

---

# Techniques de remaillage appliquées au découpage des métaux

Moaz Homsî — Lionel Morançay — Jean-Marc Roëlandt

Université de Technologie de Compiègne  
Laboratoire de Génie Mécanique, Matériaux et Structures  
URA 1505 - Division M.N.M.  
B.P. 649 - 60206 Compiègne

---

**RÉSUMÉ.** Lors de la simulation des procédés de mise en forme, on est souvent confronté à des problèmes numériques liés à la distorsion des éléments, qui peut engendrer des erreurs importantes conduisant à une solution numérique très approximative, voir incorrecte. En particulier, en présence de conditions de contact, les éléments trop déformés peuvent être à l'origine de l'arrêt des calculs et de la divergence du processus de résolution non-linéaire. Il est essentiel, pour mener à bien la simulation des procédés de mise en forme des métaux, de développer des techniques de remaillage. Dans le cas du découpage des métaux, problème que nous traitons dans cet article, la nature élasto-plastique endommageante du matériau exige que ces techniques de remaillage soient accompagnées de procédures de transport de champs (déformations plastiques, contraintes, variable d'endommagement, etc). Pour cela, nous avons développé des méthodes basées sur l'approximation et l'interpolation diffuses.

**ABSTRACT.** In the simulation of metal forming processes with the finite elements method, one can find a significant distortion of the elements in the used mesh. This distortion can lead to significant errors or even to a completely incorrect numerical solution. Elements with large deformation result in a divergent behaviour in the non linear resolution process. Therefore, in metal forming processes, it is essential to remedy these problems by introducing remeshing techniques. In metal cutting, the problem we are treating in this paper, the elastoplastic nature and the damage of the material require the mapping of different fields (plastic deformation, stresses, damage variable, etc). This mapping is done by using methods based on diffuse approximation and interpolation.

**MOTS-CLÉS :** grandes déformations, contact et frottement, rupture ductile des métaux, approche locale, croissance des cavités, remaillage, transport de champs, approximation et interpolation diffuse, équilibrage des champs, enfoncement de pieu dans un sol, découpage des métaux par poinçonnement.

**KEY WORDS :** large deformations, contact and friction, ductile rupture of metals, local approach, growth of cavities, remeshing, mapping, diffuse approximation and interpolation, field redistribution, cone penetration, metal cutting by punching.

---

## 1. Introduction

Dans cet article, nous présentons les méthodes de remaillage et de transport de champs que nous avons appliquées à la simulation de l'enfoncement d'un pieu dans un sol et au découpage des métaux par poinçonnage.

D'emblée, il est important de préciser ce que nous entendons ici par "remaillage". Les techniques de remaillage auto-adaptatives (méthodes  $r$ ,  $h$  ou  $p$ ) basées sur les résultats fournis par des estimateurs d'erreur, sont généralement employées dans le cas de problèmes linéaires. Elles ont récemment été étendues pour traiter des problèmes comportant des non linéarités de type géométrique.

Dans la mise en forme des métaux, on rencontre souvent des zones de concentration d'éléments distordus. On souhaite garantir une qualité géométrique suffisante au maillage, de manière à permettre la poursuite de la simulation dans de "bonnes conditions". C'est exclusivement dans ce contexte que nous nous sommes placés.

Nous avons adopté des techniques où l'on reconstruit un nouveau maillage, à partir d'une géométrie qui évolue en fonction des déformations de l'ancien maillage; la décision de remailler peut être laissée à l'utilisateur ou automatisée à partir du contrôle de la géométrie des éléments.

Après avoir défini un nouveau maillage, il est nécessaire de construire les champs qui définissent l'état mécanique de la structure (contraintes, déformations plastiques, variable d'endommagement, etc), et ce à partir des informations sur l'ancien maillage. Pour cela, différents algorithmes d'interpolation ou d'extrapolation ont été proposés. Nous présenterons les méthodes d'approximation et d'interpolation diffuses, que nous avons utilisées.

Les méthodes de transport de champs en mécanique non linéaire, quand elles vérifient l'admissibilité plastique des champs transportés, n'assurent généralement pas que les contraintes aux points de Gauss du nouveau maillage sont sur la fonction seuil lorsque leurs voisins dans l'ancien maillage le sont - par la suite, nous noterons cette *propriété (P<sub>1</sub>)*.

Certaines techniques permettent, dans le cas de la loi élasto-plastique en particulier, d'ajuster les inconnues de manière à ré-équilibrer la structure et à vérifier la loi de comportement du matériau. Nous présenterons une technique semblable dans le cas du modèle de Gurson que nous avons utilisé pour simuler la découpe.

Il faut signaler que de nombreux outils parmi ceux que nous avons développés et utilisés pourraient également être appliqués dans un cadre auto-adaptatif, en ce qui concerne le transport de champs en particulier.

Ces développements ont été réalisés sur le logiciel de modélisation SIC (Système Interactif de Conception), développé à la division Modèles Numériques en Mécanique de l'Université de Technologie de Compiègne [BRE 92].

## 2. Remaillage

### 2.1. *Décision de remaillage*

Un remaillage doit être effectué avant la distorsion complète des éléments; la décision de remailler peut faire suite à un appauvrissement de la géométrie des éléments, être basée sur des critères énergétiques, ou être simplement périodique. Vue la nature régulière de l'évolution des déformations au cours des procédés de mise en forme, un remaillage périodique semble satisfaisant en première approche. Nous avons adopté cette technique pour les simulations effectuées dans ce travail.

### 2.2. *Modification de la géométrie et création du nouveau maillage*

Une première approche consiste à remailler l'intérieur du domaine, de manière à obtenir un maillage plus régulier, à partir de la discrétisation de ses contours dans leur état déformé - i.e. où l'on a cumulé les déplacements aux coordonnées - sans modifier cette discrétisation.

Les mailleurs plans dont nous disposons dans SIC (de Delaunay et frontal) respectent alors cette discrétisation des contours lors de la génération des noeuds et des éléments à l'intérieur du domaine.

Cependant, dans les procédés de mise en forme, la localisation de la déformation d'une part, et la prise en compte des phénomènes de contact, d'autre part, conduisent souvent à un allongement des éléments sur la frontière du domaine; cette méthode n'est donc pas adaptée à ce type de problème, et nous en illustrerons les limites.

La construction de nouveaux contours à partir de la déformée, par des techniques de lissage, permet de créer une nouvelle discrétisation des frontières, plus riche, puis un maillage de l'intérieur du domaine. En particulier, l'utilisateur peut ainsi imposer une densification locale ou globale du maillage, qui peut être fonction notamment de la concentration de déformation.

Nous décrivons donc une autre méthode, où la géométrie évolue au cours du processus. La géométrie de la déformée est reconstruite avant de la mailler à l'aide de mailleurs automatiques selon les directives (tailles de mailles, points de contrôle) de l'utilisateur, qui sont susceptibles de varier au cours de la simulation.

Nous avons choisi une représentation par frontières des domaines: chaque face référence une surface et une liste de contours (un contour externe et, éventuellement des contours internes); un contour consiste en une liste d'arêtes et une arête est tracée sur une courbe (droite, cercle ou spline) entre deux sommets; enfin, un sommet référence un point.

Lorsqu'est prise la décision de remailler, nous construisons tout d'abord de nouvelles entités géométriques (points, splines d'interpolation) sur la base du maillage déformé; nous modifions ensuite les entités topologiques (sommets et arêtes) de manière à ce qu'elles référencent ces nouveaux objets.

