

---

# Modélisation numérique du contact œil-trépan

Maxime Kaiss\* — Patrick Le Tallec\*\*

\* IUSTI, Av. Escadrille Normandie-Niemen, 13397 Marseille Cedex 20

\*\* INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex

---

*RÉSUMÉ. L'article s'attaque à la modélisation numérique de la trépanation d'un œil humain. Le but est ici de prédire la forme finale du front de l'incision. Deux problèmes sont traités en grandes déformations : la déformation de l'œil sous l'effet du contact du trépan, de la pression d'aspiration et de la réaction du coussin de support ; puis l'incision elle-même qui dépend du temps. Les contraintes de contact sont traitées par pénalisation. Le problème de l'incision est un problème d'évolution qui est discrétisé par un schéma d'Euler explicite. La progression de la lame nécessite un remaillage et une numérotation des nœuds. Enfin les problèmes non linéaires obtenus sont résolus par un algorithme de continuation couplé avec la méthode de Newton.*

*ABSTRACT. This paper deals with the numerical modelling of the trepanation of a human eye. Our purpose here is to predict the final shape of the hole. Two problems are treated in large deformations : the deformation of eye under the effect of contact, of the aspiration pressure and of the reaction of supporting cushion, and the prediction of the time evolution of the incision. The contact constraints are treated by a penalty method. The problem of the incision is a problem of evolution which is discretized by an Euler scheme. The progression of the blade requires a new mesh and new numerotation of the nodes. Finally, the resulting nonlinear problems are solved by a continuation algorithm based on the Newton's method.*

*MOTS-CLÉS : analyse numérique, contact, élasticité non linéaire, élément finis, méthode de continuation, méthode de Newton, trépanation.*

*KEY WORDS : numerical analysis, contact, nonlinear elasticity, finite element, continuation's method, Newton's method, trepanation.*

---

## 1. Introduction

Un certain nombre de situations médicales nécessitent des greffes de cornée. Cette opération consiste à retirer un cylindre de cornée par trépanation et à le remplacer par un morceau de tissu sain. La difficulté est de réaliser un trou parfaitement cylindrique permettant une bonne mise en place du nouveau tissu.

En effet, pendant la trépanation d'un œil humain, l'action d'un trépan cylindrique induit une grande déformation dans l'œil. Par conséquent, le trou réalisé par ce trépan n'est plus cylindrique quand le trépan est enlevé (Hanna et al. [Han 89, Han 91], Jouve [Jou 93]). Le but de ce travail est de prédire la forme réelle du trou en fonction des procédés chirurgicaux utilisés.

Après une description sur les aspects physiques et les lois de comportement, deux problèmes sont à résoudre.

Le premier est un problème de contact œil-trépan sous pression extérieure : on ne connaît ni la position ni la pression extérieure due au trépan, mais le volume intérieur de l'œil est supposé constant. Ce problème, sous contraintes de contact, est traité par une pénalisation classique (Le Tallec [LeT 94], Oden et Kikuchi [Ode 88]) à partir d'une modélisation numérique initialement développée par Hanna et Jouve [Jou 93].

Le second est un problème de rupture peu standard du point de vue mécanique. Il s'agit d'un problème d'évolution qui est discrétisé par un schéma d'Euler explicite. L'originalité de cette étude provient de la stratégie d'actualisation du maillage au cours de la fissuration.

Les problèmes algébriques obtenus après discrétisation sont dans les deux cas fortement non linéaires et donc difficiles à résoudre. Ils nécessitent d'utiliser un algorithme de continuation par arcs proposé par Keller [Kel 83] (Le Tallec [LeT 94]) qui est adapté ici au cas à deux variables de continuation.

La procédure complète est illustrée par des simulations numériques sur un œil isotrope ou anisotrope constitué de différents matériaux élastiques.

## 2. Position du problème

### 2.1. Aspects physiques et médicaux

Le domaine de calcul est l'ensemble "cornée-sclère" qui est considéré comme un milieu élastique tridimensionnel soumis à de grandes déformations sous l'action du trépan et de la pression intraoculaire.

Cette pression intraoculaire, dont la valeur est en fait le paramètre de contrôle de l'enfoncement du trépan, dépend directement de l'intensité de la force appliquée par le chirurgien sur l'appareil. Sur la face antérieure de la cornée, le trépan exerce des efforts à travers :

- la lame qui pénètre à l'intérieur de la cornée en produisant une incision,
- une pression externe d'aspiration qui a pour rôle de plaquer l'œil en permanence contre le support rigide du trépan,

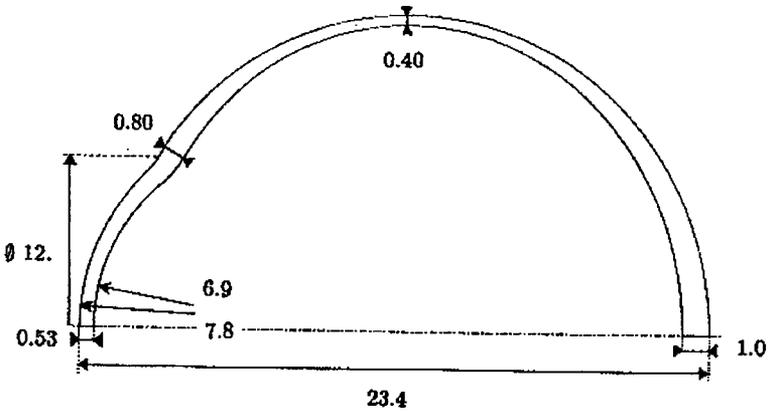


FIG. 1 - coupes méridiennes d'un œil normal indiquant les termes anatomiques de base et les principales dimensions utiles en millimètres.

– les forces de contact exercées par le support rigide du trépan sur l'œil.

La position verticale de ce support rigide est en fait inconnue. Elle est donc à déterminer par la suite comme une fonction de la pression intraoculaire en écrivant que le volume interne de l'œil reste constant durant l'opération (l'humeur vitrée est constituée essentiellement d'eau et peut-être considérée comme incompressible).

Enfin, sur le plan des conditions aux limites, on considère l'enveloppe "cornée-sclère" fixée au nerf optique et amortie par un coussin dont la pression externe varie entre 5 et 6 mmHg.

## 2.2. Lois de comportement et hypothèses mécaniques:

Comme on s'intéresse à des phénomènes à très courte échelle de temps, on suppose que la cornée et la sclère sont constituées d'un matériau hyperélastique non-linéaire compressible de densité d'énergie  $\hat{W}$ . Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $T$  est donc donné par la loi de comportement :

$$T(x, F) = \frac{\partial \hat{W}(x, F)}{\partial F} \quad \text{avec } F = Id + \nabla u, \quad (1)$$

où  $u$  désigne le champ de déplacement. On note  $C = F^T F$  le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite. Les densités d'énergie  $\hat{W}$  utilisées ici pour modéliser la sclère et la cornée sont respectivement les suivantes :

– **loi de Saint Venant Kirchhoff**: elle s'exprime en fonction des invariants principaux  $\iota_k(C)$  de  $C$  et des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\hat{W}(x, F) = \mu(\iota_1(C) - 3) + \frac{\lambda + 2\mu}{8}(\iota_1(C) - 3)^2 - \frac{\mu}{2}(\iota_2(C) - 3). \quad (2)$$

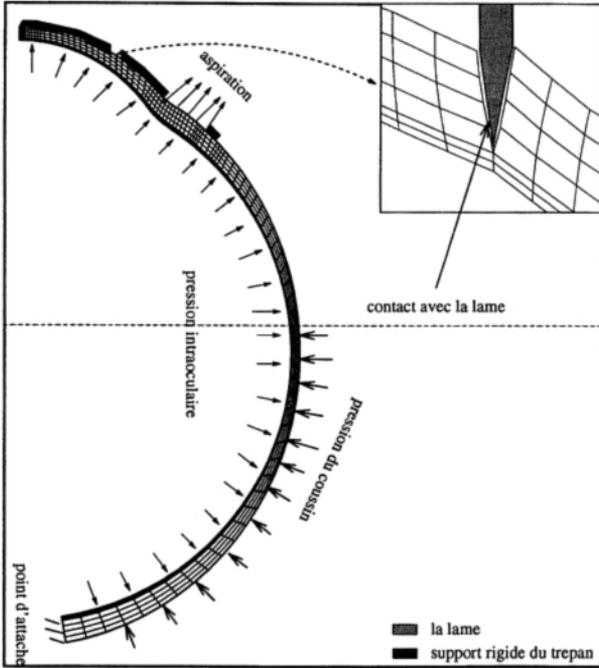


FIG. 2 - L'œil entier avec les différentes composantes du chargements.

- **loi d'un matériau transversalement isotrope:** sa densité d'énergie, de plan d'isotropie  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , est une fonction des trois invariants principaux de  $C$  et de composantes supplémentaires de  $C$  (cf. Ogden [Ogd 84]):

$$\begin{aligned}
 4\hat{W}(x, F) = & \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{2} \iota_1(C)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)C_{33}\iota_1(C) - 2\mu_1\iota_2(C) \\
 & - (\lambda_3 + 2\lambda_1 + 2\mu_1)\iota_1(C) + (\lambda_1 - \lambda_3 + 2\mu_3 - 2\mu_1)C_{33}^2 \\
 & + 2(\lambda_1 + \mu_1 - \lambda_3 - \mu_3)C_{33} + (G_{12} - 2\mu_1)(C_{31}^2 + C_{23}^2) \\
 & + \frac{4\lambda_1 + 5\lambda_3 + 4\mu_1 + 2\mu_3}{2}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Elle fait intervenir cinq coefficients d'élasticité indépendants:  $(\lambda_1, \mu_1)$  les coefficients de Lamé pour le plan d'isotropie,  $(\lambda_3, \mu_3)$  les coefficients de Lamé pour la direction perpendiculaire et  $G_{12}$  un coefficient de cisaillement.

### 2.3. Contact et rupture

On suppose que le contact entre la cornée et le trepan est sans frottement. Cela signifie que la cornée peut bouger librement dans la direction tangentielle au support rigide du trepan et le long des faces latérales de la lame. Par contre,

au bout de la lame, en raison de la forme géométrique pointue et à la haute pression exercée, le frottement est supposé parfait et interdit tout mouvement entre le bout de la lame et le tissu en contact.

Par ailleurs, on suppose que le processus de coupure est quasi-statique et fragile. Autrement dit :

- les efforts d'inertie sont supposés très faibles et par conséquent la cornée est en équilibre statique à chaque instant,
- la coupure est instantanée, la vitesse de propagation  $v$  du front d'incision (de la pointe de la lame) est verticale en configuration déformée et est une donnée du problème :  $v = \lambda e_3$ ,  $\lambda$  donnée.

En conséquence, comme les efforts d'inertie sont négligés et le matériau est supposé élastique, le problème mécanique ne dépend du temps que par le choix de la vitesse de rupture. Changer cette vitesse revient donc uniquement à changer l'échelle en temps et n'a donc aucune influence sur la forme de la cornée et du front d'incision.

### 3. Modélisation mathématique

#### 3.1. Etude du problème de contact sans rupture

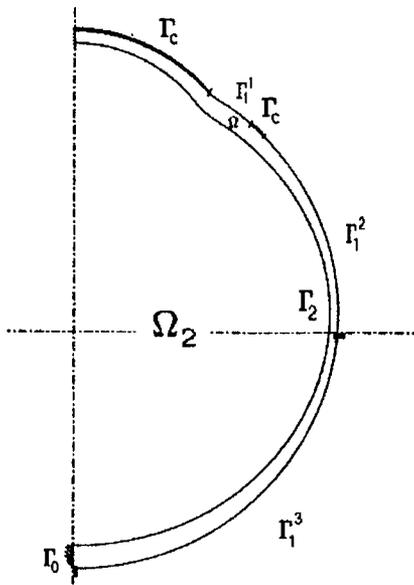


FIG. 3 - géométrie du problème :  $\Omega$  domaine de calcul,  $\Gamma_0$  la partie fixe,  $\Gamma_1$  la partie soumise aux pressions externes,  $\Gamma_2$  la partie soumise à la pression intraoculaire,  $\Gamma_c$  la partie en contact avec le support rigide du trépan.

