

---

# Triangulation de Delaunay et métrique riemannienne. Applications aux maillages éléments finis

Houman Borouchaki — Paul Louis George

*INRIA Rocquencourt*  
BP 105  
78 153 Le Chesnay Cedex

---

*RÉSUMÉ.* On propose dans ce papier une méthode incrémentale permettant de générer une triangulation d'un nuage de points dans le cas d'un espace muni d'une métrique riemannienne. La méthode discutée est une extension au cas riemannien de la méthode classique de Delaunay. L'application à la construction d'un mailleur de type Delaunay est indiquée et quelques exemples d'applications sont donnés.

*ABSTRACT.* This paper describes the extension of the classical Delaunay method in the case where a riemannian context is specified.

*MOTS-CLÉS :* triangulation, espace riemannien, génération de maillages anisotropes, éléments finis.

*KEY WORDS :* triangulation, riemannian space, anisotropic mesh generation, finite element.

---

## 1. Introduction

La triangulation de Delaunay joue un rôle important dans de nombreux domaines et en particulier en géométrie algorithmique, [BOY 95], [PSH 85]. Notre motivation, sensiblement différente, est d'utiliser ce type de méthode dans le cadre de la simulation numérique par éléments finis de problèmes physiques formulés en E.D.P.. Autrement dit, la triangulation de Delaunay est vue ici comme un outil permettant de développer des mailleurs automatiques de type Delaunay dans lesquels elle joue naturellement un rôle primordial.

De plus en plus d'applications, modélisées par éléments finis, nécessitent comme support de calcul des maillages s'adaptant à la physique du problème considéré. Par suite, les maillages demandés ne sont plus seulement des maillages classiques (c'est-à-dire essentiellement isotropes et gouvernés uniquement par la seule discrétisation du contour du domaine à traiter) mais des maillages ayant des propriétés particulières en terme de tailles d'éléments (maillages isotropes) ou en terme de tailles et de directions privilégiées [PVM 87] (maillages anisotropes). Pour créer de tels maillages, il est nécessaire de développer des mailleurs automatiques isotropes ou anisotropes gouvernés. Notre choix étant de nous appuyer sur la méthode de Delaunay, une partie primordiale (comme indiquée ci-dessus) d'un mailleur de ce type est le processus incrémental de Delaunay qui permet de créer une triangulation de Delaunay à partir d'un nuage de points. Dans le cas où le résultat doit satisfaire des contraintes isotropes ou anisotropes, la méthode de Delaunay classique doit être modifiée pour prendre en compte ces contraintes.

Le but de ce papier est de montrer comment modifier la méthode classique pour obtenir une méthode gouvernée. Pour ce faire, on rappelle dans la section 2 la méthode classique puis on introduit le cadre permettant de se placer dans le cas sous contraintes en montrant qu'il "suffit" de remplacer le cadre habituel (ou euclidien) par un cadre riemannien caractérisé par un champ de tenseurs métriques. La section 3 définit ce cadre tandis que la section 4 décrit la méthode de Delaunay adaptée à ce contexte. En conclusion, on donne quelques exemples montrant les possibilités de la méthode proposée.

## 2. Méthode de Delaunay classique

On rappelle ici la méthode de Delaunay dans l'une de ses formes bien adaptée au problème que l'on se pose. Ce rappel a pour but de bien fixer les idées afin de permettre aisément de comprendre l'extension riemannienne proposée.

### 2.1. Définition du problème

On se donne un ensemble de points  $S(\Omega)$  appartenant à un domaine  $\Omega$ . Le problème que l'on veut résoudre est de créer une triangulation de Delaunay telle que  $S(\Omega)$  constitue l'ensemble des sommets des éléments de la triangulation.

La méthode de Delaunay que nous considérons est une méthode incrémentale permettant d'ajouter un point dans une triangulation de Delaunay de telle sorte que la nouvelle triangulation soit Delaunay et que ce point devienne sommet d'éléments. Par suite, le problème initial revient à appliquer à chaque point de  $S(\Omega)$  un processus d'insertion dit *noyau de Delaunay*.

2.2. Noyau de Delaunay

Soient donc  $T$  une triangulation de Delaunay et  $P$  un point de l'espace. On suppose que  $P$  est inclu dans  $T$  c'est-à-dire qu'il(s) existe(nt) un ou plusieurs éléments de  $T$  contenant  $P$ . Le noyau de Delaunay permettant d'obtenir la nouvelle triangulation (incorporant  $P$  comme sommet) s'écrit

$$T(P) = T - \mathcal{C}(P) + \mathcal{B}(P) \quad (1)$$

où  $\mathcal{C}(P)$  est la *cavité* associée au point  $P$  tandis que  $\mathcal{B}(P)$  est la *boule* associée à  $P$ .

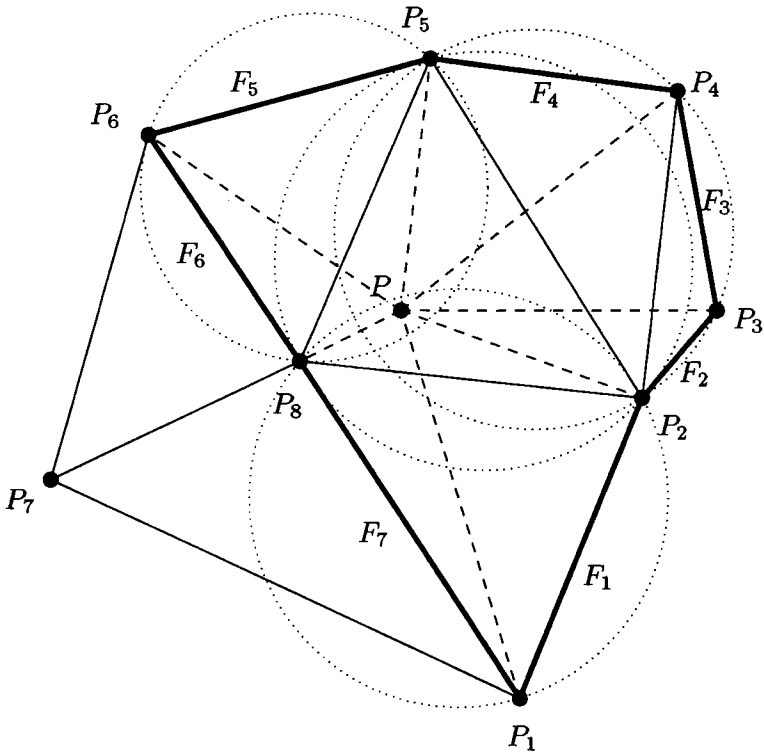


Figure 1. Insertion du point  $P$ , cavité et boule.