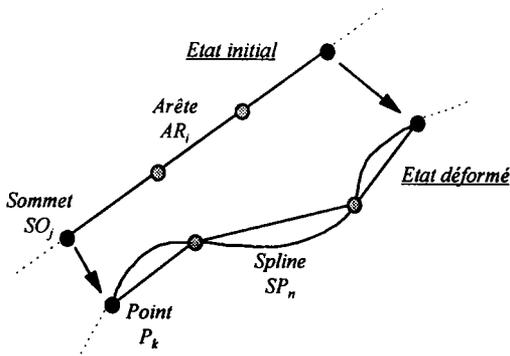


Figure 1. Lissage des contours déformés

Ainsi, pour chaque arête du domaine, nous construisons des points sur tous les noeuds de l'arête, dans leur état déformé; à partir de cette liste de points, nous construisons une spline que nous substituons au support géométrique de l'arête, dans le réseau d'objets qui constitue la représentation par frontières du domaine. Enfin, au sein du logiciel SIC, ces diverses commandes peuvent être rassemblées au sein d'une macro-commande, ce qui permet d'automatiser le processus de remaillage.

### 3. Transport de champs

On trouve dans la littérature plusieurs références à des travaux relatifs au transport de champs en mécanique non linéaire, dans le cadre de processus de remaillage à partir d'une estimation de l'erreur de discrétisation ou bien, comme c'est le cas de nos applications, sur des critères géométriques (distorsion des éléments, etc).

La méthode la plus fréquemment employée [MAI 92][YOO 90][CHE 88][BAR 90] consiste à extrapoler les champs aux noeuds de l'ancien maillage et à réaliser une interpolation de type éléments finis aux points de Gauss du nouveau maillage. Pour chacun de ces points, il faudra déterminer l'élément de l'ancien maillage qui le contient et calculer les coordonnées locales du point dans cet élément. En ce qui concerne ce dernier traitement en particulier, s'il est simple dans le cas d'un élément triangulaire, il est plus complexe et coûteux dans les autres cas, et nécessite des calculs itératifs [YOO 90].

[MAI 92] présente également une méthode de 'transfert direct' où l'on retient, comme valeurs des champs au point d'évaluation, les valeurs au point de Gauss le plus proche dans l'ancien maillage.

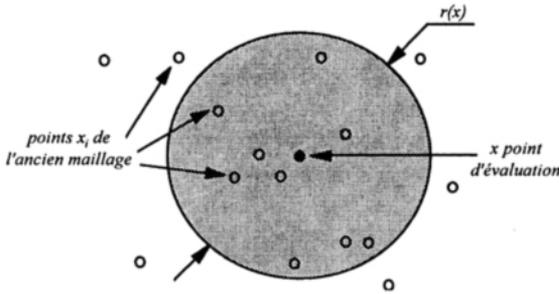
[HAB 90] réalise des moyennes pondérées sur l'ensemble des points de Gauss de l'ancien maillage, situés à l'intérieur d'un disque centré sur le point d'évaluation.

Remarquons que, à l'exception du 'transfert direct', ces méthodes - quand elles vérifient l'admissibilité plastique des champs transportés - n'assurent généralement pas la propriété ( $P_1$ ).

Dans la suite, nous allons présenter les méthodes que nous avons retenues, à savoir l'approximation et l'interpolation diffuses.

### 3.1. L'approximation diffuse

Nous avons utilisé une méthode d'approximation par moindres carrés pondérés, sur une fenêtre locale, présentée par [ORK 84] et récemment utilisée dans le cadre de la formulation de la méthode des éléments diffus [NAY 92].



**Figure 2.** Transfert des informations par approximation diffuse

Soit  $x$  un point d'évaluation et  $\sigma$  le champ à transporter au point  $x$ .

Nous cherchons  $\sigma$  sous la forme  $\sigma = \langle p(x) \rangle \{ \alpha \}$  où  $\langle p(x) \rangle$  désigne une base polynomiale et  $\{ \alpha \}$  un vecteur de coefficients à déterminer, qui dépendent de  $x$ .

On minimise la fonctionnelle suivante:

$$\sum_{i=1, N} w_x(x_i) (\langle p(x_i) \rangle \{ \alpha \} - \sigma_i)^2 \quad [1]$$

où  $x_i$  et  $\sigma_i$  sont les coordonnées et les valeurs du champ à transporter, aux points de Gauss de l'ancien maillage, et  $w_x$  une fonction de pondération centrée en  $x$  et qui vaut 1 en  $x$ , à support local.

On pourra choisir, pour réaliser une approximation à partir des  $k$  plus proches voisins de  $x$ :

$$w_x(y) = \cos^2 \left( \frac{\pi \|y - x\|}{2r(x)} \right)$$

où  $r(x)$  désigne la distance du  $(k+1)^{\text{ième}}$  plus proche voisin de  $x$ .

Cela équivaut à résoudre le système linéaire, suivant:

$$\{ \alpha \} = [A]^{-1} \{ b \}$$

où 
$$[A] = \sum_{i=1, N} w_x(x_i) \langle p(x_i) \rangle \langle p(x_i) \rangle$$

et 
$$\{b\} = \sum_{i=1, N} \sigma_i w_x(x_i) \langle p(x_i) \rangle$$

Remarquons que cette méthode d'approximation n'est pas interpolante.

### 3.2. L'interpolation diffuse

Cette technique a été développée à partir de la méthode précédente. Pour rendre l'approximation interpolante, on utilise des fonctions de pondération singulières en  $x$ ; on pourra choisir:

$$\tilde{w} = \frac{w}{1 - w}$$

(de manière à garantir le même support et la même régularité aux fonctions poids). Soit  $x_j$  le plus proche voisin du point d'évaluation  $x$ ; on pose:

$$\lambda = \tilde{w}_x(x_j) \langle p(x_j) \rangle \{\alpha\} - \sigma_j$$

La résolution du système linéaire suivant, où la matrice à inverser ne présente pas de singularité en  $x_j$ , donne les coefficients de l'interpolation diffuse:

$$\begin{bmatrix} [A_j] & \langle p(x) \rangle \\ \langle p(x) \rangle & -\frac{1}{\tilde{w}(x)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha\} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b_j\} \\ \sigma_j \end{Bmatrix}$$

où 
$$[A_j] = \sum_{i \neq j} w_x(x_i) \langle p(x_i) \rangle \langle p(x_i) \rangle$$

et 
$$\{b_j\} = \sum_{i \neq j} \sigma_i w_x(x_i) \langle p(x_i) \rangle$$

On peut montrer que, lorsque  $x$  tend vers  $x_j$ , la solution de ce système tend continûment vers celle du système d'optimalité où l'on a introduit la condition d'interpolation. En particulier,  $\sigma(x)$  tend vers  $\sigma_j$  lorsque  $x$  tend vers  $x_j$ , et  $\sigma(x_j) = \sigma_j$  (condition d'interpolation).

L'approximation ou l'interpolation diffuses nous affranchissent de l'extrapolation

des champs aux noeuds de l'ancien maillage; de plus, l'interpolation diffuse permet d'assurer naturellement l'admissibilité plastique transportés et la *propriété* ( $P_1$ ) si le point d'évaluation est présent dans l'ancien maillage, ce qui n'est pas le cas des méthodes dites d'interpolation éléments finis.

Dans le cas de certaines lois, comme la loi élasto-plastique, l'utilisation du principe de l'approximation ou de l'interpolation diffuses, devrait permettre - sous réserve de développements qui sortent du cadre des travaux que nous présentons ici - d'assurer l'admissibilité plastique des champs transportés et la *propriété* ( $P_1$ ): il est alors possible de traiter cette propriété comme une contrainte quadratique du problème de minimisation [1].

#### 4. Equilibrage

Cependant, en ce qui concerne les méthodes d'approximation et d'interpolation diffuses telles que nous les avons rapportées aux paragraphes précédents, les champs transférés de l'ancien au nouveau maillage ne respectent généralement, ni l'équilibre local, ni l'équilibre global. Nous procédons alors à un équilibrage a posteriori de la structure.

La reprise du calcul permet de retrouver un état d'équilibre local et global, mais cet état est différent de l'état de la structure avant remaillage. Ainsi, on peut faire suivre chaque remaillage de la structure, de pas de chargement 'vides' (sans augmentation de la charge sur la structure). Ces pas permettent en même temps de satisfaire les conditions aux limites dans les zones de contact.

