
Une condition aux limites simple pour les problèmes non bornés

Peter Bettes* — **Jacqueline A. Bettes****
Bernard Peseux***

* *School of Engineering, University of Durham, Science Laboratories
South Road, Durham, DH1 3LE, Great Britain*

** *Information Technology Service, University of Durham
South Road, Durham, DH1 3LE, Great Britain*

*** *Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Ecole Centrale
1 Rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03 France*

RÉSUMÉ. Nous présentons une condition aux limites nouvelle et simple qui peut être utilisée pour l'analyse par éléments finis de problèmes statiques non bornés en élasticité ou pour les problèmes de champs dérivant d'un potentiel. A partir des solutions classiques de l'équation de Laplace, nous construisons des conditions aux limites particulières qui sont appliquées sur la frontière d'un maillage en éléments finis pour simuler le domaine non borné. Nous présentons quelques exemples d'application pour des problèmes élastiques bi et tridimensionnels.

ABSTRACT. We describe a new and simple boundary condition, which can be used in the finite element analysis of static unbounded problems of elasticity and potential. From the classical series solutions in two and three dimensions of Laplace's equation, we develop a set of appropriate boundary conditions and using them as boundary conditions on the exterior of a finite element mesh. We present some results in two and three dimensions for elastic problems.

MOTS-CLÉS : éléments finis, domaine non borné, élasticité, problèmes harmoniques.
KEY WORDS: finite elements, unbounded domain, elasticity, potential problems.

1. Introduction

Les problèmes physiques à résoudre peuvent être classés en deux catégories caractérisées par la nature du domaine dans lequel ils sont posés : domaines bornés ou non bornés. Des méthodes de résolution spécifiques ont été développées pour résoudre les problèmes de l'un ou l'autre cas. Par exemple pour résoudre les problèmes en milieu non borné on peut utiliser :

- des méthodes analytiques basées sur des développements en séries,
- des méthodes d'équations intégrales,
- ou des méthodes mettant en oeuvre les fonctions de Green pour les milieux infinis.

Il existe une littérature très abondante sur ce sujet et l'objet ici n'est pas d'en faire une revue exhaustive. A titre indicatif, comme travail représentatif dans ce domaine, nous citerons l'ouvrage de Brebbia et Walker [Bre 80].

Pour résoudre les problèmes en milieu borné les méthodes numériques usuelles utilisées sont les méthodes des éléments finis et des différences finies. Ces méthodes adaptées à la résolution de ces problèmes peuvent être appliquées également à la résolution des problèmes extérieurs, mais dans ce cas elles doivent être utilisées avec précautions et leur mise en oeuvre nécessite des techniques spécifiques.

Ces techniques et méthodes spécifiques sont assez nombreuses, les plus courantes étant :

- ou bien une troncature pure et simple du domaine,
- ou bien la méthode des éléments infinis [BET 92], pour laquelle la discrétisation du milieu se fait jusqu'à l'infini par utilisation d'éléments spéciaux.
- ou bien le raccordement à la frontière avec des solutions analytiques ou développement en séries,
- ou bien encore la mise en oeuvre de techniques particulières telles que le "ballooning" par exemple,
- ou bien enfin pour les problèmes de propagation d'ondes, l'utilisation d'amortisseurs.

La première utilisation du raccordement de solutions analytiques avec une discrétisation en différences finies, est due à Richardson en 1911 [RIC 11]. Pour étudier la répartition des contraintes sous le barrage d'Assouan, il a appliqué sur la frontière de la discrétisation en différences finies, les résultats analytiques du problème de Flamant concernant un demi espace.

Une bibliographie détaillée concernant les différentes adaptations de la méthode des éléments finis à la résolution des problèmes non bornés est donnée dans l'ouvrage de Bettess [BET 92]. De même des solutions concernant le couplage des éléments finis et des équations intégrales sont présentées par Zienkiewicz et col. [ZIE 77], [ZIE 79]. Enfin les chapitres 8 et 13 du tome 1 du livre de Zienkiewicz et Taylor [ZIE 88] ainsi que le chapitre 15 du second volume [ZIE 91] décrivent parfaitement les différents raccordements de solutions qui peuvent être envisagées.

Ces différentes techniques peuvent être mises en oeuvre pour différents types de problèmes et par exemple dans le domaine de la mécanique des sols, on peut citer les travaux de Lysmer et Kuhlemeyer [LYS 69] qui utilisent des amortisseurs sur la frontière du maillage éléments finis ou de Stamos et col. [STA 94] qui couplent la méthode des éléments finis à celles des équations intégrales.

La condition aux limites que nous présentons ici est de même nature que la condition d'amortissement hiérarchique présentée et développée par Bayliss et col. [BAY 79, BAY 80-a, BAY 80-b] pour traiter des problèmes extérieurs de vagues en régime harmonique et qui fut adaptée par Bando et col. [BAN 84] pour développer des modèles éléments finis très précis.

A partir des solutions fondamentales de l'équation de Laplace en deux et trois dimensions, nous construisons des conditions aux limites particulières et montrons que pour l'étude de problèmes à potentiel ou d'élasticité, elles peuvent être appliquées sur la frontière d'un maillage en éléments finis pour simuler le domaine non borné.

Ces conditions sont très simples à prendre en compte pour traiter les problèmes à potentiel. Par contre, pour les problèmes d'élasticité du fait de la nature des équations associées, elles sont un peu plus compliquées à mettre en oeuvre.

Nous donnons des exemples d'application aussi bien pour les problèmes à potentiel que pour les problèmes d'élasticité en deux et trois dimensions.

2. Théorie

2.1. Problèmes harmoniques

Pour expliciter la démarche suivie conduisant à la condition aux limites proposée, nous partons d'un problème harmonique posé dans un domaine borné Ω_1 de frontière $\partial\Omega_1$.

Le champ inconnu Ψ est solution du problème général :

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= 0 && \text{dans } \Omega_1 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial n} &= f_d && \text{sur } \partial\Omega_\sigma \\ \Psi &= \Psi_d && \text{Sur } \partial\Omega_U \end{aligned} \quad (1)$$

où f_d et Ψ_d sont des valeurs imposées connues sur les parties de frontières $\partial\Omega_\sigma$ et $\partial\Omega_U$ ($\partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_U = \partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_\sigma \cap \partial\Omega_U = \emptyset$).

