

---

# Analyses éléments finis adaptatives pour les structures tridimensionnelles en élasticité

Patrice Coorevits — Jean-Paul Dumeau — Jean-Pierre Pelle

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS de Cachan / CNRS / Université P. et M. Curie  
61, Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex

---

*RÉSUMÉ. La conception de structures tridimensionnelles nécessite des calculs éléments finis dont le coût en temps-machine et en temps-homme devient vite prohibitif si l'on se fixe un critère de qualité raisonnable. Le contrôle des erreurs de discrétisation et l'optimisation des paramètres du calcul est nécessaire pour rendre accessible ces analyses éléments finis. Mais, dans un contexte de calculs 3D, la réalisation d'un maillage correctement adapté est aussi une véritable difficulté. L'objet de cet article est de présenter et de comparer des méthodes pour résoudre ce problème.*

*ABSTRACT. The design of three-dimensional structures requires finite element computations, whose cost in human and computational time becomes prohibitive when a reasonable criterion of quality is imposed. Methods of control of the discretization errors and optimization of the parameters of the analysis enable the application of finite element analysis ; yet, the main difficulty in 3D is the adaptivity of the meshes. The purpose of this paper is to present and compare several methods in order to address this difficulty.*

*MOTS-CLÉS : maillage tridimensionnel, adaptativité, erreur en relation de comportement, calcul éléments finis.*

*KEY WORDS : three-dimensional mesh, adaptivity, error in constitutive relation, finite element computation.*

---

## 1. Introduction

La conception de systèmes mécaniques complexes nécessite la réalisation d'études du comportement mécanique d'une partie ou de la totalité du système. En site industriel, ces études de dimensionnement font, le plus souvent, appel à des méthodes de calculs par éléments finis. Schématiquement, chaque étude comporte trois étapes : la réalisation d'un maillage, l'analyse éléments finis proprement dite et le dépouillement et le contrôle des résultats. L'analyse éléments finis proprement dite ne pose pas de difficulté en raison des nombreux codes de calculs disponibles sur le marché. Par contre, dès qu'il s'agit de pièces tridimensionnelles un peu complexes, la construction du maillage est effectuée, au mieux de façon semi-automatique, en interactif par des ingénieurs spécialisés. Il en résulte un coût en temps-homme sans commune mesure avec le coût de l'analyse éléments finis elle-même. Le dépouillement et le contrôle des résultats entraînent eux aussi des coûts en temps-homme importants. D'autre part, afin de s'assurer de la qualité des résultats obtenus par le calcul, les analyses sont généralement effectuées sur plusieurs maillages de finesses différentes ce qui accroît d'autant le coût global d'un dimensionnement. Enfin, il faut noter que, même avec les ordinateurs puissants mis actuellement sur le marché, il est illusoire de penser qu'il suffit de raffiner le maillage pour obtenir un résultat très précis. En effet, un maillage régulier très fin pour une pièce tridimensionnelle conduit rapidement à une saturation des moyens de calcul disponibles.

L'objectif de cet article est de proposer et de mettre en place des procédures, utilisables en site industriel, qui permettent de réaliser des analyses éléments finis sur des pièces 3D complexes de façon automatique et en garantissant à l'utilisateur le respect de la précision qu'il désire tout en minimisant au mieux l'ensemble des coûts liés au calcul. La réalisation de cet objectif est indispensable pour que les analyses éléments finis 3D puissent être utilisées de façon courante en phase de conception.

Pour atteindre cet objectif, deux difficultés principales doivent être surmontées. La première difficulté consiste à contrôler la qualité des calculs effectués. Pour cela, il faut être capable d'évaluer les erreurs de discrétisation puis de définir les tailles d'éléments nécessaires à l'obtention de la précision que désire obtenir l'utilisateur. La seconde est de réussir à diminuer les interventions humaines dans le déroulement du calcul en automatisant au maximum les différentes étapes du calcul et notamment la phase de construction du maillage.

Pour résoudre la première difficulté, nous nous sommes appuyés sur les études existantes dans le domaine du contrôle des calculs éléments finis. En effet, ces questions ont été étudiées depuis plus de quinze ans par de nombreux auteurs et elles ont conduit à la définition de différents estimateurs et indicateurs d'erreur de discrétisation. Schématiquement, on peut distinguer trois grandes approches :

- l'approche fondée sur l'utilisation des résidus des équations d'équilibre [BAB 78], [GAG 83], [KEL 83], [OHT 92], ...,
- l'approche fondée sur l'utilisation d'une contrainte lissée [ZIE 87], [ZIE 89], [ZIE 92], [BEC 94], ...,
- l'approche fondée sur la notion d'erreur en relation de comportement et sur des techniques adaptées de construction de champs admissibles [LAD 77], [LAD 91], [LAD 92], [GAS 92], ...

Dans le cadre de ce travail, nous utilisons les mesures d'erreurs développées au LMT de Cachan dont les grandes lignes sont rappelées en annexe. En particulier, nous avons utilisé les résultats de l'étude [GAS 92] qui a conduit à la réalisation du logiciel d'estimation d'erreur ESTEREF3D. Il est à noter que, pour les besoins de cette étude, ce logiciel a été complété par l'introduction d'une procédure automatique de prise en compte des zones à forts gradients pour le calcul des cartes de tailles optimales en 3D; la méthode retenue est une extension au cas 3D de celle proposée en 2D [COO 94a], [COO 94b], [COO 95a]. Mais, bien sûr, toute technique permettant d'obtenir une mesure globale  $\epsilon$  des erreurs de discrétisation ainsi que les contributions locales  $\epsilon_E$  des éléments du maillage à cette erreur globale peut être utilisée avec les procédures que nous proposons.

A partir d'une première analyse éléments finis réalisée sur un maillage relativement grossier, ces outils permettent de définir la carte de tailles qu'il faut respecter pour atteindre la précision désirée tout en minimisant le nombre d'éléments du maillage et donc le coût de calcul. La principale difficulté est alors de réaliser le maillage 3D en respectant ces consignes de tailles. En effet, si pour les analyses 2D, il existe maintenant de nombreux mailleurs automatiques capables de respecter correctement une carte de tailles, de tels outils n'existent pas en 3D. Actuellement, les mailleurs automatiques commercialisés les plus performants (par exemple GHS3D [GEO 93] ou SYSMESH [RAS 95]) sont uniquement capables, une fois maillée la peau du volume, de construire un maillage du volume en tétraèdres en veillant à ne pas créer d'éléments trop aplatis. Mais le respect d'une carte de tailles 3D est encore du domaine de la recherche. Pour contourner cette difficulté, plusieurs procédures d'aide au pilotage des mailleurs sont proposées dans ce travail. Ces procédures utilisent au maximum des outils logiciels disponibles en site industriel; elles sont entièrement automatisées et elles permettent un respect tout à fait raisonnable d'une carte de tailles 3D, même pour des géométries relativement

complexes. Avec ces procédures automatiques, bien sûr couplées à un mailleur automatique 3D performant, la réalisation d'un maillage optimisé qui, en interactif, peut atteindre plusieurs dizaines d'heures-ingénieur, demande seulement quelques minutes en temps CPU sur station de travail.

Après avoir rappelé la définition d'un maillage optimal, les différentes procédures de pilotage des mailleurs que nous proposons sont détaillées au deuxième paragraphe.

L'extension au 3D de la prise en compte automatique des zones à forts gradients dans la prédiction des cartes de tailles, ainsi que la définition des tailles nodales qui lui est associée, sont présentées au troisième paragraphe.

Toutes ces procédures sont testées et comparées sur des exemples simples, puis appliquées à des géométries plus complexes.

## 2. Aide au pilotage des mailleurs 3D

Après une première analyse éléments finis, le post-processeur ESTEREF3D calcule la mesure globale  $\epsilon$  des erreurs de discrétisation ainsi que les contributions  $\epsilon_E$  à cette erreur de chaque élément du maillage liées par la relation [GAS 92] :

$$\epsilon^2 = \sum_E \epsilon_E^2 \quad [1]$$

L'objectif d'une procédure d'adaptativité est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision  $\epsilon_0$  tout en minimisant les coûts de calcul. Nous nous plaçons ici dans le cadre de la  $h$ -version qui est la procédure d'adaptativité actuellement la plus utilisée : on modifie la taille et la topologie des éléments mais on conserve le même type de fonctions de forme pour les différents maillages. De plus, nous utiliserons exclusivement des éléments tétraédriques car les mailleurs libres automatiques ne fonctionnent que pour ce type d'éléments.

### 2.1. Définition d'un maillage optimal

Un maillage  $T^*$  est optimal pour une mesure d'erreur  $\epsilon$  si [LAD 86] :

$$\begin{cases} \epsilon^* = \epsilon_0, \text{ erreur fixée par l'utilisateur} \\ N^* \text{ minimum (nombre d'éléments du maillage } T^*) \end{cases} \quad [2]$$

Ce critère d'optimisation conduit naturellement à minimiser les coûts de calcul. Pour résoudre le problème [2], on utilise la procédure suivante (figure 1) :

- (i) calcul sur un premier maillage  $T$  relativement grossier,

- (ii) calcul sur  $T$  de l'erreur globale  $\epsilon$  et des contributions  $\epsilon_E$ ,
- (iii) détermination des caractéristiques du maillage optimal  $T^*$ .

Ensuite, on construit le maillage  $T^*$  et on effectue un second calcul éléments finis.

### 2.2. Calcul des tailles optimales

Pour déterminer les caractéristiques du maillage optimal  $T^*$ , la méthode consiste à calculer sur chaque élément  $E$  du maillage  $T$  un coefficient de modification de taille :

$$r_E = \frac{h_E^*}{h_E} \tag{3}$$

où  $h_E$  est la taille de l'élément  $E$  et  $h_E^*$  la taille qu'il faut imposer aux éléments de  $T^*$  dans la zone de  $E$  pour assurer l'optimalité.

Le calcul des coefficients  $r_E$  est basé sur le taux de convergence de l'erreur :

$$\epsilon = O(h^q) \tag{4}$$

où  $q$  dépend du type d'élément utilisé mais aussi de la régularité de la solution. Dans le cas où la solution exacte est suffisamment régulière,  $q$  est constant et égal au degré de l'interpolation utilisé; le problème [2] devient :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^3} \quad \text{avec} \quad \sum_E r_E^{2q} \epsilon_E^2 = \epsilon_0^2 \tag{5}$$

dont la solution explicite est donnée par :

$$r_E = \frac{\epsilon_0^{1/q}}{\epsilon_E^{2/(2q+3)} \left[ \sum_E \epsilon_E^{6/(2q+3)} \right]^{1/2q}} \tag{6}$$

Une version améliorée de détermination de la carte de tailles, mieux adaptée à la prise en compte de fortes variations de tailles, sera présentée au paragraphe 3.