Dans le cas de la loi élasto-plastique, [MAI 92] propose de ramener les contraintes sur la surface d'écoulement en multipliant les contraintes par un coefficient  $\alpha$ ,  $\alpha < 1$ , lorsque le critère est violé.

Pour le modèle de Gurson employé pour simuler l'endommagement dans le procédé de découpage, cette démarche n'est plus possible à cause du couplage plasticité-endommagement. Une autre démarche sera alors proposée, dans le cadre de ce modèle, pour assurer localement l'équilibrage des champs (voir § 6.2.).

#### 5. Enfouissement d'un pieu dans le sol

Cette application représente un test largement employé en génie civil pour caractériser le comportement du sol. Le traitement numérique de ce problème est très délicat, du fait qu'il inclue des conditions aux limites évolutives, des grandes déformations et un comportement non-linéaire du sol.

Le comportement du sol doit être décrit par des modèles appropriés (Drucker-Prager, Cam-Clay, Nova, etc) et la simulation de ce procédé nécessite, à part le développement de telles lois, la caractérisation du sol.

Ces développements sortent du cadre de notre travail; nous avons donc considéré un comportement élasto-plastique à écrouissage linéaire. De ce fait, les résultats obtenus seront jugés qualitativement plutôt que quantitativement.

La géométrie du problème, ainsi que les paramètres du matériau, sont présentés sur la figure 3 (où  $\sigma_0$  est la limite élastique et  $p$  la déformation plastique cumulée):

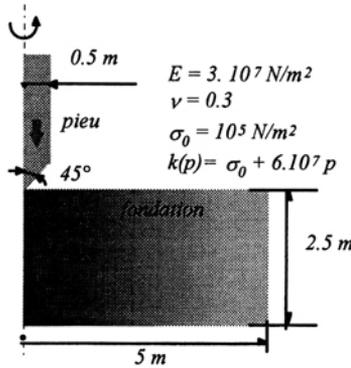


Figure 3. Géométrie et propriétés du matériau

Les dimensions de la fondation peuvent être considérées infinies et ce, par comparaison à celles du pieu considéré rigide. Nous avons utilisé une formulation axisymétrique, avec 318 éléments de type  $T3$  et 192 noeuds. La taille des côtés des éléments sur l'axe est de 0.1m, elle est de 0.5m sur la face externe verticale. La figure 4 montre le maillage utilisé.

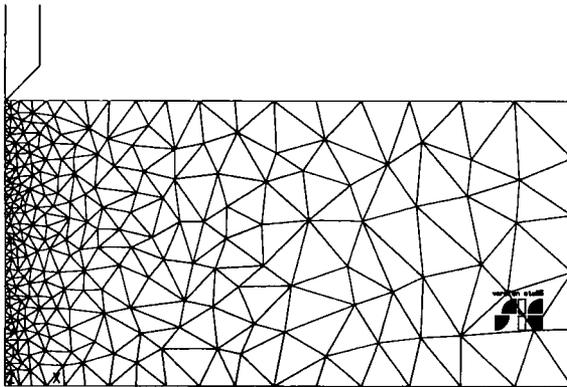
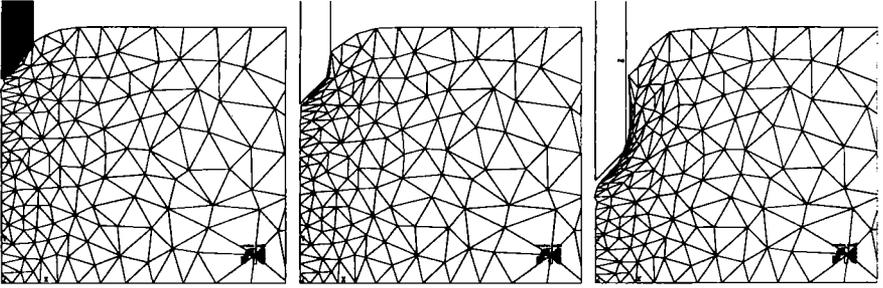


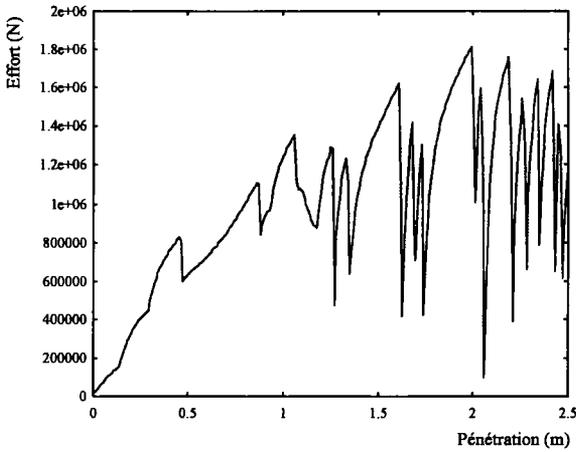
Figure 4. Maillage initial de la fondation

Afin d'illustrer la nécessité des opérations de remaillage, nous montrons à la figure 5 les déformées de la fondation à des pénétrations du pieu de 0.5, 0.75 et 1.5m (les déformées sont représentées entre 0 et 2m de coordonnée radiale); ces résultats n'ont évidemment que peu de sens mécanique, si l'on considère les distorsions très importantes des éléments déformés.

Le tracé des efforts en fonction de la pénétration du pieu est présenté sur la figure 6.



**Figure 5.** Déformées de la fondation à 20%, 30 et 60% de pénétration (simulation sans remaillage)



**Figure 6.** Courbe effort-déplacement du pieu (simulation sans remaillage)

La courbe effort-déplacement du pieu présente de fortes fluctuations, qui deviennent importantes au delà d'un mètre de profondeur. Dans la première partie de la courbe, ces fluctuations s'expliquent par le changement brutal des conditions de contact lorsqu'un noeud rencontre ou quitte la surface du pieu. A cette raison s'ajoute, dans la deuxième partie, la distorsion (aplatissement) exagérée des éléments; cette distorsion rend les éléments plus rigides et les empêche d'épouser la forme du pieu, créant ainsi un vide autour du pieu, ce qui mène à une mauvaise représentation du phénomène de contact et amplifie davantage les fluctuations.

Une simulation correcte de ce procédé passe par un remplacement du maillage au cours de la simulation et avant que les éléments ne soient totalement distordus. Un tel processus devra améliorer la représentation de la fondation par éléments finis et, par conséquent, permettre une meilleure prise en compte de l'évolution du contact.

Nous avons donc repris ce calcul avec le même maillage initial (déjà présenté à la figure 4).

Nous avons utilisé un remaillage systématique dont la périodicité est liée à la taille des éléments en contact avec le pieu. La simulation complète a été effectuée avec 250 pas de chargement de 0.01m d'enfoncement et 24 opérations de remaillage; chaque remaillage est suivi d'un pas de chargement vide pour la reprise du calcul. Le transport de champs est effectué par approximation diffuse sur les 6 plus proches voisins, en utilisant la base polynomiale  $\langle 1 \ x \ y \rangle$ .

Les figures 7.a et 7.b montrent les déformées du pieu aux profondeurs de 0.5, 0.75, 1.5m, et 2.25m.