Le problème est résolu par la méthode des éléments finis. $\{\Psi\}$ étant le vecteur des inconnues nodales, l'approximation nodale sur le domaine complet est :

$$\Psi = \mathbf{N} \{\Psi\} \quad (2)$$

La forme faible de Galerkin conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires :

$$\int_{\Omega_1} \overline{\text{grad}} \mathbf{N}^t \cdot \overline{\text{grad}} \mathbf{N} \, d\Omega \langle \Psi \rangle = \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{N}^t \mathbf{f}_d \, dS \tag{3}$$

$\Psi = \Psi_d$ Sur $\partial\Omega_U$

Considérons maintenant ce problème posé dans un domaine Ω non borné. Le domaine est découpé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 séparés par une frontière sphérique Γ . Ω_1 est ainsi un domaine borné dans lequel le problème est résolu par la méthode des éléments finis. Le domaine Ω_2 est non borné.

La formulation faible de Galerkin dans Ω_1 conduit à une équation qui par rapport à (3) contient au second membre un terme supplémentaire :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{N}^t \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma \tag{4}$$

où la valeur de $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}$ est inconnue sur la frontière Γ .

Pour exprimer cette condition sur la frontière Γ , on cherche le champ inconnu Ψ solution de l'équation de Laplace dans le domaine extérieur Ω_2 .

2.1.1. Problèmes bidimensionnels

Supposons tout d'abord que le problème à résoudre soit un problème plan ou bien tel que la solution présente une symétrie de révolution (problème axisymétrique). L'équation de Laplace en deux dimensions peut s'écrire en fonction des coordonnées cartésiennes x et y ou en fonction des coordonnées polaires r et θ telles que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{5}$$

Les solutions de l'équation (5) de la forme $\Psi(r,\theta) = f(\theta) R(r)$, sont telles que :

$$f(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$R(r) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^n} \right) \tag{6}$$

En ne retenant dans le développement que les termes qui restent bornés quand r tend vers l'infini, ce qui correspond au comportement des solutions des problèmes physiques excepté celles de problèmes plans qui contiennent le terme logarithmique dans le cas où les forces extérieures appliquées ne sont pas en équilibre (elles ne sont

pas de torseur nul), la forme générale de la solution Ψ de l'équation de Laplace en deux dimensions est :

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta) \frac{1}{r^n} \quad (7)$$

Le principe de base de la méthode consiste simplement à dériver l'équation (7) par rapport à r et ensuite éliminer les fonctions $f_n(\theta)$ pour obtenir une condition aux limites qui s'exprime uniquement en fonction de Ψ .

Si on ne conserve que le premier terme dans le développement (7), on obtient une condition aux limites sur Γ du premier ordre, qui est de même nature que la condition de radiation utilisée pour traiter les problèmes de propagation d'ondes. En effet sur la frontière Γ (arc de cercle centré à l'origine du système de coordonnées), on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = f_1(\theta) \left(-\frac{1}{r^2} \right) \quad (8)$$

et donc en éliminant $f_1(\theta)$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \Psi \quad (9)$$

Cette relation (9) est utilisée pour calculer le terme (4) de la formulation de Galerkin qui s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{N}^t \left(-\frac{1}{r} \right) \mathbf{N} \, d\Gamma \{ \Psi \} \quad (10)$$

Dans ce cas, la résolution par la méthode des éléments finis d'un problème harmonique dans un domaine non borné ne nécessite par rapport au problème résolu dans un domaine borné qu'un calcul supplémentaire, celui de l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} \left(-\frac{1}{r} \right) \mathbf{N}^t \mathbf{N} \, d\Gamma \quad (11)$$

sur la frontière du maillage. \mathbf{N} représente la valeur des fonctions d'interpolation sur la frontière Γ .

2.1.2. Problèmes tridimensionnels

Considérons maintenant un problème tridimensionnel. L'équation de Laplace s'écrit :

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

et elle peut être transformée en fonction des coordonnées sphériques r, θ et ϕ définies par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \frac{1}{\tan(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}})} \quad \phi = \frac{1}{\tan(\frac{y}{x})}$$

et elle s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0 \tag{13}$$

Les solutions de l'équation (13) de la forme :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \tag{14}$$

sont obtenues avec les fonctions $R(r), \Theta(\theta), \Phi(\phi)$ qui sont solutions des équations différentielles :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + [n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}] \Theta = 0 \tag{16}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0 \tag{17}$$

Les solutions de l'équation (15) sont les fonctions trigonométriques $\cos(m\phi)$ et $\sin(m\phi)$, celles de l'équation (16) sont les polynômes de Legendre et celles de l'équation (17) de type Euler-Cauchy pour les domaines non bornés sont de la forme

$$\frac{1}{r^{n+1}}$$

Aussi la solution générale de l'équation de Laplace en trois dimensions est de la forme :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta, \phi) \frac{1}{r^n} \tag{18}$$

Comme précédemment pour les problèmes bidimensionnels, la condition aux limites du premier ordre sur la frontière Γ est obtenue en ne conservant que le premier terme du développement et l'intégrale (4) est cette fois une intégrale sur la surface Γ qui est une calotte sphérique.

2.1.3. Généralisation : Construction des conditions aux limites de différents ordres

La démarche théorique précédente a conduit à l'expression d'une condition aux limites d'ordre 1 en ne gardant que le premier terme des développements de Ψ donnés par les équations (7) ou (18). Pour améliorer la précision de la méthode, on peut garder d'autres termes dans ces développements et ainsi on est amené à construire des conditions aux limites d'ordre supérieur.

Considérons donc la forme générale de Ψ solution de l'équation de Laplace :

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{1}{r^i} \quad (19)$$

où f_i , est en deux dimensions une fonction de θ et en trois dimensions une fonction de θ et ϕ .

La condition aux limites d'ordre 2 est construite en conservant les deux premiers termes du développement, soit :

$$\Psi = \frac{f_1}{r} + \frac{f_2}{r^2} \quad (20)$$

On calcule la dérivée première de Ψ par rapport à r et on utilise l'expression (20) pour éliminer f_1 . On obtient alors :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\Psi}{r} - \frac{f_2}{r^3}$$

Cette expression permet d'obtenir f_2 :

$$f_2 = -r^2 \Psi - r^3 \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Le calcul de la dérivée seconde de Ψ par rapport à r donne :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \frac{\Psi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{3 f_2}{r^4}$$

et en remplaçant f_2 par sa valeur on obtient finalement la condition aux limites d'ordre 2 dont l'expression est :

$$B_2(\Psi) = \frac{2\Psi}{r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = 0 \quad (21)$$

De même, pour construire la condition aux limites d'ordre m sur la frontière Γ , on conserve les m premiers termes du développement de Ψ donné par l'équation (19) et par substitution on obtient la forme générale suivante :

$$B_m(\Psi) = 0 \quad \text{avec} \quad B_m = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2i-1}{r} \right) \quad (22)$$

Il est aisé de vérifier que cette forme générale est satisfaisante. En effet, en appliquant par exemple l'opérateur B_3 au trois premiers termes de l'équation (19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{5}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) [f_1 r^{-1} + f_2 r^{-2} + f_3 r^{-3}] \quad (23) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{5}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) [f_1 (-r^{-2} + r^{-2}) + f_2 (-2r^{-3} + r^{-3}) + f_3 (-3r^{-4} + r^{-4})] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{5}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} \right) [-f_2 r^{-3} - f_3 (2r^{-4})] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{5}{r} \right) [f_3 (2r^{-5})] \\ &= f_3 (10r^{-6} - 10r^{-6}) = 0 \end{aligned}$$

Et de façon évidente, en procédant de manière analogue, la séquence des k opérateurs éliminera les k premiers termes de la série définie par l'équation (22).