Pour automatiser la construction du maillage tridimensionnel en respectant la carte de tailles ainsi déterminée, trois procédures de pilotage ont été développées :

- La première procédure, très simple, consiste à réaliser un maillage de la peau de l'objet qui respecte la carte de tailles, puis à utiliser un mailleur automatique pour mailler le volume.
- La deuxième procédure consiste à compléter la première par l'introduction de surfaces internes, qui sont également maillées en respectant la carte de tailles; un mailleur automatique est alors utilisé pour mailler les différents sous-volumes créés.

Cette procédure permet de contrôler, au moins partiellement, les tailles à l'intérieur du volume.

- La troisième procédure utilise une spécificité du mailleur GHS3D [GEO 93] développé à l'INRIA. Une fois le maillage de peau réalisé, l'utilisateur peut spécifier la taille désirée en un certain nombre de points internes. Lors de la construction du maillage volumique, ces points sont utilisés comme sommets de tétraèdres et la taille spécifiée est respectée au voisinage de ces points de contrôle. Différentes stratégies automatiques pour choisir leur positionnement sont présentées.

Toutes ces procédures nécessitent un maillage correct de la peau de l'objet à mailler. En effet, la plupart des mailleurs automatiques 3D disponibles en site industriel utilisent ce maillage comme donnée initiale.

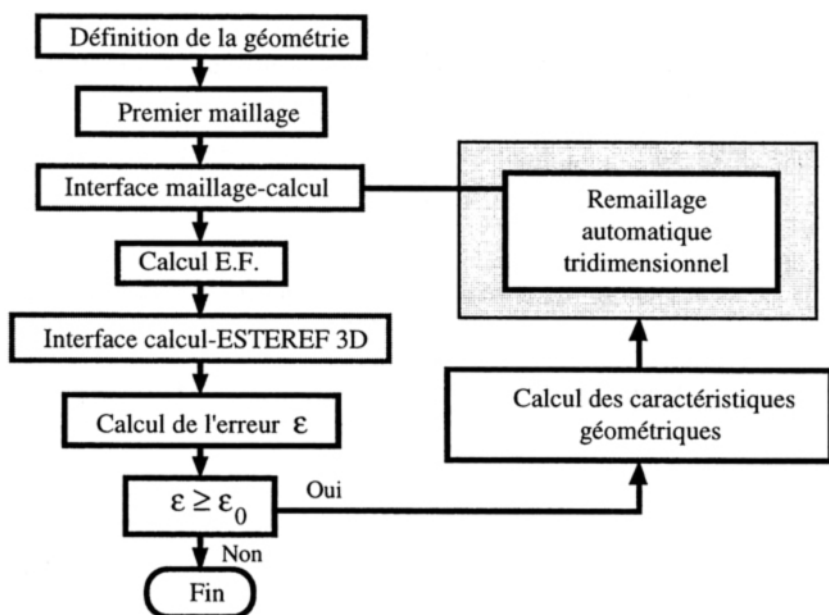


Figure 1. Schéma du calcul 3D

Si la peau de la structure à mailler est constituée d'un assemblage de surfaces planes, il est relativement facile de construire le maillage de peau avec l'un des mailleurs 2D plan capable de respecter une carte de tailles. Cette technique peut également être envisagée, pour des surfaces courbes suffisamment simples (portions de cylindres, de cônes, de sphères) en utilisant une projection sur une surface plane. Par contre, la situation est plus délicate pour des surfaces gauches complexes définies par des assemblages de carreaux. Il n'existe pas, à notre connaissance, de

mailleur automatique respectant une carte de tailles pour une surface gauche quelconque. Il est à noter qu'un tel mailleur de peau est en cours de réalisation au L3S de Grenoble [NOE 94], [NOE 95], mais l'adaptation du maillage nécessite encore une part de travail interactif.

### 2.3. Vérification du respect de tailles

On définit un indicateur de respect de tailles en comparant les tailles mises par le mailleur aux tailles réellement demandées par la carte de tailles :

$$l_E = \frac{\text{Taille mise}}{\text{Taille demandée}} \quad [7]$$

Le rapport idéal doit normalement valoir 1, cependant le respect de tailles est considéré comme bon si le coefficient est tel que  $2/3 \leq l_E \leq 3/2$ . Les résultats sont visualisés sur un histogramme qui représente une étude globale du respect de tailles. Cet indicateur nous permettra de comparer les différentes méthodes proposées.

### 2.4. Techniques de contrôle de tailles en 3D

Toutes ces techniques utilisent un maillage optimisé de la peau des objets étudiés. Dans un premier temps, nous ne nous sommes intéressés qu'à des géométries limitées par des surfaces planes de façon à pouvoir utiliser les mailleurs plans respectant correctement les tailles. La mise au point de ces méthodes et leur comparaison ont été réalisées à partir de ces géométries. Nous étudierons ces méthodes sur deux exemples :

- un cube encastré soumis à une charge de traction simple (figure 2),
- une poutre courte en flexion, avec une section en "T" (figure 3).

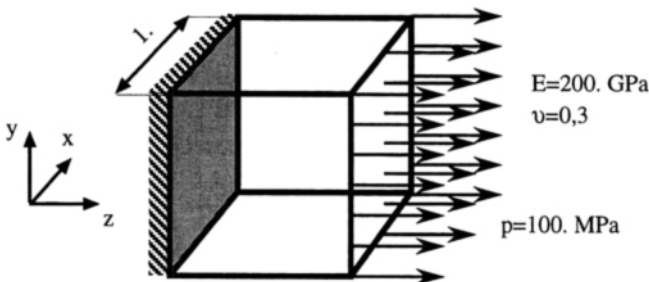
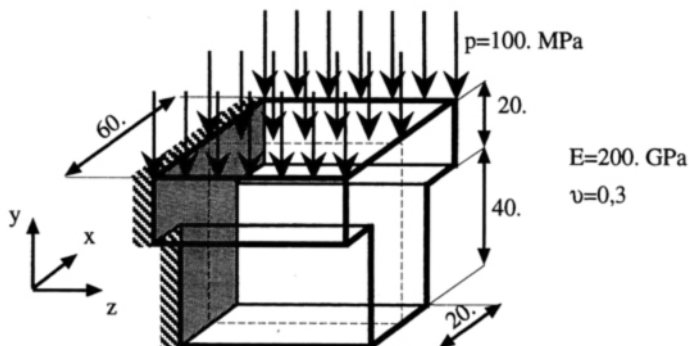


Figure 2. Cube en traction : description du problème mécanique



**Figure 3.** Poutre courte en flexion : description du problème mécanique

Après un premier calcul réalisé sur le maillage initial (figures 4 et 5), nous avons construit une carte de tailles optimisée pour une précision imposée de 5% pour le cube et de 20% pour la poutre en "T". L'objectif est ici de réaliser le maillage en respectant cette carte de tailles. Les tests ont été réalisés avec des tétraèdres à 10 nœuds car les gradients de tailles demandés sont plus forts que ceux obtenus pour des tétraèdres à 4 nœuds. Ce choix permet donc de tester les procédures dans des conditions plus sévères.

#### 2.4.1. Méthode par optimisation du maillage de peau

De nombreux mailleurs volumiques automatiques se servent comme donnée d'une discrétisation de la peau de l'objet. Cette discrétisation est analysée et sert à déterminer les tailles mises sur la peau et ainsi, celles des éléments volumiques qui y sont attachés. Par continuité, les tailles des éléments dans le volume sont déterminées par des critères prédéfinis (évolution arithmétique ou géométrique) ne prenant en compte que les données sur la peau.

Une première méthode pour contrôler les tailles des éléments consiste à optimiser la peau de l'objet étudié, par l'intermédiaire d'un mailleur respectant la carte de tailles sur la peau puis à laisser le mailleur volumique travailler à partir de cette simple donnée. Si la variation de tailles à l'intérieur est douce, on peut espérer ainsi adapter correctement le maillage 3D. En appliquant cette méthode, on obtient pour le cube un maillage comportant 1278 éléments et 2413 nœuds pour un respect de tailles de 98,5% (figures 6 et 7) et pour la poutre en T un maillage comportant 1842 éléments et 3204 nœuds pour un respect de tailles seulement de 92,5% (figures 8 et 9).

Il est clair que cette technique est insuffisante dès que les variations de tailles internes sont un peu complexes. Néanmoins, cette technique très simple permet ainsi d'avoir un premier résultat rapide.



#### 2.4.2. Méthode par sous-découpage (octree)

Pour améliorer la qualité du maillage, l'idée est d'introduire des surfaces internes qui seront préalablement maillées avec un mailleur 2D respectant la carte de tailles puis de mailler chacun des sous-volumes créés avec le mailleur automatique 3D. On peut ainsi espérer mieux contrôler des variations complexes de tailles à l'intérieur du volume.

Sur un problème donné, la mise en place d'un découpage en sous-volumes simples peut, bien sûr, être effectuée en interactif par l'utilisateur. Comme l'objectif est ici d'automatiser complètement la réalisation du maillage, nous proposons une technique simple utilisant les bases de la classique méthode de maillage en octrees [BAE 87] : découpage récursif d'un hexaèdre en sous-hexaèdres et gestion de ce découpage par un arbre octree.

Cette méthode consiste à plonger la structure dans un hexaèdre droit définissant le premier octree. Celui-ci est découpé en huit, puis chacun des sous-octrees créés est de nouveau découpé jusqu'à la vérification d'un critère d'arrêt. L'originalité est qu'ici, le critère d'arrêt est basé sur l'analyse de la carte de tailles à respecter.

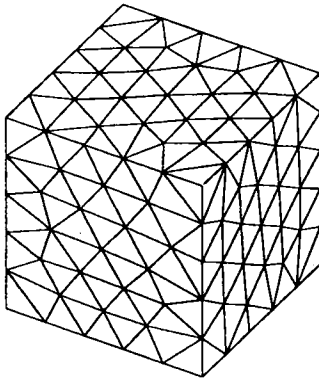
Le sous-découpage d'un octree est arrêté dès que la variation de tailles à l'intérieur de l'octree est inférieure à un coefficient  $\gamma$  :

$$\frac{\text{Taille}_{\text{maxi}}}{\text{Taille}_{\text{mini}}} \leq \gamma \quad [8]$$

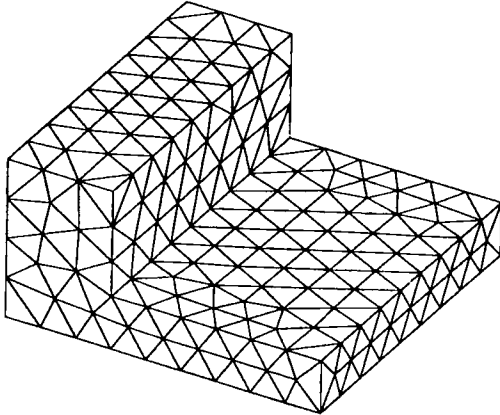
Ce coefficient  $\gamma$  est choisi en fonction du nombre de découpage désiré. Connaissant les tailles maximale et minimale sur la structure, il est possible de jouer sur le niveau de découpage par l'intermédiaire de ce coefficient  $\gamma$ . Il est à noter que la variation de tailles est recalculée sur chaque sous-octree, ainsi deux octrees voisins peuvent avoir des niveaux de découpage différents. Les différents tests effectués montrent qu'une valeur de  $\gamma$  de l'ordre de 10 à 15 est raisonnable. Pour les exemples,  $\gamma$  a été fixé à 12.