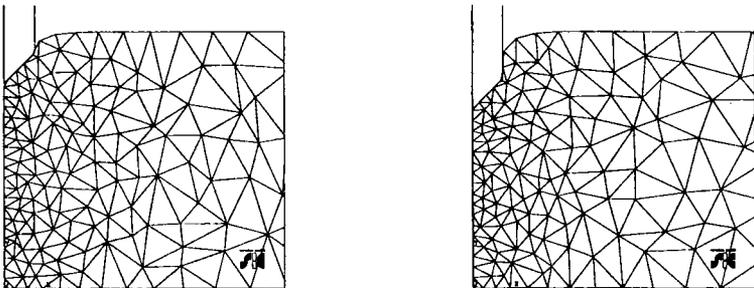
La figure 8 montre une vue rapprochée des éléments déformés autour du pieu (Zoom:  $R=[0,1.2]$  ;  $Z=[0,1.6]$ ), à la profondeur 1.5m. Cette figure illustre la présence de vides entre la fondation et la partie droite du pieu: ceci est conforme aux résultats expérimentaux rapportés par [KIO 88].

Finalement, nous présentons sur la figure 9 la courbe effort-déplacement du pieu.

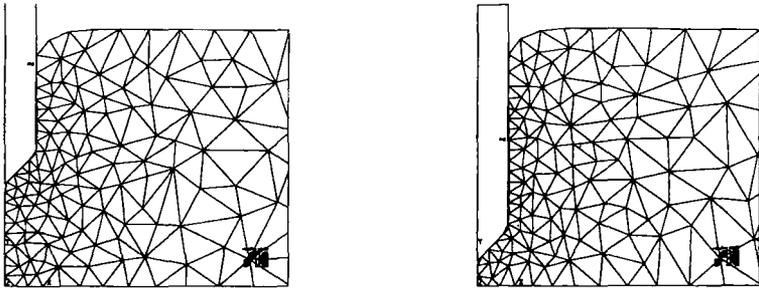
L'interprétation des résultats de cette simulation ne peut être quantitative, en raison de l'absence de relevés expérimentaux correspondant à un comportement et un type de sol donnés. Cependant, qualitativement, cette courbe est en bon accord avec les résultats expérimentaux de [KER], et les résultats numériques de [SIM 93][KIO 88].

Enfin, l'utilisation des techniques de remaillage nous a permis d'utiliser un maillage plus fin au niveau des éléments en contact avec le pieu (la taille des éléments dans cette zone est de 0.05m). Le maillage initial ainsi formé est constitué de 509 éléments de type T3 et de 301 noeuds. Le même processus de remaillage - approximation diffuse sur 6 points voisins; base polynomiale  $\langle 1 \ x \ y \rangle$  - est appliqué régulièrement tous les 5 pas de chargement de 0.01m. La courbe charge-déplacement du pieu qui correspond à cette simulation, est également rapportée à la figure 9.

Nous remarquons que les pics que présente la courbe correspondant au maillage fin, sont nettement réduits. Ceci confirme que leur présence dépend de la précision du calcul des réactions de contact entre la fondation et le pieu. En effet, la réduction de la taille des éléments dans la zone de contact et le remaillage plus fréquent, conduisent à une modélisation plus précise des conditions de contact.

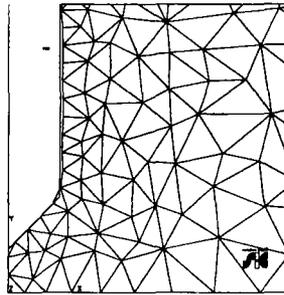


*Déformées de la fondation à 20% et 30% de pénétration*

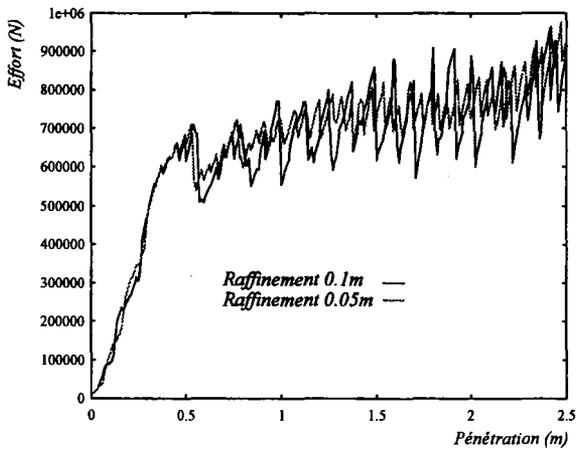


*Déformées de la fondation à 60% et 90% de pénétration*

**Figure 7.** *Déformées du pieu (simulation avec remaillage)*



**Figure 8.** *Vue rapprochée des éléments en contact avec le pieu*

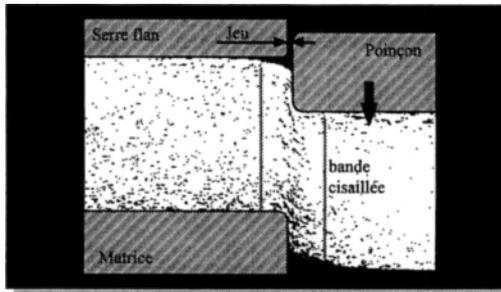


**Figure 9.** *Courbes effort-déplacement du pieu (simulations avec remaillage)*

## 6. Découpe des métaux

Parmi les procédés de formage, le découpage tient une place à part. En effet, l'emboutissage ou le pliage sont par exemple des opérations qui sollicitent le métal dans le domaine plastique alors que le découpage a pour but de dépasser ce domaine et d'endommager le matériau jusqu'à créer des fissures nécessaires pour amorcer la rupture et détacher la pièce découpée de la tôle.

L'opération de découpage (cf figure 10) consiste à perforer, avec un poinçon, une tôle reposant sur une matrice. La différence de diamètre entre la matrice et le poinçon est un paramètre important du procédé. Ce jeu est faible par rapport à l'épaisseur de la tôle (5% dans notre cas).



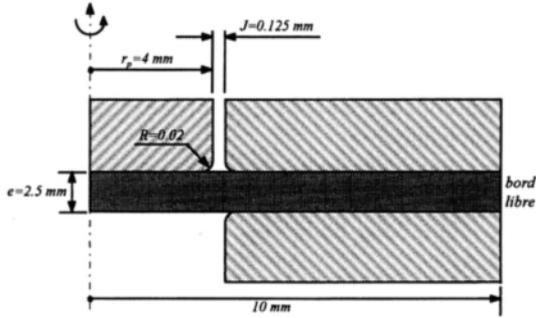
**Figure 10.** Procédé de découpage des métaux

Ce procédé est piloté par plusieurs paramètres relatifs à la géométrie des outils de découpe, l'évolution de l'usure de ces outils au cours de l'opération, la nature et le comportement du matériau découpé.

Dans le contexte industriel, le choix optimal de ces multiples paramètres est essentiel pour garantir la qualité des pièces découpées. La multitude de ces paramètres rend leur détermination expérimentale aussi délicate que coûteuse; la simulation numérique devrait fournir un moyen pour optimiser ce procédé, dans la mesure où elle permet l'étude de l'effet de chacun de ces paramètres.

### 6.1. Présentation du problème

La découpe est effectuée sans lubrification, elle est considérée quasi statique (vitesse de descente du poinçon de l'ordre de 5 mm/min). La géométrie du problème est présentée sur la figure 11.



**Figure 11.** Géométrie et conditions aux limites de la découpe

La tôle découpée est en acier type XES; ses caractéristiques mécaniques sont les suivantes:

limite d'élasticité	$\sigma_0 = 150 \text{ MPa}$
résistance à rupture	$R_m = 310.5 \text{ Mpa}$
allongement à rupture	$A = 22.7 \%$
module d'élasticité	$E = 210000 \text{ MPa}$
coefficient de Poisson	$\nu = 0.29$

La loi d'écroûissage du matériau est modélisée par une courbe en puissance selon la relation:

$$k(p) = 587(p + p_0)^{0.34}$$

où  $k(p)$  est la limite élastique actualisée et  $p$  est la déformation plastique cumulée. Maillard [MAI 91][MAI 93], dans le cadre de travaux menés au CETIM-SENLIS, présente une étude expérimentale de la découpe d'une tôle en acier XES d'épaisseur 2.5mm. Nous nous sommes basés sur cette étude pour valider nos résultats numériques.

