \tau_h$. La pression est alors définie de manière unique. \square

Cette démonstration montre aussi qu'en éliminant une équation par une condition de Dirichlet, la **matrice symétrique** $-A$ est **définie positive**. On pourra donc déterminer la pression en résolvant le système par un algorithme de type gradient conjugué. De plus, vu la simplicité du calcul du résidu, il n'est pas nécessaire de construire ni stocker la matrice A .

Proposition 2: L'étape de convection-diffusion d'un scalaire respecte le principe du maximum.

Démonstration: La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1: Le schéma s'écrit sous la forme $Bw^{n+1} = Dw^n$ avec B une matrice à diagonale strictement dominante telle que, $B_{ii} > 0$, $\forall i$, $B_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$, et D une matrice diagonale, $D_{ii} = d_i > 0$, $\forall i$.

En effet, le schéma s'écrit

$$\left(d_i + \sum_{j \in V(i)} [l_{ij}(u \cdot \mathbf{n})_{ij} \alpha_{ij} + \beta_{ij} \kappa_{ij}] \right) w_i^{n+1} + \sum_{j \in V(i)} [l_{ij}(u \cdot \mathbf{n})_{ij} (1 - \alpha_{ij}) - \beta_{ij} \kappa_{ij}] w_j^{n+1} = d_i w_i^n$$

où $d_i = \frac{|T_i|}{\delta t}$ et $\beta_{ij} = \frac{l_{ij}}{h_{ij}}$.

Or par définition de α_{ij} on a

$$B_{ii} = d_i + \sum_{j \in V(i)} [l_{ij}(u \cdot \mathbf{n})_{ij} \alpha_{ij} + \beta_{ij} \kappa_{ij}] > 0$$

$$B_{ij} = l_{ij}(u \cdot \mathbf{n})_{ij} (1 - \alpha_{ij}) - \beta_{ij} \kappa_{ij} \leq 0, \quad i \neq j$$

De plus,

$$B_{ii} + \sum_{j \in V(i)} B_{ij} = d_i$$

car

$$\sum_{j \in V(i)} l_{ij}(u \cdot \mathbf{n})_{ij} = 0.$$

Cela implique que

$$|B_{ii}| = B_{ii} = d_i - \sum_{j \in V(i)} B_{ij} > \sum_{j \in V(i)} |B_{ij}|.$$

Etape 2: La matrice B est telle que $(B^{-1})_{ij} \geq 0$.

En effet, décomposons B en une matrice diagonale N et une matrice M à diagonale nulle:

$B = N - M$. Par construction, N et M sont à coefficients positifs. On a

$$B = N(I - N^{-1}M) \Rightarrow B^{-1} = N^{-1}(I - N^{-1}M)^{-1}$$

si on pose $C = N^{-1}M$, on a

$$B^{-1} = N^{-1}(I + C + C^2 + \dots)$$

Or, les termes de la matrice C sont $C_{ii} = 0$ et $C_{ij} = B_{ij}/B_{ii}$ lorsque $i \neq j$. Donc, tous les termes de C sont positifs ou nuls et le fait que B soit à diagonale strictement dominante implique que $\rho(C) < 1$. On conclut que la série converge et que tous les termes de B^{-1} sont positifs ou nuls.

Etape 3: Si w est une solution du problème discret, ϕ un champ constant, alors $W = w + \phi$, est aussi une solution.

On a $Bw^{n+1} = Dw^n$ et on veut montrer que l'on a aussi $BW^{n+1} = DW^n$. Or, $DW^n = Dw^n + D\phi$ et $BW^{n+1} = D\phi + Bw^{n+1}$, d'où le résultat.

Etape 4: Si $w_m \leq w^n \leq w_M$, alors $w_m \leq w^{n+1} \leq w_M$.

En effet, on sait que $BW^{n+1} = DW^n$ et que l'inverse de B est à coefficients positifs. Donc $w^{n+1} + \phi = B^{-1}DW^n$ à toutes ses composantes positives (respectivement négatives), dès lors que celles de W^n sont positives (respectivement négatives). En écrivant $w_m \leq w^{n+1} \leq w_M$ sous la forme $0 \leq w^{n+1} - w_m$ et $w^{n+1} - w_M \leq 0$, on obtient facilement le résultat. \square

La matrice du système à résoudre à l'étape de convection-diffusion est donc une M-matrice non-symétrique à diagonale strictement dominante, quelque soit le pas de temps δt . Dans les cas où les effets convectifs sont dominants, le système est relativement bien conditionné, contrairement au système en pression, et peut être résolu par une méthode de Krilov, sans faire intervenir explicitement la matrice B .

6. Résolution numérique et mise en oeuvre

Nous avons démontré à la section précédente que la matrice du système correspondant à l'équation [12] est symétrique et définie positive. On peut

donc résoudre ce système par la méthode du gradient conjugué. Dans la version utilisée pour les expériences numériques de la section suivante, on utilise l'algorithme écrit sous une forme qui ne fait intervenir que le résidu du système. Cela évite d'avoir à expliciter le second membre et surtout de construire la matrice elle-même. La version actuelle ne comporte pas de préconditionneur. Dans ces conditions, nous pouvons pleinement évaluer les impacts de la dégradation prévisible du conditionnement des systèmes en fonction de leur taille.