La création automatique du maillage à l'aide de cette méthode de sous-découpage nécessite le respect de la géométrie, la reconstruction de la peau initiale et la réalisation de maillages cohérents pour les surfaces internes afin de garantir l'obtention d'un maillage global conforme. En particulier, le respect de la géométrie est obtenu, en réalisant l'intersection de chaque sous-octree créé avec la pièce, par l'intermédiaire d'un modèleur géométrique.

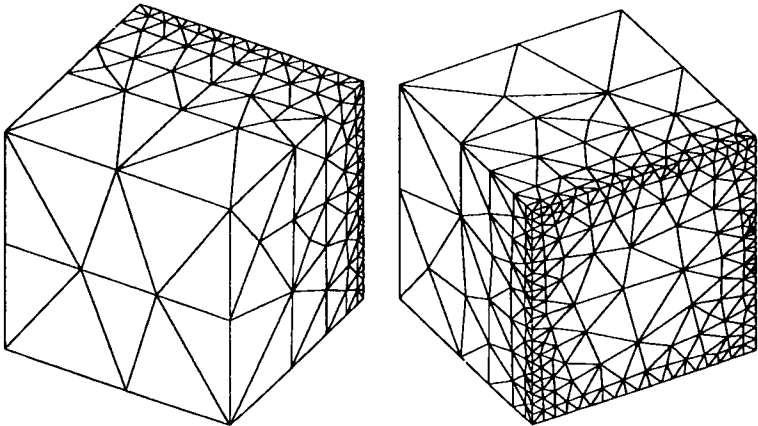
L'ensemble de ces opérations est réalisé selon le schéma de la figure 10. Cette procédure, entièrement automatique a été construite avec le modèleur et le mailleur d'IDEAS [IDE 86], le mailleur ARAIGNEE 2D [COF 87] et le mailleur volumique GHS3D [GEO 93]. Elle a été conçue de façon à permettre un interfaçage simple avec d'autres logiciels réalisant les mêmes fonctions.



**Figure 4.** *Maillage initial - 984 éléments - 1657 nœuds -  $\epsilon = 14,14\%$  - cube*



**Figure 5.** *Maillage initial - 1320 éléments - 2399 nœuds -  $\epsilon = 37,99\%$  - poutre en T*



**Figure 6.** *Maillage optimisé (méthode par optimisation des peaux) - cube*

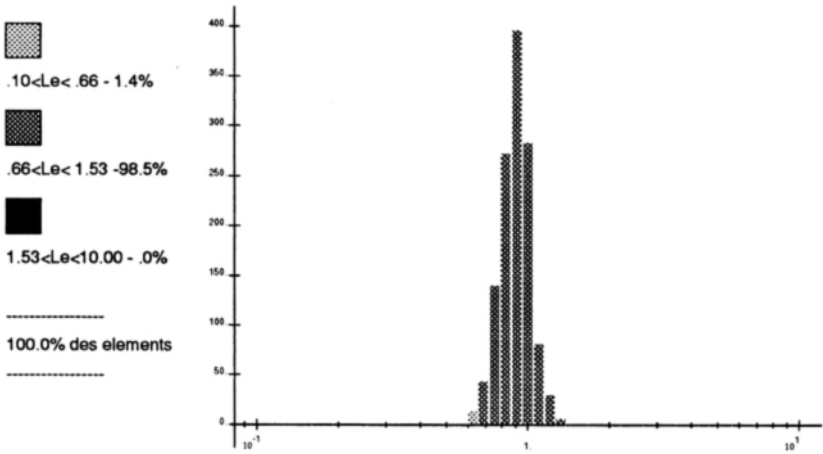


Figure 7. Respect de tailles (méthode par optimisation des peaux) - cube

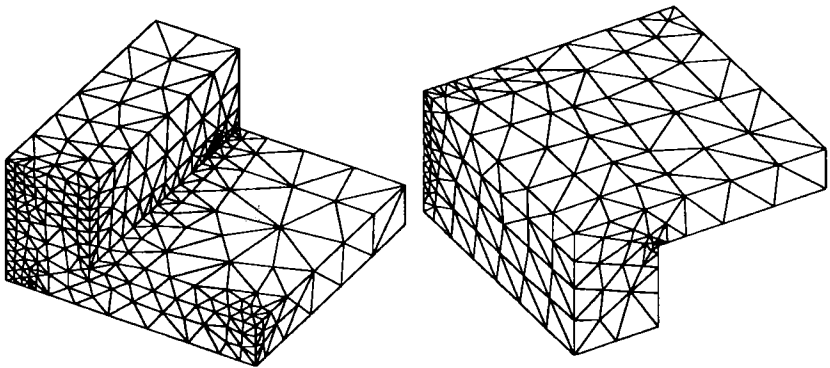


Figure 8. Maillage optimisé (méthode par optimisation des peaux) - poutre en T

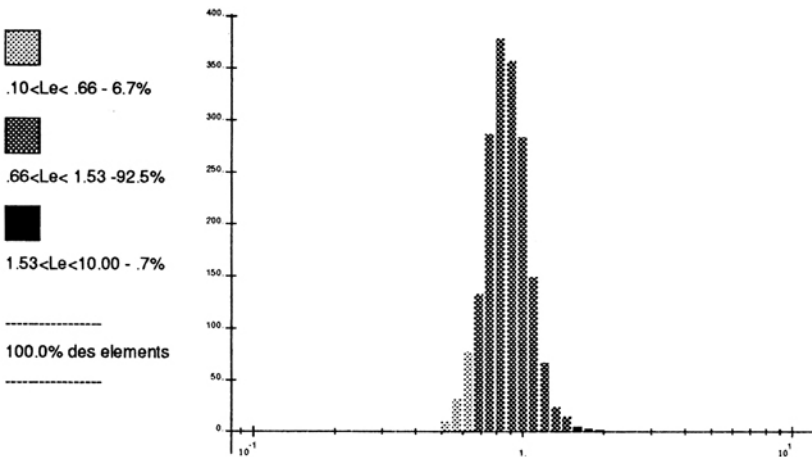


Figure 9. Respect de tailles (méthode par optimisation des peaux) - poutre en T

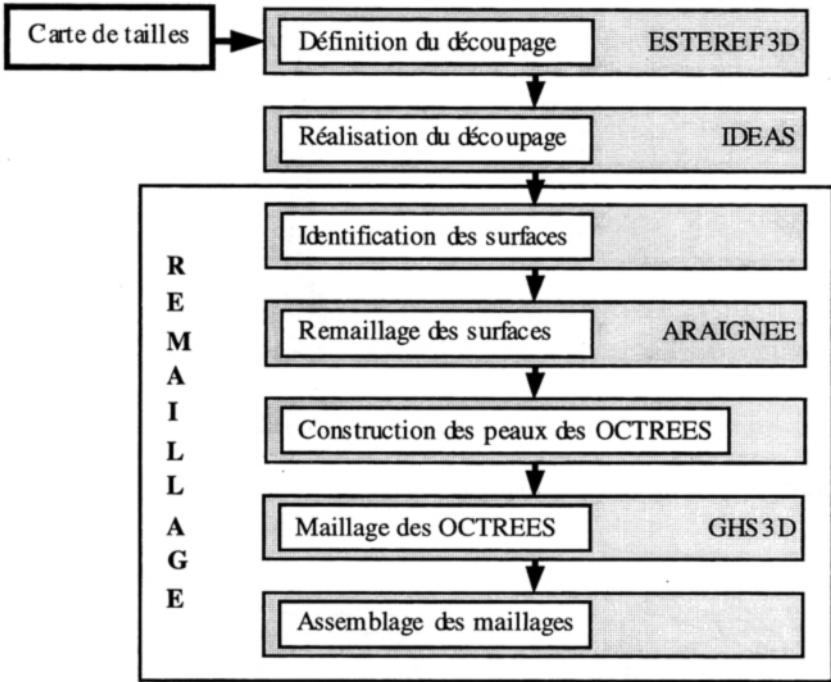


Figure 10. Algorithme de remaillage

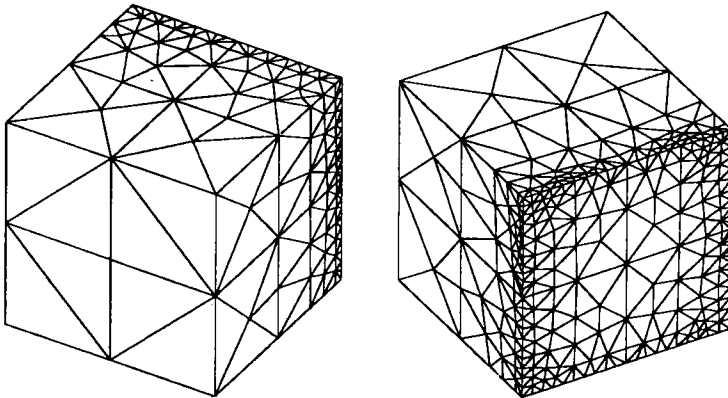


Figure 11. Maillage (méthode des octrees) - cube

Le maillage (figure 11) obtenu pour le cube en traction avec la méthode de sous-structuration a été réalisé à partir du sous-découpage de la figure 12. Il possède 1558 éléments, 2827 nœuds et le respect de tailles (figure 13) montre que 92,8% des éléments peuvent être considérés comme bons. Pour la poutre en T, le maillage

obtenu (figure 14) a été réalisé à partir du sous-découpage de la figure 15. Il possède 1580 éléments, 2853 nœuds et le respect de tailles (figure 16) montre que 97,2% des éléments sont jugés bons. Par rapport à la méthode où seules les peaux sont adaptées, les résultats obtenus dans le cas de la poutre en T montrent une nette amélioration du respect de tailles (97,2% contre 92,5%) et une diminution significative du nombre d'éléments (1580 au lieu de 1842 ce qui représente un gain d'environ 15%).