## 6.2. Modélisation de l'endommagement

Dans la littérature, beaucoup de modèles ont été proposés, non pas pour décrire les phénomènes physiques conduisant à la rupture, mais seulement pour prédire la rupture. Dans ces modèles, l'endommagement est traité de différentes manières. La tendance actuelle est de modéliser la rupture à l'aide d'une approche basée sur la plasticité des milieux poreux, où la variable endommagement est liée à la croissance des cavités dans ces milieux. Nous nous plaçons dans le cadre de cette approche, à laquelle appartient le modèle de Gurson présenté ci-après.

Gurson [GUR 77], partant d'un modèle microstructural, établit pour différentes géométries de microcavités la forme des potentiels plastiques; dans ces modèles, la matrice est rigide-parfaitement plastique.

Depuis, ce modèle a été repris et modifié par plusieurs auteurs pour prendre en compte d'une part, la présence de cavités de tailles différentes, et d'autre part, la perte rapide de rigidité du matériau lors de la coalescence des cavités. Ainsi, Tvergaard & Needleman [TVE 81][TVE 82][NEE 83][NEE 87] proposent un potentiel de type Gurson généralisé:

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{k^2(p)} + 2f_e q_1 \cosh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\sigma_m}{k(p)}\right) - (1 + q_3 f_e^2) \leq 0 \quad [2]$$

où  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente de Von-Mises,  $k(p)$  est la limite élastique actualisée qui suit une loi d'écroutissage isotrope,  $\sigma_m$  est la contrainte moyenne et  $f_e$  est une fonction de  $f$ , la fraction volumique de cavités, telle que :

$$f_e = \begin{cases} f & \text{pour } f \leq f_c \\ f_c + f_{uc}(f - f_c) & \text{pour } f > f_c \end{cases}$$

$f_c$  est une valeur critique de la fraction volumique de vide correspondant au début de la coalescence. Si on note  $f_F$  la fraction volumique de vide lors de la rupture finale, la constante  $f_{uc}$  peut être exprimée de façon à annuler les efforts dans le volume de matière totalement endommagée:

$$f_{uc} = \frac{\frac{1}{f_c} - f_c}{f_F - f_c}$$

Les coefficients  $q_i$  dépendent du matériau; ils sont identifiés par comparaison entre une modélisation du milieu contenant un réseau périodique de vide, et une seconde modélisation obéissant au potentiel plastique. Tvergaard [TVE 81][TVE 82][ARA85] affirme que les résultats les plus satisfaisants sont obtenus pour:

$$q_1 = \frac{3}{2} \quad q_2 = 1 \quad q_3 = q_1^2$$

Pour  $f=0$ , cette équation se réduit au critère de Von-Mises et nous retrouvons le critère de plasticité de la matrice.

L'évolution de  $f$  est déduite de l'équation de conservation de la masse:

$$\dot{f} = (f_F - f) \dot{\epsilon}_{kk}^p \quad [3]$$

Finalement, l'évolution de  $\dot{\epsilon}^p$  suit la règle de la normalité:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$$

Le modèle ainsi proposé s'adapte bien à la simulation numérique car l'endommagement intervient directement dans la loi de comportement du matériau. Le modèle est intégré par un schéma implicite de type Simo & Taylor [SIM 86] [SIM 87].

### 6.3. Equilibrage des champs

Pour assurer l'admissibilité plastique, nous avons procédé localement à un post-traitement des champs transférés. La méthodologie suivie pour effectuer cet équilibrage est explicitée par la suite. Le critère de Gurson modifié par Tvergaard & Needleman donné par [2] fait intervenir plusieurs variables dont les contraintes, la limite élastique et la porosité. L'évolution de la porosité, déduite de la conservation de la masse, est donnée selon [3], en fonction de la trace des déformations plastiques. D'où, par intégration entre la porosité initiale  $f_0$  et la porosité finale  $f_F$

$$f = f_F - (f_F - f_0) \exp(-\varepsilon_{kk})$$

La limite élastique actualisée est calculée selon la loi d'écroutissage isotrope, en fonction de la déformation plastique cumulée.

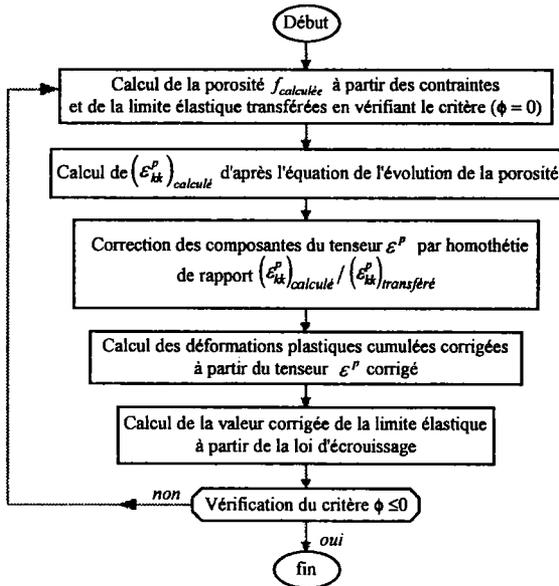


Figure 12. Organigramme de l'équilibrage de champs (modèle de Gurson)

La démarche consiste à fixer les valeurs des contraintes et de la limite élastique et à en déduire la valeur de la porosité à partir du critère; cette valeur de la porosité nous permet de calculer  $\varepsilon_{kk}$ . On corrige alors les composantes du tenseur des déformations plastiques en lui appliquant une homothétie de rapport: le quotient de la valeur calculée sur la valeur transférée de  $\varepsilon_{kk}$ . Le tenseur modifié des déformations plastiques permet de calculer une nouvelle valeur de la déformation plastique cumulée, et donc une nouvelle valeur de la limite élastique.

Enfin, on itère sur ce processus jusqu'à ce que le critère de Gurson soit vérifié. L'organigramme suivant montre les différentes étapes de cette démarche:

#### 6.4. Simulation numérique de l'endommagement

L'amorçage et la propagation de fissure dans un milieu solide consistent à endommager des éléments tout au long du chemin de fissure. Dans notre cas, cette détérioration de l'élément est dictée par un critère local de rupture ( $f \geq f_F$ ).

La fissure, dont le chemin est déterminé automatiquement, est schématisée par une zone complètement endommagée dans laquelle les champs représentatifs de l'équilibre et de la cinématique restent continus à l'échelle macroscopique. L'amorçage et la propagation de fissure sont définis comme le lieu où le dommage a atteint sa valeur critique de rupture. On tient compte ainsi de la détérioration progressive de la matière et de la chute de rigidité correspondante.

Dans nos développements, nous avons appliqué cette approche. Ainsi, à chaque pas de chargement, on effectue un test sur les valeurs de la porosité aux points d'intégration des éléments; lorsqu'un point voit sa porosité atteindre la valeur critique, il est déclaré endommagé et ne participe plus ni à la matrice de rigidité, ni au résidu de l'élément qui le contient; si tous les points d'intégration de l'élément sont endommagés, l'élément est alors déclaré endommagé, ce qui forme une microfissure ou fait propager une fissure déjà existante.

La rigidité d'un élément endommagé est physiquement nulle. Numériquement, annuler la matrice de rigidité d'un élément risque de poser des problèmes de mauvais conditionnement ou de pivot nul dans la matrice de rigidité tangente globale. Dans la pratique, un élément est déclaré rompu lorsque sa porosité atteint 90% de sa valeur à rupture.

Pour le traitement d'un élément déclaré endommagé, nous avons utilisé les deux techniques suivantes:

- Un élément garde, lorsqu'il est rompu, une rigidité constante faible par rapport à la rigidité globale de la structure; sa matrice de rigidité élémentaire reste constante, sa valeur étant celle calculée lorsque l'élément venait de s'endommager.
- La rigidité d'un élément déclaré endommagé est annulée progressivement par des itérations de rééquilibrage; sa participation dans la rigidité globale de la structure diminue progressivement pour s'annuler. Lorsqu'un noeud du maillage est entouré par des éléments endommagés, on doit alors bloquer ses degrés de liberté.