Remarque: Puisque l'étape de projection nécessite la résolution d'un système dont la matrice est en fait une discrétisation de l'opérateur de Laplace, on peut s'attendre à ce que l'ajout d'un préconditionneur entraîne une amélioration importante des performances du code de calcul. □

Comme mentionné à la section précédente, le système associé à l'opérateur de convection-diffusion est linéaire et non-symétrique. De plus, la matrice de ce système est une M -matrice à diagonale dominante. On résout ce système par une méthode de type Newton-GMRES ([SAA 86]), sans aucun préconditionneur. Cette méthode présente plusieurs avantages:

- elle ne fait intervenir que le résidu du système (pas de matrice à construire),
- elle permet l'ajout de termes sources non-linéaires, ce qui est courant dans les applications industrielles, notamment lorsque l'on utilise un modèle de turbulence comportant des équations différentielles,
- dans le cas linéaire, elle dégénère en un algorithme de correction itérative.

La mise en oeuvre du schéma a été réalisée en un temps très court grâce à l'utilisation d'un environnement de développement C++ adapté au calcul numérique sur des maillages non structurés ([BOI 96a]). Le schéma de résolution et les outils de pré et post traitement ont tous été mis en oeuvre dans ce cadre.

Les principaux facteurs qui ont permis une mise en oeuvre simple, rapide et efficace sont:

- l'organisation de l'environnement en modules relativement indépendants,
- des modules mettant en oeuvre des outils génériques,
- les couches supérieures des modules reflètent un design orienté-objet favorisant l'abstraction,
- les couches inférieures des modules sont construites de manière à maximiser l'efficacité,
- l'utilisation de la paramétrisation des classes et des méthodes.

En particulier, le fait qu'une triangulation soit définie comme une entité géométrique paramétrisée par le type liste joue un rôle fondamental. En effet, on peut alors instancier ([BOI 96a]) une triangulation, soit avec des listes statiques (tableaux) afin de maximiser l'efficacité, soit avec des listes dynamiques

(chaînage par pointeurs) afin d'avoir la flexibilité requise pour l'adaptation des maillages.

7. Expérimentation numérique

Les expériences numériques portent sur 3 problèmes:

P1: un canal droit;

P2: une marche descendante;

P3: la convection et la diffusion d'un marqueur dans un canal avec un élargissement brusque (marche descendante).

Le premier problème a pour objectif l'étude numérique de l'influence du paramètre θ . Le second problème vise à valider le schéma: on simule un écoulement pour diverses valeurs du nombre de Reynolds et on compare les résultats avec ceux trouvés dans la littérature ([ARM 83], [BAR 95]). Le troisième problème est introduit afin d'étudier le comportement numérique de la partie du schéma concernant la convection et la diffusion d'un scalaire passif. On s'intéressera notamment à l'aptitude du schéma à atteindre rapidement un état stationnaire.

Les valeurs de référence nécessaires pour définir les variables sans dimension ([GIR 86]) utilisées pour les calculs sont:

- la longueur du canal,
- la vitesse maximale,
- la viscosité cinématique du fluide.

Ce choix est général et lié à des considérations d'ordre numérique. En outre, il n'est nullement limitatif, car on peut toujours passer d'un ensemble de valeurs de référence à un autre par un calcul approprié du nombre de Reynolds.

Remarque: le nombre de Reynolds utilisé pour les calculs sur la marche descendante est défini par rapport à des valeurs de références ayant un sens plus proche de la physique. Une transformation est alors nécessaire pour passer d'un système de référence à l'autre. \square

L'ensemble des simulations numériques présentées dans cette section a été réalisé avec le schéma résumé à la section 4.3.

Le pas de temps est uniforme sur tout un maillage et sa valeur est donnée par l'expression

$$\delta t = 40 \overline{\delta x}$$

où la moyenne porte sur tous les triangles du maillage, après normalisation. Sur une triangulation uniforme en x , cela correspond à un nombre de CFL de 40 au centre d'un canal. Nous avons pris soin de vérifier que la solution était indépendante du pas de temps en effectuant les calculs avec plusieurs pas de

temps différents. Les variations entre les solutions stationnaires sont imperceptibles. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec le fait que l'erreur de consistance du schéma tend vers 0 lorsque l'on converge vers un état stationnaire.

A chaque pas de temps, on termine la résolution du système non-linéaire lorsque le résidu est inférieur à 10^{-7} en norme euclidienne. De même, on s'assure que la norme euclidienne du résidu du système linéaire à résoudre pour obtenir la correction en pression, décroisse d'un facteur 10^6 à chaque calcul de projection. Avec cette exigence, on a pu observer que, pour les problèmes traités, la valeur maximale de la divergence de la vitesse (en valeur absolue) n'excède pas 10^{-9} .

La simulation doit débuter avec une solution initiale $u_h^0 \in V_h^0$. Cela est impératif (voir la section 5) afin d'avoir un schéma qui assure le principe du maximum et la conservation locale de la masse et des champs scalaires passifs (lorsqu'il y en a). Pour cela, on initialise systématiquement le calcul par une projection, de manière à ramener u_h^0 dans le bon espace. (voir le diagramme de la figure 2).