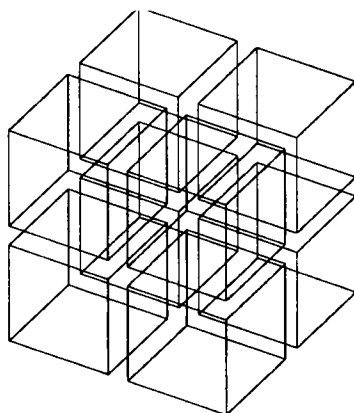


Figure 12. Découpage en octrees - cube

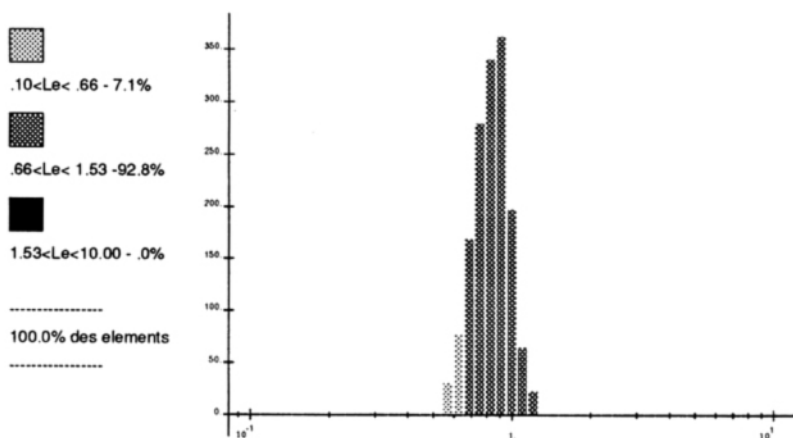


Figure 13. Respect de tailles (méthode des octrees) - cube

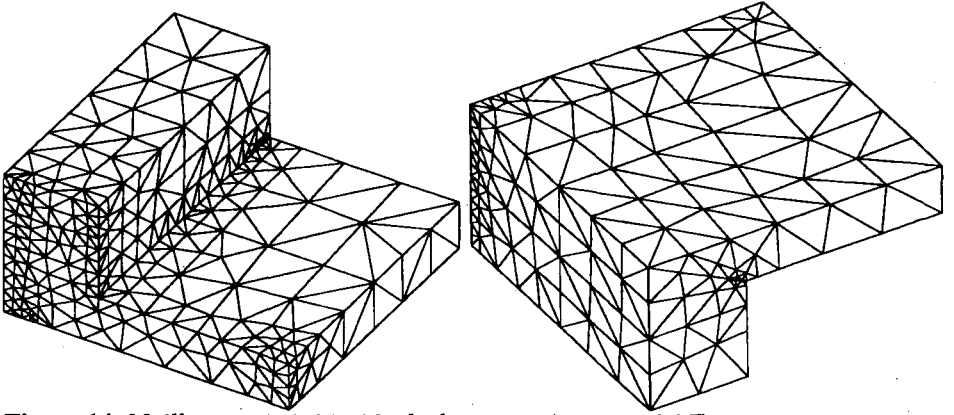


Figure 14. Maillage optimisé (méthode des octrees) - poutre en T

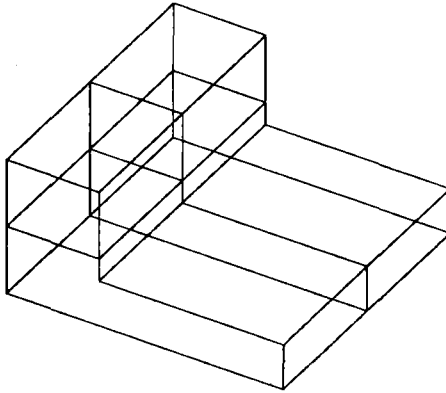


Figure 15. Découpage en octrees - poutre en T

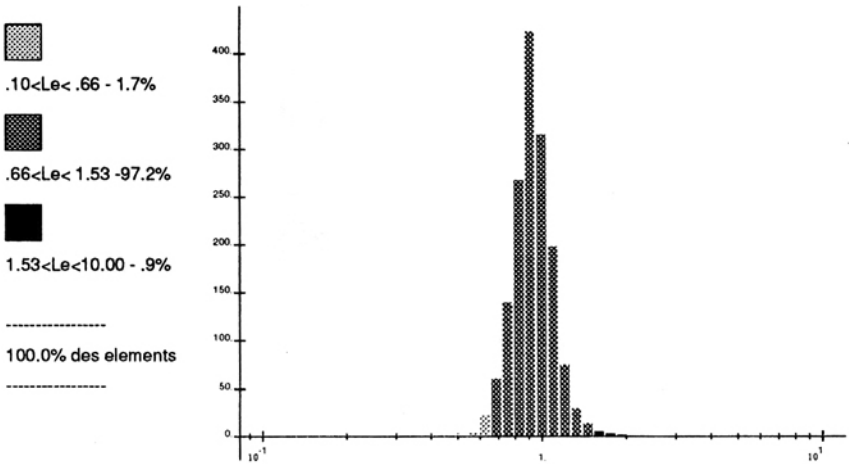


Figure 16. Respect de tailles (méthode des octrees) - poutre en T

Dans le cas du cube, le respect de tailles n'est que de 92,8%, alors qu'il est de 98,5% pour la méthode par optimisation des peaux seules. Ce résultat quelque peu étonnant est dû au fait que le sous-découpage imposé rigidifie trop le maillage et, en conséquence, ce sous-découpage force la construction d'éléments de petite taille dans le volume là où il aurait fallu mettre des éléments de plus grande taille. Pour vérifier ce point, nous avons testé la même méthode en divisant toutes les tailles demandées par deux. Le maillage obtenu conduit à un respect de tailles de 99,1% (figure 17) ce qui est tout à fait satisfaisant.

Sur un problème donné, il importe de ne pas introduire trop de niveaux de sous-découpage afin de ne pas trop rigidifier le maillage.

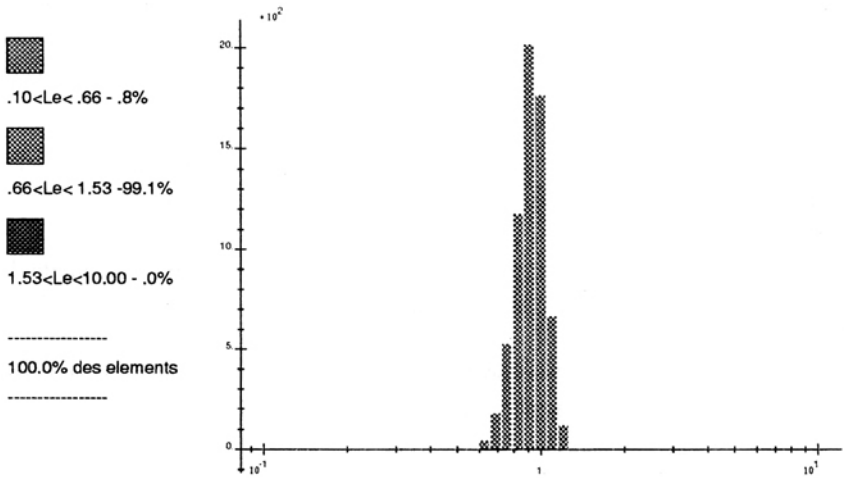


Figure 17. Respect de tailles (tailles divisées par deux) - cube

### 2.4.3. Méthode des points de contrôle de taille

Cette troisième méthode utilise une spécificité offerte par le mailleur GHS3D développé à l'INRIA [GEO 93]. En plus de la donnée classique du maillage de peau, GHS3D accepte la donnée de points internes couplés à des tailles qui seront respectées au voisinage de ces points. Cependant, ces points internes sont des points de passage obligé, c'est-à-dire des nœuds du futur maillage. Il est donc nécessaire de restreindre le nombre de ces points et de vérifier leurs positions relatives, afin de ne pas créer des éléments qui soient dégénérés ou qui ne respectent pas la taille désirée.

Cette technique, plus simple à gérer au niveau de la mise en œuvre informatique, nécessite la mise en place de procédures automatiques de choix des points de contrôle internes. Deux procédures de choix ont été développées : la première utilise le découpage en octree défini précédemment (méthode appelée "points de contrôle 1") et la deuxième, encore plus simple, est basée sur une analyse directe de la carte de tailles sur le maillage initial (méthode appelée "points de contrôle 2").

**Méthode des points de contrôle 1**

Cette méthode utilise, le découpage en octrees. Le découpage étant construit, plusieurs possibilités sont envisageables :

- la première consiste à mettre des points au milieu de toutes les faces internes des sous-octrees,
- la deuxième consiste à mettre un ou plusieurs points à l'intérieur (centré, décalé vers la plus petite taille, ...) de chaque sous-octree créé.

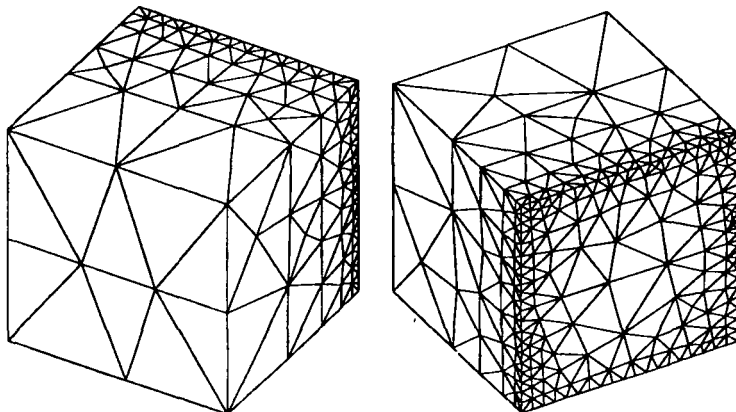
De plus, un test sur la position des points de contrôle est réalisé de façon à ce que la distance à tous les autres points de contrôle et à la peau, soit supérieure à la taille calculée en ce point :

$$d(P_i, P_j) \geq \text{taille souhaitée en } P_i \tag{9}$$

où  $P_j$  est soit un des points de contrôle déjà créés ou soit le nœud le plus proche du maillage de peau. Si cette relation n'est pas vérifiée, alors le point de contrôle n'est pas créé.

Des tests effectués sur différentes géométries nous ont montré que la méthode de positionnement des points de contrôle sur les faces est la plus efficace [DUM 95], [COO 95b].

Nous présentons les résultats obtenus par cette méthode pour le cube en traction. Le maillage (figure 18), construit à partir du découpage de la figure 19, comporte 1361 éléments, 2528 nœuds et le respect de tailles associé est montré sur la figure 20. Le résultat obtenu sur la poutre en T est montré sur la figure 21. Le maillage construit, à partir du découpage de la figure 22, comporte 1847 éléments, 3209 nœuds et le respect des tailles associé est donné sur la figure 23.