La cavité  $\mathcal{C}(P)$  est définie comme

$$\mathcal{C}(P) = \{K, K \in T \text{ tel que } P \in \overset{\circ}{C}_K\} \quad (2)$$

où  $K$  désigne un élément de  $T$  et  $\overset{\circ}{C}_K$  est la boule ouverte circonscrite à l'élément  $K$ . En 2 dimensions,  $C_K$  (notant par abus de langage la frontière du domaine  $\overset{\circ}{C}_K$ ) est

le cercle circonscrit au triangle  $K$ , en 3 dimensions  $C_K$  est la sphère circonscrite au tétraèdre  $K$ , etc.

Par construction, et c'est ici le résultat fondamental,  $\mathcal{C}(P)$  est étoilée par rapport au point  $P$  et par conséquent si on définit la boule  $\mathcal{B}(P)$  par

$$\mathcal{B}(P) = \{\{F_j, P\}_{j=1,n}\} \quad (3)$$

où  $F_j$  (cf. figure 1) désigne l'arête (la face) externe numéro  $j$  de la cavité  $\mathcal{C}(P)$  ( $n$  étant le nombre de telles arêtes (faces)), la relation (1) produit un maillage (valide) de Delaunay tel que  $P$ , selon la relation (3), est sommet d'éléments.

De manière plus formelle, on a le théorème suivant

**Théorème.** Soient  $T$  une triangulation de Delaunay et  $P$  un point inclu dans  $T$ , alors la relation (2) implique que

- $\mathcal{C}(P)$  est connexe,
- $\mathcal{C}(P)$  est étoilé par rapport à  $P$ ,
- l'intérieur de  $\mathcal{C}(P)$  ne contient pas de point autre que  $P$ ,

par suite les relations (1) et (3) entraînent que

- $P$  est sommet de  $T(P)$ ,
- $T(P)$  est une triangulation de Delaunay. □

La démonstration de ce théorème est un classique (cf. [WAT 81]) et est une conséquence de la relation (2) définissant  $\mathcal{C}(P)$ .

### 2.3. Construction de la cavité et métrique euclidienne

La clé du processus (1) est la construction de la cavité  $\mathcal{C}(P)$ . Si on note par  $O_K$  le centre de  $C_K$ , par  $r_K$  le rayon de  $C_K$  et par  $d$  la distance euclidienne alors

$$K \in \mathcal{C}(P) \iff d(P, O_K) < r_K$$

que nous préférons écrire sous la forme sans dimension

$$K \in \mathcal{C}(P) \iff \frac{d(P, O_K)}{r_K} < 1 \quad (4)$$

Trouver  $\mathcal{C}(P)$  peut, en s'appuyant sur cette relation, s'obtenir essentiellement de deux manières

- en examinant les éléments de  $T$  et en retenant ceux qui satisfont la relation (4),
- en procédant par adjacence à partir du (ou des) élément(s) contenant  $P$ . Ce processus s'écrit

- trouver  $B$  la base associée au point  $P$ ,
- initialiser  $\mathcal{C}(P)$  par  $B$  puis examiner les voisins des éléments de  $\mathcal{C}(P)$  en ajoutant dans  $\mathcal{C}(P)$  ceux qui vérifient la relation (4). Si la cavité  $\mathcal{C}(P)$  est modifiée, on itère le processus.

La base  $B$  est l'ensemble des éléments contenant  $P$ , pour fixer les idées, en deux dimensions,  $B$  est réduit à un élément si  $P$  est interne à un élément et se compose de deux éléments si  $P$  est sur une arête.

Cette dernière manière de construire la cavité est celle que nous avons retenu car elle permet très facilement d'étendre le noyau de Delaunay au cas où il y a des arêtes (faces) spécifiées qui "brident" la construction et permet également d'assurer facilement la connexité de  $\mathcal{C}(P)$ . Par ailleurs, cette manière de procéder est nécessairement plus rapide que l'autre.

En résumé retenons surtout de la relation (4), permettant l'application de la construction (1), qu'elle est basée sur un *critère de proximité* faisant intervenir  $P$ ,  $O_K$  et  $r_K$ , le point en cours de traitement, le centre du cercle circonscrit à l'élément  $K$  examiné et le rayon de ce cercle. Autrement dit, *le critère de proximité est lié au point  $P$  à insérer et à l'élément  $K$  examiné.*

#### 2.4. Triangulation d'un nuage de points

Le noyau de Delaunay, tel que décrit ci-dessus, peut être appliqué à un ensemble de points et permettre ainsi de construire une triangulation incluant ce nuage comme sommets d'éléments. Il suffit de se placer dans le cas où tout point de  $S(\Omega)$ , le nuage, est interne à au moins un élément de la triangulation courante. Pour ce faire, on construit un simplexe (ou une boîte maillée par quelques simplexes) englobant  $S(\Omega)$  et on applique le processus (1) à chaque point de  $S(\Omega)$ .