Remarque: toutes les sorties graphiques représentent des variables génériques. Aucun filtrage, (ou projection) n'est appliqué aux variables de calcul avant affichage. Les vecteurs de V_h^c sont positionnés au barycentre des triangles, et un champ scalaire de Q_h est représenté par un ton de gris sur chaque triangle, selon la valeur du champ sur celui-ci. \square

7.1 Description du problème P1 et présentation de résultats

On considère un écoulement incompressible et bidimensionnel dans un canal de longueur 1 et de hauteur 1/5. Les conditions aux bords du domaine sont

- condition d'adhérence sur les parois,
- profil parabolique donné à l'entrée: $U(y) = 100y(0.2 - y)$,
- sortie libre en vitesse.

Rappelons que la solution s'écrit simplement:

$$U(x, y) = 100y(0.2 - y), \quad V(x, y) = 0$$

$$P(x, y) = -200\nu(x - 1).$$

La solution initiale, vitesse et pression, est obtenue en effectuant une étape de projection. De cette façon, la vitesse initiale est nécessairement à divergence nulle et satisfait les conditions aux limites.

Le nombre de Reynolds est défini par

$$Re = \frac{U_{\max} L}{\nu}$$

où U_{\max} est la vitesse maximale, L la longueur du canal et ν la viscosité dynamique. Les simulations pour le problème $P1$ ont toutes été réalisées à Reynolds 500.

Le maillage utilisé pour les calculs est formé de 2400 triangles et a été obtenu par découpage d'un maillage formé de 1200 rectangles, figure 4. On a considéré ici le choix ([BOI 96b]), (voir sections 4.1 et 4.2):

$$x_i = x_i^G$$

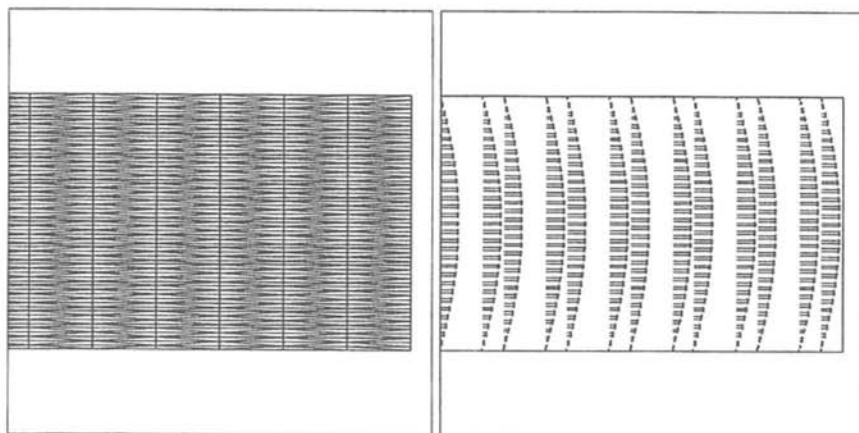


Figure 4. Cas du canal 1×0.2 à Reynolds 500: vue partielle du maillage et vitesse au barycentre des triangles.

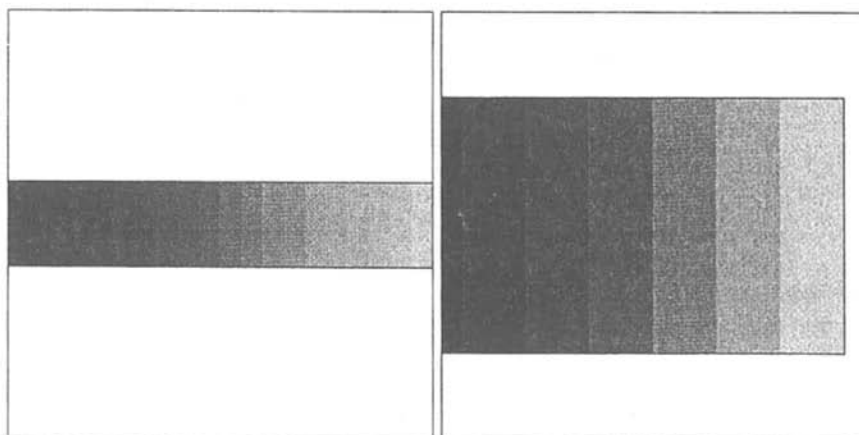


Figure 5. Cas du canal 1×0.2 à Reynolds 500: pression constante par triangle.

Notons que ce type de maillage, également utilisé pour les problèmes P2 et P3, n'est pas admissible si l'on choisit de considérer l'intersection des médiatrices x_i^T comme point de référence sur le triangle T_i , (figure 3). Les champs de vitesse et de pression résultant des simulations sont indépendants de la valeur du paramètre θ .

Un exemple de champ de vitesse est représenté à la figure 4. Rappelons que les graphiques représentent des données génériques, il y a donc un vecteur vitesse par triangle du maillage. Le champ de pression associé est présenté à la figure 5: sur tout le canal et sur la partie aval seulement.