Les différentes conditions aux limites sont obtenues en développant l'équation (22). Ces conditions s'écrivent :

$$\frac{\Psi}{r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad \text{pour l'ordre 1} \quad (24)$$

$$\frac{2\Psi}{r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{pour l'ordre 2} \quad (25)$$

$$\frac{6\Psi}{r^3} + \frac{18}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{9}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} = 0 \quad \text{pour l'ordre 3} \quad (26)$$

Ces conditions sont valables aussi bien en deux dimensions qu'en trois dimensions, (à condition, comme nous l'avons déjà signalé, que pour les problèmes bidimensionnels le comportement de la solution ne soit pas logarithmique).

Ces conditions aux limites d'ordre supérieur ou égal à deux font intervenir les dérivées seconde et d'ordre supérieur du champ Ψ par rapport à r . Comme ces dérivées ne peuvent être directement utilisées dans le modèle éléments finis elles doivent être éliminées. L'élimination se fait en utilisant l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{en coordonnées polaires} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{en coordonnées sphériques} \quad (28)$$

En substituant dans la condition (25) les équations (27) et (28), les deux conditions aux limites d'ordre deux pour les problèmes extérieurs bidimensionnels ou tridimensionnels deviennent :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{2}{3r} \Psi + \frac{1}{3r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \quad \text{en deux dimensions} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\Psi}{r} + \frac{1}{2r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\cos \theta}{2r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \quad \text{en trois dimensions} \quad (30)$$

Quant aux conditions d'ordre 3 ou plus, il sera nécessaire de faire plusieurs substitutions qui feront apparaître des dérivées en θ d'ordre élevé qui sont plus difficiles à inclure dans un modèle élément fini. En effet l'ordre de ces dérivées fixe la classe des fonctions d'interpolation N sur la frontière Γ .

Remarque : Les conditions aux limites d'ordre deux ou plus pourront être utilisées directement sous la forme générale (21) pour résoudre des problèmes plus généraux, caractérisés par des opérateurs différentiels d'ordre pair égal à $2p$. Dans ce cas en effet les conditions aux limites associées font intervenir des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à $2p-1$.

La formulation faible de Galerkin dans le domaine borné Ω_1 fait apparaître des intégrales sur la frontière sphérique Γ , séparation de Ω_1 et Ω_2 , de la forme:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial^s N^t}{\partial r^s} \frac{\partial^q \Psi}{\partial r^q} d\Gamma \quad \text{avec : } s+q = 2p \quad (31)$$

Ces intégrales sont calculées en utilisant directement les conditions aux limites d'ordre q .

2.2. Problèmes d'élasticité

Soient u, v, w , les composantes en coordonnées cartésiennes du vecteur des déplacements $\bar{u}(M)$ en un point M quelconque d'un domaine Ω , $\bar{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy de vecteur des contraintes associé $\{\sigma\}$, \bar{E} le tenseur des petites perturbations de vecteur des déformations associé $\{\epsilon\}$. La formulation générale d'un problème d'élasticité linéaire s'exprime par :

trouver $\bar{u}(M)$ tel que les équations suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}} \bar{\sigma} + \bar{f} &= \bar{0} && \text{dans } \Omega && (32) \\ \bar{\sigma} \cdot \bar{n} &= \bar{T}_d && \text{sur } \partial\Omega_\sigma \\ \bar{u} &= \bar{u}_d && \text{sur } \partial\Omega_u \\ \bar{E} &= \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \bar{u} + \overline{\text{grad}}^t \bar{u}) = \overline{\text{grad}}_s \bar{u} && (33) \end{aligned}$$

et si $[D]$ est la matrice d'élasticité, la loi de Hooke s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \tag{34}$$

La forme intégrale qui conduit à la formulation faible de Galerkin du problème dans un domaine borné Ω , forme intégrale équivalente à l'écriture du principe des travaux virtuels, avec une approximation nodale $u = N a$, a étant le vecteur des inconnues nodales, donne :

$$- \int_{\Omega} \overline{\text{grad}}_s \bar{v} : \bar{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \bar{v} \cdot \bar{f} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \bar{v} \cdot \bar{T}_d \, dS = 0 \tag{35}$$

Comme pour les problèmes à potentiel, si le domaine est non borné, il est divisé en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 séparés par une frontière sphérique Γ . La formulation faible de Galerkin dans le domaine Ω_1 borné, contient alors une intégrale sur Γ :

$$\int_{\Gamma} \bar{v} \cdot (\bar{\sigma} \cdot \bar{n}) \, d\Gamma \tag{36}$$

En considérant que les composantes u , v , w du déplacement dans le domaine Ω_2 s'expriment sous la forme générale (19), on peut construire pour chacune d'elles des conditions aux limites dont les formes sont celles données par les équations (24) à (26). Ces conditions aux limites sont alors utilisées pour le calcul de l'intégrale (36). Ce calcul est réalisé en respectant les étapes essentielles suivantes :

1. La relation déformations-déplacements (33) est exprimée en coordonnées polaires ou sphériques.
2. Compte tenu de cette relation déformations-déplacements et de la relation contraintes-déformations en élasticité (34), le terme $\bar{\sigma} \cdot \bar{n}$ dans l'intégrale (36) peut être exprimé en fonction des composantes des déplacements uniquement. On obtient alors des termes faisant intervenir les dérivées normale et tangentielle des composantes du déplacement.
3. Les conditions aux limites générales d'ordre 1, 2 ou 3, définies par les équations (24) à (26) sont utilisées pour éliminer les dérivées normales du déplacement.
4. Le calcul de l'intégrale (36) est réalisé en coordonnées polaires ou sphériques sur la frontière du domaine.

Dans le cas général ce processus est assez compliqué et pour les exemples présentés, seule la condition aux limites d'ordre 1 sera utilisée.