Dans cette étape, seul le support rigide du trépan est en contact avec l'œil. On suppose que ce contact est bilatéral (adhérence de l'œil sur le trépan) mais sans frottement (un glissement est possible). L'œil est soumis à la pression intraoculaire  $p_i$  connue exercée sur  $\Gamma_2$ , à la pression d'aspiration  $p_a$  connue exercée sur  $\Gamma_1^1$ , à la pression du coussin de support  $p_c$  connue exercée sur  $\Gamma_1^3$  et à la pression atmosphérique  $p_e$  connue exercée sur  $\Gamma_1^2$ .

D'un point de vue mathématique, soit  $\Omega$  l'ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , occupé par la cornée-sclère en configuration de repos mécanique, de frontière

$$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_c.$$

On suppose que :

- la partie  $\Gamma_1$ , soumise à pression externe imposée, est subdivisée en trois parties disjointes  $\Gamma_1 = \bigcup \Gamma_1^i, i = 1, \dots, 3$  correspondant respectivement la partie soumise à la pression intraoculaire, à la pression d'aspiration et à la pression du coussin;
- chaque  $\Gamma_1^i$  est soumise à une pression constante d'intensité  $p^i$  connue;
- la mesure de  $(\Gamma_0)$  est strictement positive, avec  $\Gamma_0$  la partie encastrée de la frontière  $\Gamma$ ;
- la partie  $(\Gamma_2)$  est en contact avec le vitré.

$\Gamma_c$  est la partie extérieure de la cornée susceptible de rentrer en contact avec le support rigide de trépan. Soit enfin  $\Omega_2$  l'ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , occupé par le corps vitré de frontière  $\Gamma_2$ .

Le problème d'équilibre, écrit en configuration de référence, est alors le suivant :

$$\operatorname{div}T + f = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{4}$$

$$\varphi = \varphi_0 \text{ sur } \Gamma_0, \tag{5}$$

$$T(x, F).n = g_1^i(F) \text{ sur } \Gamma_1^i \quad i = 1, \dots, 3, \tag{6}$$

$$T(x, F).n = g_2(F) \text{ sur } \Gamma_2, \tag{7}$$

$$T(x, F).n = g_c(F) \text{ sur } \Gamma_c. \tag{8}$$

Ci-dessus les forces  $g_j$  exercées sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  sont associées aux pressions d'intensité  $p_j$ , et leur expression en configuration de référence  $\Omega$  est donnée par Ciarlet [2] :

$$g_j(F) = -p_j(\det F)F^{-T}.n, \quad p_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

En raison de la présence du support rigide, le déplacement de l'œil sur  $\Gamma_c$  doit aussi vérifier la condition de contact. Tout point  $X = x + u(x)$  de la surface  $\Gamma_c^\varphi$  extérieure (point de la frontière de la configuration déformée) doit vérifier :

$$f_c(z, X) = 0, \tag{10}$$

avec  $f_c(z, X)$  l'équation de la surface  $S$  du trépan en contact avec la cornée, indexée par la position verticale  $z$  du centre de la surface  $S$ . Un mouvement vertical imposé de cette surface de trépan se traduit par une variation correspondante du paramètre  $z$ .

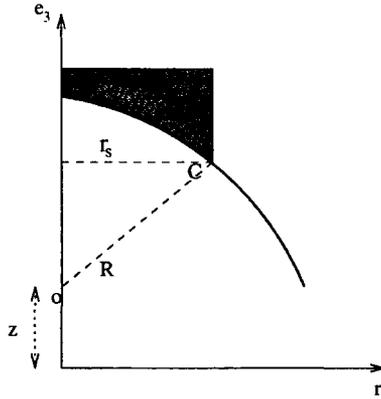


FIG. 4 - Exemple d'une calotte sphérique rigide en contact avec un domaine élastique.

Par exemple, pour un contact sur une calotte sphérique d'axe  $e_3$ , de rayon  $R$ , de centre  $ze_3$ , de section horizontale  $r_s$ , on aura :

$$\begin{aligned} f_c(z, X) &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + (X_3 - z)^2} - R \quad \text{si } X_1^2 + X_2^2 \leq r_s^2, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (11)$$

Un tel contact est décrit en Figure 4 et correspond au contact de l'œil sur le support rigide du trépan. Comme il n'y a pas de frottement, le support exerce en tout point de contact une pression de contact inconnue normale à la surface de contact  $S$  :

$$T(x, F) \cdot n = \lambda_c \nabla f_c(X) = g_c(x) \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (12)$$

On peut remarquer que la condition (10)-(12) correspond à la limite quand  $\varepsilon = 0$  de la loi :

$$\begin{aligned} T(x, F) \cdot n &= \lambda_c \nabla f_c(X) = g_c(x) = \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1}{2\varepsilon} f_c(z, x + u(x))^2 \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} f_c(z, x + u(x)) \frac{\partial f_c}{\partial X}(z, X) \quad \text{sur } \Gamma_c. \end{aligned} \quad (13)$$

Cette formulation est celle utilisée au niveau numérique (avec  $\varepsilon > 0$ ). Elle est identique à (10)-(12). En effet (13) n'a de sens que si  $f_c = 0$  et  $\frac{\partial f_c}{\partial X}$  définit bien la normale à  $S$ .

Ici, la position verticale  $z$  du support rigide est une inconnue. En revanche, on a une condition portant sur le volume interne de l'œil qui doit rester fixe pendant la trépanation :

$$vol(\Omega_2^\varphi) = -\frac{1}{3} \int_{\Gamma_2^\varphi} \varphi(x) \cdot n^\varphi da^\varphi = -\frac{1}{3} \int_{\Gamma_2} \varphi(x) \cdot \text{cof}(F) \cdot n da = V_f. \tag{14}$$

On rappelle que  $\Omega_2^\varphi$  est la configuration déformée de  $\Omega_2$  qui est occupé par le corps vitré après déformation et que  $V_f$  désigne la valeur à laquelle on veut maintenir le volume interne de  $\Omega_2^\varphi$ .

L'ensemble des équations mécaniques à résoudre est donc finalement l'ensemble des équations d'équilibre (4)-(9), de la loi de comportement (1) et de la relation de contact (13). Ce problème doit être résolu par rapport au champ de déplacement  $u$  et à la position de support  $z$ .

Par élimination du tenseur  $T$ , on obtient la formulation variationnelle finale de notre problème sur laquelle se fonde notre résolution numérique :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, F) : \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_i} g_i \cdot v da + \int_{\Gamma_c} \lambda_c n_s(x) \cdot v da$$

$$\forall v \in V, u - u_o \in V, \tag{15}$$

$$\int_{\Gamma_2} \text{cof}(F) \cdot n \cdot (x + u(x)) da = -3V_f, \tag{16}$$

$$f_c(z, x + u(x)) = 0 \text{ sur } \Gamma_c. \tag{17}$$

Ci-dessus, l'espace  $V$  des fonctions tests est donné par :

$$V = \{v \in W^{1,p}(\Omega)^3; v|_{\Gamma_o} = 0\}. \tag{18}$$

### 3.2. Etude de la rupture sous l'incision: $P_r$

On rappelle que, pendant la trépanation, la lame produit à chaque instant une incision dans l'œil dont la forme est à déterminer soit en configuration actuelle  $\Omega^\varphi(t)$  soit en configuration de référence associée  $\Omega(t)$ . La frontière de  $\Omega^\varphi(t)$  se décompose alors en :

$$\Gamma^\varphi(t) = \partial\Omega^\varphi(t) = \Gamma_o \cup \Gamma_1^\varphi \cup \Gamma_2^\varphi \cup \Gamma_c^\varphi \cup \Gamma_b^\varphi(t) \cup \Sigma^\varphi(t),$$

avec  $\Gamma_b^\varphi(t)$  la partie extérieure de la cornée en contact avec la lame,  $\Sigma^\varphi(t)$  l'ensemble des points sous le bout de la lame (un cercle en configuration actuelle) et le reste de la frontière comme décrit dans le paragraphe précédent.

Le problème est que maintenant la configuration au repos de la cornée  $\Omega(t)$  dépend du temps et est elle même une inconnue. Pour déterminer son évolution, on commence par calculer sa position d'équilibre  $\Omega^\varphi(t)$ , en imposant que la cornée incisée est en équilibre sous l'action des forces de pression (intraoculaire, coussin et aspiration exercées sur les mêmes frontières que pour le problème du contact  $P_c$ ) connues et des efforts de contact sans frottement exercés par le

trépan, et par la lame. On retrouve donc d'abord les équations d'équilibre du cas précédent :

$$\operatorname{div}T + f = 0 \text{ dans } \Omega(t), \tag{19}$$

$$\varphi = \varphi_0 \text{ sur } \Gamma_0, \tag{20}$$

$$T(x, F).n = g_1^i(F) \text{ sur } \Gamma_1^i \quad i = 1, \dots, 3, \tag{21}$$

$$T(x, F).n = g_2(F) \text{ sur } \Gamma_2, \tag{22}$$

$$f_c(z, x + u(x)) = 0 \text{ sur } \Gamma_c, \tag{23}$$

$$T(x, F).n = \lambda_c n_s(X) \text{ sur } \Gamma_c. \tag{24}$$

$$\operatorname{vol}(\Omega_2^0) = -\frac{1}{3} \int_{\Gamma_2} \varphi(x). \operatorname{cof}(F).nda = V_f. \tag{25}$$

De plus, au bout de la lame, le déplacement est imposé horizontalement et verticalement.

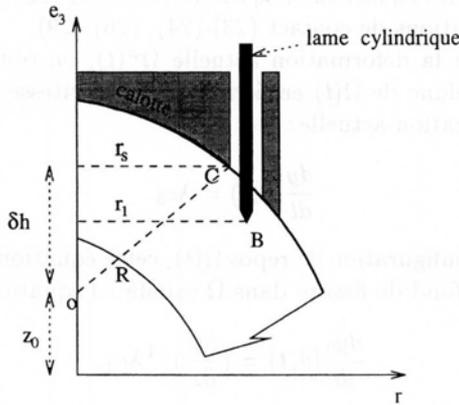


FIG. 5 - Exemple d'une calotte sphérique avec une cylindrique.

Après incision, le déplacement horizontal d'un point B du bout de la lame est tel que :

$$\left(x_1^B + u_1^B\right)^2 + \left(x_2^B + u_2^B\right)^2 = r_1^2, \quad \forall B \in \Sigma(t). \tag{26}$$

Sa position verticale correspond à la position verticale z du centre du support rigide, augmenté de l'écart  $\delta h$  de position verticale entre le centre z et le trou de calotte et diminué de l'enfoncement  $\int_0^t \lambda ds$  de la lame sur son support :

$$x_3^B + u_3^B = x_3^C + u_3^C - \int_0^t \lambda ds = z + \sqrt{R^2 - r_s^2} - \int_0^t \lambda ds, \quad \forall B \in \Sigma(t). \tag{27}$$

D'autre part, la lame est caractérisée sur sa frontière latérale par l'équation suivante :

$$f_b(z, X) = 0, \tag{28}$$

avec  $f_b(z, X)$  l'équation de la surface du contact avec la lame. La contrainte de contact bilatéral sur la lame est de la forme :

$$f_b(z, x + u(x)) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_b(t). \tag{29}$$

En l'absence des forces de frottement, la force de réaction associée, exercée par la lame sur  $\Gamma_b(t)$  est encore normale à la lame et orientée vers l'œil. Par conséquent, elle est donnée par

$$\begin{aligned} T(x, F).n &= g_b(x) = \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1}{2\varepsilon} f_b(z, x + u(x))^2 \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} f_b(z, x + u(x)) \frac{\partial f_b}{\partial X}(z, X), \quad \text{sur } \Gamma_b(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Le problème déterminant la configuration déformée  $\Omega^\varphi(t)$  à  $\Omega(t)$  connu est donc caractérisé par les équations d'équilibre (19)-(22) (25), la loi de comportement (1) et les équations de contact (23)-(24), (26)-(29).