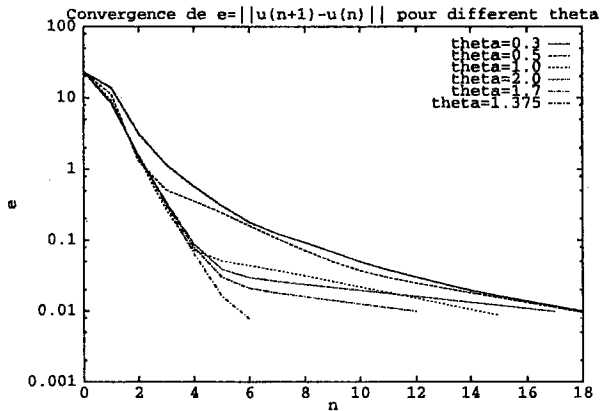


Figure 6. Cas du canal 1×0.2 à Reynolds 500: courbes de convergence en fonction du paramètre θ .

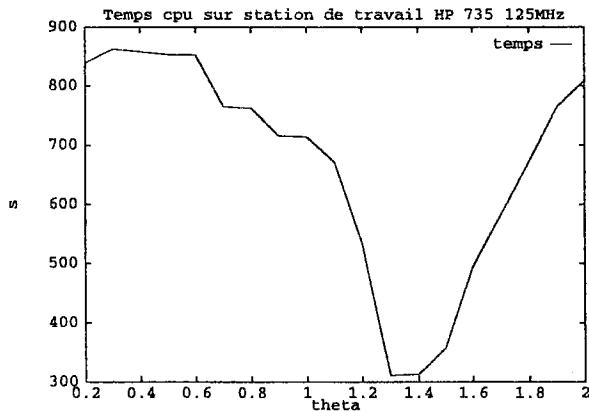


Figure 7. Cas du canal 1×0.2 à Reynolds 500: temps cpu en fonction du paramètre θ .

Les résultats stationnaires sont indépendants de θ , mais les simulations montrent une forte dépendance entre le temps de calcul et la valeur du paramètre, figures 6 et 7. On remarque que la convergence de $\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_2$ est très rapide pour $\theta = 1.375$, ce qui se traduit par un gain en temps de calcul de plus de 200% par rapport au choix usuel $\theta = 1$.

Pour tous les calculs suivants, nous posons $\theta = 1.375$. Il est clair que cette valeur, qui est quasi-optimale pour le cas considéré ici, n'a aucune raison de l'être pour d'autres problèmes. Le but n'étant pas ici de déterminer le paramètre optimal, nous nous sommes restreints par la suite à vérifier que ce choix était toujours aussi bon, sinon meilleur, que le choix usuel: $\theta = 1$, pour la recherche d'un état stationnaire.

7.2 Description du problème P2 et présentation de résultats

On considère un écoulement incompressible et bidimensionnel dans un canal présentant un élargissement brusque. On fait ici référence au problème classique de la "marche descendante". On a retenu la géométrie décrite par Armaly et al. ([ARM 83]), pour laquelle on dispose de résultats expérimentaux. Nous nous référons aussi à une compilation plus récente de résultats numériques sur la même géométrie, réalisée par Barton ([BAR 95]).

On note h la hauteur d'entrée du canal, H la hauteur de la marche, la longueur du canal en amont de la marche est $2h$ et la longueur en aval est $30h$, figure 8. Le rapport H/h est de 0.94.

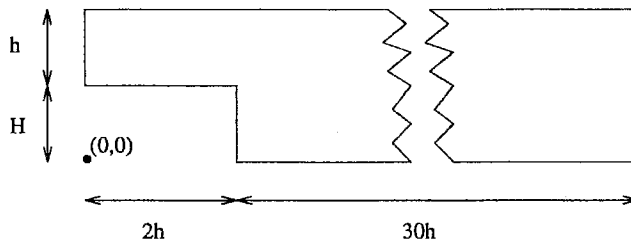


Figure 8. Géométrie du problème de la marche descendante.

Le nombre de Reynolds est ici défini par

$$Re = \frac{\frac{2}{3} U_{\max} 2h}{\nu}$$

où U_{\max} est la vitesse maximale, ν la viscosité cinématique. Les valeurs du nombre de Reynolds retenues pour l'expérimentation sont les mêmes que celles retenues dans [BAR 95], soit 50, 100, 200, 300, 400, 500 et 600.

Les conditions aux bords du domaine sont

- condition d'adhérence sur les parois;
- profil parabolique donné à l'entrée;
- sortie libre en vitesse.

La solution initiale, vitesse et pression, de chacune des simulations est obtenue en effectuant une étape de projection. De cette façon, la vitesse initiale est nécessairement à divergence nulle et satisfait les conditions aux limites.

Afin d'avoir des résultats comparables avec ceux de la littérature, plusieurs simulations ont été réalisées sur des maillages semi-structurés. Dans ce contexte, un maillage semi-structuré est une triangulation issue d'une grille de rectangles où chacun des rectangles est découpé en 2 triangles (polarisation non uniforme), voir la figure 4 pour avoir un exemple.

Remarque: Ce maillage constitue un excellent test pour le schéma car, d'un point de vue strictement géométrique, il admet un mode d'oscillation en "checkerboard" ([BRE 91]). Sur ce point, les résultats numériques reflètent fidèlement la théorie développée à la section 5: aucune trace de ce type d'oscillations n'est apparue dans les résultats de simulations. □

Les 3 maillages structurés sur lesquels on base la validation sont repris de ceux utilisés dans [BAR 95]:

- m0: maillage grossier basé sur une grille en rectangles 40x20;
- m1: maillage moyen basé sur une grille en rectangles 80x40;
- m2: maillage fin basé sur une grille en rectangles 160x80.