**Figure 18.** Maillage (méthode des points de contrôle 1) - cube



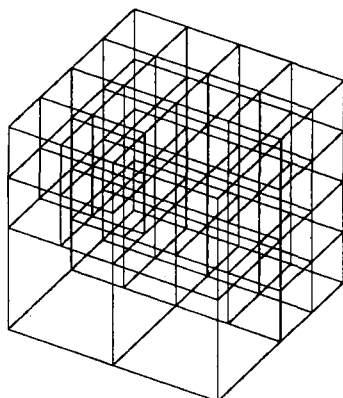


Figure 19. Découpage (méthode des points de contrôle 1) - cube

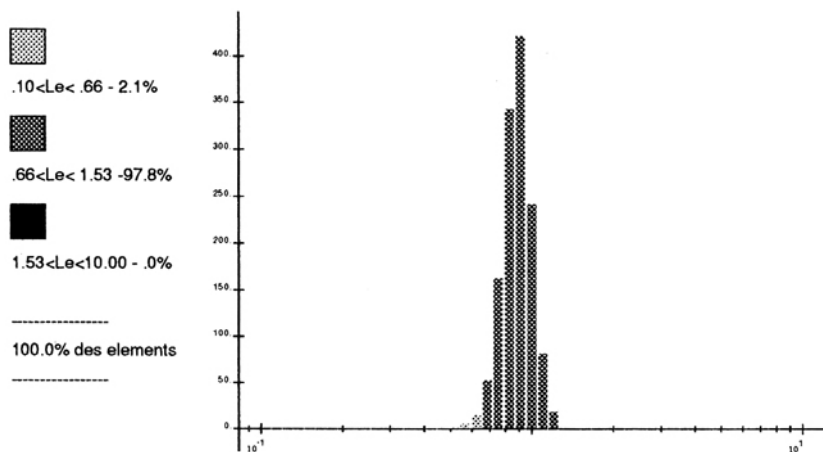


Figure 20. Respect de tailles (méthode des points de contrôle 1) - cube

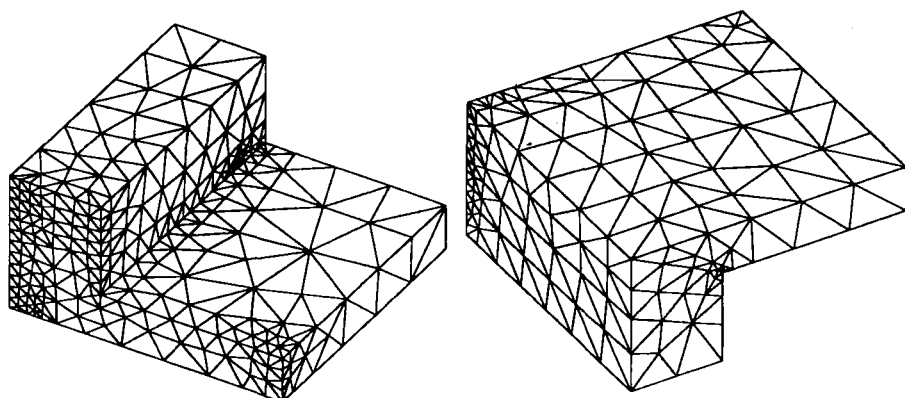


Figure 21. Maillage (méthode des points de contrôle 1) - poutre en T

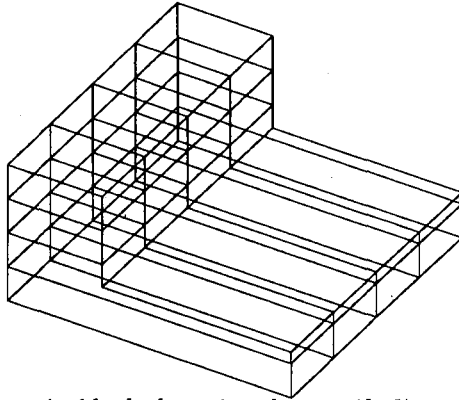


Figure 22. Découpage (méthode des points de contrôle 1) - poutre en T

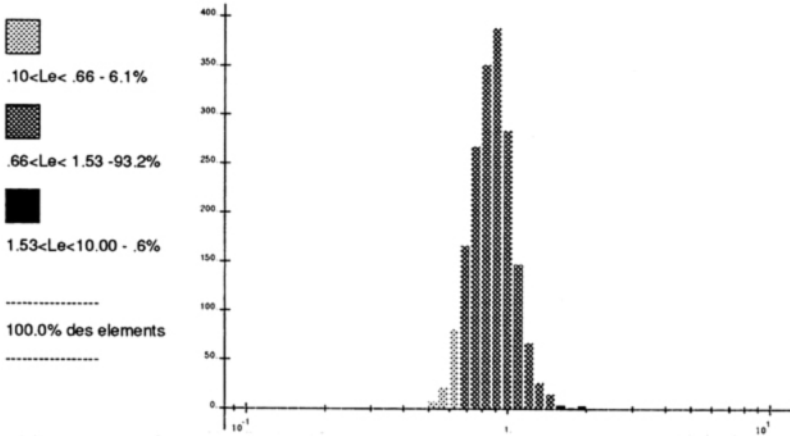


Figure 23. Respect de tailles (méthode des points de contrôle 1) - poutre en T

En résumé, cette méthode donne des résultats tout à fait acceptables. En effet, le respect de tailles est dans le cas du cube de 97,8% et de 93,2% dans le cas de la poutre en T.

### Méthode des points de contrôle 2

Cette méthode utilise le maillage initial (ou précédent) et elle est basée sur l'analyse directe de la carte de tailles. Pour cela, on calcule pour chaque nœud  $n$  :

$$S_n = \text{Sup}_i \left( \frac{h_i^*}{h_n^*} \right); I_n = \text{Inf}_i \left( \frac{h_i^*}{h_n^*} \right) \quad [10]$$

où  $h_i^*$  est la taille demandée au nœud  $i$ ,  $i$  variant sur tous les nœuds des éléments connectés au nœud  $n$ . Si les gradients de tailles  $S_n$  et  $I_n$  sont respectivement supérieur à  $\beta$  et inférieur à  $1/\beta$ , on crée un point de contrôle  $P_i$  à la position de ce nœud. Ainsi, des points de contrôle sont positionnés dans les zones où la variation de tailles demandée est élevée. Chaque point  $P_i$  est ensuite testé de façon à vérifier que sa distance par rapport aux autres points de contrôle déjà créés et que sa distance à la peau est supérieure à la taille demandée en ce point [9]. Si cette relation n'est pas vérifiée, alors le point de contrôle n'est pas créé. Le coefficient  $\beta$  est un paramètre de la méthode. Les différents tests effectués montrent que des valeurs raisonnables sont de l'ordre de 1,3 à 1,5.

Pour l'exemple du cube, le maillage (figure 24) obtenu comprend 1208 éléments, 2325 nœuds et le respect de tailles est montré sur la figure 25. Pour l'exemple de la poutre en T, le maillage (figure 26) obtenu comprend 1676 éléments, 2980 nœuds et le respect de tailles est montré figure 27.

Cette méthode est dans sa réalisation presque aussi simple que la méthode par optimisation des peaux seules mais elle permet une amélioration importante du respect de tailles avec comme conséquence une diminution significative du nombre d'éléments. De plus, elle ne demande pas la réalisation du découpage en octrees.

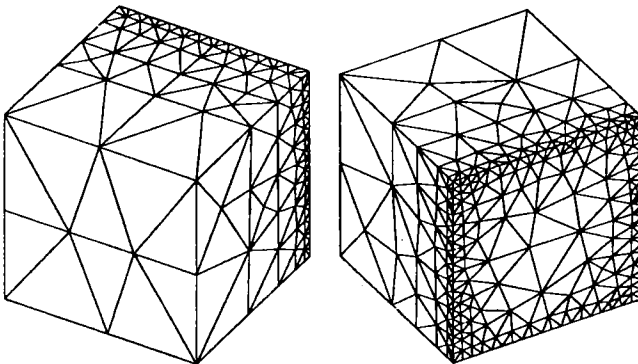


Figure 24. Maillage (méthode des points de contrôle 2) - cube

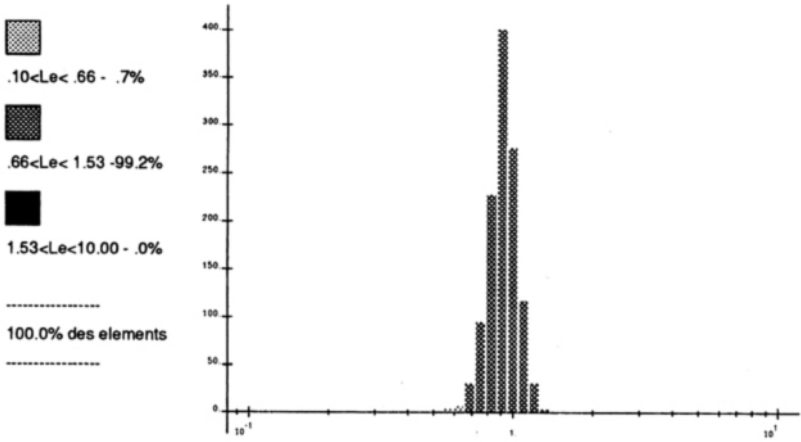


Figure 25. Respect de tailles (méthode des points de contrôle 2) - cube

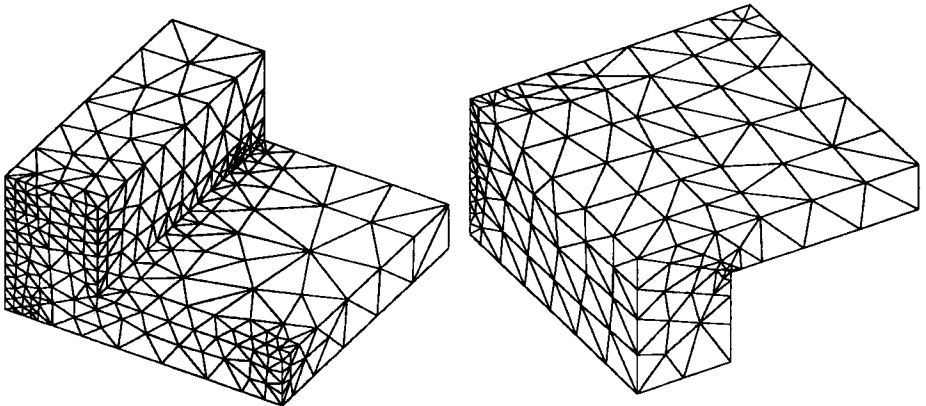


Figure 26. Maillage (méthode des points de contrôle 2) - poutre en T

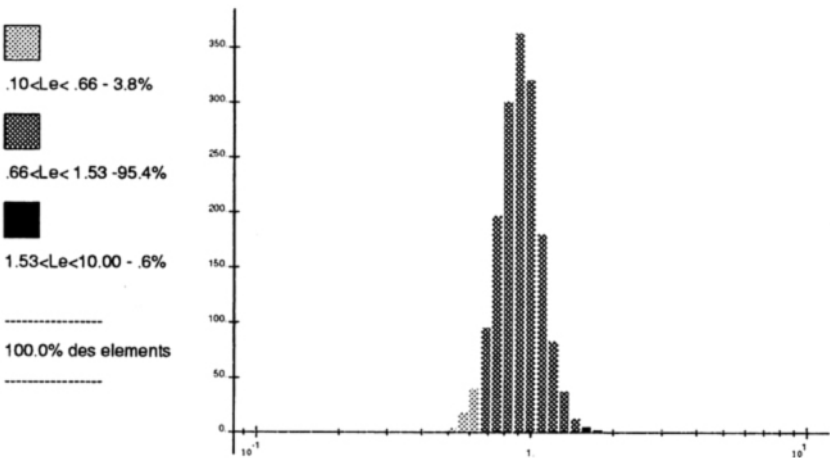


Figure 27. Respect de tailles (méthode des points de contrôle 2) - poutre en T

### 3. Détermination de cartes de tailles 3D optimisées

L'expérience acquise sur les calculs éléments finis en 2D montre qu'une optimisation des maillages nécessite d'une part, une bonne prise en compte des zones à forts gradients de contrainte, et, d'autre part, une définition nodale des tailles afin de pouvoir prendre en compte de fortes variations près de ces zones [COO 93], [COO 94a]. L'extension de ces méthodes au cas 3D est présentée ci-dessous.