Une fois connue la déformation actuelle  $\Omega^\varphi(t)$ , on obtient l'évolution du fond de fissure et donc de  $\Omega(t)$  en écrivant que sa vitesse de propagation est imposée en configuration actuelle :

$$\frac{dy}{dt}(\theta, t) = \lambda e_3. \tag{31}$$

Rapporté à la configuration de repos  $\Omega(t)$ , cette équation écrit que la vitesse de propagation du fond de fissure dans  $\Omega$  satisfait l'équation d'évolution :

$$\frac{dy_0}{dt}(\theta, t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{-1} \lambda e_3. \tag{32}$$

Ci-dessus  $\theta$  représente la coordonnée angulaire du point de la frontière  $\Sigma(t)$  considéré, et  $y_0$  sa position en configuration au repos. De  $y_0$ , on remonte à  $\Omega(t)$  par l'identité :

$$\Gamma_b(t) = \{y_0(\theta, s), 0 \leq s \leq t\}, \tag{33}$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 - \Gamma_b(t). \tag{34}$$

En procédant comme pour le problème de contact, le système complet, à résoudre numériquement afin de prédire la forme finale  $\Gamma_b(t_\infty)$  de l'incision à l'équilibre, est le suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, Id + \nabla u) : \nabla v dx &= \int_{\Omega(t)} f.v dx + \int_{\Gamma_1^i} g_1^i.v da + \int_{\Gamma_2} g_2.v da \\ &+ \int_{\Gamma_c} \lambda_c n_s(x).v da + \int_{\Gamma_b(t)} \lambda_b n_s(x) v da, \\ \forall v \in V_b, (u - u_0 - u_1) \in V_b, \forall t &\tag{35} \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} \text{cof } F.n.(x + u(x)) da = -3V_f, \tag{36}$$

$$f_c(z, x + u(x)) = 0 \text{ sur } \Gamma_c, \tag{37}$$

$$f_b(z, x + u(x)) = 0 \text{ sur } \Gamma_b(t), \tag{38}$$

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{-1} [\lambda e_3], \forall x \in \Sigma(t). \tag{39}$$

Ici l'espace  $V_b$  des fonctions tests est donné par :

$$V_b = \{v \in W^{1,p}(\Omega)^3; v|_{\Gamma_o} = 0; v|_{\Sigma} = 0\}, \tag{40}$$

et dépend du temps.

Le système (35)-(39) est la formulation variationnelle finale de notre problème de rupture, sur laquelle se fonde notre résolution numérique. Les inconnues sont l'histoire du champ de déplacement  $u \in V_b + u_0 + u_1$ , de la position verticale  $z$  et de la position au repos du fond de fissure  $y_0(t)$ . Dans ce problème,  $\Omega(t)$  et  $\Gamma_b(t)$  sont reliés à  $y_0(t)$  par (33) et (34).

## 4. Approximation du modèle

### 4.1. Cadre de discrétisation

Afin de bien approcher  $\Omega$  ou  $\Omega(t)$ , le maillage est défini d'abord sur un plan méridien à l'aide des quadrangles de côtés courbes. Ces quadrangles sont ensuite transformés en hexaèdres courbes par ajout des côtés paraboliques dans le sens circonférentiel. On construit ainsi une partition  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  en un nombre fini  $N_h$  de sous-domaines hexaédriques courbes  $\{\Omega_l\}$  de diamètres  $\leq h$  (cf. Ciarlet [Cia 78]). Cela signifie que l'on a

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{l=1}^{N_h} \Omega_l, \tag{41}$$

où  $(\Omega_l)$  forme une partition admissible de  $\Omega$  au sens des éléments finis.

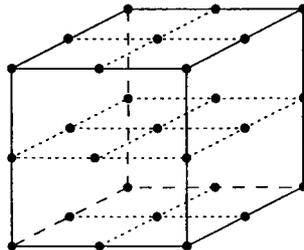


FIG. 6 - *Elément de référence à 27 nœuds.*

Sur cette triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\bar{\Omega}$  on utilise des éléments finis isoparamétriques hexaédriques d'ordre 2 (type  $Q_2$ ), qui sont des briques à 27 noeuds utilisant des fonctions de forme paraboliques.

Chaque nœud du maillage est associé à trois degrés de liberté associés chacun à une direction de déplacement. La contrainte de contact, comme la pression, est calculée aux neuf points de Gauss de la facette de l'élément en contact avec le support rigide.

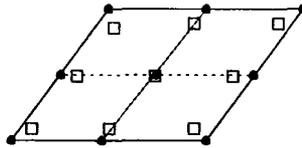


FIG. 7 - Une facette d'un élément fini en contact. Les carrés indiquent les points où l'intégration est effectuée pour le calcul de la formulation faible de la condition de contact.

Les espace d'approximation,  $V_h$  et  $V_{bh}(t)$  utilisés pour la résolution des problèmes de contact et de rupture sont alors simplement donnés respectivement par:

$$V_h = \left\{ v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3, v_h \text{ continue}, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0, v_{h|\Omega_l} = v_l \circ \varphi_l^{-1}, \right. \\ \left. v_l \in [Q_2(\hat{\Omega})]^3, \forall l = 1, \dots, N_h \right\}, \quad (42)$$

$$V_{bh}(t) = \left\{ v_h : \bar{\Omega}(t) \rightarrow \mathbb{R}^3, v_h \text{ continue}, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0, v_h = 0 \text{ sur } \Sigma(t), \right. \\ \left. v_{h|\Omega_l} = v_l \circ \varphi_l^{-1}, v_l \in [Q_2(\hat{\Omega})]^3, \forall l = 1, \dots, N_h \right\}. \quad (43)$$

Ci-dessus  $\varphi_l$  est l'application de l'élément de référence de  $\hat{\Omega} = [-1, +1]^3$  vers  $\Omega_l$  définie par

$$\varphi_l(\hat{x}) = \sum_{\alpha=1}^{27} x^{\alpha l} \hat{\varphi}^{\alpha}(\hat{x}),$$

avec  $x^{\alpha l}$  les coordonnées au repos du nœud  $M_{\alpha}$  de l'élément  $\Omega_l$  et  $\hat{\varphi}^{\alpha}$  la fonction de  $Q_2(\hat{\Omega})$  qui vaut 1 au nœud  $\alpha$  et 0 ailleurs. L'espace  $Q_2(\hat{\Omega})$  est l'ensemble des polynômes  $p$  de degré  $\leq 2$  par rapport à chaque variable, de la forme:

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} \longmapsto p(\hat{x}) = \sum_{\substack{\alpha_i \leq 2 \\ 1 \leq i \leq 3}} \nu_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \hat{x}_1^{\alpha_1} \hat{x}_2^{\alpha_2} \hat{x}_3^{\alpha_3} \quad (44)$$

**Remarque :** La triangulation  $\mathcal{T}_h$  utilisée évolue au cours du temps avec  $y_0(t)$  dans le cas d'une propagation de l'incision. Autrement dit  $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(t)$  est une triangulation de  $\Omega(t)$  qui dépend du temps.

L'approximation en éléments finis du problème  $P_c$  (resp.  $P_r$ ) est simplement obtenue en remplaçant dans (15) (resp. (35)) l'espace  $V$  par le sous-espace  $V_h$  (resp.  $V_{bh}$ ) de dimension finie.

**4.2. Formulation variationnelle de  $P_r$  discrétisé:  $P_{rh}$**

Le présent problème  $P_r$  est un problème d'évolution en temps, sa discrétisation est basée sur trois approximations :

**4.2.1. Approximation de la forme actuelle de l'incision.**

La forme de l'incision  $\Gamma_b(t)$  correspond à une frontière de  $\Omega(t)$  donc à des frontières d'éléments finis et est caractérisée par la liste et la position  $Y$  des noeuds d'éléments finis qui sont sur cette incision.

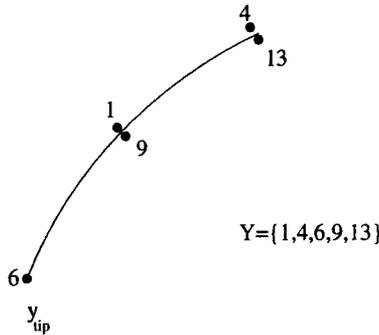


FIG. 8 - L'incision est constituée d'un nombre fini de points en profondeur. Ces points sont exactement sur l'incision grâce à la procédure d'ajustement du maillage.

On remarque que ces noeuds sont dédoublés avec un noeud sur chaque côté de la fente, sauf au bout de l'incision noté  $y_{tip}(\theta)$ .

**4.2.2. Discrétisation du  $P_r$  à l'instant  $t^n$  donné:  $P_{rh}^n$**

A l'instant  $t^n$ , avec  $Y(t^n)$  donnée, l'approximation en éléments finis du problème  $P_r^n$  est simplement obtenue en remplaçant dans (35) l'espace  $V_b$  par le sous-espace  $V_{bh}$  de dimension finie.

La formulation du problème discrétisé  $P_{rh}^n$  est par conséquent :

$$\text{Trouver } (u_h^n - u_0 - u_1, z) \in V_{bh} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \forall v_h \in V_{bh}$$

$$\int_{\Omega(t^n)} \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, Id + \nabla u_h^n) : \nabla v_h dx = \int_{\Omega(t^n)} f \cdot v_h dx + \int_{\Gamma_1^i} g_1^i \cdot v_h da$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_c} \lambda_c n_s(x) \cdot v da \\
 & + \int_{\Gamma_b(t^n)} \lambda_b n_s(x) \cdot v da, \tag{45}
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} \text{cof } F_h^n \cdot n \cdot (x + u_h^n(x)) da = -3V_f, \tag{46}$$

$$f_c(z, x + u_h^n(x)) = 0 \text{ sur } \Gamma_c, \tag{47}$$

$$f_b(z, x + u_h^n(x)) = 0 \text{ sur } \Gamma_b(t^n), \tag{48}$$

avec  $F_h^n = Id + \nabla u_h^n$ .