Après découpage des rectangles, le nombre de triangles des 3 maillages est 1660, 6640, 26560, respectivement.

Avant de présenter les résultats proprement dits, donnons quelques précisions sur les performances de la méthode sur une station de travail HP9000-735 à 125Mhz. On rappelle que les critères de convergence sont ceux énumérés au début de cette section et que, dans la version actuelle du code de calcul, on n'utilise aucun préconditionneur. Voici les principales observations:

- l'espace mémoire utilisé pour les simulations dépend linéairement du nombre de triangles, en outre, sur le maillage fin (26560 triangles) il est de 15 mégaoctets;
- il faut de 35 à 45 pas de temps pour converger vers la solution stationnaire;
- le nombre de pas de temps ne semble pas dépendre de la taille du maillage;
- le temps cpu nécessaire pour chaque pas de temps est de:
 - 16.8 secondes par 1000 triangles sur m0;
 - 35.2 secondes par 1000 triangles sur m1;
 - 65.5 secondes par 1000 triangles sur m2.

L'augmentation du coût des calculs par 1000 triangles en fonction de la taille du problème est principalement due à la dégradation du conditionnement des systèmes en pression.

La longueur de la principale zone de recirculation (notée x_1) est donnée dans le tableau 1, en fonction du nombre de Reynolds et du maillage. La longueur de référence est la hauteur de la marche. Pour les nombres de Reynolds supérieurs à 400 on voit apparaître une seconde zone de recirculation. Elle se situe près de la paroi supérieure du canal et en aval de la principale recirculation. L'évolution de la longueur de cette seconde recirculation est donnée au tableau 2, en fonction du nombre de Reynolds et du maillage. Les longueurs compilées dans ces tableaux, ainsi que la position des points de décollement et recollement, présentés à la figure 9, sont comparables aux valeurs trouvées dans la littérature ([ARM 83], [BAR 95]).

Reynolds	m0	m1	m2
50	1.98	1.85	1.98
100	2.78	3.44	3.37
200	5.16	5.43	5.76
300	6.76	7.02	7.55
400	7.55	8.21	8.69
500	8.35	9.01	9.74
600	9.14	9.01	10.14

Tableau 1. *Longueur de la principale zone de recirculation.*

Reynolds	m0	m1	m2
400	0.0	1.86	3.71
500	0.53	4.24	6.30
600	2.12	6.63	8.49

Tableau 2. *Longueur de la recirculation en haut du canal.*

On note une forte augmentation de l'étendue des zones de recirculation en fonction de la finesse du maillage. Ce comportement est cohérent avec le fait que l'influence de la diffusion numérique, inhérente au schéma décentré, s'estompe avec la taille de maille. Ce résultat met en évidence la dépendance des résultats vis-à-vis du maillage. Il semble clair que les maillages utilisés ne sont pas adaptés au problème, notamment au voisinage des points de décollement et de recollement, où ils devraient être isotropes.

La figure 10 montre le champ de vitesse et le champ de pression au voisinage de la zone de recirculation à Reynolds 100, sur le maillage m1 pour la vitesse et m2 pour la pression. On montre la vitesse sur m1 plutôt que m2 essentiellement parce que le nombre de vecteurs vitesses sur le maillage m2 est trop important.

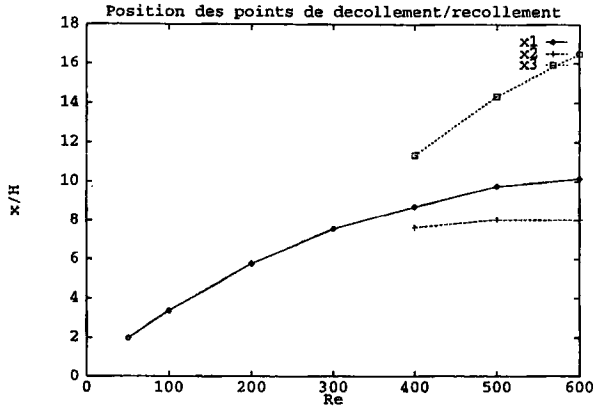


Figure 9. Position des points de décollement/recollement (maillage m_2). Sur ce graphique, x_1 est la position du point de recollement de la principale recirculation, x_2 et x_3 donnent la position des points de décollement et de recollement, respectivement, pour la recirculation secondaire située sur la paroi supérieure. Ces notations sont celles utilisées par [BAR 95] afin de faciliter la comparaison des résultats.

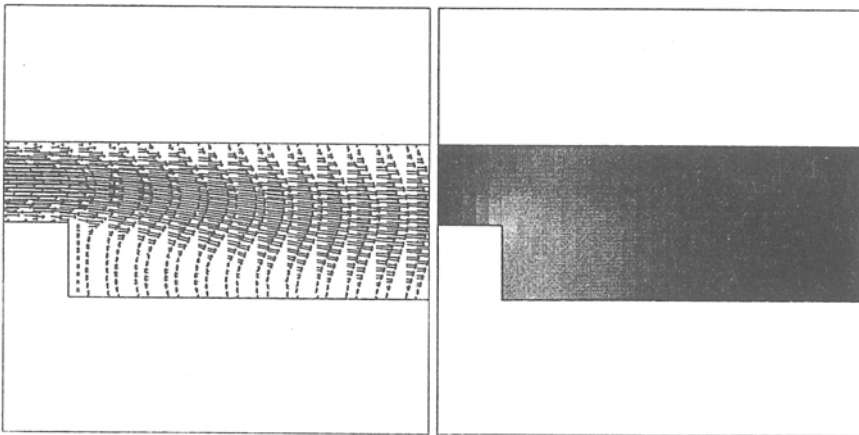


Figure 10. Cas de la marche descendante à Reynolds 100: vitesse au barycentre des triangles de m_1 et pression constante par triangle de m_2 .