L'utilisation de ces deux méthodes, sur la simulation de la rupture d'une éprouvette entaillée sous traction, a fourni des résultats semblables au niveau global.

### 6.5. Simulation de la découpe sans remaillage

Afin de simuler correctement le procédé, nous avons considéré toutes les non linéarités en présence.

Ainsi, en ce qui concerne les grandes déformations, nous avons utilisé une formulation Lagrangienne actualisée à chaque pas. Pour respecter l'objectivité de la loi de comportement, liant la dérivée au sens de Jaumann des contraintes de Cauchy au taux de déformations, nous l'avons intégrée dans le repère tournant corotationnel défini par la rotation  $[Q]$ , en utilisant les approximations sur un pas de calcul ( $t < \tau \leq t + \Delta t$ ) introduites par Hugues et Winget [HUG 80]:

$$[Q(\tau)] = \left[ I - \frac{1}{2} W(t + \frac{\Delta t}{2}) \right]^{-1} \left[ I + \frac{1}{2} W(t + \frac{\Delta t}{2}) \right] [Q(t)]$$

où  $W(t + \frac{\Delta t}{2})$  est le taux de rotation calculé au milieu du pas de temps ( $W$  et  $D$ , taux de déformation, sont supposés constants sur le pas).

Le problème de contact est résolu par la méthode directe de flexibilité [WRO 94][HOM 94].

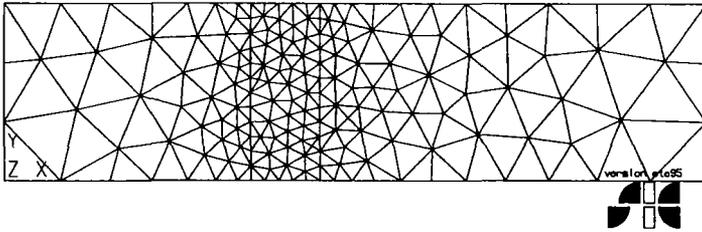
Finalement, l'endommagement est traité par l'approche locale basée sur la croissance des cavités. Il est modélisé par le modèle de Gurson modifié par Tvergaard & Needleman présenté au paragraphe 7.2.

En raison de l'axisymétrie du problème (poinçonnage circulaire, chargement symétrique), seul un plan radial de la tôle est modélisé. Le bord extérieur de la tôle est libre (cf. figure 11); le chargement résulte de la descente du poinçon. Nous avons considéré un contact glissant entre la tôle et les outils (poinçon, matrice et serre-flan), qui correspond précisément aux conditions d'essai.

Nous avons testé plusieurs configurations de raffinement du maillage dans la zone centrale. La concentration des déformations conduit à la distorsion des éléments dans cette zone. Le choix de la taille des éléments n'est donc, pour l'instant, dicté que par ce critère.

En effet, l'utilisation d'un maillage suffisamment fin dans cette zone (où la taille de l'élément est de l'ordre de la taille moyenne des grains du métal) ne permet pas de poursuivre la simulation au delà de 20% de l'épaisseur. Un maillage plus grossier permet, malgré la distorsion inévitable des éléments, de continuer les calculs jusqu'à 45% d'épaisseur de la tôle.

Le maillage grossier est constitué de 296 éléments linéaires de type  $T3$  et 175 noeuds. La taille des éléments non déformés dans la zone centrale est de 0.2 mm:



**Figure 13.** *Maillage initial (simulation sans remillage)*

Les paramètres appropriés du modèle de Gurson doivent être issus de calibration entre calcul numérique et expérience. Ne disposant pas de ces données, nous avons choisi le jeu de paramètres proposé dans la littérature [NEE 87]:

$$\begin{array}{lll} f_0 = 0.07 & f_c = 0.25 & f_F = 0.8 \\ q_1 = 1.25 & q_2 = 1.0 & q_3 = q_1^2 \end{array}$$

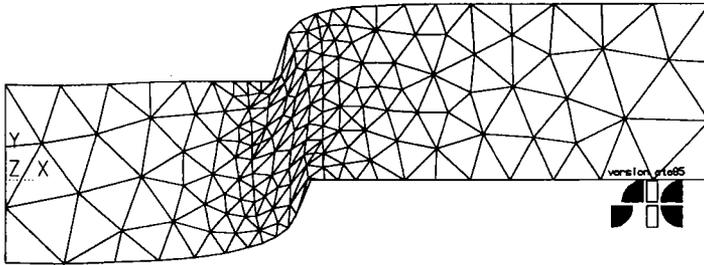
le choix de  $f_F$  est imposé par celui de  $q_1$ , afin d'annuler la rigidité des éléments à la rupture.

Les résultats de cette simulation sont présentés à la figure 16 et sont discutés comparativement aux résultats de deux autres simulations, simplifiées, de manière à illustrer la nécessité de modéliser les différentes non linéarités (endommagement, conditions de contact).

Dans les conditions d'une simulation avec un comportement élasto-plastique non endommageant de la tôle, nous avons pu simuler la descente du poinçon jusqu'à 100% de l'épaisseur de la tôle. La déformation plastique équivalente, à 2.5 mm de profondeur, atteint la valeur de 370% dans certains éléments. Cependant, en ce qui concerne la courbe effort-déplacement du poinçon (figure 16), nous ne constatons pas de perte de rigidité de la structure: la rigidité globale de la tôle est considérablement amplifiée à cause du comportement non endommageant et de la présence d'éléments, rendus plus rigides par la distorsion.

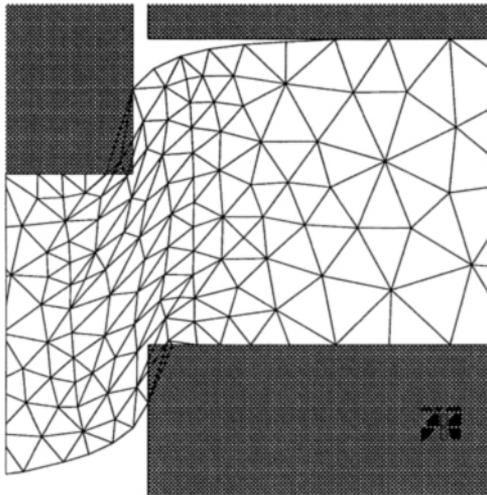
Une deuxième simulation a été réalisée en remplaçant les conditions de contact entre la tôle et le poinçon par un déplacement imposé dans la direction  $z$ . La simplification des conditions de contact nous a permis de poursuivre la simulation jusqu'à 75% d'épaisseur de la tôle, soit une profondeur de 1.8 mm, et d'endommager une quinzaine d'éléments dans la zone centrale. La prise en compte de l'endommagement permet, par ailleurs, de constater une chute de rigidité de la structure (figure 16). Néanmoins, l'allongement et l'aplatissement excessifs des éléments dans la zone centrale, outre la pauvreté du modèle utilisé pour représenter les conditions de contact, expliquent l'erreur importante dans la réponse globale de la structure.

Dans le cas de la simulation complète (modèle d'endommagement de Gurson et prise en compte du contact, non simplifiée), il n'a pas été possible de mener la simulation au delà de 45% de l'épaisseur de la tôle, après quoi la distorsion des éléments ne permet plus de vérifier les conditions de contact entre la tôle et le poinçon. La figure 14 montre le maillage déformé à 1.1 mm de profondeur.



**Figure 14.** *Maillage déformé à 45% de profondeur*

Une vue rapprochée de cette déformée dans la zone centrale montre la pénétration des noeuds intérieurs (aux frontières du solide) dans le poinçon (cf figure 15).