#### 2.5. Application au maillage d'un domaine

Le problème que l'on se pose ici est sensiblement différent, il ne s'agit plus de créer la triangulation associée à un nuage de points mais de construire le maillage d'un domaine défini par la discrétisation de sa frontière. Une solution est de développer un mailleur de type Delaunay s'appuyant sur le noyau de Delaunay modifié. Le schéma proposé pour un tel mailleur est le suivant

- création de  $S(\Omega)$  l'ensemble des points extrémités des *items* discrétisant le contour du domaine  $\Omega$ . En deux dimensions,  $S(\Omega)$  est l'ensemble des extrémités des arêtes du contour, en trois dimensions, cet ensemble est composé des sommets des triangles formant la discrétisation de la surface définissant le domaine  $\Omega$ .

- création d'un simplexe (triangle en deux dimensions ou tétraèdre en trois dimensions) ou d'une boîte (maillée avec quelques éléments) de telle sorte que tout point de  $S(\Omega)$  soit inclus dans ce maillage.
- application de (1), le noyau de Delaunay, aux points de  $S(\Omega)$ .
- reconnaissance de  $\Omega$  (plus exactement de sa discrétisation) dans le maillage ainsi formé.
- création des points internes utiles.
- insertion de ces points en utilisant à nouveau (1), le noyau de Delaunay (version sous contrainte due au fait que la frontière de  $\Omega$  constitue un ensemble d'arêtes (de faces) contraintes).
- optimisation du maillage résultant.

Le but de ce papier n'étant pas de décrire l'ensemble des étapes ci-dessus mais juste de rappeler les grandes lignes d'un mailleur de type Delaunay, nous ne discuterons pas des différents points et difficultés présentes. En particulier, nous supposons donnés les points internes ([BOG 96]) et résolu le problème de la reconnaissance de  $\Omega$  ([GHS 91], [WEA 90]) dans le maillage de la boîte introduite.

### 3. Cadre Riemannien

#### 3.1. Introduction

Ce qui précède est clairement placé dans un cadre euclidien, en particulier la relation (4), i.e. le critère de proximité, ne fait intervenir que des distances euclidiennes et les résultats obtenus sont isotropes. Dans le cas où l'on désire obtenir des maillages anisotropes, on va montrer que le schéma classique reste valide à condition de se placer dans un cadre riemannien où en particulier les distances ne sont plus euclidiennes. Il est commode d'introduire la notion de métrique riemannienne, [VAL 92] afin de montrer que formellement le schéma classique s'applique et conduit à des résultats anisotropes.

#### 3.2. Métrique Riemannienne

On suppose qu'en tout point  $X$  de  $\Omega$  est connu une métrique ou tenseur métrique consistant en la donnée d'une matrice symétrique définie positive  $\mathcal{M}(X)$ . En deux dimensions, cette matrice est définie comme

$$\mathcal{M}(X) = \begin{pmatrix} a_X & b_X \\ b_X & c_X \end{pmatrix}$$

avec  $a_X > 0$ ,  $c_X > 0$  et  $a_X c_X - b_X^2 > 0$ .

Le champ  $(\mathcal{M}(X))_{X \in \Omega}$  définit une structure riemannienne sur  $\Omega$ . Ce dernier, muni de cette structure est désigné par  $(\Omega, (\mathcal{M}(X))_{X \in \Omega})$ .

Dans le cas où  $\mathcal{M}(X)$  ne dépend pas de  $X$ , on retrouve le cas euclidien. Avec cet outil, on peut définir la notion de distance et ainsi trouver l'équivalent de la relation (4) permettant de trouver la cavité  $\mathcal{C}(P)$  nécessaire au processus (1). Pour ce faire, on rappelle en premier la notion de longueur.

### 3.3. Longueur d'un segment

Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\Omega$ ,  $(\Omega, (\mathcal{M}(X))_{X \in \Omega})$  la structure riemannienne et  $M$  un point courant d'une courbe,  $\gamma$ , joignant  $A$  à  $B$ , définie par un paramètre  $t$  variant entre 0 et 1, avec  $\gamma(0) = A$ ,  $\gamma(1) = B$  et  $\gamma(t)$  le point courant, alors la longueur de  $\gamma$  est donnée par

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{t \gamma'(t) \cdot \mathcal{M}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)} dt \quad (5)$$

Si  $\gamma$  est une géodésique minimale joignant  $A$  à  $B$ , on note par  $l(A, B)$  la valeur  $l(\gamma)$ .

### 3.4. Critère de proximité

Grace à la relation (5), on peut exprimer dans le cadre actuel le critère de proximité (i.e. l'équivalent de la relation (4)) permettant de construire la cavité  $\mathcal{C}(P)$ . Il s'agit donc d'étendre les relations euclidiennes équivalentes

$$P \in \overset{\circ}{C}_K \quad \text{ou} \quad \frac{d(P, O_K)}{r_K} < 1$$

au cas riemannien.

### 3.5. Retour au cas euclidien

En deux dimensions (pour fixer les idées) et dans le cadre classique, notons d'abord que pour  $K$  donné,  $O_K$  est parfaitement déterminé. Soient  $x_{O_K}$  et  $y_{O_K}$  les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle  $K$ , si on définit  $\phi$  par

$$\phi(x, y, K) = \frac{(x - x_{O_K})^2}{r_K^2} + \frac{(y - y_{O_K})^2}{r_K^2} \quad (6)$$

alors

$$\phi(x, y, K) = 1 \quad (7)$$

est l'équation du cercle de centre  $O_K$  et de rayon  $r_K$  et la relation d'appartenance  $\frac{d(P, O_K)}{r_K} < 1$  s'écrit

$$\phi(x, y, K) < 1. \quad (8)$$

En terme de métrique, cette relation revient à poser

$$\mathcal{M} = \lambda \mathcal{I}$$

où  $\mathcal{I}$  est la matrice identité d'ordre 2 et  $\lambda$  est une *constante* positive (en particulier  $\lambda$  ne dépend pas des positions tant de  $P$  que de  $K$ ) et à identifier le problème