A Reynolds 600, on peut comparer les résultats décrits dans [BAR 95] sur le maillage en quadrangles le plus fin (200×100). Les abscisses calculées des points x_1 , x_2 et x_3 sont respectivement égales sur ce maillage à 10.67, 8.63, 16.21, la longueur de recirculation sur la paroi supérieure étant donc de 7.58. Pour cette valeur du nombre de Reynolds, les valeurs issues de [ARM 83] sont voisines de

11.4, 9.5, 16.9 respectivement. La longueur expérimentale de recirculation sur la paroi supérieure vaut approximativement 7.4. Il faut toutefois noter que le schéma spatial (QUICK) utilisé dans [BAR 95] pour calculer les flux convectifs est d'ordre deux, alors que le schéma utilisé dans nos simulations est d'ordre un. Les résultats obtenus ici sont donc assez proches de ceux trouvés dans la littérature. Il serait néanmoins intéressant de poursuivre les simulations en ajoutant au schéma un algorithme d'adaptation automatique des maillages ([DOM 95]). La figure 11 montre le champ de vitesse au voisinage de la marche et du point de décollement sur la paroi supérieure pour la simulation à Reynolds 600.

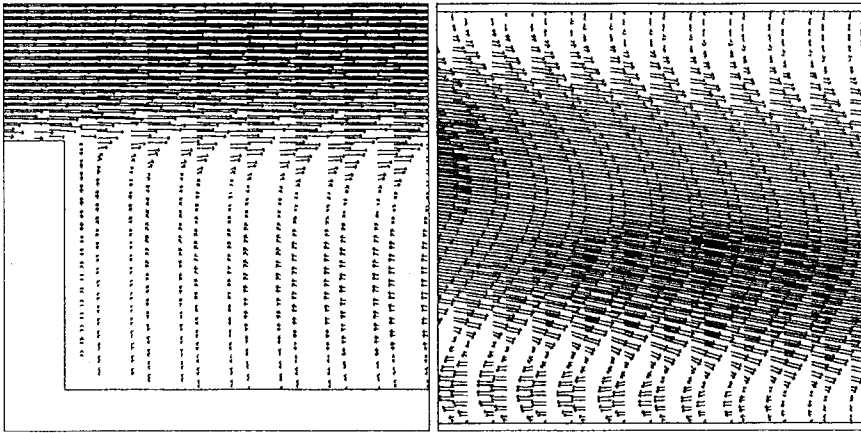


Figure 11. Cas de la marche descendante à Reynolds 600: champ de vitesse au voisinage de la marche et du point de décollement sur la paroi supérieure.

7.3 Description du problème P3 et présentation de résultats

Le but de ce cas test est, d'une part, de montrer l'efficacité de l'opérateur de convection diffusion, et d'autre part, de vérifier numériquement qu'il satisfait bien le principe du maximum. Le cas retenu consiste à injecter un marqueur dans la partie inférieure de l'entrée d'un canal présentant un élargissement brusque, et le laisser évoluer dans un écoulement incompressible déjà à l'état stationnaire. Le contexte de base est celui du problème P2. On utilise la solution à Reynolds 400 sur le maillage moyen (m1) comme écoulement porteur. Le marqueur est injecté au temps t_0 et on suit son évolution dans l'écoulement, jusqu'à ce qu'il atteigne un état stationnaire. Le profil de la concentration du marqueur à l'entrée est

$$C_h = \begin{cases} 1 & \text{si } y < H + \frac{1}{2}h, \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où h et H sont définis à la section 7.2.

Pour réaliser cette simulation sur un écoulement de base qui est déjà à l'état stationnaire, on utilise un pas de temps donné par

$$\delta t = 1000 \overline{\delta x}$$

où la moyenne porte sur tous les triangles du maillage. Cela correspond à un nombre de CFL de 1000 au centre d'un canal. Le coefficient de diffusion sans dimension du marqueur est fixé arbitrairement à 10^{-4} .

Remarque: nous avons choisi de résoudre l'équation de convection-diffusion de manière découplée (en espace et temps), des équations de Navier-Stokes car:

- c'est une forme de simulation courante pour étudier certains procédés industriels,
- cela nous permet d'isoler le comportement de l'opérateur discret de convection-diffusion.