#### 3.1. *Prise en compte des zones à forts gradients*

La prédiction d'une carte de tailles optimisée repose sur l'évolution de la mesure d'erreur  $\epsilon$  utilisée, en fonction de la taille  $h$  des éléments [4]. En élasticité, l'erreur en relation de comportement se comporte comme l'erreur classique entre la solution exacte et la solution éléments finis [LAD 83]. Si la solution exacte est suffisamment régulière, on a donc [STR 76], [CIA 78] :

- $q = 1$  pour les tétraèdres à 4 nœuds,
- $q = 2$  pour les tétraèdres à 10 nœuds.

Si la solution exacte présente une singularité d'ordre  $\alpha$  sur la structure, l'ordre de convergence  $q$  de l'erreur est déterminé par [STR 76], [CIA 78] :

$$q = \min(\alpha, p) \quad [11]$$

En pratique, le taux de convergence global varie entre  $\alpha$  et  $p$  et le résultat théorique ne peut être utilisé directement. On constate numériquement [COO 94a] que l'ordre de convergence  $p_E$  des contributions à l'erreur des éléments connectés à la singularité est très proche de  $\alpha$ , alors qu'il a une valeur proche de  $p$  pour les autres éléments. En conséquence, comme en 2D, nous proposons une procédure en deux étapes :

- détection des zones singulières (et plus généralement des zones à forts gradients),
- si la zone est détectée comme singulière alors on évalue la valeur du coefficient  $p_E$  sinon on prend :  $p_E = p$ .

#### 3.1.1. *Détection des zones à forts gradients*

La détection des zones singulières se fait par l'intermédiaire des erreurs locales  $\bar{\epsilon}_E$  définies par :

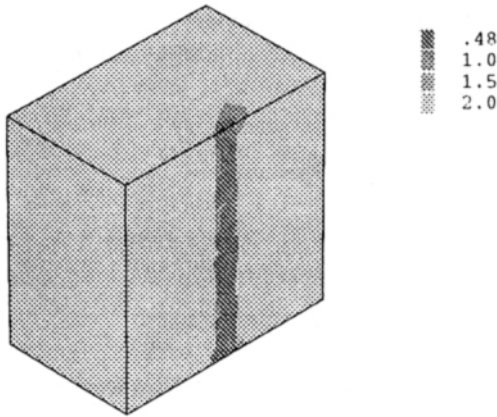
$$\bar{\epsilon}_E^2 = \frac{|\Omega|}{|E|} \epsilon_E^2 \quad [12]$$

où  $\epsilon_E$  est la contribution à l'erreur relative de l'élément  $E$ ,  $|E|$  le volume de l'élément et  $|\Omega|$  le volume de la structure.

En effet, on remarque que dans les zones singulières, ces erreurs locales sont nettement plus fortes que dans les autres zones de la structure. Ainsi, un nœud  $i$  du maillage sera considéré comme singulier si la moyenne  $\bar{m}_i$  des erreurs locales  $\bar{\epsilon}_E$  des éléments connectés à ce nœud et la moyenne  $\bar{M}_i$  des erreurs locales  $\bar{\epsilon}_E$  sur l'ensemble de la structure, vérifient :

$$\bar{m}_i \geq \delta \bar{M}_i \tag{13}$$

où  $\delta$  est un coefficient fixé par l'expérience. Les tests effectués montrent qu'une valeur satisfaisante en 3D est  $\delta = 3$ .



**Figure 28.** Détection des zones à forts gradients en 3D

Sur la figure 28, nous montrons la détection des zones à forts gradients réalisée sur un problème de fissure en mode I. Le test précédent permet de déterminer les zones où doivent être estimés les coefficients  $p_E$  des singularités.

3.1.2. Calcul du coefficient  $p_E$

Le calcul du coefficient de convergence  $p_E$  est basé, comme en 2D, sur le calcul de la densité d'énergie  $\bar{\epsilon}_h$  de la solution éléments finis dans les zones singulières. En 3D, on peut rencontrer des singularités isolées (ce cas est cependant exceptionnel) et des singularités réparties sur des arêtes.

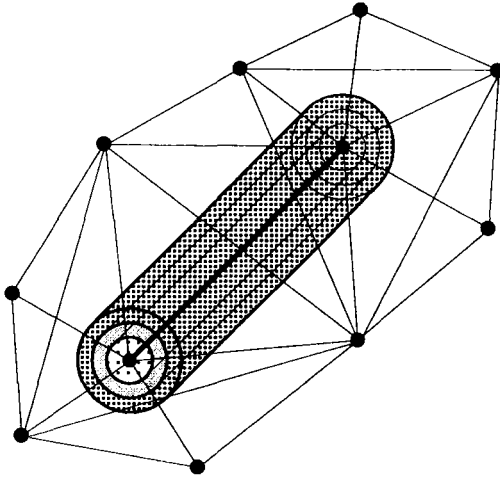
Si la méthode de détection repère comme singuliers deux nœuds aux extrémités d'une même arête, l'arête est considérée comme singulière. Dans ce cas, on évalue la densité d'énergie moyenne  $\bar{\epsilon}_h$  sur des cylindres  $C$  co-axiaux construits sur cette arête (figure 29) :

$$\bar{e}_h = \frac{1}{\text{vol}(\mathbf{C})} \int_{\mathbf{C}} \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(U_h) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(U_h)] d\mathbf{C} \tag{14}$$

On identifie cette densité d'énergie, par une méthode de moindres carrés, avec la densité théorique définie par :

$$e(r) = kr^{2(\alpha-1)} + c \tag{15}$$

où  $k$  et  $c$  sont des constantes dépendant du problème mécanique et  $\alpha$  le coefficient de la singularité. Un coefficient  $\bar{\alpha}$ , proche de la valeur cherchée, est ainsi identifié.



**Figure 29.** Calcul des coefficients  $p_E$  par des cylindres

Dans le cas de nœuds isolés, une technique analogue est utilisée mais avec des sphères concentriques.

On montre, sur la figure 30, la valeur identifiée des coefficients  $p_E$ . Cette valeur est proche de 0.8 sur les lignes singulières de l'encastrement.

Du point de vue pratique, la technique de détection et d'estimation de  $p_E$  permet de prendre en compte non seulement les zones singulières (encastrement, pointe de fissure, ...), mais aussi les zones à forts gradients non singulières (faibles rayons de courbure, congés de raccordement, ...). De plus, comme en élasticité linéaire, les zones à forts gradients sont, le plus souvent, situées sur le bord de la structure, la recherche de ces zones peut donc être limitée à ces seules frontières.

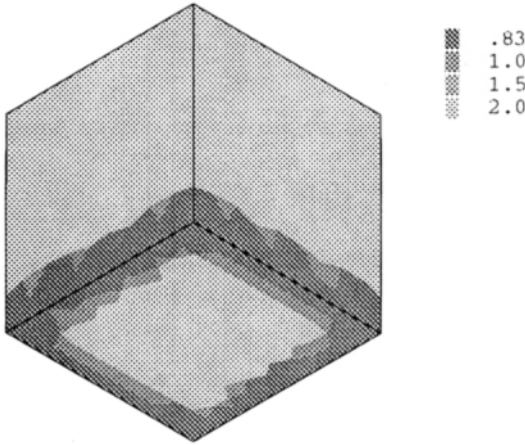


Figure 30. Distribution des  $p_E$

### 3.2. Détermination de la carte de tailles

La prise en compte des zones à forts gradients dans la prédiction des cartes de tailles nécessite, comme en 2D, d'une part de modifier le problème [5] pour introduire des coefficients  $p_E$  dépendants de l'élément et, d'autre part, une définition plus fine des coefficients de modification de tailles qui permettent de faire varier plus rapidement les tailles dans les zones à forts gradients.

Pour y parvenir, on introduit des coefficients de modification de tailles nodaux et dans un élément du maillage initial, on fait l'hypothèse d'une variation linéaire du volume des éléments sur le maillage optimisé.

Le nombre d'éléments  $N_E^*$  peut alors être évalué par :

$$N_E^* = \frac{1}{|E|} \int_E \frac{h_E^3}{\sum_{i=1}^n h_i^{*3} \lambda_i} dE \tag{16}$$

et la contribution  $\epsilon_E^*$  d'un élément à l'erreur globale  $\epsilon^*$  se réécrit sous la forme :

$$\epsilon_E^{*2} = \frac{1}{|E|} \int_E \frac{\left( \sum_{i=1}^n h_i^{*3} \lambda_i \right)^{\frac{2p_E}{3}}}{h_E^{2p_E}} \epsilon_E^2 dE \tag{17}$$

où  $n$  est le nombre de sommets de l'élément,  $h_E$  sa taille,  $p_E$  le coefficient de convergence identifié et  $\lambda_i$  les coordonnées barycentriques sur l'élément. Enfin, les  $h_i^*$  sont les tailles désirées pour le maillage  $T^*$ , calculées aux nœuds de l'élément actuel.



Le problème peut alors se reformuler sous la forme :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_E N_E^* \text{ sous la contrainte } \epsilon^* = \sum_E \epsilon_E^* \quad [18]$$

Ce problème d'optimisation est résolu numériquement; sa solution donne en chaque nœud du maillage la taille nécessaire à la construction du maillage optimisé  $T^*$ .

### 3.3. Vérification de la qualité de la carte de tailles

Pour vérifier la qualité de la carte de tailles construite le premier point est de comparer l'erreur calculée sur le maillage optimisé avec l'erreur souhaitée. Même si ce premier point est vérifié, le maillage n'est pas nécessairement optimal. Pour le vérifier, une méthode simple consiste à recalculer sur le maillage optimisé une carte de tailles pour l'erreur effectivement obtenue  $\epsilon$ . Si le maillage est parfaitement optimal, le coefficient de remaillage doit normalement valoir 1 partout. Dans la pratique, de tels maillages n'existent évidemment pas; le maillage est donc considéré bien optimisé si ce coefficient est tel que :

$$r_E = \frac{h_E^*}{h_E} = \frac{\text{Taille souhaitée}}{\text{Taille actuelle}} \quad \text{et} \quad 2/3 \leq r_E \leq 3/2 \quad [19]$$

Ces résultats sont visualisés, comme pour le coefficient de respect de tailles, sur un histogramme. L'analyse conjointe du coefficient de respect de tailles [7] peut permettre de distinguer, dans le cas où le maillage construit n'est pas optimal, si la non-optimalité découle d'un mauvais respect de la carte de tailles ou d'un mauvais calcul de celle-ci.