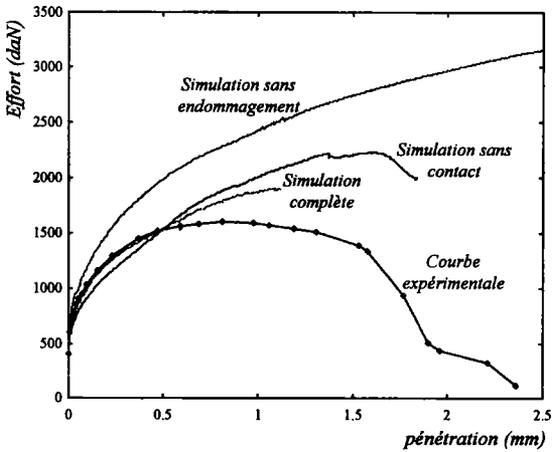


**Figure 15.** *Vue rapprochée de la zone centrale*

Cette pénétration est due à l'allongement excessif des éléments frontières d'une part, et au fait que les noeuds internes ne sont pas déclarés comme candidats potentiels au contact, d'autre part.

A ce stade, nous n'avons pas obtenu d'élément complètement endommagé.

La courbe numérique effort-déplacement du poinçon ainsi obtenue (figure 16), comparée à la courbe expérimentale, montre une différence appréciable au delà de 0.5 mm. Cette erreur peut être attribuée à la distorsion des éléments, qui ne permet pas de simuler le vrai comportement du solide vis-à-vis des conditions de contact d'une part, et de la concentration des déformations dans la zone centrale, d'autre part. Cependant, la simulation complète permet d'obtenir la courbe pénétration-effort, la plus proche de la courbe expérimentale.

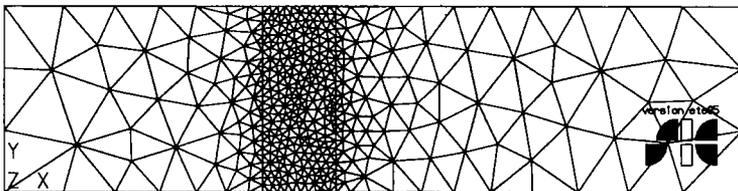


**Figure 16.** Courbes effort-déplacement du poinçon (simulations sans remaillage)

En conclusion, les simulations effectuées traduisent la nécessité de remailler pour bien simuler le contact entre la tôle et les outils, ainsi que pour reproduire l'état de déformation dans la zone centrale.

**6.6. Simulation de la découpe avec remaillage**

Disposant d'outils pour remplacer un maillage déformé, nous avons choisi une taille d'élément de 100 µm dans la zone centrale. Cette taille, comparable à la taille moyenne des grains du matériau de la tôle qui est de 60 µm, nous semble suffisamment fine pour décrire l'éventuelle apparition et propagation de fissure dans cette zone. Il est important de rappeler que la simulation sans remaillage ne nous permet pas de considérer un tel raffinement. Nous envisageons d'étudier, dans le cadre de travaux ultérieurs, l'effet de la taille des éléments dans la bande centrale. Le maillage initial, présenté ci-dessous, est constitué de 742 éléments de type T3 et 403 noeuds.



**Figure 17.** Maillage initial (simulation avec remaillage)

Seule la zone centrale est remaillée et le processus de remaillage est régulièrement

effectué au cours de la simulation à un intervalle de 0.1 mm de descente du poinçon; cette périodicité de remaillage est dictée par la taille des éléments dans la zone centrale. La simulation complète est effectuée avec 2500 pas de chargement de taille 0.001 mm. En ce qui concerne le transfert des informations entre l'ancien et le nouveau maillage, il est effectué par approximation diffuse sur 6 points voisins (base polynomiale  $\langle 1 \ x \ y \rangle$ ).

Une première approche a consisté en un processus de remaillage, sans rediscrétisation des frontières; le nombre d'éléments sur les arêtes de la zone centrale ne varie donc pas au cours de la simulation.

Quoique cette simulation ait été menée à bout, on obtient progressivement un maillage contenant des éléments de grande taille, en raison du contrôle exercé par la discrétisation des bords de la tôle (qui évolue elle-même en fonction du contact) sur son maillage interne.

Pour illustrer cet effet, nous présentons les résultats d'une simulation de la découpe de la tôle, avec reconstruction des frontières du côté de la matrice et non pas du côté du poinçon. Les frontières ne sont donc lissées, pour être remaillées conformément à la taille d'éléments désirée, que du côté matrice.

La déformée ainsi obtenue montre le respect de la taille d'éléments souhaitée côté matrice (figure 18). La différence de taille des éléments fausse logiquement les résultats de la simulation.

La courbe effort-déplacement du poinçon illustre la différence entre les résultats numériques et expérimentaux (cf. figure 20).

Finalement, la reconstruction complète des frontières de la zone centrale permet d'obtenir une déformée avec des éléments réguliers de taille homogène (cf figure 19). La réponse globale montre une représentation correcte du comportement de la tôle dans la majeure partie de la simulation. En particulier, la simulation menée donne une bonne estimation de l'effort maximum; cet effort est une donnée essentielle dont dépend le dimensionnement de plusieurs paramètres du procédé.

Par contre, la perte de rigidité assez rapide dans la phase de rupture n'est pas correctement représentée: en particulier, à la fin de la simulation, la tôle ne présente pas d'éléments endommagés. Ceci peut être attribué au fait que nous n'ayons pas procédé à la calibration du modèle de Gurson. En effet, la pente de la courbe à la dernière phase dépend de la calibration des coefficients  $f_c$  et  $f_r$ . La valeur considérée de la porosité à rupture  $f_r = 0.8$  annule l'effet du coefficient  $f_c$  destiné à accélérer la chute de rigidité dans la phase de coalescence des cavités. D'autre part, le choix des paramètres du modèle de façon à annuler la rigidité d'un élément rompu semble être sévère.

En outre, le transport de champs par la technique d'approximation diffuse tend à lisser la variable d'endommagement, dont les valeurs sont normalement concentrées, ce qui peut limiter l'évolution de cette variable jusqu'à la valeur de rupture.

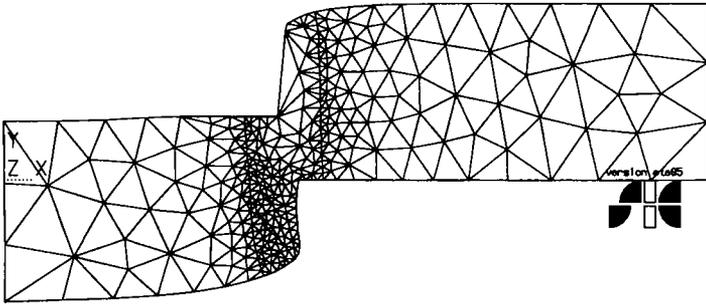


Figure 18. Maillage déformé à 75% de profondeur (lissage partiel des contours)

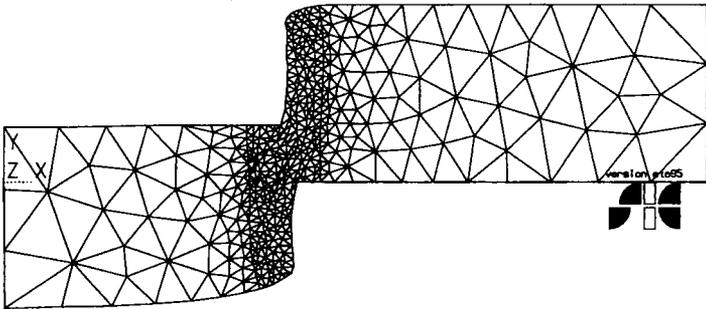


Figure 19. Maillage déformé à 75% de profondeur (lissage complet des contours)