Ce choix n'est lié d'aucune manière à une limitation du schéma à traiter la convection-diffusion d'un ou plusieurs champs scalaires couplés avec les équations de Navier-Stokes. \square

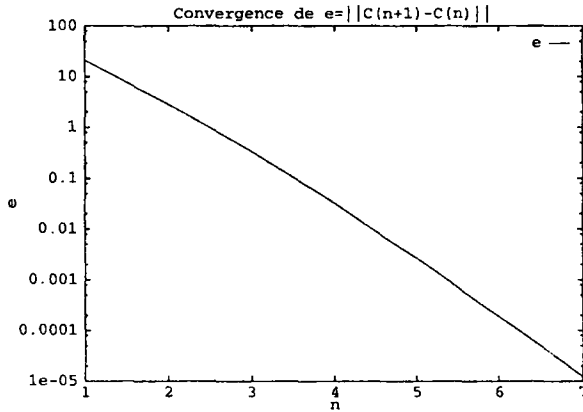


Figure 12. Courbe de convergence du marqueur vers un état stationnaire.

La convergence du marqueur vers un état stationnaire est très rapide, figure 12, grâce au schéma implicite. A priori, elle nous permet de prendre un pas de temps de grandeur arbitraire. Le temps nécessaire pour faire un pas de temps sur station de travail HP9000-735 à 125MHz est de 28 secondes.

On vérifie sur la figure 13, que le minimum et le maximum de la concentration du marqueur restent bien entre leurs valeurs extrémales au bord du domaine. La préservation du principe du maximum, pour une variable telle

que la concentration d'une espèce chimique, est particulièrement importante dans le cadre d'écoulements réactifs.

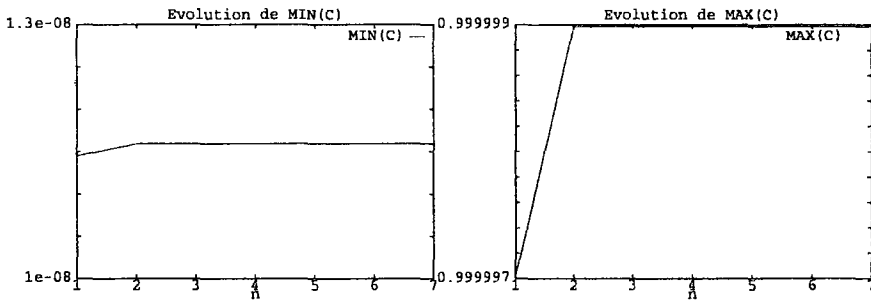


Figure 13. Evolution du minimum et du maximum de la concentration du marqueur.

Les plages en tons de gris (une plage par triangle), présentés à la figure 14, montrent la convergence rapide vers un état stationnaire et la régularité de la solution numérique.

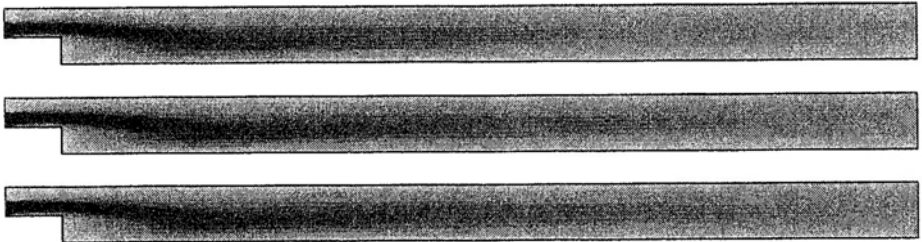


Figure 14. Concentration du marqueur après 1, 2 et 6 pas de temps à $\delta t = 5.8$.

Conclusion

Un schéma de résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible couplées avec une équation de convection-diffusion d'un scalaire passif a été proposé. Le schéma est basé sur une discrétisation temporelle de type pas fractionnaires et une discrétisation spatiale de type volumes finis. L'originalité du schéma tient principalement à sa nature non-structurée, les volumes de contrôle étant constitués des triangles. De même, la nature implicite du schéma ne limite pas la valeur du pas de temps.

Ce schéma satisfait plusieurs propriétés fondamentales pour la simulation d'écoulements industriels: la conservation locale et globale de la masse et des scalaires passifs est assurée, ainsi que l'unicité de la pression dans Q_h/R ;

en outre, l'opérateur discret de convection-diffusion satisfait un principe du maximum, indépendamment de la valeur du pas de temps.

Les simulations numériques montrent que la méthode est efficace et peu complexe, tant en espace mémoire, qu'en temps. Aucune matrice n'est effectivement assemblée, et l'ensemble des calculs a été réalisé en quelques jours sur station de travail. Le caractère implicite du schéma permet d'équilibrer le temps que le processeur passe dans la phase de convection-diffusion, versus la phase de projection, ce qui le rend très performant pour la recherche d'un état stationnaire. Il est clair que la recherche d'un état stationnaire est nettement plus efficace avec ce schéma, qu'avec le schéma similaire, détaillé dans [BUF 92], qui utilise une formulation sur quadrangles explicite pour la mise en oeuvre du solveur de convection-diffusion.

Ce schéma constitue une évolution naturelle des méthodes de volumes finis sur des maillages structurés, vers des méthodes qui conservent les propriétés inhérentes au principe de bilan volumique, mais qui allient la flexibilité des maillages non-structurés.

Finalement, la généralité de la méthode offre de multiples perspectives d'applications, notamment dans l'industrie. L'extension de la méthode au cas d'écoulements tridimensionnels ne pose aucune difficulté apparente, pour les équations de Navier-Stokes. Il serait intéressant d'examiner à court terme les potentialités de cette approche pour la mise en oeuvre sur maillage non structuré de certains modèles bi-fluides à deux phases incompressibles (écoulements de type gaz-liquide ([SAI 95a], [SAI 95b]) ou gaz-solide ([COM 95], [BAL 95]), ou de modèles de turbulence incompressible.