Afin de comparer les différentes techniques possibles pour calculer une carte de tailles nous avons, dans le cas du cube en traction, effectué les tests suivants :

- calcul des tailles par élément sans zone à forts gradients,
- calcul des tailles par élément avec zones à forts gradients,
- calcul des tailles par nœud sans zone à forts gradients,
- calcul des tailles par nœud avec zones à forts gradients.

A partir d'un maillage initial comportant 3098 éléments, 4907 nœuds et une erreur de 11,79 %, nous avons calculé une carte de tailles pour une erreur souhaitée de 5,00%. Nous récapitulons dans le tableau 1 les résultats obtenus par les différentes méthodes.

Méthode	Nb d'éléments	Erreur	$r_E$
Tailles par élément (sans)	1169	8,38 %	60,10 %
Tailles par élément (avec)	1543	7,40 %	64,40 %
Tailles par nœud (sans)	1713	7,41 %	95,00 %
Tailles par nœud (avec)	3033	6,11 %	90,30 %

**Tableau 1.** Comparaison des différentes méthodes de calcul des tailles

Ces résultats montrent que la prise en compte des zones à forts gradients (avec des tailles définies par élément ou par nœud) améliore la qualité du maillage optimisé et que les tailles définies par nœuds conduisent à une meilleure optimalité.

### 3.4. Exemples

Pour illustrer les méthodes précédentes, deux exemples plus complexes sont présentés en utilisant la méthode des points de contrôle 2, la détection des zones à forts gradients et les tailles nodales.

Le premier reprend le calcul de la poutre en T avec des éléments tétraédriques à 4 nœuds (figures 31 à 34). L'erreur souhaitée est de 20%.

Le deuxième est un corps de presse simplifié maillé avec des éléments tétraédriques à 10 nœuds (figures 35 à 39). Pour des raisons de symétrie, seulement un huitième de la pièce est maillée. L'erreur souhaitée est de 7%.

Sur ce dernier exemple, on constate que le maillage optimisé comporte moins d'éléments que le maillage initial alors que l'erreur a été divisée par deux.

## 4. Conclusion

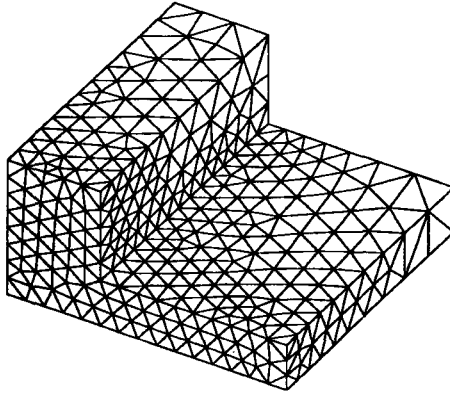
Les exemples traités, même s'ils doivent maintenant être complétés par des exemples plus complexes, montrent qu'il est possible, par des procédures entièrement automatiques de réaliser des maillages correctement adaptés. Pour des variations de tailles complexes, la méthode des octrees donne généralement le meilleur résultat, mais le temps de création du maillage est long par rapport aux autres méthodes même s'il reste très inférieur au temps de l'analyse éléments finis. Une alternative raisonnable à cette méthode est la méthode des points de contrôle. En effet, ces méthodes demandent uniquement la réalisation du maillage initial de la peau, ce qui permet un gain de temps appréciable. En particulier, la méthode des points de contrôle 2, qui ne nécessite ni la réalisation ni l'analyse du découpage, est

très simple à mettre en œuvre dans le cas de structures complexes. Elle constitue un bon compromis coût-qualité.

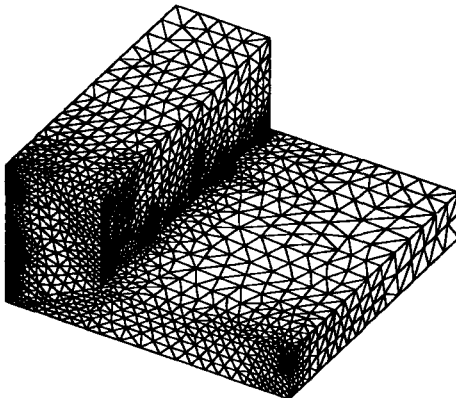
Associée à une technique robuste de prédiction des tailles optimales prenant automatiquement en compte les zones à forts gradients de contraintes, ces méthodes ouvrent la voie à une véritable automatisation des analyses éléments finis en 3D, au moins dans le cadre linéaire.

Bien sûr, plusieurs difficultés restent à surmonter, et, notamment :

- l'adaptation des maillages des surfaces gauches qui est indispensable à la réalisation d'un maillage 3D correctement adapté,
- une amélioration de la liaison CAO-calcul; le transfert d'une géométrie de type CAO vers un mailleur automatique est loin d'être correctement résolu.



**Figure 31.** *Maillage initial - 3618 éléments - 894 nœuds -  $\epsilon=44,69\%$  - poutre en T*



**Figure 32.** *Maillage optimisé - 25339 éléments - 5321 nœuds -  $\epsilon=24,82\%$  - poutre en T*

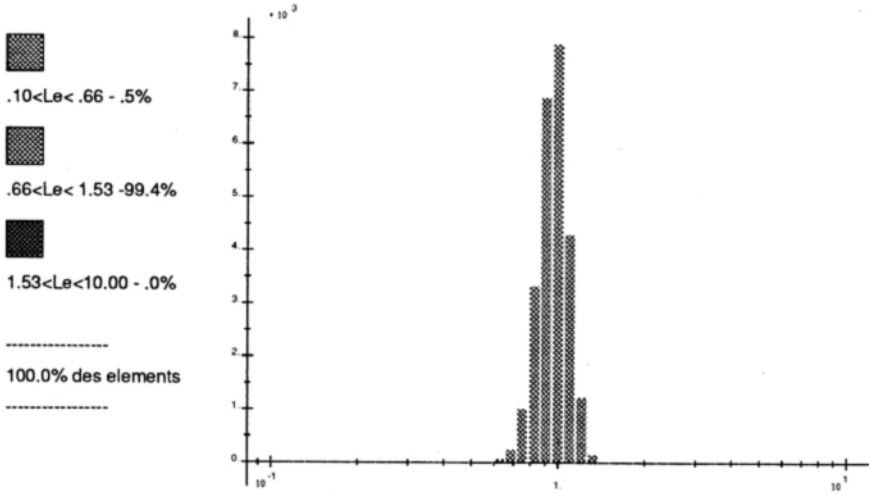


Figure 33. Coefficient de respect de tailles - poutre en T

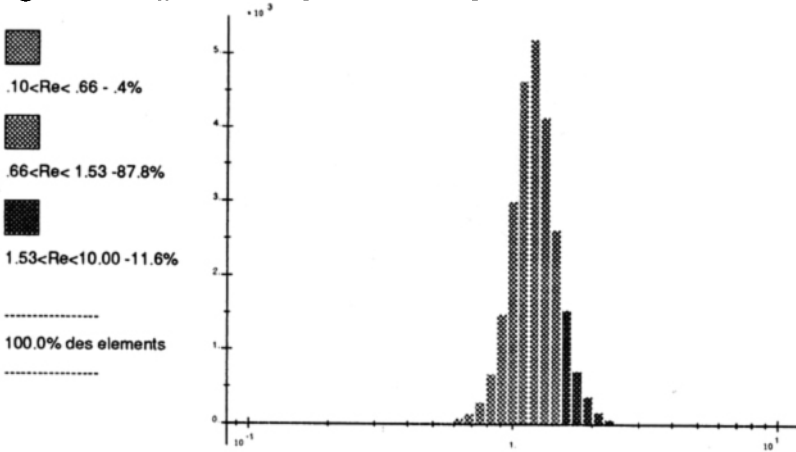


Figure 34. Coefficient de modification des tailles - poutre en T

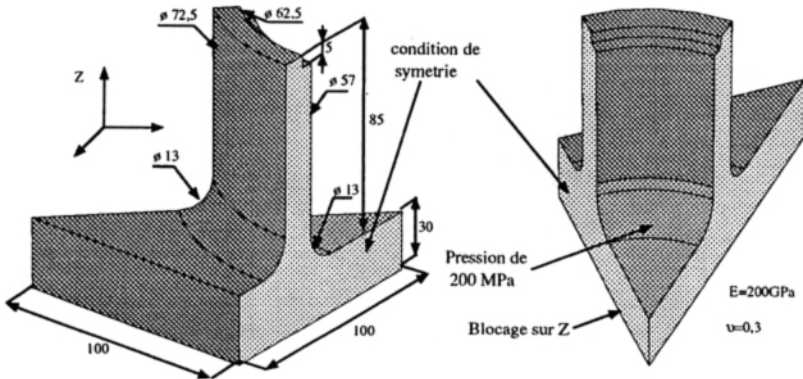


Figure 35. Pot de presse simplifié : description du problème mécanique

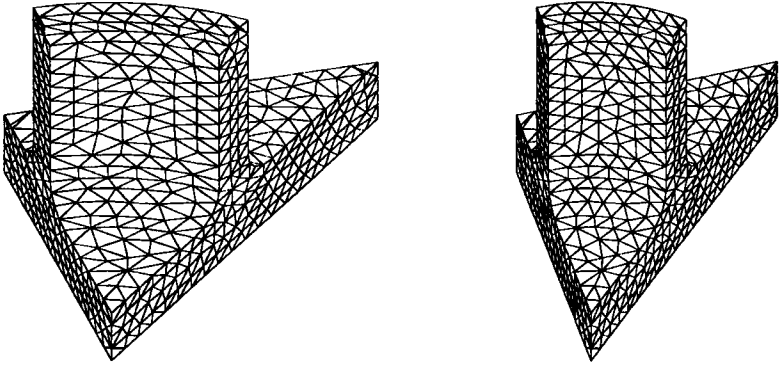


Figure 36. Maillage initial - 5132 éléments - 8350 nœuds -  $\epsilon = 13,57\%$  - presse

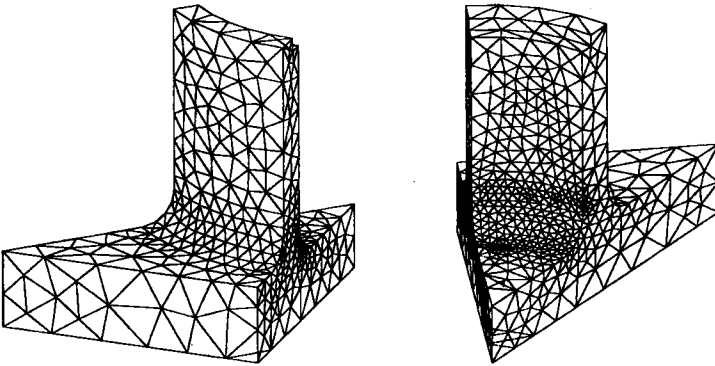


Figure 37. Maillage optimisé - 5008 éléments - 8012 nœuds -  $\epsilon = 6,97\%$  - presse