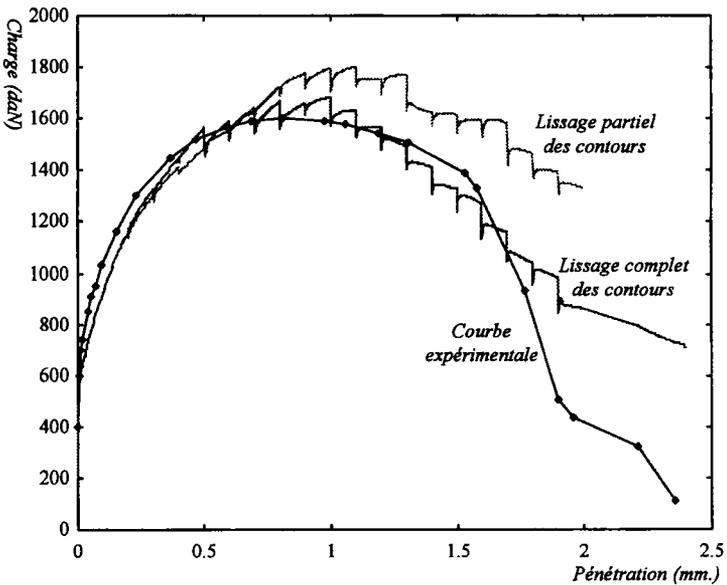


Figure 20. Courbes effort-déplacement du poinçon (simulations avec remaillage)

Les figures 21 et 22 montrent la distribution de la porosité et de la déformation plastique cumulée à 2.0 mm de pénétration du poinçon.



Figure 21. Distribution de la porosité à 2 mm de profondeur



Figure 22. Distribution des déformations plastiques cumulées

Ces distributions sont des indicateurs importants de la qualité des pièces découpées. La valeur de la porosité dans la bande centrale ne dépasse pas 0.4 vers la fin de la simulation. Comparée à la porosité à rupture  $f_F = 0.8$ , cette valeur est assez faible. Sur la figure 21, nous avons porté également les résultats de la simulation avec remaillage en considérant un comportement élasto-plastique non endommageant; cette courbe présente comme prévue une rigidité supérieure à celle du comportement endommageant.

### Conclusions et perspectives

Nous avons montré l'efficacité du processus de remaillage proposé dans le cadre de la simulation des procédés de mise en forme. Notamment, le calcul de l'enfoncement d'un pieu a pu être réalisé, alors qu'il est très

difficile, voire impossible, sans remaillage. Actuellement, nous développons l'intégration de lois de sols pour une modélisation quantitative de l'enfoncement du pieu.

Il est à signaler que, par rapport aux autres opérations du calcul (assemblage, résolution, gestion du contact), le coût du remaillage est négligeable.

Nous avons démontré l'intérêt que présente l'utilisation de telles méthodes pour simuler le découpage des métaux, qui permettent d'obtenir des résultats comparables aux résultats expérimentaux, dans la mesure où il est alors possible de tenir compte de toutes les non linéarités. Nous espérons porter nos efforts sur une calibration plus fine de la phase de rupture rapide du modèle d'endommagement.

**Remerciements :** Ce projet a été financé par le Conseil Régional de Picardie. Nous tenons à le remercier pour ce soutien appréciable.

## Bibliographie

- [ARA 85] ARAVAS N., McMEEKING R. M., Microvoid growth and failure in ligament between a hole and a blunt crack tip, *Int. J. Fract.*, vol. 29, p. 21-38, 1985.
- [BAR 90] BARATA MARQUES M. J. M., MARTINS P. A. F., An algorithm for remeshing in metal forming. *J. Mat. Proc. Tech.*, vol.24, p. 157-167, 1990.
- [BRE 92] BREITKOPF P., TOUZOT G., Architecture des logiciels et langages de modélisation. *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 1, n° 3, p. 333-368, 1992.
- [CHE 88] CHENG J. H., Automatic adaptive remeshing for finite element simulation of forming processes. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 26, p. 1-18, 1988.
- [GUR 77] GURSON A. L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth, *J. Eng. Mat. Tech.*, vol. 99, p. 2-15, 1977.
- [GUY 95] GUYON F., Interpolation diffuse, champs d'atténuation constant. Rapport du Pôle Modélisation de Picardie, 1995.
- [HAB 90] HABRAKEN A.M., An automatic remeshing processor, *J. Mat. Proc. Tech.*, vol. 24, p. 147-155, 1990.
- [HOM 94] HOMSI M., WRONSKI M., ROELANDT J. M., « Modélisation numérique de la coupe », *Actes de conférences STRUCOM 94 (1994)*, p. 677-690.
- [HOM 95] HOMSI M., MORANCAY L., ROELANDT J. M., « Application des techniques de remaillage et de transport de champs à la simulation du découpage des métaux, *Actes du 12<sup>e</sup> Congés Français de Mécanique (1995)*, vo l. 2, p. 53-56.
- [HUG 80] HUGUES T. J. R., WINGET J., Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 15, p. 1862-1867, 1980.
- [KER] KERISEL J. Fondations profondes en milieux sableux : Variation de la force portante limite en fonction de la densité, de la profondeur, du diamètre et de la vitesse d'enfoncement. Rapport interne LCPC.
- [KIO 88] KIOUSIS P., VOYIADJIS G. Z., TUMAY M. T., A large strain theory and its application in the analysis of the cone penetration mechanism. *Int. J. Num. Ana. Meth. Geomech.*, vol. 12, p. 45-60, 1988.
- [MAI 91] MAILLARD A., Etude expérimentale et numérique du découpage. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1991.

- [MAI 92] MAILLARD O., MONTMITONNET P., LASNE P., Simulation of cold forging by a 2D elastoplastic finite element method with automatic remeshing. *J. Mat. Proc. Tech.*, vol. 34, p. 93-100, 1992.
- [MAI 93] MAILLARD A., Développement de nouvelles compétences en découpage. Rapport d'étude n° 113330, CETIM-SENLIS, 1993.
- [NAY 91] NAYROLLES B., TOUZOT G., VILLON P., L'approximation diffuse. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1991.
- [NAY 92] NAYROLLES B., TOUZOT G., VILLON P., RICARD A., Diffuse approximation and diffuse elements. *New Advances Comp. Struc. Mech.*, p. 143-157, 1992.
- [NEE 83] NEEDLEMANN A., Localisation of deformation in rate sensitive porous plastic solids, *Int. J. Fract.*, vol. 21, p. 261-278, 1983.
- [NEE 87] NEEDLEMAN A., TVERGAARD V., An analysis of ductile rupture modes at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 35, n° 2, p. 151-183, 1987.
- [ORK 84] ORKISZ J., RACHOWICZ W., WNUK M., Evaluation of stress intensity factors by the *R*-functions method, *International Journal of Fracture*, vol. 24, P. 107-126, 1984.
- [SIM 85] SIMO J. C., TAYLOR R. L., Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity, *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, vol. 48, p. 101-118, 1985.
- [SIM 86] SIMO J. C., TAYLOR R. L., A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 22, p. 649-670, 1986.
- [SIM 93] SIMO J. C., MESCHKE G., A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strain. Application to geomaterials. *Comp. Mech.*, vol. 11, p. 253-278, 1993.
- [TVE 81] TVERGAARD V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, *Int. J. Fract.*, vol. 17, n° 4, p. 389-407, 1981.
- [TVE 82] TVERGAARD V., On localization in ductile materials containing spherical voids, *Int. J. Fract.*, vol. 18, n° 4, p. 237-252, 1982.
- [WRO 94] WRONSKI M., Couplage du contact et du frottement avec la mécanique non linéaire des solides en grandes déformations; application à l'étude des blocs de mousse en polyuréthane. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1994.
- [YOO 90] YOON J. H., YANG D. Y., A three dimensional rigid-plastic finite element analysis of bevel gear forging by using a remeshing technique. *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 32, n° 4, p. 277-291, 1990.

Article reçu le 15 octobre 1995.  
Version révisée le 10 juin 1996.