**4.2.3. Discrétisation en temps de l'équation différentielle.**

On commence par introduire un découpage de l'intervalle de temps  $[0, T]$  que l'on supposera uniforme pour simplifier: on définit donc un pas de temps  $\Delta t = \frac{T}{N_t}$ , associé à un entier  $N_t \geq 1$ , et on pose :

$$t^n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N_t.$$

On cherche alors à calculer pour tout  $n = 1, \dots, N_t$  une approximation  $y_{tip}^{n+1}$  de la position du fond de fissure à  $t^{n+1}$ . La méthode la plus simple, à laquelle nous nous limiterons, est basée sur un schéma d'Euler explicite: elle consiste à remplacer l'équation différentielle (39) par :

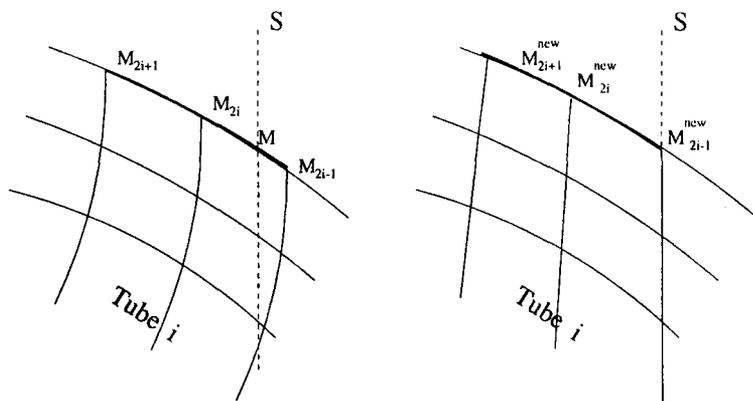
$$\frac{\varphi_h(y_{tip}^{n+1}) - \varphi_h(y_{tip}^n)}{\Delta t} = \lambda e_3, \quad 0 \leq n \leq N_t - 1, \tag{49}$$

où  $\varphi_h$  est la solution des équations d'équilibre à l'instant  $t^n$ . Connaissant  $y_{tip}^n$ , l'équation (49) permet ainsi de calculer  $y_{tip}^{n+1}$  puis d'actualiser la liste  $Y$  par la procédure suivante :

- a) supposons connue  $Y$  la forme du front incisé, c'est à dire la géométrie de la cornée incisée maillée par éléments finis. On connaît aussi d'après (45)-(48) la position d'équilibre  $\varphi_h$  associée.
- b) on calcule la nouvelle position de la pointe de la lame en configuration déformée par le schéma d'Euler explicite :

$$\varphi_h(y_{tip}^{new}) = \varphi_h(y_{tip}) + \lambda \Delta t e_3,$$

- c) déplacement des noeuds sous le plan de fissure rayon par rayon et couche par couche de manière à ce qu'ils s'alignent à la verticale du trépan en configuration déformée. Pour ce faire, il faut d'abord calculer l'abscisse curviligne sur le rayon du point  $M$  qui se trouve sur le cylindre  $S$  d'équation  $g$  après déformation. Pour calculer les points de contact  $M$ , il suffit



de résoudre l'équation suivante :

$$g \left( \sum_{\alpha=-1}^1 M_{2i-\alpha} \phi_{\alpha}(s) \right) = 0, \tag{50}$$

par la méthode de la sécante,  $M_{2i-\alpha}$  représentant la position des noeuds après déformation. Les coordonnées du point  $M$  en configuration de repos sont alors données par :

$$X(M) = \sum_{\alpha=-1}^{+1} X(M_{2i-\alpha}) \phi_{\alpha}(s_c), \tag{51}$$

avec  $s_c$  la solution de  $f(s) = 0$ .

Ces points de contacts n'ont aucune raison d'être des nœuds du maillage. On bouge alors tous les nœuds du rayon de manière à ce que le nœud du tube frontière  $i$  soit sur le cylindre de contact après déformation et que le maillage reste relativement régulier.

Pour ce faire, soient un rayon  $k$  et un tube  $i$ , et soit  $s_i$  ( $s_{min} < s_i < s_{max}$ ) l'abscisse de leur intersection avec le rayon, avec  $s_{min}$  et  $s_{max}$  les abscisses des extrémités du rayon considéré. On introduit l'application

$H : [s_{min}, s_{max}] \rightarrow [s_{min}, s_{max}]$  définie par

$$H(s_j) = \frac{s_j - s_{min}}{s_i - s_{min}} s_c - \frac{s_i - s_j}{s_i - s_{min}} s_{min} \quad \text{si } s_{min} \leq s_j \leq s_i \tag{52}$$

$$= \frac{s_j - s_{max}}{s_i - s_{max}} s_c - \frac{s_i - s_j}{s_i - s_{max}} s_{max} \quad \text{si } s_i \leq s_j \leq s_{max}, \tag{53}$$

avec  $s_c$  l'abscisse du point de contact. Cette application est linéaire par morceaux et nulle aux extrémités. L'image du point d'intersection entre le rayon  $k$  et le tube  $i$ , par cette application est donc un point de contact. La nouvelle position du nœud  $M_j$  est alors la position en configuration au

repos du point d'abscisse curviligne  $H(s_j)$ . Ce point est obtenu à l'aide de la formule (51). Le choix de cette fonction nous permet de déplacer les noeuds du rayon progressivement vers le point de contact.

d) pour expliquer cette étape, on s'appuie sur la figure (9) suivante : après

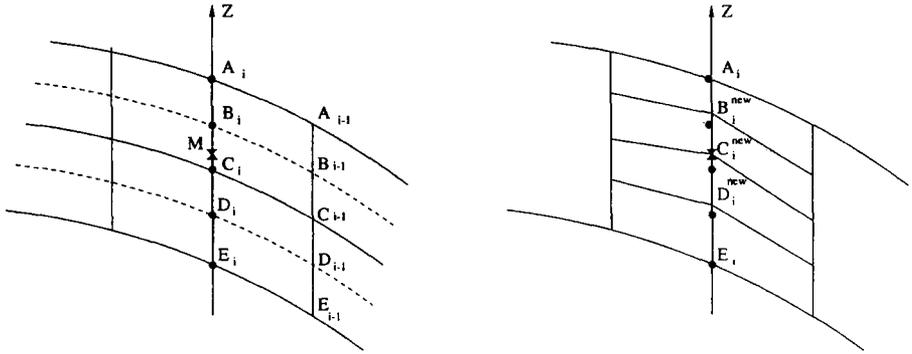


FIG. 9 - Déplacements des noeuds.

détermination de la position actuelle  $M \in y_{tip}^{new}$  du fond de la lame, on bouge le noeud  $C_i$  en configuration de repos afin qu'il coïncide avec  $M$  après déformation. Par contraction du maillage précédent (étape (c)),  $M$  est sur une arête verticale. D'après la représentation isoparamétrique, sa coordonnée  $s$  dans l'élément de référence vérifie l'équation du second degré en  $s$  :

$$Z_{tip}^\varphi = \phi_{-1}(s)Z_{A_i}^\varphi + \phi_0(s)Z_{B_i}^\varphi + \phi_1(s)Z_{C_i}^\varphi, \tag{54}$$

avec  $\phi_{-1}(s) = (1-s)(1-2s)$ ,  $\phi_0(s) = 4s(1-s)$  et  $\phi_1(s) = s(2s-1)$ . La position du nouveau noeud en configuration de référence est alors

$$X(C_i^{new}) = \phi_{-1}(s)X_{A_i} + \phi_0(s)X_{B_i} + \phi_1(s)X_{C_i}, \tag{55}$$

et  $y_{tip}^{new}$  est l'ensemble de tous les  $C_i^{new}$ . On bouge aussi les noeuds voisins de manière à éviter les éléments distordus. Pour ce faire on bouge  $C_{i-1}$  de façon à imposer, en configuration de référence, la relation suivante :

$$\frac{B_i A_i}{B_i C_i^{new}} = \frac{B_{i-1} A_{i-1}}{B_{i-1} C_{i-1}^{new}}. \tag{56}$$

- e) dédoublement des noeuds d'éléments finis (sur le cylindre  $S$ ) excepté ceux qui sont sur  $y_{tip}^{new}$  (rupture de  $\Omega(t)$ ),
- f) ajout à l'incision  $Y$  de tous les nouveaux noeuds dédoublés et  $y_{tip}^{new}$ . Cela détermine la nouvelle forme incisée  $Y(t^{n+1})$ , et le nouveau maillage correspondant.

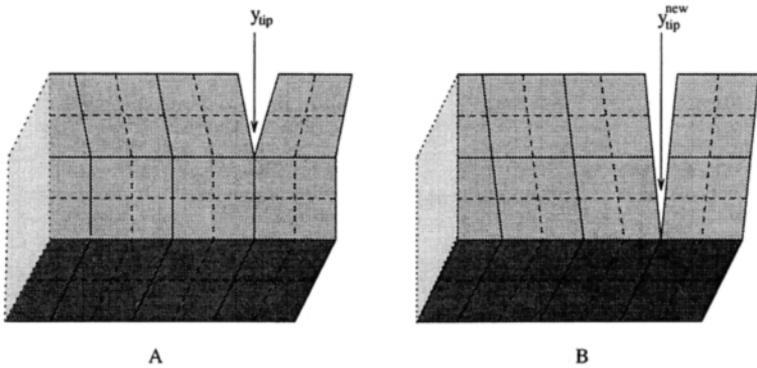


FIG. 10 - Dédoublage des nœuds.

## 5. Traitements numériques

### 5.1. Ecriture algébrique du problème $P_{ch}$

On suppose tout d'abord que la position du trépan est fixée, autrement dit que le déplacement vertical  $z$  est donné. Dans ce cas, on ne traite que le problème discrétisé sans contrainte sur le volume interne. La seule difficulté qui reste alors dans le calcul numérique provient du traitement de la contrainte du contact. En fait, il est très difficile de construire des fonctions d'approximation dans un ensemble avec contraintes. Un procédé commode et efficace pour traiter cette contrainte consiste à utiliser une méthode de pénalisation, c'est-à-dire, qu'on écrit la condition (13) avec  $\varepsilon > 0$ . Le problème discrétisé devient (en notant  $X = x + u_h(x)$ ): Trouver  $u_h - u_0 \in V_h$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, Id + \nabla u_h) : \nabla v_h \, dx &= \int_{\Omega} f \cdot v_h \, dx + \int_{\Gamma_1^i} g_1^i \cdot v_h \, da \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} f_c(z, x + u_h(x)) \frac{\partial f_c}{\partial X}(z, X) v_h \, da \\ &+ \int_{\Gamma_2} g_2 \cdot v_h \, da \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (57)$$

Soit  $(\phi_i)_{i=1}^{N_h}$  une base de l'espace  $V_h$ . Si on écrit le système (57) en base  $\phi_i$ , notre problème en éléments finis donnera alors le système algébrique fortement non linéaire suivant: Trouver  $U \in \mathbb{R}^{N_h}$  tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U, f, g) &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{N_h} \quad (58) \\ \text{avec } \mathcal{F}_i(U, f, g) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, Id + \nabla u_h) : \nabla \phi_i \, dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} f_c(z, x + u_h(x)) \frac{\partial f_c}{\partial X}(z, X) \phi_i \, da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} f \cdot \phi_i \, dx - \int_{\Gamma_1^i} g_1^j \cdot \phi_i \, da \\
 & - \int_{\Gamma_2} g_2 \cdot \phi_i \, da, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_h, \tag{59}
 \end{aligned}$$

$$u_h(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{N_h} U_i \phi_i(x). \tag{60}$$

Le gradient de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $U$  est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U}(U, f, g) \cdot V &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial F^2}(x, Id + \nabla u_h) : \nabla v_h \right) : \nabla \phi_i \, dx \\
 & - \int_{\Gamma_1^i} \frac{\partial g_1^j}{\partial u_h}(u_h) \cdot \phi_i \, da - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial g_2}{\partial u_h}(u_h) \cdot \phi_i \, da \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} f_c(z, x + u_h(x)) v_h \cdot \frac{\partial^2 f_c}{\partial X^2}(z, X) \phi_i \, da \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} \left( \frac{\partial f_c}{\partial X} \cdot v_h \right) \left( \frac{\partial f_c}{\partial X} \cdot \phi_i \right) da, \tag{61}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } v_h = \sum_{i=1}^{N_h} V_i \phi_i(x). \tag{62}$$

Pour l'intégration des termes pénalisés sur l'élément fini choisi  $\Omega^l$  de frontière  $\Gamma_c^l$  en contact, on utilise une formule numérique aux points de Gauss :

$$\int_{\Gamma_c} f_c(z, X) \frac{\partial f_c}{\partial X}(z, X) \phi_i \, da = \sum_{j=1}^{NG} f_c(X_j^l) \frac{\partial f_c(X_j^l)}{\partial X} \omega_j^l \phi_i(X_j^l), \tag{63}$$

$$\int_{\Gamma_c} f_c(z, X) \phi_k \cdot \frac{\partial^2 f_c}{\partial X^2}(z, X) \phi_i \, da = \sum_{j=1}^{NG} f_c(X_j^l) \phi_k(X_j^l) \frac{\partial^2 f_c(X_j^l)}{\partial X^2} \omega_j^l \phi_i(X_j^l), \tag{64}$$

$$\int_{\Gamma_c} \left( \frac{\partial f_c}{\partial X} \cdot \phi_k \right) \left( \frac{\partial f_c}{\partial X} \cdot \phi_i \right) da = \sum_{j=1}^{NG} \frac{\partial f_c(X_j^l)}{\partial X} \phi_k(X_j^l) \frac{\partial f_c(X_j^l)}{\partial X} \omega_j^l \phi_i(X_j^l). \tag{65}$$

Les  $X_j^l = x + u_j(x)$  sont les positions actuelles des points de Gauss de l'élément de surface courant ( $\Gamma^l$ ),  $\omega_j^l$  leurs poids avec  $j$  de 1 à  $NG$ . Le nombre  $NG$  de points de Gauss vaut 9 sur une facette de l'élément choisi.