$$\frac{d(P, O_K)}{r_K} < 1$$

au problème

$$\frac{l(P, O_K)}{l(P_1, O_K)} < 1 \quad (9)$$

avec  $P_1$  l'un quelconque des sommets du triangle  $K$ . A titre d'illustration, on va vérifier que (9) est équivalent à la condition classique (i.e. l'inéquation de la relation (4)). En effet comme

$$l(P, O_K) = \int_0^1 \sqrt{{}^t \overrightarrow{PO_K} \cdot \mathcal{M}(P + t \overrightarrow{PO_K}) \cdot \overrightarrow{PO_K}} dt$$

et que

$$\mathcal{M}(P + t \overrightarrow{PO_K}) = \lambda \mathcal{I}$$

ne dépend pas de la variable  $t$ , on obtient

$$l(P, O_K) = \sqrt{\lambda} {}^t \overrightarrow{PO_K} \overrightarrow{PO_K} = \sqrt{\lambda} d(P, O_K)$$

donc (9) devient

$$\sqrt{\lambda} d(P, O_K) < \sqrt{\lambda} d(P_1, O_K)$$

ou encore

$$d(P, O_K) < d(P_1, O_K);$$

mais comme, par définition,  $d(P_1, O_K) = r_K$ , on obtient donc la condition classique

$$d(P, O_K) < r_K.$$

En remarque, il faut noter que  $\lambda$  étant constant, le cas isotrope avec tailles spécifiées ne se distingue pas du cas classique.

### 3.6. Le cas riemannien

Il est tentant d'appliquer le même raisonnement au cas riemannien, néanmoins force est de constater que, en particulier,  $O_K$  est délicat à définir. En particulier, il est intuitif d'associer à une métrique une ellipse et de remplacer la notion d'appartenance à (l'intérieur d') un cercle (relation (4)) par celle d'appartenance à (l'intérieur d') une ellipse. Cette analogie peut aider à comprendre géométriquement le problème mais suppose implicitement que les métriques en tous les points sont identiques, ce qui est faux en général. Afin néanmoins de progresser, nous allons faire, dans un premier temps, cette hypothèse.



3.6.1. Une première solution et son interprétation géométrique

On suppose donc que la métrique en tout point de  $\Omega$  est définie par un seul point. Le premier cas possible, le plus simple, consiste à prendre comme point de définition des métriques, le point  $P$  qui nous intéresse (c'est le point que l'on cherche à insérer via le processus (1) généralisé, on pourrait en toute généralité prendre un point quelconque autre que  $P$ ).

La relation (9),  $\frac{l(P, O_K)}{l(P_1, O_K)} < 1$  où  $P_1$  est l'un quelconque des sommets du triangle  $K$  en cours de traitement couplée avec les relations suivantes

$$\begin{cases} l(P_1, O_K) = l(P_2, O_K) \\ l(P_1, O_K) = l(P_3, O_K) \end{cases}$$

qui permettent, à partir des trois sommets  $P_1, P_2$  et  $P_3$  du triangle  $K$  de trouver  $O_K$ , nous donne la solution. En effet  $O_K$  est connu et  $l(P, O_K) < l(P_1, O_K)$  traduit que  $P$  est "interne" à  $C_K$  (en fait au généralisé de  $C_K$ ). Le résultat est que l'application de ces relations permet d'utiliser le processus (1) sans problème car  $\mathcal{C}(P)$  reste étoilé par rapport au point  $P$ . Ce dernier résultat est assuré car  $C_K$  est convexe et que la cavité est construite par adjacence via une arête divisant  $C_K$  en deux parties disjointes.

Ainsi, le critère de proximité s'écrit

$$\alpha_P(P, K) < 1 \quad (10)$$

en notant  $\alpha_P(P, K)$  le rapport  $\frac{l(P, O_K)}{l(P_1, O_K)}$  que nous appellerons la *mesure de Delaunay* du point  $P$  pour le triangle  $K$  mesurée dans la métrique de  $P$ .

L'interprétation géométrique de (10) revient à redéfinir la fonction  $\phi$  de la relation (6) comme

$$\phi(x, y, K) = a(x - x_{O_K})^2 + 2b(x - x_{O_K})(y - y_{O_K}) + c(y - y_{O_K})^2$$

et à poser

$$\phi(x, y, K) < 1;$$

$\phi$  est déterminé dans la métrique du point  $P$ , les coefficients  $a, b$  et  $c$  étant proportionnels aux coefficients intervenant dans la matrice

$$\mathcal{M}(P) = \begin{pmatrix} a_P & b_P \\ b_P & c_P \end{pmatrix}$$

caractérisant la métrique de  $P$ .

Notons que la relation  $\phi(x, y, K) = 1$  définit une ellipse.

3.6.2. Une deuxième solution approchée

Un deuxième choix raisonnable consiste à utiliser deux métriques, celle du point  $P$ , le point que l'on cherche à insérer et celle du point, noté  $P_1$ , qui est le sommet du

triangle  $K$  en cours d'examen qui n'appartient pas encore à la cavité. Le critère (i.e. la relation (9)) s'écrit alors

$$\alpha_P(P, K) + \alpha_{P_1}(P, K) < 2. \quad (13)$$

Ce choix est clairement meilleur que le précédent dans la mesure où il fait également intervenir le point  $P_1$  et que si le triangle  $K$  est retenu, l'arête  $PP_1$  sera formée. Évidemment, ce choix est plus coûteux que le premier choix n'utilisant qu'une mesure de Delaunay. Par ailleurs, il faut noter que chaque mesure de Delaunay nécessite le calcul d'un centre  $O_K$  qui est différent d'une mesure à l'autre. Notons pour conclure sur ce cas que, basée sur la relation (13), la construction de la cavité  $\mathcal{C}(P)$  donne également un résultat étoilé par rapport au point  $P$ .