3. Mise en oeuvre informatique de la condition aux limites

3.1. Condition d'ordre 1

Dans le cas de problèmes bidimensionnels et axisymétriques, nous devons calculer sur la frontière du domaine l'intégrale curviligne :

$$\int_{\Gamma} \left(-\frac{1}{r}\right) \mathbf{N}^t \mathbf{N} \, d\Gamma$$

La frontière du domaine, qui moyennant quelques modifications mineures dans la démarche théorique précédente peut être de forme quelconque, est discrétisée à l'aide d'un élément fini linéique curviligne montré sur la figure 1.

L'algorithme du calcul de cette intégrale pour un élément à n noeuds est décrit ci-dessous :

initialisation à zéro de la matrice **k**

Pour chaque point d'intégration Gauss faire

- fixer l'abscisse ξ et le poids w du point d'intégration
- appel de la procédure de calcul des fonctions d'interpolation et des dérivées pour l'élément monodimensionnel (retour de N et de $\partial N/\partial \xi$)
- calcul des coordonnées du point d'intégration

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- calcul des dérivées partielles au point d'intégration

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i$$

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}$$

- calcul des termes de **k**

Si le problème est plan alors :

$$\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + w * \left(\frac{-1}{r}\right) * \mathbf{N}^t \mathbf{N} * \frac{\partial s}{\partial \xi}$$

Sinon le problème est axisymétrique et :

$$\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + w * \left(\frac{-1}{r}\right) * \mathbf{N}^t \mathbf{N} * \frac{\partial s}{\partial \xi} * [2\pi * \text{rayon}]$$

Fin si

Fin pour

Pour les problèmes d'élasticité les seules modifications à apporter à la procédure sont dues au fait qu'il y a deux degrés de liberté par noeud : les déplacements u et v et donc la matrice **k** est constituée de sous-matrices de dimension 2.

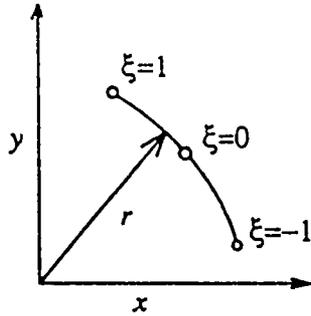


Figure 1. Géométrie monodimensionnelle de l'élément frontière

3.2. Condition du second ordre

Pour simplifier, nous considérons le cas où la frontière du domaine est un arc de cercle tel que $s = r \theta$. La condition aux limites de l'équation (29) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{2}{3r} \Psi + \frac{r}{3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \quad (37)$$

Avant d'être prise en compte dans l'algorithme précédent, cette condition est modifiée afin d'abaisser l'ordre de dérivation de Ψ . Cette modification est obtenue en utilisant l'équation d'Euler Lagrange qui traduit la condition de stationnarité d'une fonction F définie par une intégrale curviligne sur un contour Γ . Cette condition, que l'on trouve par exemple dans Courant et Hilbert [COU 62], s'écrit :

$$\frac{dF}{d\Psi} - \frac{d}{ds} \left[\frac{dF}{d[d\Psi/ds]} \right] = 0 \quad (38)$$

Considérons une fonction F définie par une intégrale curviligne sur un contour Γ , telle que :

$$F = \int_{\Gamma} \left[\left(-\frac{2}{6r} \right) \Psi^2 - \left(\frac{r}{6} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right)^2 \right] d\Gamma \quad (39)$$

L'équation d'Euler Lagrange correspondant à cette équation (39) est :

$$-\frac{2}{3r} \Psi + \frac{r}{3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = 0 \quad (40)$$

On trouve le second membre de l'équation (37) et donc en utilisant ce résultat, on en déduit la condition aux limites modifiée. Pour son utilisation dans l'algorithme il suffit d'exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de la coordonnée locale ξ et de tenir compte de l'interpolation de Ψ .

Et dans l'algorithme précédent, le calcul des éléments de la matrice \mathbf{k} devient :

$$\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + \mathbf{w} * \left(\left(\frac{-2}{6r} \right) * \mathbf{N}^t \mathbf{N} * \frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{r}{6} \frac{\partial \mathbf{N}^t}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) \quad (41)$$

pour les problèmes d'élasticité plane et :

$$\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} + \mathbf{w} * \left(\left(\frac{-2}{6r} \right) * \mathbf{N}^t \mathbf{N} * \frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{r}{6} \frac{\partial \mathbf{N}^t}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) * [2\pi * \text{rayon}] \quad (42)$$

pour les problèmes axisymétriques.

4. Résultats

Pour illustrer la prise en compte de cette condition aux limites simple, nous traitons trois problèmes. Ces problèmes sont assez simples et académiques, mais ils présentent l'avantage de pouvoir être résolus analytiquement. Cette solution analytique servira de référence pour différents résultats numériques et elle permettra de valider les méthodes mises en oeuvre.

4.1. Exemple 1 : Problème de Boussinesq

Le premier exemple présenté est le problème de Boussinesq, problème relatif à un demi espace élastique chargé par une force ponctuelle [BOU 1885, BOU 1878, BOU 1892].

Le problème est axisymétrique, le maillage en éléments finis dans un plan r,z utilisé pour le calcul est montré sur la figure 2. La figure 3 montre la variation du déplacement vertical des points situés sur la verticale du point d'application de la charge en fonction de la profondeur. La figure 4 montre les déplacements des points de la surface libre en fonction de la distance au point d'application de la charge.

Les résultats obtenus sont comparés avec :

- la solution analytique de Boussinesq,
- la solution avec frontière bloquée, c'est-à-dire la solution obtenue en imposant $u=v=0$ sur Γ ,
- et la solution obtenue avec des éléments infinis parents [BET 92].

Il ressort des résultats obtenus que la méthode utilisant la condition aux limites proposée ici présente certains avantages sur d'autres :

- La précision est nettement meilleure que celle obtenue avec les éléments finis en domaine borné.
- En comparaison avec les éléments infinis, les résultats sont certes moins bons mais la méthode est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre et il n'est pas exclu d'espérer que des conditions d'ordre supérieur puissent améliorer encore la précision.