Maintenant, si le déplacement vertical  $z$  du trépan est aussi une inconnue, on rajoutera la contrainte de volume fixe au problème précédent. Le nouveau problème  $P_{ch}$ , écrit dans la base  $(\phi_i)_{i=1}^{N_h}$ , sera de la forme suivante :

$$\text{Trouver } (U, z) \in \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad : \tag{66}$$

$$\mathcal{F}(U, z, f, g) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{N_h}, \tag{66}$$

$$\text{vol}(U) - V_f = 0. \tag{67}$$

Ci-dessus,  $\mathcal{F}_i(U, z, f, g)$  et son gradient par rapport à  $U$  sont respectivement données par les expressions (59) et (61). Son gradient par rapport à  $z$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial z}(U, z, f, g) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} \frac{\partial f_c}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_c}{\partial X} \phi_i da \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} f_c(z, x + u_h(x)) \frac{\partial^2 f_c}{\partial X \partial z} \phi_i da. \end{aligned} \quad (68)$$

Quant au volume, son gradient par rapport à  $U$  est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{vol}(U)}{\partial U} \cdot V &= -\frac{1}{3} \int_{\Gamma_2} v_h \text{cof}(Id + \nabla u_h) \cdot n \cdot da \\ &- \frac{1}{3} \int_{\Gamma_2} (x + u_h) \frac{\partial \text{cof}(Id + \nabla u_h)}{\partial v_h} \cdot n \cdot da. \end{aligned} \quad (69)$$

## 5.2. Méthode de résolution pour le problème $P_{rh}$

Après discrétisation en temps et calcul de  $y_h$ , le problème d'évolution est réduit à la solution d'une suite de problèmes d'élasticité statiques avec contact écrits sur la configuration  $\Omega(t)$  et sur le maillage  $y_h(t)$  associé. A chaque pas de temps, on résout le problème comme au paragraphe 4.1 en traitant les deux conditions de contact par pénalisation. Puis on l'écrit dans la base  $(\phi_i)_{i=1}^{N_h}$ . On a donc le système algébrique suivant :

Trouver  $(U, z) \in \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}$  tel que

$$\mathcal{F}(U, z, f, g) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{N_h}, \quad (70)$$

$$\text{vol}(U) - V_f = 0, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{F}_i(U, f, g) &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, Id + \nabla u_h) : \nabla \phi_i dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} f_c(z, x + u_h(x)) \frac{\partial f_c}{\partial X}(z, X) \phi_i da \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_b(t)} f_b(z, x + u_h(x)) \frac{\partial f_b}{\partial X}(z, X) \phi_i da \\ &- \int_{\Omega(t)} f \cdot \phi_i dx - \int_{\Gamma_1^i} g_1^j \cdot \phi_i da - \int_{\Gamma_2} g_2 \cdot \phi_i da, \end{aligned} \quad (72)$$

$$u_h(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{N_h} U_i \phi_i(x). \quad (73)$$

## 5.3. Algorithme de la résolution

Les problèmes (66)-(67) ou (70)-(71) sont fortement nonlinéaires. Leur résolution brutale par un algorithme de Newton est impossible à moins de disposer

d'une bonne estimation de la solution initiale. Pour ce faire, on ramène la résolution des problèmes (66)-(67) ou (70)-(71) à celle d'une suite de problèmes intermédiaires, en supposant que les chargements (ici ce sont les pressions intraoculaire, coussin et aspiration) d'un problème à l'autre sont incrémentés de manière progressive.

Plus précisément, on suppose que la solution  $(U_\lambda, z_\lambda)$ , correspondant aux chargements  $g(\lambda)$  (où la courbe  $g(\lambda)$  est définie a priori par l'utilisateur pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  avec  $g(1)$  correspondant au chargement final), est connue, avant de calculer celle pour  $g(\lambda + \Delta\lambda)$ . Ceci se fait par une méthode de continuation le long de la courbe engendrée par les solutions (Keller [Kel 83], Le Tallec [LeT 94]) en prenant  $\Delta\lambda$  comme inconnue supplémentaire, et en rajoutant l'équation de longueur d'arc imposée :

$$\|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\|^2 + \Delta\lambda^2 = \Delta s^2. \tag{74}$$

L'algorithme de résolution est le suivant :

a) Initialisation : Pour la recherche du premier point de la courbe:

- on se donne  $(U^0, z^0, \lambda^0) = (0, 0, 0)$  et  $\Delta s_0$ ,
- on choisit  $\Delta\lambda^0$  un incrément raisonnable pour le chargement, et on pose  $\lambda^1 = \Delta\lambda^0$ ,
- on résout le système non linéaire, par la méthode de Newton :

$$(S_0) \begin{cases} \mathcal{F}(U^1, z^1, g(\lambda^1)) = 0, \\ vol(U^1) - V_f = 0, \\ \dot{U} = 0, \dot{z} = 0, \lambda^1 = \Delta\lambda^0 \end{cases}$$

et on pose:

$$\Delta U^1 = U^1 - U^0, \quad \Delta s_1 = \sqrt{3} \|\Delta U^1\|_{l^2}, \tag{75}$$

$$\omega_z = \frac{\|\Delta U^1\|_{l^2}^2}{\|z^1 - z^0\|^2}, \quad \omega_\lambda = \frac{\|\Delta U^1\|_{l^2}^2}{\|\Delta\lambda^0\|^2}. \tag{76}$$

Ici,  $\Delta s_1$  est le pas d'incrément en  $s$  sur la courbe solution.

b) Boucle de continuation sur la courbe solution : Pour tout  $p \geq 0$ , avec  $U^p, z^p, \lambda^p$  et  $\Delta s_p$  connues et tant que  $\lambda^p \leq 1$ ,

1. on calcule la vitesse  $(\dot{U}^p, \dot{z}^p, \dot{\lambda}^p)$  en résolvant le système suivant :

$$(S_p^v) \left\{ \begin{array}{l} \frac{DF(U^p, z^p, g(\lambda^p))}{D(U, z, \lambda)} (\dot{U}^p, \dot{z}^p, \dot{\lambda}^p) = 0, \\ \frac{\partial vol(U^p)}{\partial U} \dot{U}^p = 0, \\ \|\dot{U}^p\|_z^2 + \omega_z \|\dot{z}^p\|^2 + \omega_\lambda \|\dot{\lambda}^p\|^2 = 1; \end{array} \right.$$

La dernière équation est une normalisation scalaire qui permet de calculer le paramètre de chargement en fonction de la longueur d'arc  $s$  le long de la courbe solution.

2. on pose  $(U_0^{p+1}, z_0^{p+1}, \lambda_0^{p+1}) = (U^p, z^p, \lambda^p) + \Delta s_p (\dot{U}^p, \dot{z}^p, \dot{\lambda}^p)$  (prédiction de la nouvelle solution).
3. on résout le système non linéaire en  $(U^{p+1}, z^{p+1}, \lambda^{p+1})$ :

$$(S_{p+1}) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(U^{p+1}, z^{p+1}, g(\lambda^{p+1})) = 0, \\ vol(U^{p+1}) - V_f = 0, \end{array} \right.$$

par une méthode de Newton où les incréments  $(U_{k+1}^{p+1} - U_k^{p+1})$  sont contraints de rester perpendiculaires à la vitesse :

$$\begin{aligned} \dot{U}_k^{p+1} (U_{k+1}^{p+1} - U_k^{p+1}) &+ \omega_z \dot{z}_k^{p+1} (z_{k+1}^{p+1} - z_k^{p+1}) \\ &+ \omega_\lambda \dot{\lambda}_k^{p+1} (\lambda_{k+1}^{p+1} - \lambda_k^{p+1}) = 0; \end{aligned}$$

Le système linéaire est résolu par Gauss par blocs (bordering algorithm).

4. on pose  $\Delta s_{p+1} = \nu_p \Delta s_p$  avec  $\nu_p$  une fonction du nombre d'itérations de Newton requis dans 3). Par exemple,  $\nu_p = 2^{\alpha(I^* - I_p)}$  où  $I^*$  le nombre d'itérations souhaitable,  $I_p$  le nombre d'itérations de Newton requis et  $\alpha$  un facteur de "damping" fixe.

## 6. Résultats numériques

### 6.1. Simulation de la trépanation de la cornée

On simule la trépanation de la cornée avec un instrument, de forme cylindrique ayant un poids de 60 grammes. Ce trépan est constitué d'une lame cylindrique tournant autour de son axe, d'un support rigide en contact avec l'œil et d'un système de fixation pneumatique (figure 2).

Lorsque le trépan est appliqué sur l'œil, ceci produit immédiatement une augmentation de la pression intraoculaire  $p_i$  et de la pression du coussin  $p_c$  respectivement de 15 mm Hg à 23 mm Hg et de 4 mm Hg à 5.5 mm Hg. Ensuite lorsque le système pneumatique aspire avec une pression  $p_a$  variant de

100 mm Hg à 488 mm Hg, la pression intraoculaire croît de 33 mm Hg tandis que la pression du coussin reste presque inchangée.

Par symétrie, seul un quart de l'œil est considéré (figure 11). Ces données sont issues de mesures expérimentales fournies par Le Professeur Hanna.