### 3.6.3. Une troisième solution approchée

La dernière solution approchée consiste à utiliser les métriques des 4 points présents dans le processus d'insertion du point  $P$  lors de l'analyse du triangle  $K$  de sommets  $P_1, P_2$  et  $P_3$ . Le critère de proximité devient

$$\alpha_P(P, K) + \alpha_{P_1}(P, K) + \alpha_{P_2}(P, K) + \alpha_{P_3}(P, K) < 4. \quad (14)$$

Avec ce choix, on retrouve le même commentaire que ci-dessus. Notons que 4 centres sont utilisés.

### 3.6.4. Solutions générales et conclusions

On donne maintenant deux autres solutions plus générales dont on ne sait pas garantir la validité. Le premier cas consiste à trouver  $O_K$  comme solution du système non linéaire

$$\begin{cases} l_{P_1}(P_1, O_K) = l_{P_2}(P_2, O_K) \\ l_{P_1}(P_1, O_K) = l_{P_3}(P_3, O_K) \end{cases}$$

où  $l_X$  désigne la longueur dans la métrique du point  $X$  et à donner comme critère de proximité

$$l_P(P, O_K) < l_{P_1}(P_1, O_K).$$

Ce cas revient à trouver  $O_K$  équidistant de trois sommets au sens de leur métrique puis à chercher si le critère de proximité est satisfait ou non.

La dernière approche est la plus générale et s'écrit

$$\begin{cases} l(P_1, O_K) = l(P_2, O_K) \\ l(P_1, O_K) = l(P_3, O_K) \end{cases}$$

puis

$$l(P, O_K) < l(P_1, O_K)$$

avec  $l$  défini par la relation générale (5).

En conclusion, l'approche générale est trop délicate à justifier et très lourde à implémenter, les autres approches sont justifiables et raisonnables à implémenter. L'approche à une mesure est relativement approximative mais donne des résultats raisonnables, l'approche avec deux mesures donne de bons résultats (cf. exemples) et conduit à des temps de calculs raisonnables, l'approche avec quatre mesures étant plus coûteuse pour des résultats très voisins.

#### 4. Noyau de Delaunay et mailleur généralisés

Grâce à la définition de la notion de longueur via la ou les métriques choisies et via le choix du critère de proximité faisant intervenir une ou plusieurs mesures de Delaunay, on retrouve comme noyau de Delaunay généralisé le noyau classique (relation (1)) en généralisant les relations (2) ou (4) et en conservant la relation (3).

Par suite, le mailleur généralisé a exactement le même schéma que le mailleur classique en changeant les notions de longueurs.

#### 5. Exemples d'applications

Afin d'illustrer les possibilités de la méthode discutée, nous allons donner trois types d'exemples. Le premier cas correspond au maillage isotrope sous contraintes de tailles et au maillage anisotrope d'un domaine plan quelconque. Le second cas est une application au maillage isotrope d'une surface tandis que le troisième cas montre le cas où en chaque point d'un domaine sont données plusieurs spécifications de métriques. Notons que ces exemples sont académiques afin de faciliter la lecture des résultats.

##### 5.1. Une seule métrique

Le premier exemple, figure 2, correspond au cas où une métrique est spécifiée (en tout point du domaine). Ce domaine est un rectangle de dimension  $11 \times 5$ . Le maillage classique de ce domaine est montré sur le dessin du haut, il comprend 323 points et 640 triangles.

Le dessin du milieu montre le maillage de ce même domaine dans le cas où une spécification (isotrope) de tailles est donnée. La taille imposée en chaque point est définie par la taille du segment de l'axe des abscisses (i.e. le côté bas du rectangle) sur lequel se projète le point. Les tailles varient de 0.03 à 1. Le maillage obtenu comprend 4193 points et 8380 triangles. L'analyse tant de la qualité des triangles obtenus que de la dispersion entre les tailles prescrites et les tailles effectivement obtenues montre que le maillage résultat est satisfaisant.

Le dessin du bas reprend le même domaine mais montre le maillage résultant d'une contrainte anisotrope (une seule métrique par point est spécifiée). En chaque point, on spécifie dans la direction des abscisses une taille qui correspond (comme ci-dessus via une projection) à la discrétisation observée sur le côté bas du rectangle

et dans la direction des ordonnées la taille spécifiée est celle observée sur le côté gauche du rectangle (notons que les directions sont constantes  $\theta = 0$  et  $\theta = 90$  sur cet exemple, on se reportera à l'exemple 3 pour un cas complètement général). On peut voir sur le maillage résultat (2879 points et 5752 triangles) la bonne adéquation entre cette spécification et tant la forme que la taille des triangles. Notons que le rapport maximum de l'étirement imposé est de l'ordre de 33.

## 5.2. Application aux surfaces

On montre ici, figure 3, une application du mailleur anisotrope au problème du maillage isotrope d'une surface quelconque. On se donne une surface cartésienne définie sur un disque de rayon 3 par l'équation

$$z = 3 \sin(2x) \cos(2y) .$$

On veut construire un maillage surfacique isotrope avec des triangles de taille constante (égale à 0.2). Pour ce faire on construit un premier maillage (classique) du disque en triangles de taille identique (maillage de gauche de la partie haute du dessin), ce qui donne le maillage surfacique montré dans la partie droite du haut du dessin. En chaque sommet de ce maillage, on calcule la métrique restriction du champ isotrope imposé dans  $\mathbb{R}^3$  ( $h = 0.2$ , la taille, constant dans toutes les directions) sur le plan tangent (première forme fondamentale de la surface), et on considère comme spécification le champ de métriques obtenu.

Les deux dessins du bas de la figure montrent, à gauche, le maillage anisotrope du disque gouverné par ce champ et, à droite, le maillage induit sur la surface. On remarque aisément que ce dernier maillage est isotrope sur la surface.