Les auteurs remercient J.-P. Chabard, M. Fortin, et G. Pot pour les conseils prodigués.

Principales notations

- τ_h triangulation du domaine de calcul Ω_h ;
- T_i le i ème triangle de τ_h ;
- $V(i)$ ensemble des triangles $T_j \in \tau_h$ tels que $T_i \cap T_j$ est une arête de T_i ;
- x_i^G barycentre du triangle T_i ;
- x_i^T intersection des médiatrices (ou bissecteurs orthogonaux) du triangle T_i ;
- ij arête interface entre les triangles T_i et T_j de τ_h ;
- \mathbf{n}_{ij} normale unitaire sortante sur l'arête orientée de T_i vers T_j ;
- l_{ij} longueur de l'arête ij .

Indices:

- ij arête ij commune aux triangles T_i et T_j ;

- i triangle T_i de τ_h ;
- b bord du domaine;
- $i\bar{i}$ arête de bord commune au triangle T_i de τ_h et au triangle fictif $T_{\bar{i}}$ obtenu par symétrie de T_i par rapport à l'arête de bord.

Bibliographie

[ARM 83] ARMALY, B.F. et al., "Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow", *J. Fluid Mech.*, **127**, (1983).

[BAL 95] BALZER, G., BOELLE, A., SIMONIN, O., "Eulerian gas-solid flow modelling of dense fluidized bed", *Rapport du LNH, Electricité de France*, HE-44/95/026/A, (1995).

[BAR 95] BARTON, I.E., "A numerical study of flow over a confined backward-facing step", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **21**, (1995).

[BOI 96a] BOIVIN, S., "MEFOO: un framework C++ pour la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis", *Rapport du LNH, Electricité de France*, HE-41/96/003/A, (1996).

[BOI 96b] BOIVIN, S., HERARD, J.M., "Résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis sur maillage non-structuré", *Rapport du LNH, Electricité de France*, HE-41/96/004/A, (1996).

[BRE 91] BREZZI F., FORTIN, M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, (1991).

[BUF 92] BUFFARD, T., HERARD, J.M., "Méthodes de résolution pour les systèmes hyperboliques en forme conservative sur maillage structuré et non structuré. Rapport d'avancement 3.", *Rapport du LNH, Electricité de France*, HE-41/92.24A, (1992).

[CHA 92] CHAMPIER, S., GALLOUËT, T., "Convergence d'un schéma décentré amont sur un maillage triangulaire pour un problème hyperbolique linéaire", *Mathematical Mod. and Numer. Anal.*, **26**, (1992).

[CHO 68] CHORIN, A.J., "Numerical solution of the Navier-Stokes equations", *Math. Comput.*, **22**, (1968).

[COM 95] COMBE, L., HERARD, J.M., "Modélisation numérique des écoulements diphasiques gaz-solide (modèles bi-fluides). Rapport d'avancement 1", *Rapport du LNH, Electricité de France*, HE-41/95/043/A, (1995).

[DOM 95] DOMPIERRE, J., VALLET, M.-G., FORTIN, M., HABASHI, W.G., AIT-ALI-YAHIA, D., BOIVIN, S., BOURGAULT, Y., TAM, A., "Edge-based mesh adaptation for CFD", *Conference on numerical methods for the Euler and Navier-Stokes equations*, CRM-CERCA, Montréal, (1995).

[EYM] EYMARD, R., GALLOUËT, T., HERBIN, R. *Finite volume methods*, in preparation for Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds, North-Holland, à paraître.

[FAI 92a] FAILLE, I., *Modélisation bidimensionnelle de la genèse et de la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, (1992).

[FAI 92b] FAILLE, I., "A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh", *Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, **100**, (1992).

[GAL 92] GALLOUËT, T., "An introduction to finite volume methods", *Problèmes non-linéaires appliqués: Méthodes de volumes finis*, Ecoles CEA-EDF-INRIA, (1992).

[GIR 86] GIRAULT, V., RAVIART, P.-A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, (1986).

[HER 95] HERBIN, R., "An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh", *Numer. Meth. Part. Diff. Eq.*, **11**, (1995).

[PER 95] PEROT, J.B., "Comments on the fractional step method", *J. Comp. Physics*, **121**, (1995).

[SAA 86] SAAD, Y., SCHULTZ, M.H., "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **7**, (1986).

[SAI 95a] SAINSAULIEU, L., *Contribution à la modélisation mathématique des écoulements diphasiques constitués d'un nuage de particules dans un écoulement de gaz*, Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris VI, (1995).

[SAI 95b] SAINSAULIEU, L., "Finite volume approximation of two phase-fluid flows based on an approximate Roe-type Riemann solver", *J. Comput. Physics*, **121**, (1995).

[SHE 93] SHEN, J., "A remark on the projection-3 method", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **16**, (1993).

[TEM 69] TEMAM, R., "Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires II", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **33**, (1969).

[VIL 94] VILA, J.P., "Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws, I. explicite monotone schemes", *Mathematical Mod. and Numer. Anal.*, **28**, (1994).

Article soumis le 15 mars 1996.
Version révisée le 5 septembre 1996.