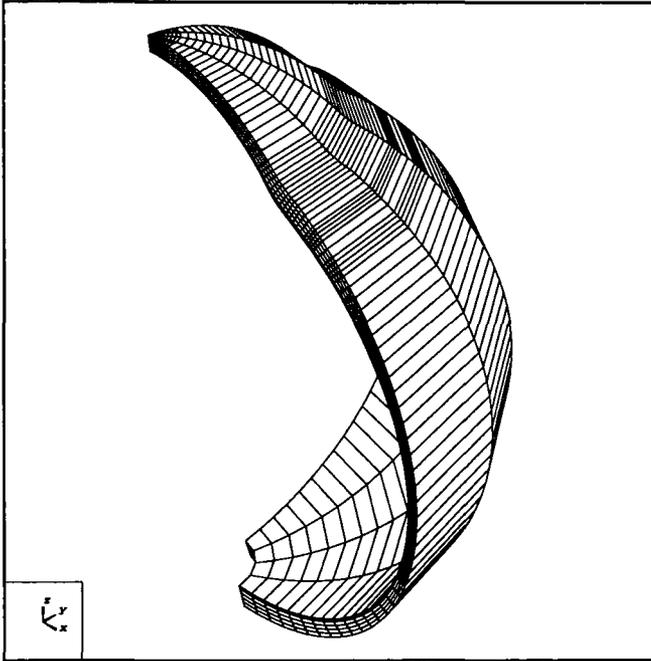


FIG. 11 - *Maillage 3D d'un quart de l'œil. Nombre d'éléments : 267. Nombre de nœuds : 3143. Nombre de faces : 1816.*

La courbe de chargement  $g(\lambda)$  est définie à partir des courbes expérimentales :

- $\lambda = 0$  correspond au chargement suivant :

$$p_i = 0.0019 \text{ MPa}, p_c = 0.0005 \text{ MPa}, p_a = 0 \text{ MPa};$$

- $\lambda = 1$  correspond au chargement suivant :

$$p_i = 0.0073 \text{ MPa}, p_c = 0.0007 \text{ MPa}, p_a = 0.0642 \text{ MPa}.$$

On a choisi une loi isotrope de St Venant-Kirchhoff pour la sclère de coefficients donnés par :

$$E = 5 \text{ MPa}, \quad \nu = .45, \tag{77}$$

une loi transversalement isotrope pour la cornée dont les coefficients sont les suivants (cf. Jouve [Jou 93]):

$$E_1 = 11.0 \text{ MPa}, \quad \nu_{12} = 0.256,$$

$$E_2 = 0.0393 \text{ MPa}, \quad \nu_{23} = 0.474,$$

$$G_{12} = 0.0638 \text{ MPa}.$$

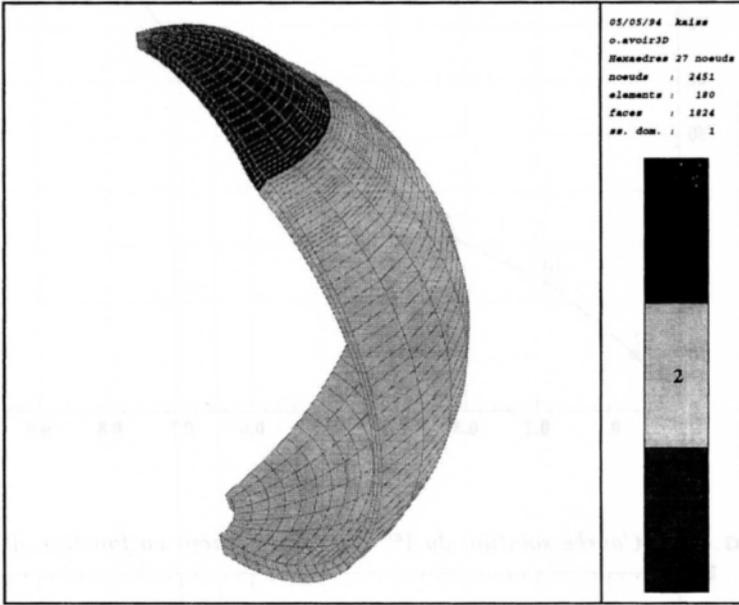


FIG. 12 - 1: Matériau transversalement isotrope. 2: Matériau isotrope. 3: Matériau isotrope.

Les simulations numériques ont été effectuées en utilisant trois yeux de constantes mécaniques différentes pour la zone 3, en choisissant dans chaque cas une loi isotrope de St Venant-Kirchhoff pour le matériau de la zone limbique (zone qui fait la jonction entre la cornée et la sclère), mais avec un module de Young  $E$  égal à 10 MPa, 8 MPa ou 6 MPa; et avec un coefficient de Poisson ( $\nu = 0.45$ ) identique pour les 3 cas.

Dans les trois cas, par une première simulation sans contact avec le trépan (avec coussin uniquement), on étudie la déformation de l'œil sous le chargement correspondant à  $\lambda = 0$ . On en déduit le volume intérieur  $V_f$  après déformation et la variation relative  $\frac{\delta V}{V_0}$ . En initialisant par un incrément de chargement  $\Delta\lambda^0 = 0.01$ , on a calculé la déformation de l'œil sous l'action du trépan et l'aspiration le long la courbe  $g(\lambda)$ .

La méthode a convergé en 9 itérations de continuation dans le premier cas. 8 dans le second et 16 dans le troisième. Le nombre d'itérations de Newton nécessaire, à chaque itération de continuation, est indiqué sur les figures (13-15).

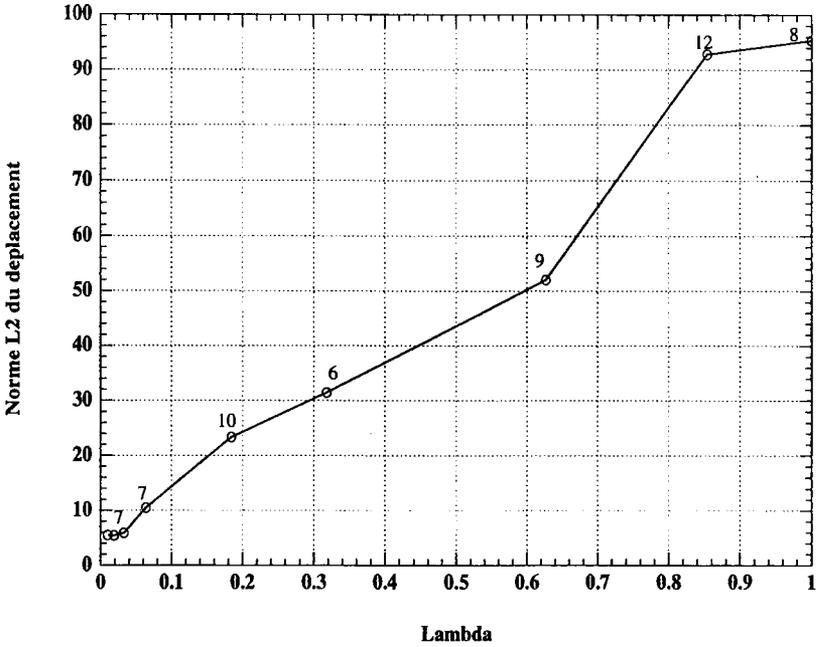


FIG. 13 - Courbe solution du 1<sup>er</sup> cas (déplacement en fonction de  $\lambda$ ).

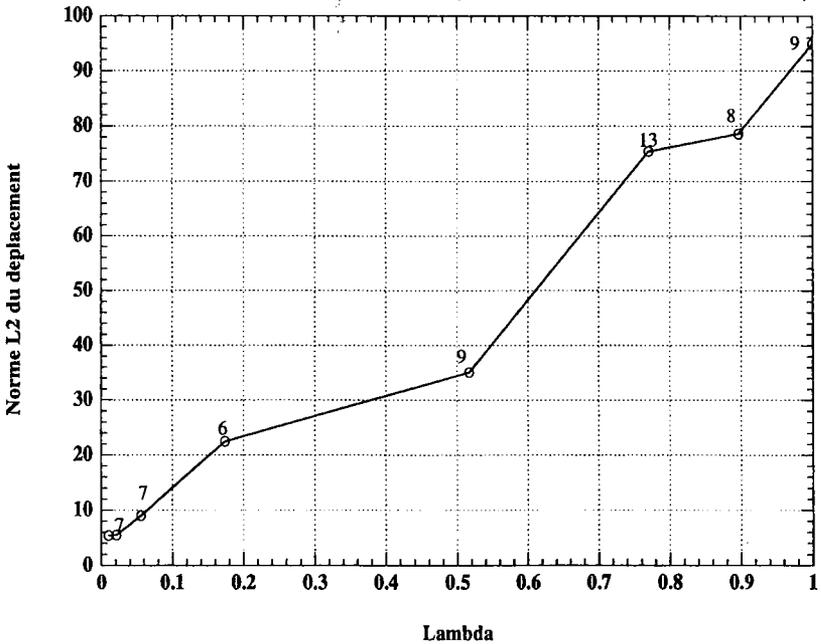
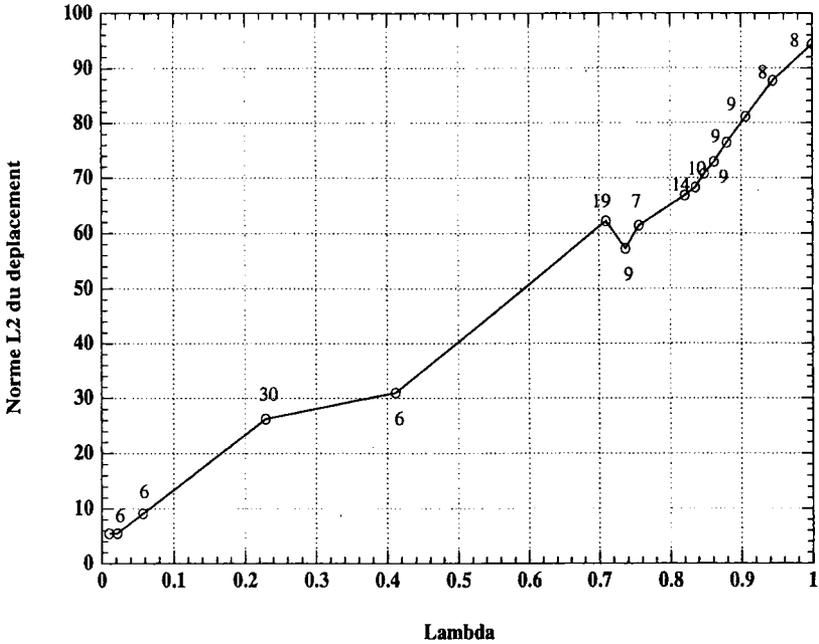


FIG. 14 - Courbe solution du 2<sup>eme</sup> cas.

FIG. 15 - Courbe solution du 3<sup>ème</sup> cas.

En négligeant la force induite par l'appui du chirurgien lors de la pose du trépan, le poids global de l'instrument (a priori 60g) se calcule à partir de la résultante des forces de contact.

	Poids en g	CPU (HP 735)	Position z en mm
Cas isotrope	64.347	1h 16mn	-2.06945435
1 <sup>er</sup> cas E=10 MPa	66.725	30mn 20s	-1.94089627
2 <sup>ème</sup> cas E=8 MPa	66.942	40mn	-1.93289307
3 <sup>ème</sup> cas E=6 MPa	66.967	1h 28mn	-1.92440588

Au vu de ces résultats, on constate que le poids du trépan, valeur importante pour la comparaison des différents cas tests, reste sensiblement le même pour les trois options de matériau anisotrope.

En ce qui concerne les déplacements, on présente sur la page suivante une comparaison des quatre cas dans le sens radial (figure 16) (resp. dans le sens longitudinal figure 17).

Sur le plan qualitatif comme le confirme les résultats, on retient le calcul avec la première option de matériau anisotrope. Enfin on présente sur la figure 18 le déplacement sur tout l'œil, et sur la figure 19 les isovaleurs de contraintes maximales sur une coupe méridienne 2D autour de la région limbe-cornée.