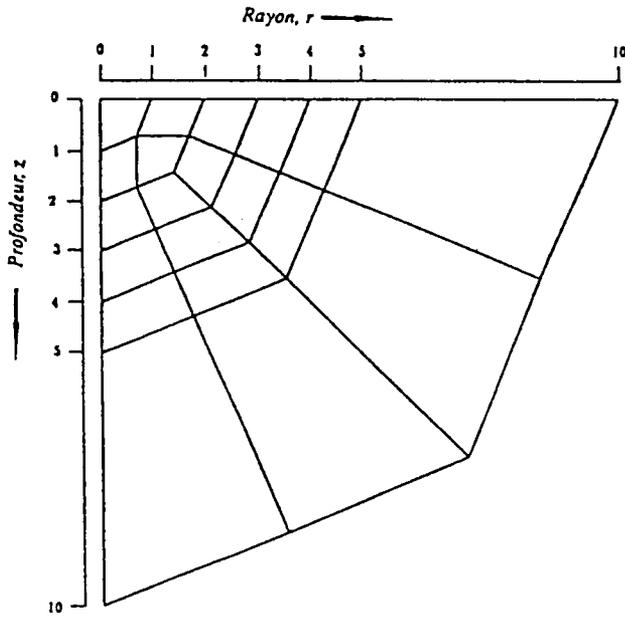


Figure 2. Problème de Boussinesq : maillage en éléments finis

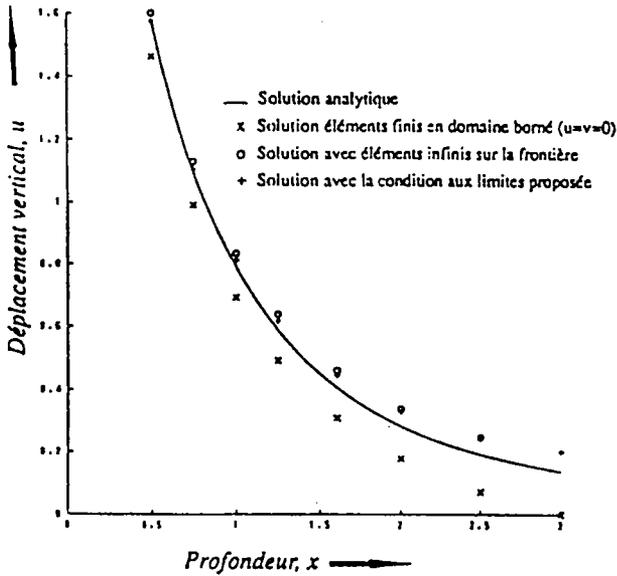


Figure 3. Problème de Boussinesq : déplacements verticaux à la verticale de la charge

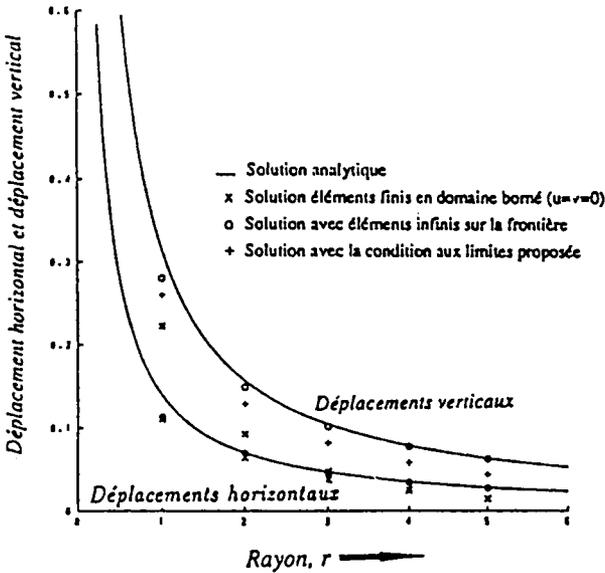


Figure 4. Problème de Boussinesq : déplacements à la surface libre

4.2. Exemple 2 : Problème de Flamant

La solution originale de Flamant [FLA 1892] obtenue en élasticité plane (problème de contraintes planes), concernait un demi-plan élastique (x,y) , x étant l'axe vertical descendant, chargé par une force ponctuelle verticale. Cette solution dérivait des travaux de Boussinesq [BOU 1885, BOU 1878, BOU 1892] et les détails des calculs se trouvent par exemple dans le livre de Timoshenko et Goodier [TIM 51].

La solution obtenue est paradoxale ; en effet le déplacement s'exprime en fonction de $\ln r$, r étant la distance du point courant au point d'application de la charge et donc tend vers l'infini quand la distance r tend vers l'infini. Ce résultat physiquement impossible fut discuté par Timoshenko et Goodier [TIM 51] et par Bettess [BET 92].

Bien évidemment il serait illusoire d'espérer retrouver ce résultat avec la condition aux limites proposée dans cet article ou avec les éléments infinis, leurs caractéristiques intrinsèques comme les déplacements (comportement en $1/r^n$) étant incompatibles avec la variation logarithmique qui elle n'a pas de sens physique. Il est cependant possible de créer un problème à partir de celui de Flamant, dont la solution puisse être obtenue numériquement et qui ait une signification physique. Ce problème consiste en l'application sur le demi-espace de 3 forces verticales formant un torseur nul. Ces forces valent respectivement $F = -1$, $F = +2$ et $F = -1$ et sont appliquées aux points $y = -1$, $y = 0$ et $y = 1$ de la droite $x = 0$ qui représente la surface libre du problème.

Avec ce chargement la somme des termes logarithmiques est nulle et il en résulte que le comportement du déplacement est en $1/r$. Aussi les éléments infinis et la condition aux limites proposée, qui exhibent tous un comportement en $1/r$, sont-ils de nouveau adaptés pour résoudre ce problème.

La solution obtenue avec les éléments infinis contient un mouvement vertical de solide rigide qui doit être éliminé en fixant le déplacement vertical d'un point quelconque. Dans le modèle éléments infinis choisi, le déplacement du noeud de l'axe de symétrie à distance infinie est imposé nul. La prise en compte de notre condition aux limites présente l'avantage d'éliminer automatiquement ce mouvement de solide rigide.

La figure 5 montre la géométrie, le maillage et le chargement appliqué. L'axe Ox étant axe de symétrie, on ne modélise qu'un quart de plan.

La solution du problème de Flamant est évaluée numériquement pour ces 3 forces ponctuelles de torseur nul. Elle sert de référence pour les résultats numériques obtenus :

- par éléments finis en milieu borné, c'est-à-dire avec les déplacements u et v nuls sur la frontière,
- par éléments infinis,
- par éléments finis associés à la condition aux limites proposée.