## 5.3. Plusieurs métriques

Les figures 4 et 5 montrent l'application de la méthode au cas où plusieurs métriques sont spécifiées en chaque point du domaine étudié. De manière concrète et pour motiver cet exemple, chaque métrique est liée à une variable du problème physique que l'on traite et le problème est de construire un maillage qui satisfait toutes les métriques à la fois. L'application de ce cas est clairement la création de maillages adaptés pour un ensemble de critères (adaptation multicritère).

L'idée de base est de construire des cavités valides pour toutes les métriques en présence, ce qui revient à réaliser l'intersection de chacune d'elles.

L'exemple présenté comprend 4 métriques définies analytiquement sur le domaine. Chaque métrique est un champ continu construit avec une courbe comme support (on voit sur la figure 4 les 4 courbes (un cercle, deux droites et une courbe quelconque)) et la contrainte est anisotrope sur la courbe (dans la direction de la tangente) et varie ensuite continuellement vers une contrainte isotrope quand on s'éloigne des courbes. La

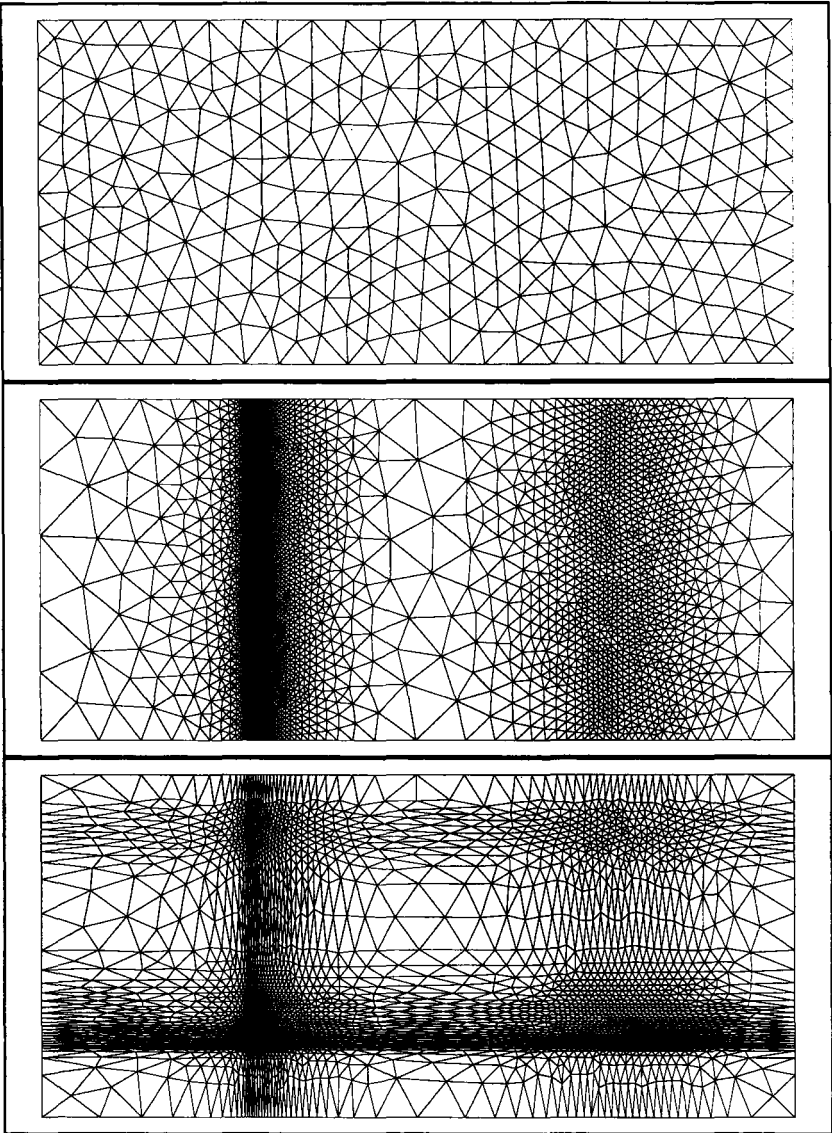


Figure 2. *exemple 1.*

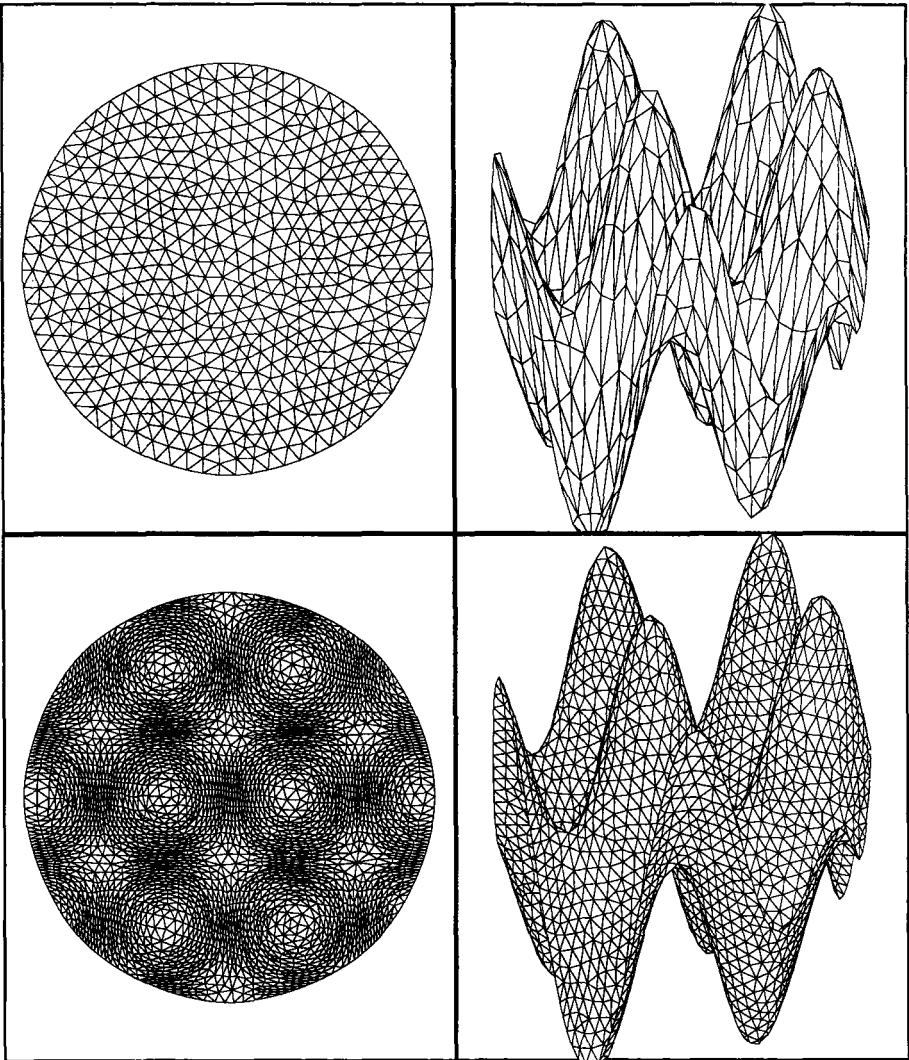


Figure 3. *exemple 2.*

difficulté de cette contrainte est liée au fait qu'en certaines zones plusieurs métriques antagonistes s'intersectent.

Les résultats, maillage global (figure 4) et agrandissements (figure 5), semblent indiquer que les contraintes ont été bien respectées. Le maillage comprend 12927 points et 25848 triangles. L'étirement maximal imposé est de l'ordre de 150.

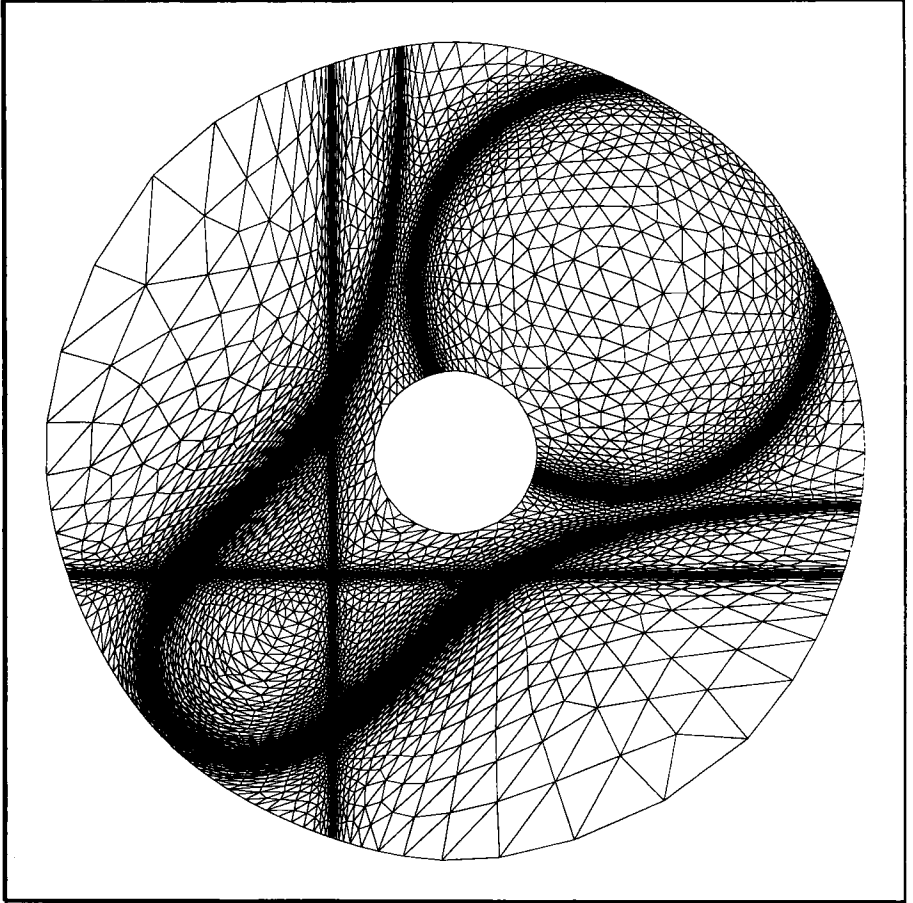
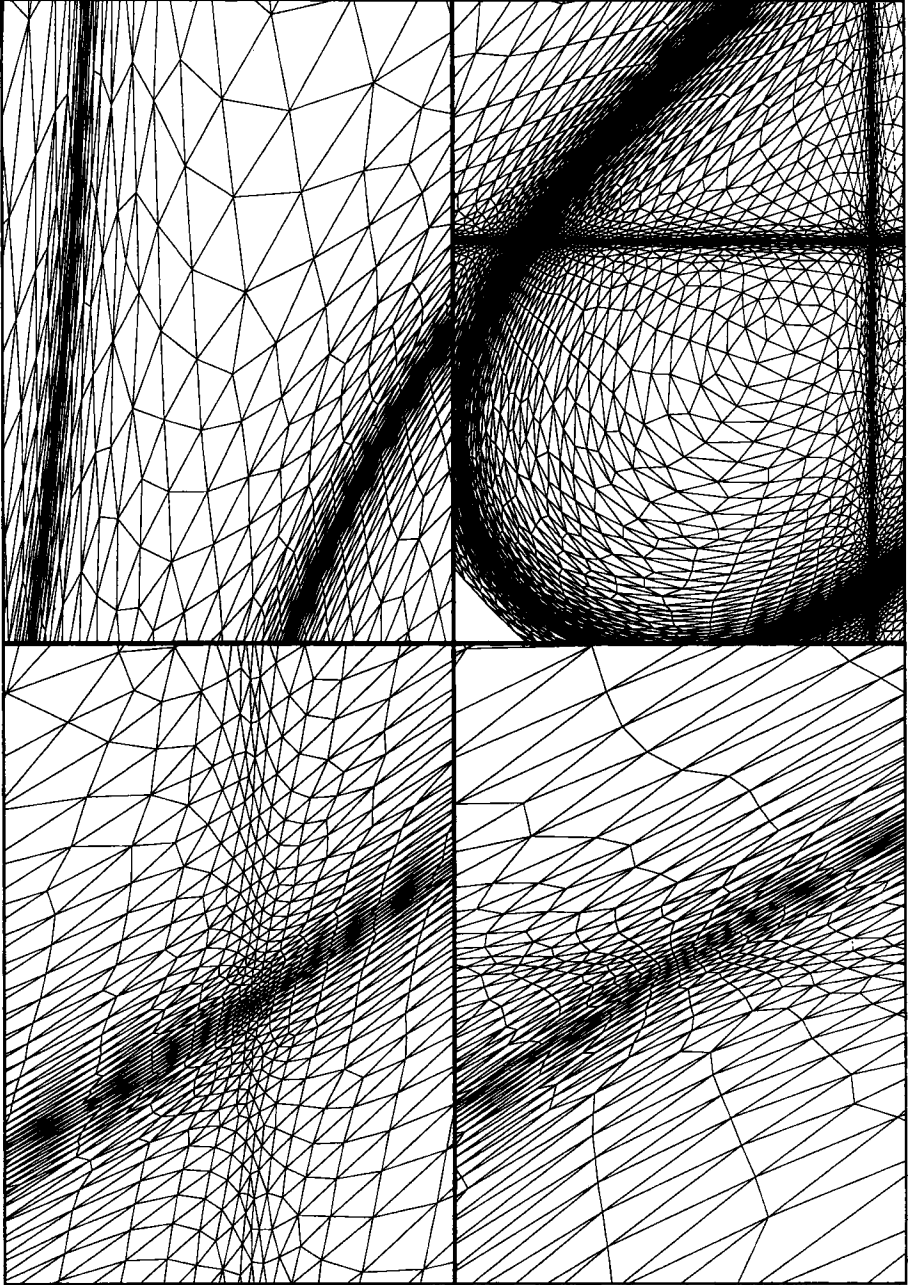