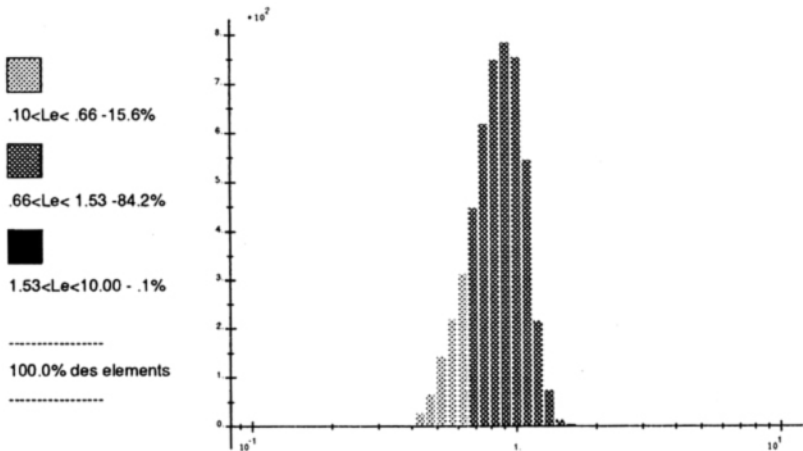


Figure 38. Coefficient de respect de tailles - presse

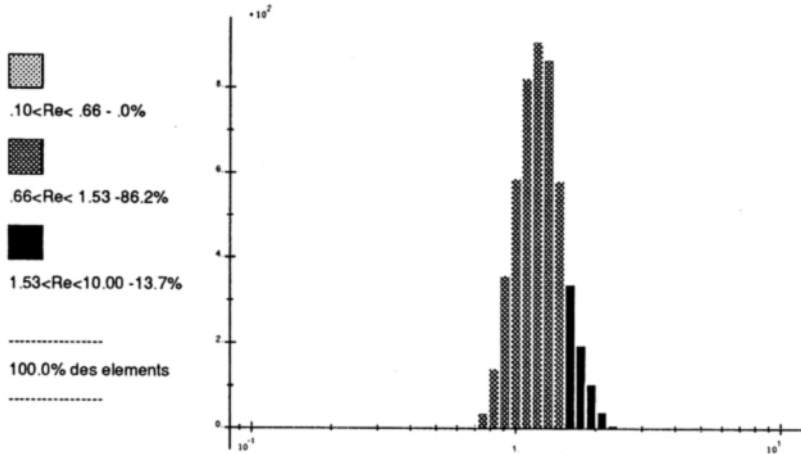


Figure 39. Coefficient de modification des tailles - presse

## 5. Bibliographie

- [BAB 78] BABUSKA I., RHEINBOLDT W.C., "Error estimate for adaptive finite computation", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 15, N°4, pp. 736-754, 1978.
- [BAE 87] BAEHMAN P.L., SHEPARD M.S., "Automatic three-dimensional mesh generation by finite octree technique", *Engng. Computers*, Vol. 5, pp. 235-247, 1987.
- [BEC 94] BECKERS P., "Adaptation de maillages membranes, plaques et volumes", Journée d'étude C.S.M.A. (L.M.T. & I.N.R.I.A.), 1994.
- [CIA 78] CIARLET P., "The finite element method for elliptic problem", North Holland, 1978.
- [COF 87] COFFIGNAL G., "Optimisation et fiabilité des calculs éléments finis en elastoplasticité", Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, 1987.
- [COO 93] COOREVITS P., PELLE J.-P., "Post-processor for adaptive mesh of problems with steep gradient areas, Advances in Factories of the Future", CIM and Robotics, Elsevier, M. Cotsaftis and F. Vernadat Eds, pp. 157-166, 1993.
- [COO 94a] COOREVITS P., LADEVÈZE P., PELLE J.P., "Mesh optimization for problems with steep gradients", *Engineering Computations*, Vol. 11, pp. 129-144, 1994.
- [COO 94b] COOREVITS P., PELLE J.-P., ROUGEOT P., "Sur l'adaptativité des maillages à base de quadrilatères. Application à l'automatisation de calculs par éléments finis en élasticité 2D", *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 3, pp. 379-409, 1994.
- [COO 95a] COOREVITS P., LADEVÈZE P., PELLE J.-P., "An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng*, Vol. 121, pp. 91-120, 1995.
- [COO 95b] COOREVITS P., DUMEAU J.P., NOR S., PELLE J.P., "Adaptivity of three-dimensional meshes for the design of propellers", Actes du 4ème Colloque sur la Conception Mécanique intégrée, PRIMECA, pp. 65-70, La Plagne, France, 1995.

- [DUM 95] DUMEAU J.P., "Contrôle et adaptation des maillages 3D : application à l'automatisation des calculs", Thèse de l'École Normale Supérieure de Cachan, 1995.
- [GAG 83] GAGO J.P., KELLY D.W., ZIENKIEWICZ O.C., BABUSKA I., "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : part II - Adaptive mesh refinement", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 1621-1656, 1983.
- [GAS 92] GASTINE J.L., LADEVÈZE P., MARIN P., PELLE J.-P., "Accuracy and Optimal Meshes in Finite Element Computation for nearly incompressible Materials", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 94, pp. 303-315, 1992.
- [GEO 93] GEORGES P.L., "Automatic mesh generation : application to finite element methods", Collection RMA, Ed. Masson, 1993.
- [IDE 86] IDEAS, "Manuel d'utilisation, Version VI.i", 1986.
- [KEL 83] KELLY D.W., GAGO J.P., ZIENKIEWICZ O.C., BABUSKA I., "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : part I - Error analysis", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 1593-1619, 1983.
- [LAD 77] LADEVÈZE P., "Nouvelles procédures d'estimations d'erreur relative à la méthode des éléments finis et applications", Proc. Journées Éléments Finis, Rennes, 1977.
- [LAD 83] LADEVÈZE P., LEGUILLON D., "Error estimate procedure in the finite element method and applications", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 20, n° 3, pp. 485-509, 1983.
- [LAD 86] LADEVÈZE P., COFFIGNAL G., PELLE J.P., "Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis, Accuracy estimates and adaptive refinements in Finite Element computations", Babuska, Gago, Oliveira, Zienkiewicz Editors, J. Wiley, Chapter 11, pp. 181-203, 1986.
- [LAD 91] LADEVÈZE P., PELLE J.P., ROUGEOT P., "Error estimation and mesh optimization for classical Finite Elements", *Engng. Computation*, Vol. 8, pp. 69-80, 1991.
- [LAD 92] LADEVÈZE P., "La maîtrise des modèles en mécanique des structures", *Revue Européenne des éléments finis*, Vol. 1, pp. 9-30, 1992.
- [NOE 94] NOEL F., LEON J.C., TROMPETTE P., "An auto-adaptive surface meshing software for a CAD environment", Proc. of the Second Int. Conf. on Computational Structures Technology, Athènes, pp. 205-213, 1994.
- [NOE 95] NOEL F., LEON J.C., TROMPETTE P., "A new approach to free form surface mesh control in a CAD environment", *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 38, pp. 3121-3142, 1995.
- [OHT 92] OHTSUBO H., KITAMURA M., "Element by element a posteriori error estimation of the finite element analysis for three dimensional elastic problems", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. 29, pp. 223-244, 1992.
- [RAS 95] RASSINEUX A., "Maillage automatique tridimensionnel par une méthode frontale pour la méthode des éléments finis", Thèse de l'Université Nancy-I, 1995.
- [STR 76] STRANG G., FIX G., "An analysis of finite element", Prentice-Hall, 1976.
- [ZIE 87] ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 337-357, 1987.

[ZIE 89] ZIENKIEWICZ O.C, ZHU J.Z., GONG N.G, "Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, pp. 879-891, 1989.

[ZIE 92] ZIENKIEWICZ O.C, ZHU J.Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates: part I - The recovery technique", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol 33, pp. 1331-1364, 1992.

Article reçu le 15 janvier 1996

Version révisé le 5 mai 1996

### Annexe : Erreur en relation de comportement

Seules les grandes lignes de la méthode sont rappelées ci-dessous. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [LAD 91]. Nous considérons ici le problème du calcul d'une structure en élasticité.

Soit  $\hat{U}$  un champ de déplacement cinématiquement admissible, c'est-à-dire un champ de déplacement qui vérifie les équations de liaison et  $\hat{\sigma}$  un champ de contrainte statiquement admissible, c'est-à-dire un champ de contrainte qui vérifie les équations d'équilibre. La quantité :

$$\hat{e} = \hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U}) \tag{20}$$

où l'opérateur d'élasticité du matériau est noté  $K$ , est appelée *erreur en relation de comportement* associée au couple  $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ . Si  $\hat{e}$  est nul, alors  $(\hat{U}, \hat{\sigma})$  est la solution du problème. Sinon,  $\hat{e}$  permet d'apprécier la qualité de  $(\hat{U}, \hat{\sigma})$  en tant que solution approchée. Pour mesurer cette erreur  $\hat{e}$ , on utilise classiquement la norme en énergie sur la structure :

$$e = \|\hat{e}\|_{\Omega} = \|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\Omega} \text{ avec } \|\sigma\|_{\Omega} = \left[ \int_{\Omega} \sigma^T K^{-1} \sigma d\Omega \right]^{1/2} \tag{21}$$

A cette erreur absolue, on associe l'erreur relative globale :

$$\varepsilon = \frac{\|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\Omega}}{\|\hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U})\|_{\Omega}} \tag{22}$$

ainsi que la contribution à cette erreur d'une partie  $E$  de  $\Omega$  :



$$\varepsilon_E = \frac{\|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_E}{\|\hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U})\|_\Omega} \text{ avec } \|\sigma\|_E = \left[ \int_E \sigma^T K^{-1} \sigma dE \right]^{1/2} \quad [23]$$

La mesure globale  $\varepsilon$  permet de quantifier la qualité globale de l'approximation  $(\hat{U}, \hat{\sigma})$  et les contributions  $\varepsilon_E$  permettent de localiser les erreurs sur la structure.

Pour pouvoir appliquer cette démarche, il est nécessaire de faire un post-traitement de la solution éléments finis  $(U_h, \sigma_h)$  de façon à construire un couple déplacement-contrainte  $(\hat{U}_h, \hat{\sigma}_h)$  admissible. Dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacement de type conforme, on sait que le champ de déplacement  $U_h$  est cinématiquement admissible. En conséquence, par simplicité, on choisit généralement :

$$\hat{U}_h = U_h \quad [24]$$

Par contre, la contrainte  $\sigma_h$  calculée n'est pas statiquement admissible. Il est donc nécessaire de construire un champ de contrainte  $\hat{\sigma}_h$  qui vérifie rigoureusement les équations d'équilibre. Cette construction est effectuée en deux étapes :

- construction sur les interfaces de densités d'efforts en équilibre avec les charges volumiques,
- construction d'une solution simple des équations d'équilibre dans chaque élément.