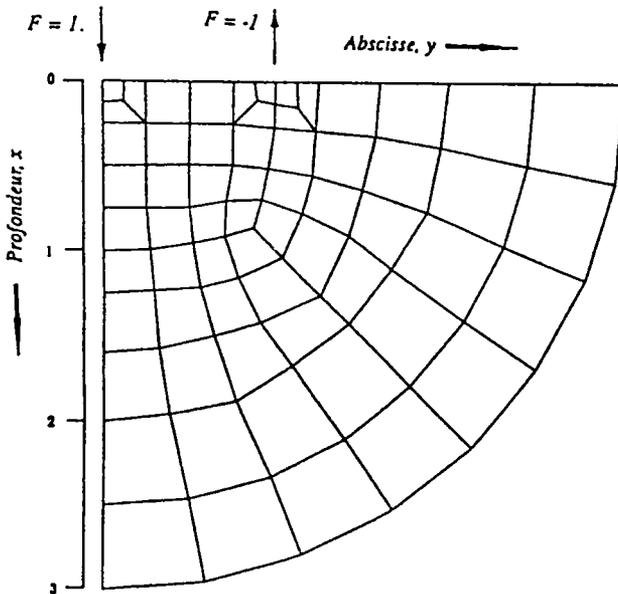


Figure 5. Problème de Flamant : géométrie, chargement et maillage

Les calculs sont réalisés en utilisant des éléments finis linéaires puis quadratiques. La figure 6 montre les variations de la composante verticale du

déplacement des points situés sur l'axe vertical Ox et la figure 7 montre les variations des composantes horizontales et verticales des déplacements des points de la surface libre. Ces résultats sont obtenus avec des éléments finis linéaires. Les figures 8 et 9 montrent les résultats obtenus avec des éléments quadratiques.

Il est intéressant de noter que la solution analytique conduit à un champ des déplacements dont la composante horizontale est nulle en tout point de la surface libre, sauf entre les points d'application des forces et y compris au point d'application de la force centrale où elle est constante. Compte tenu de la difficulté à modéliser une discontinuité des déplacements et malgré quelques oscillations dues à cette discontinuité, les résultats numériques obtenus par éléments finis correspondent relativement bien à cette solution analytique.

Pour les éléments finis quadratiques, les contraintes σ_x et σ_y sur l'axe de symétrie Ox sont comparées aux valeurs analytiques. La figure 10 montre ces différents résultats et permet de mettre en évidence leur bonne concordance.

Ce calcul confirme les conclusions tirées de l'exemple 1 précédent, à savoir que les éléments infinis fournissent la meilleure approximation et que les résultats obtenus avec la prise en compte de la condition aux limites que nous proposons sont plus précis que ceux obtenus avec les éléments finis en domaine borné.

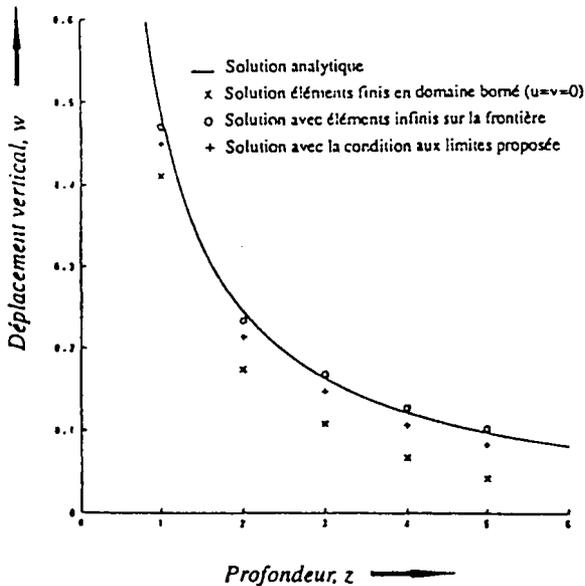


Figure 6. Problème de Flamant : déplacements verticaux des points de l'axe Ox , éléments linéaires

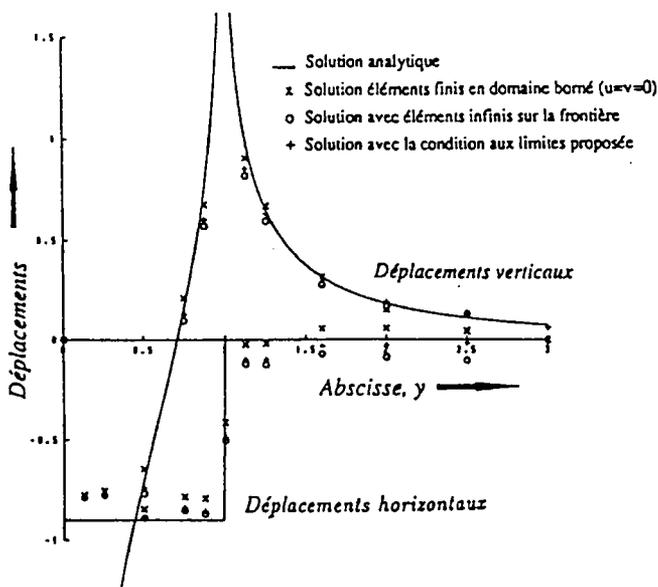


Figure 7. Problème de Flamant : déplacements à la surface libre, éléments linéaires

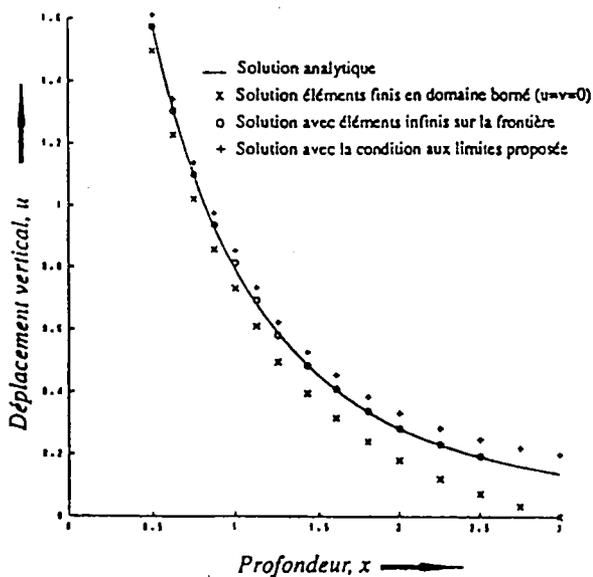


Figure 8. Problème de Flamant : déplacements verticaux des points de l'axe Ox , éléments quadratiques