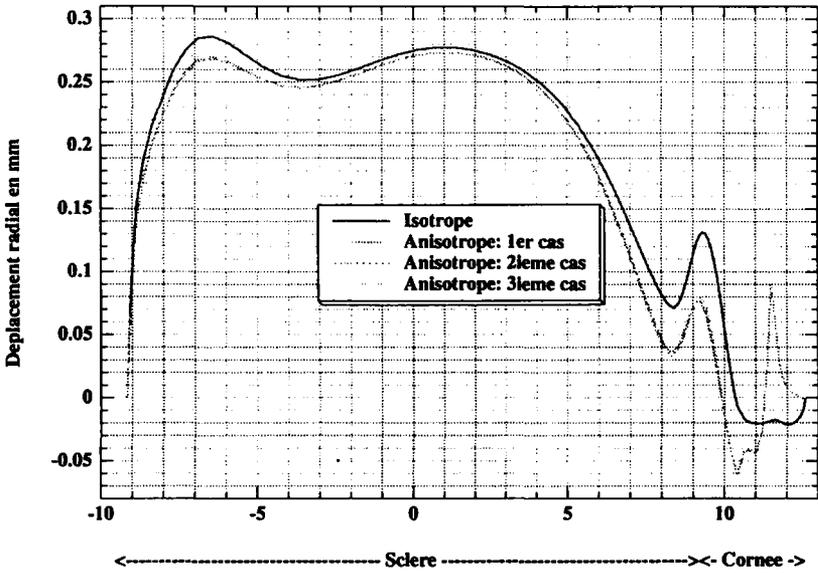


FIG. 16 - Comparaison en déplacement radial des quatre cas.

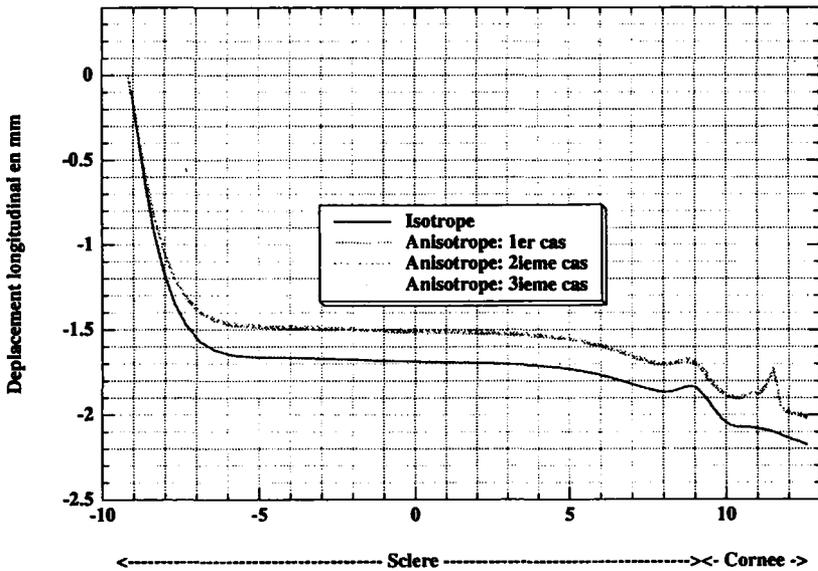


FIG. 17 - Comparaison en déplacement longitudinal des quatre cas.

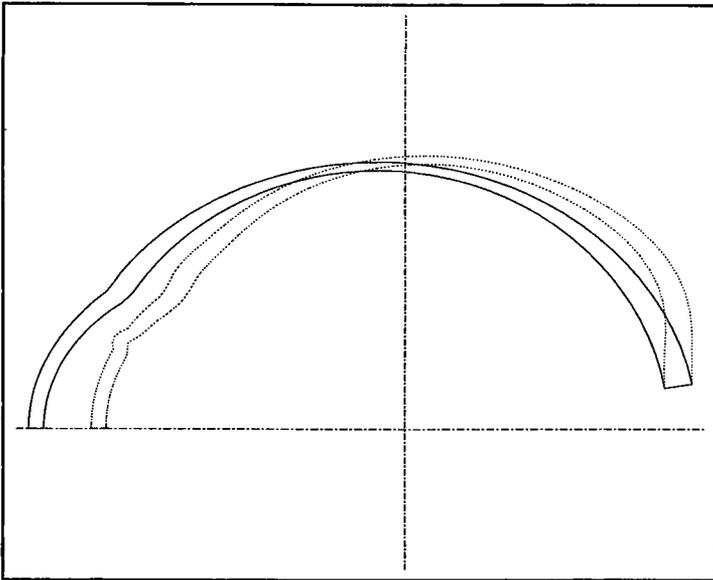


FIG. 18 - Comparaison des coupes méridiennes de l'œil avant déformation (en traits pleins) et après déformation (en pointillés) dans le 1<sup>er</sup> cas.

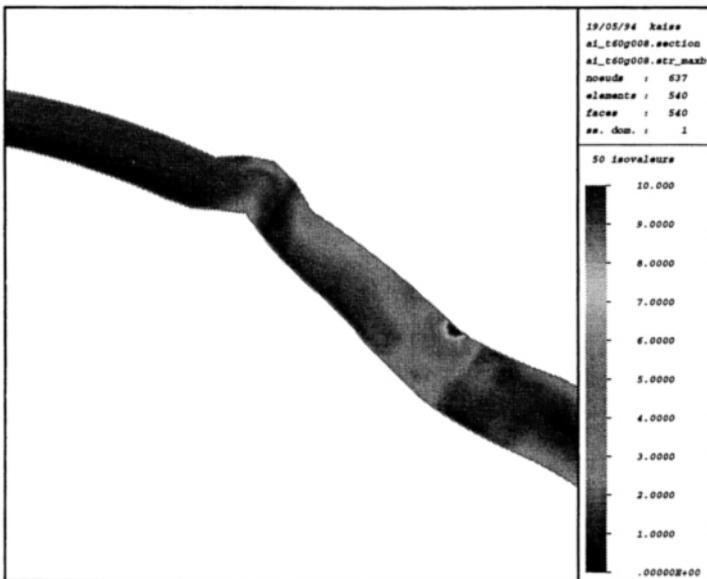


FIG. 19 - Les isovaleurs de contraintes maximales sur une coupe méridienne 2D autour de la région limbe-cornée.

6.2. Incision

Après avoir déterminé la dernière configuration déformée de l'œil, obtenue par continuation, on modifie le maillage de manière à ce que la première ligne de maillage vienne en contact avec la lame du trépan en configuration déformée (paragraphe 4.2 et figure 20). Après une première incision de 42.5% de

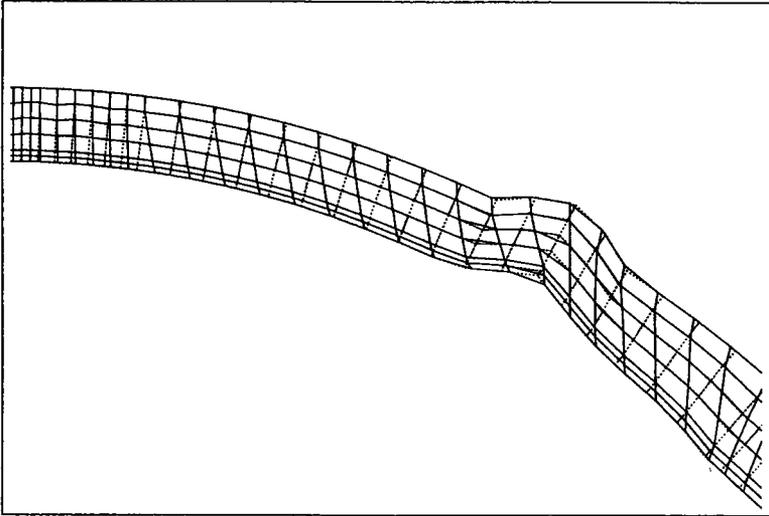


FIG. 20 - Nouveau maillage (en lignes continues), ancien (en pointillés).

profondeur qui représente le premier élément dans l'épaisseur (de l'extérieur vers l'intérieur). Après calcul de  $y_h^1$  et maillage de  $\Omega^1$ , la déformation de ce front incisé a été obtenue en résolvant le problème  $P_{r,h}$  par un algorithme de Newton sous le chargement fort (correspondant à  $\lambda = 1$ ). La position verticale du trépan et le temps CPU nécessaire à la résolution sont résumés dans le tableau suivant :

Calculs	Position du trépan	CPU sur HP 735
Cas totalement isotrope	-2.05823402202233	2 mn 30 s
1 <sup>er</sup> cas E=10 MPa	-1.988634609901	7 mn 34 s

Puis on a remodifié le maillage et prolongé l'incision dans la profondeur ce qui donne un front incisé dont la profondeur est 85% de l'épaisseur. La déformation de ce front incisé final a été obtenue sous le même chargement. La position verticale et le temps CPU nécessaire sont résumés dans le tableau suivant :

Calculs	Position du trépan	CPU sur HP 735
Cas totalement isotrope	-2.06002636386086	2 mn 46 s
1 <sup>er</sup> cas E=10 MPa	-1.97612642654744	6 mn 40 s

Les figures des pages suivantes (21-28) présentent les configurations déformée et initiale et les isovaleurs des contraintes maximales du front incisé. On remarque que les contraintes sont plus importantes dans le cas anisotrope, surtout au voisinage de l'incision et la zone d'aspiration.

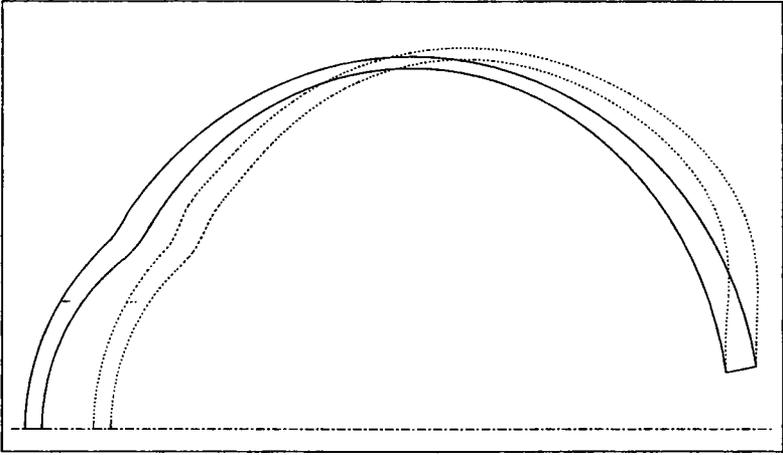


FIG. 21 - La configuration initiale en lignes continues, la configuration déformée en pointillés (cas isotrope).

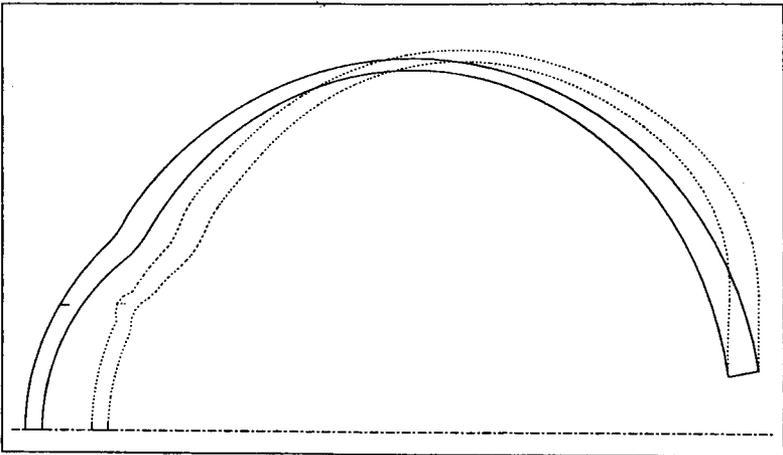


FIG. 22 - La configuration initiale en lignes continues, la configuration déformée en pointillés (cas anisotrope).