Figure 4. *exemple 3.*

## 6. Conclusions

On a montré dans ce papier comment généraliser le processus incrémental d'insertion d'un point dans une triangulation en utilisant la méthode de Delaunay. En particulier, on a montré que le résultat fondamental assurant que ce processus est constructif est que la cavité de Delaunay reste étoilée par rapport au point que l'on



**Figure 5.** *exemple 3 (agrandissements).*



considère. Disposant ainsi d'un processus local permettant de construire une triangulation d'un nuage de points, on a montré comment l'introduire dans une méthode de maillage automatique. Les exemples décrits indiquent que la méthode proposée donne de bons résultats en deux dimensions dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope. L'application au maillage de certaines surfaces illustre également les possibilités de la méthode. L'exemple dans lequel plusieurs métriques interviennent montrent que la méthode permet, dans son essence, de traiter un problème d'adaptation multicritères.

Il reste à appliquer la méthode à des cas concrets en l'incorporant dans un mailleur éléments finis afin de vérifier que les maillages ainsi produits permettent de calculer de manière plus précise des solutions de vrais problèmes physiques. Par ailleurs, il reste à étendre la méthode au cas tridimensionnel. Ces deux derniers points font l'objet de recherches et de développements dont les premiers résultats semblent prometteurs.

## Références

- [BAK 88] T.J. BAKER, Generation of tetrahedral meshes around complete aircraft, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics '88*, Miami, 1988.
- [BOY 95] J.D. BOISSONNAT, M. YVINEC, Géométrie algorithmique, Edisciences, Paris, 1995.
- [BOG 96] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, S.H. LO, Optimal Delaunay point insertion, à paraître dans *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*
- [BOG 96] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, Aspects of 2D Delaunay mesh generation, à paraître.
- [CAV 85] J.C. CAVENDISH, D.A. FIELD, W.H. FREY, An approach to automatic 3D finite element mesh generation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 21, 1985.
- [GEO 91] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillage. Applications aux méthodes d'éléments finis*, Masson, RMA n° 16, Paris, 1991. Also as *Automatic mesh generation. Applications to finite element methods*, Wiley, 1991.
- [GHS 90] P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL, Fully automatic mesh generator for 3d domains of any shape, *Impact of Comp. in Sci. and Eng.*, 2, pp 187-218, 1990.
- [GHS 91] P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 92, pp. 269-288, 1991.
- [GHV 91] P.L. GEORGE, F. HECHT, M. G. VALLET, Création of internal points in Voronoi's type method, Control and adaptation, *Adv. in Eng. Soft.*, 13, n° 5/6, pp. 303-313, 1991.
- [GEH 92] P.L. GEORGE, F. HERMELINE, Delaunay's mesh of a convex polyhedron in dimension d. Application to arbitrary polyhedra, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 33, pp. 975-995, 1992.

- [PVM 87] J. PERAIRE, M. VAHDATI, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, Adaptive remeshing for compressible flow computations, *Jour. of Comput. Phys.*, vol 72, pp 449-466, 1987.
- [PSH 85] F.P. PREPARATA, M.I. SHAMOS, Computational geometry, an introduction, Springer-Verlag, 1985.
- [VAL 92] M.G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, *Thèse*, Université Paris 6, 1992.
- [WAT 81] D.F. WATSON, Computing the n-dimensionnal Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes, *Computer Journal* 24 (2), 1981.
- [WEA 90] N.P. WEATHERILL, The integrity of geometrical boundaries in the 2-dimensional Delaunay triangulation, *Comm. in Appl. Num. Meth.*, vol 6, pp 101-109, 1990.

Article reçu le 10 janvier 1996

Version révisée le 5 mai 1996