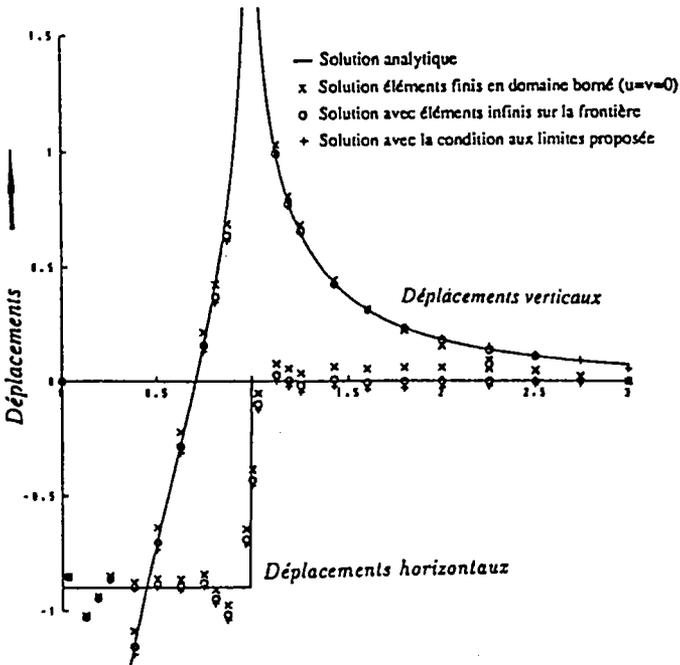


Figure 9. Problème de Flamant : déplacements à la surface libre, éléments quadratiques

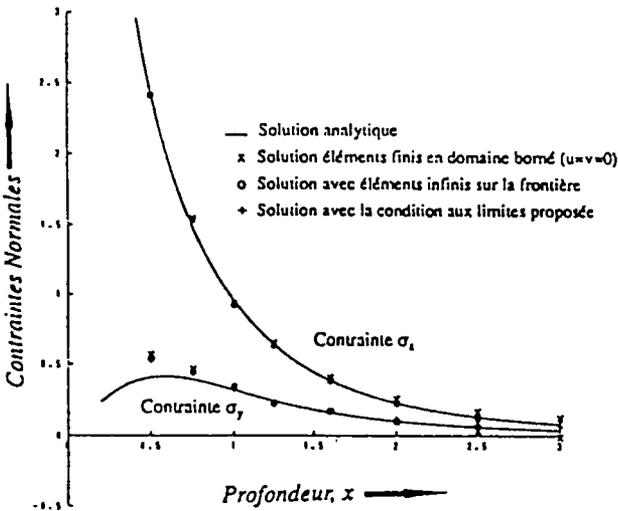


Figure 10. Problème de Flamant : contraintes aux points de l'axe Ox, éléments quadratiques

4.3. Exemple 3 : Trou circulaire dans un espace infini

On traite le cas d'une plaque infinie percée d'un trou circulaire et soumise à l'infini à une tension uniaxiale uniforme. Ce problème bien connu met en évidence une concentration de contrainte égale à 3 au point d'intersection entre le bord du trou et l'axe perpendiculaire à la direction de la tension à l'infini. Ce problème est à nouveau traité numériquement par les trois méthodes :

- éléments finis en domaine borné,
- éléments finis avec prise en compte de la condition aux limites sur la frontière,
- éléments infinis.

La mise en oeuvre de ces méthodes doit se faire avec précaution, car les déplacements exacts à l'infini sont évidemment infinis et ne pourront être obtenus numériquement. Aussi ne s'intéresse-t-on qu'aux perturbations sur les déplacements et contraintes engendrées par la présence du trou. Pour ce faire on procède en deux étapes :

1. On considère tout d'abord la plaque sans trou soumise à la même tension à l'infini et on y calcule les contraintes à l'emplacement du trou en question.

2. Ensuite les forces généralisées correspondant à l'opposé de ces contraintes sont appliquées sur la frontière du trou de la plaque percée, libre à l'infini. Les contraintes et déplacements dus à ces forces tendent vers 0 quand la distance croît et peuvent donc être calculés numériquement. Le problème de concentration de contrainte est obtenu en superposant ces derniers champs, aux champs uniformes de la plaque sans trou.

La figure 11 montre pour la modélisation d'un quart de plaque le maillage en éléments finis. Le trou a un rayon unité. Chaque élément est construit sur un secteur angulaire d'angle 10 degrés et les noeuds sont situés respectivement sur les circonférences de rayons $r = 1., 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2., 3.$ et 4.

L'intérêt du problème étant la détermination du champ de contrainte, nous utilisons des éléments finis quadratiques ; en effet des éléments linéaires conduisent à un champ de contrainte constant et ils ne permettraient pas de représenter correctement les variations du champ réel.

Sur la figure 12, on a porté les variations de la contrainte normale σ_x le long d'un rayon perpendiculaire à la direction de la tension uniaxiale à l'infini. Les contraintes sont calculées aux noeuds du maillage à partir d'une extrapolation bilinéaire des valeurs obtenues aux points d'intégration de Gauss (2x2) de chaque élément. Nous pourrions naturellement obtenir des résultats plus précis aux noeuds par des méthodes de calcul plus raffinées, mais l'objectif ici est simplement la comparaison des trois modèles numériques, aussi cette technique de calcul simple est-elle suffisante.

Nous ne montrons pas les variations des déplacements, car comme nous l'avons déjà signalé l'intérêt du problème concerne uniquement les contraintes.

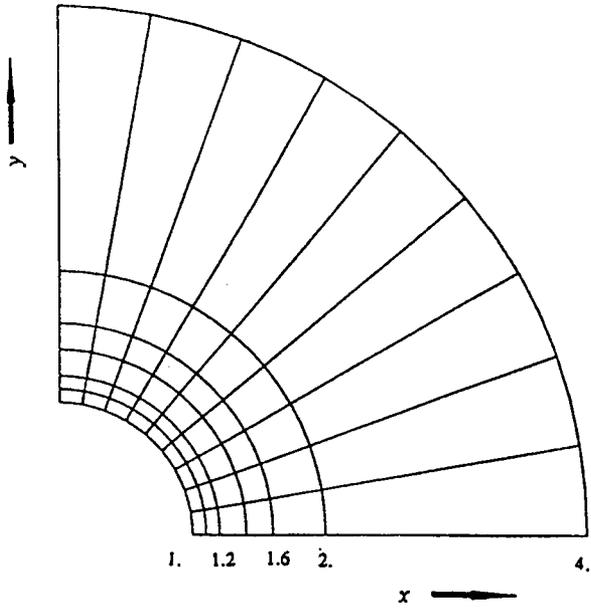


Figure 11. Trou dans une plaque infinie : maillage et géométrie

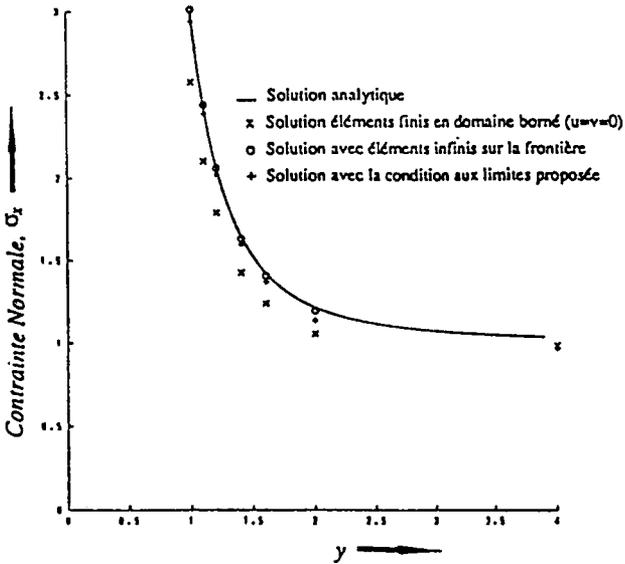


Figure 12. Trou dans une plaque infinie : contrainte sur le rayon perpendiculaire au chargement

La résolution de ce problème met en évidence à nouveau que les éléments infinis sont les plus performants et que la prise en compte de la condition aux limites sur la frontière du maillage en éléments finis améliore beaucoup les résultats obtenus avec le modèle éléments finis sur le domaine borné.