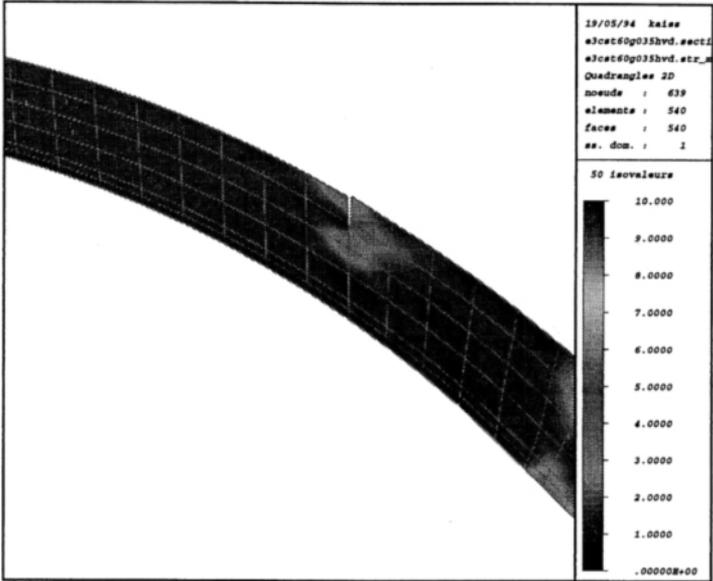


FIG. 23 - Les isovaleurs des contraintes maximales (cas isotrope).

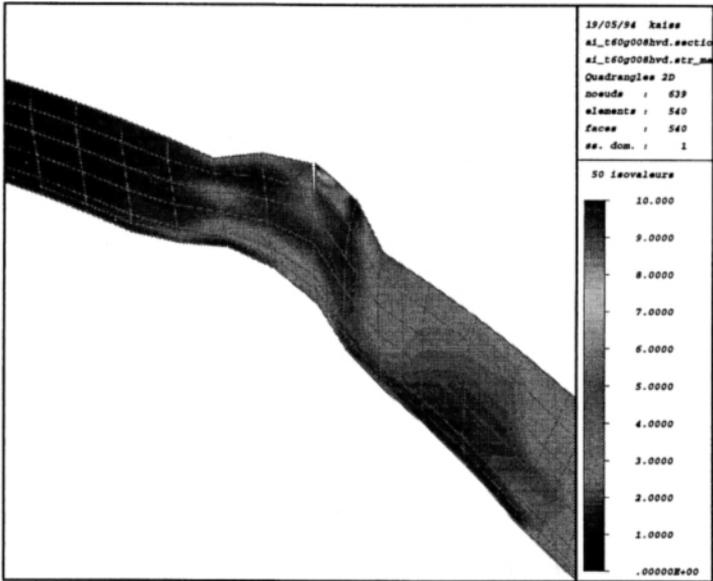


FIG. 24 - Les isovaleurs des contraintes maximales (cas anisotrope).

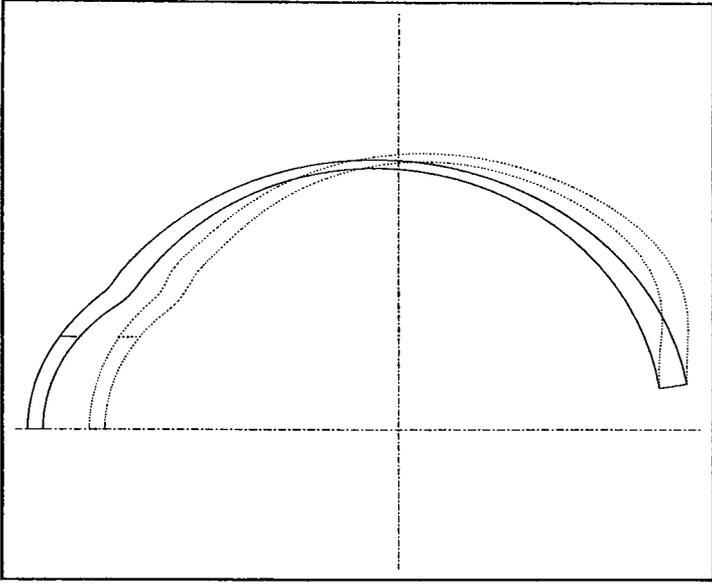


FIG. 25 - La configuration initiale en lignes continues, la configuration déformée en pointillés (cas isotrope).

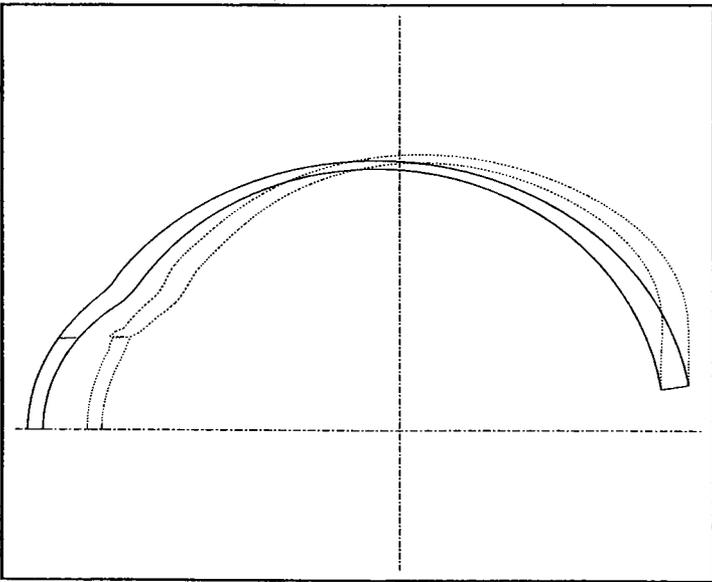


FIG. 26 - La configuration initiale en lignes continues, la configuration déformée en pointillés (cas anisotrope).

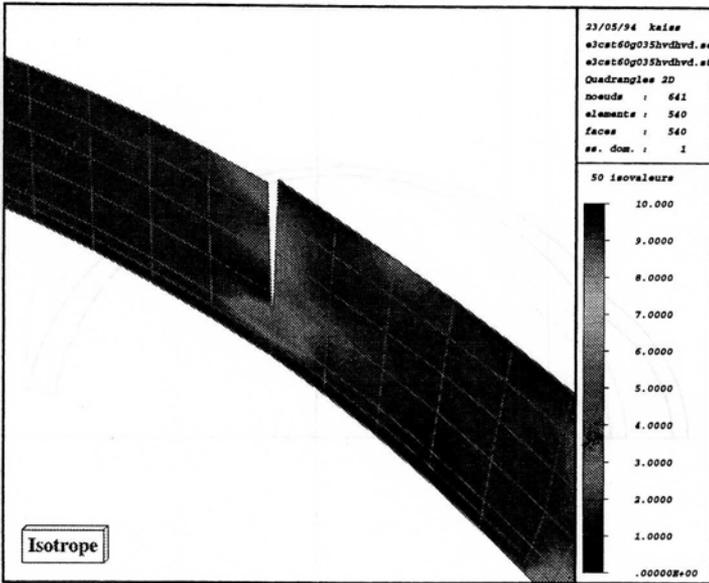


FIG. 27 - Les isovaleurs des contraintes maximales (cas isotrope).

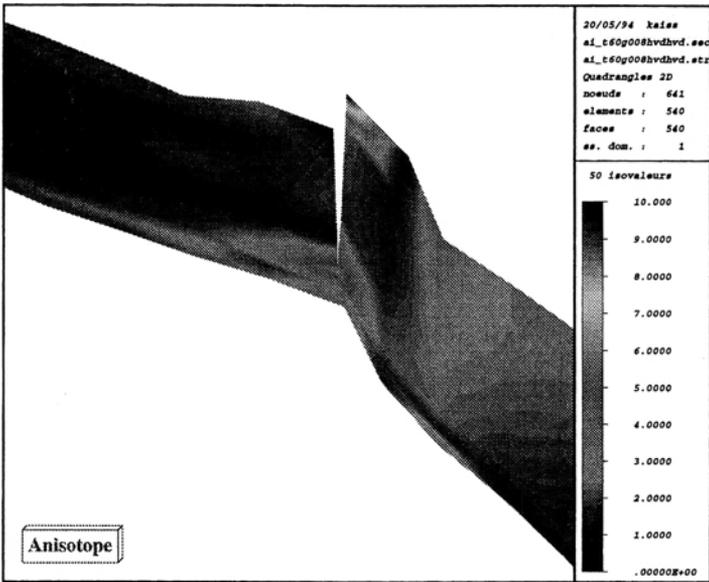


FIG. 28 - Les isovaleurs des contraintes maximales (cas anisotrope).

## 7. Conclusion

On a développé un modèle opérationnel sur la simulation d'un problème de contact et d'un problème de rupture fragile en grandes déformations.

L'originalité de l'approche est :

- l'utilisation d'un algorithme de continuation à deux paramètres permettant de surmonter numériquement les très fortes nonlinéarités du problème posé, qui est à la fois très raide du fait du contact et très instable du fait de la souplesse du matériau;
- l'utilisation d'une technique de remaillage permettant de suivre l'évolution de la fissure sur la configuration de repos.

Notre incapacité actuelle à obtenir des résultats quantitatifs très précis est due à l'incertitude que nous avons sur les coefficients mécaniques (surtout ceux du limbe). Néanmoins, les nombreux points d'accord montrent la pertinence du modèle de contact et du processus de rupture. Il reste maintenant à entreprendre le travail d'ajustement et d'identification à partir de données expérimentales précises.

## Remerciement

Cette étude a été faite en collaboration avec le Professeur K. Hanna<sup>1</sup> et le Docteur F. Jouve<sup>2</sup>. La naissance et le financement de ce projet leur doit tout, nous tenons à les en remercier.

## Références

- [Cia 78 ] Ciarlet P.G. (1978). *The finite element method for elliptic problems* (North-Holland, Amsterdam, New-York).
- [Cia 88 ] Ciarlet P.G. (1988). *Mathematical Elasticity* (North-Holland, Amsterdam, New-York).
- [Han 89 ] Hanna K., Jouve F., Waring G. and Ciarlet P. (1989). Computer Simulation of Arcuate and Radial Incisions involving the corneo-scleral limbus. *Eye*, 3, pp 227-239.
- [Han 91 ] Hanna K., Jouve F. and Ciarlet P. (1991). Computer Simulation of arcuate Keratotomy for Astigmatism. in *Keratotomy for Myopia and Astigmatism*, G. Waring M.D. (ed.), Mosby Co., St Louis MO, pp 1249-1280
- [Jou 93 ] Jouve F. (1993). *Modélisation de l'œil en élasticité non linéaire*. Masson, Paris.

---

1. Bascom Palmer Eye Institute, 90 NW 17 Street, Miami FL 33136

2. Centre de Mathématiques Appliquée, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

- [Kel 83 ] Keller H.B. (1983). The bordering algorithm and path following near singular points of higher nullity, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 4, 573-582.
- [LeT 84 ] Le Tallec P. and Vidrascu M. (1984). Une méthode numérique pour les problèmes d'équilibre de corps hyperélastiques compressibles en grandes déformations, *Numer. Math.* 43, 199-224.
- [LeT 93 ] Le Tallec P., Rahier C., Kaiss A. (1993). Three dimensional incompressible viscoelasticity in large strains: Formulation and numerical approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol 109, pp 233-258.
- [LeT 94 ] Le Tallec P. (1994). Numerical Methods for Nonlinear Three-dimensional elasticity. to appear in the *Handbook of Numerical Analysis*, P.G. Ciarlet et J.L. Lions eds., North-Holland.
- [Ode 88 ] Oden J.T. and Kikuchi N. (1988). *Contact Problems in Elasticity: a Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods* (SIAM, Philadelphia).
- [Ogd 84 ] Ogden R.W. (1984). *Nonlinear Elastic Deformations* . (Ellis Horwood, Chichester and J. Wiley).
- [Zie 71 ] Zienkiewicz O. (1971). *The Finite Element Method in Engineering Science* (McGraw-Hill, New-York, Toronto, London).

Article reçu le 25 février 1996  
Version révisée le 10 juin 1996