5. Conclusions

Cet article montre la méthodologie suivie pour générer une famille de conditions aux limites simples, appliquées à distance finie et qui permettent de simuler le domaine non borné pour des problèmes en statique. La mise en oeuvre informatique de ces conditions est simple et les solutions numériques obtenues pour les trois types de problèmes traités sont de bonne qualité. Ces conditions aux limites fournissent des résultats bien meilleurs que ceux obtenus avec le modèle éléments finis du domaine borné et presque aussi bons que ceux obtenus avec les éléments infinis. La mise en oeuvre de conditions aux limites d'ordre supérieur bien que plus complexe peut être envisagée et devrait conduire à des résultats encore plus précis. Cet article montre également que les problèmes de Flamant et de concentration de contrainte peuvent être traités avec une modélisation utilisant des éléments infinis et avec la technique mettant en oeuvre la nouvelle condition aux limites proposée. Ces méthodes n'avaient pas été utilisées à ce jour pour traiter ces deux problèmes.

Ces exemples bien que simples, présentent néanmoins un intérêt pratique certain. En effet le problème de Boussinesq est largement utilisé en mécanique des sols, pour l'analyse et la conception des fondations. De même le problème de Flamant peut servir de base à l'étude de la répartition des contraintes sous un ouvrage. Enfin le problème de concentration de contraintes est toujours d'actualité pour les ingénieurs. Une mauvaise évaluation des contraintes autour de trous et entailles peut être à l'origine de catastrophes (Comet ou Sea Gem par exemple). La méthode présentée est pertinente pour prédire de façon précise les contraintes dans bien des situations pratiques.

Remerciements

Les auteurs remercient Omar Laghrouche pour son aide concernant la solution théorique du problème de Flamant et pour toutes les discussions fructueuses sur ce problème. Peter et Jacqueline Bettess remercient le Directeur de l'Ecole Centrale de Nantes qui a permis cette collaboration entre Nantes et Durham.

Références

- [BAY 79] A. BAYLISS et E. TURKEL, "Radiation Boundary Conditions for Wave-like Equations" , 1979, *ICASE report N° 79-26*.
- [BAY 80-a] A. BAYLISS , M. GUNZBERGER et E. TURKEL, "Boundary Conditions for the Numerical Solution of Elliptic Equations in Exterior Regions" , 1980, *ICASE report N° 80-1*.

- [BAY 80-b] A. A. BAYLISS et E. TURKEL, "Radiation Boundary Conditions for Wave-like Equations" , 1980, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol 33, pp 707-725.
- [BAN 84] K. BANDO, P. BETTESS et C.R.I. EMSON, "The Effectiveness of Dampers for the Analysis of Exterior Scalar Wave Diffraction by Cylinders and Ellipsoids", 1984, *Internat. Journ. Num. Meth. Fluids*, Vol 4, pp 599-617.
- [BET 92] P. BETTESS , *Infinite Elements*, 1992, *Penshaw Press*, Sunderland, U.K., ISBN 09518806-0-8.
- [BOU 1885] J. BOUSSINESQ, "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques", 1885, *Gauthiers-Villars*, Paris.
- [BOU 1878] J. BOUSSINESQ, "Equilibre d'élasticité d'un sol isotrope sans pesanteur, supportant différents poids", 1878, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Française*, Vol 86, pp 1260-1263.
- [BOU 1892] J. BOUSSINESQ, "Des perturbations locales que produit au-dessous d'elle une forte charge, répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords, à la surface supérieure d'une poutre rectangulaire et de longueur indéfinie posée de champ soit sur un sol horizontal, soit sur deux appuis transversaux équidistants de la charge", 1892, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Française*, Vol 114, pp 1510-1516.
- [BRE 80] C.A. BREBBIA and S. WALKER, "Boundary Element Techniques in Engineering", 1980, *Newnes-Butterworth*, London.
- [COU 62] R COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, 1962, P196 Vol. 1, Wiley Interscience, New York.
- [FLA 1892] FLAMANT, "Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement", 1892, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Française*, Vol 114, pp 1465-1468.
- [LYS 69] J. LYSMER & R.L. KUHLEMEYER, "Finite Dynamic Model for Infinite Media", 1969, *Journ. of the Engin. Mechanics Division, ASCE*, Vol.95, N EM4, pp 859-877.
- [RIC 11] L.F. RICHARDSON, "The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a MasonaryDam", 1911, *Trans. Roy. Soc.*, A210, pp 307-357.
- [STA 94] A.A. STAMOS, O. VON ESTORFF, H. ANTES & D.E. BESKOS, "Vibration Isolation in Road-Tunnel Traffic Systems", 1994, *Int. Journ. for Engng. Analysis and Design*, Vol 1, pp 109-121.
- [TIM 51] S. TIMOSHENKO et J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 1951, *McGraw-Hill*, New York.
- [ZIE 77] O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY and P. BETTESS, "The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures", 1977, *Int. Journ. Num. Meth. Engng.* bf 11, pp 355-375.

- [ZIE 79] O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY and P. BETTESS, "Marriage à la mode- the Best of Both Worlds (Finite Elements and Boundary Integrals)" *Chapter 5 of Energy Methods in Finite Element Analysis* , (Eds R. Glowinski, E.Y. Rodin and O.C. Zienkiewicz), 1979, pp 81-107, Wiley, London and New York.
- [ZIE 88] O.C. ZIENKIEWICZ and R.L. TAYLOR, *The Finite Element Method* , 1988 , Volume 1, McGraw-Hill, Maidenhead.
- [ZIE 91] O.C. ZIENKIEWICZ and R.L. TAYLOR, *The Finite Element Method* , 1991 , Volume 2, McGraw-Hill, Maidenhead.

Article soumis le 15 novembre 1994
Version révisée le 15 avril 1996