
Méthode des éléments finis spécifique aux ossatures mixtes acier-béton avec glissements et grands déplacements

Bin Zhao* – Jean-Marie Aribert**

* Centre Technique Industriel de la Construction Métallique
BP 64, Domaine de Saint-Paul
78470 Saint-Rémy Lès Chevreuse

** Laboratoire de Structures INSA
20, avenue des Buttes de Coësmes 35043 Rennes

RÉSUMÉ. Afin d'étudier le comportement des portiques mixtes acier-béton, rigides ou souples, et à connexion complète ou partielle, un modèle original par éléments finis est développé en formulation Lagrangienne actualisée approchée. En particulier, le choix du glissement comme inconnue nodale conduit à définir des transformations cinématiques approchées qui sont nécessaires à l'assemblage des matrices des parties en acier et en béton (matrices de rigidité et de chargement nodal). Après validation du modèle sur différents aspects particuliers (non-linéarité géométrique, non-linéarité matérielle, glissements, etc.), quelques applications sont données qui mettent en valeur le gain de rigidité latérale et de résistance ultime de portiques mixtes par rapport aux mêmes portiques constitués de la partie métallique seule.

ABSTRACT. In order to analyse the behaviour of braced or unbraced steel and concrete composite frames with full or partial shear connections, an original finite element model using approximate updated Lagrangian formulation is developed. The choice of slip as a nodal degree of freedom leads to the approximate kinematic transformations which are necessary for the assemblage of matrices of steel and concrete parts (stiffness matrices and vectors of nodal forces). After the demonstration of the validity of the model for different aspects (geometrical non linearity, material non linearity, slip, etc), some applications of the model show clearly the improvement in lateral stiffness and ultimate resistance of composite frames compared to the same frame but composed of only steel members.

MOTS-CLÉS : poutres et portiques mixtes acier-béton, connexion partielle, glissement, repère généralisé, élément de barre mixte.

KEY WORDS : steel and concrete composite beams and frames, partial connection, slip, generalized coordinate reference, composite beam finite element.

1. Introduction

Dans le domaine du bâtiment, les ossatures mixtes acier-béton sont en plein développement actuellement en Europe grâce aux nombreux avantages techniques et économiques que présentent ces structures vis-à-vis des structures en acier.

Parmi ces avantages, on peut citer :

- une rigidité et une résistance plus élevées de la structure à température ordinaire auxquelles s'ajoute une limitation des risques d'instabilité (flambement, déversement, voilement local) ;
- une meilleure résistance au feu, car le béton possède une plus forte résistance thermique qui permet de ralentir l'échauffement des parties en acier (poteaux enrobés de béton, par exemple) ;
- une meilleure optimisation dans l'utilisation des matériaux avec des incidences architecturales (hauteurs d'étages réduites), une meilleure protection contre la corrosion, une plus grande rapidité de construction (planchers), etc.

A la base de ce développement, de nombreux travaux, de caractère essentiellement expérimental, ont été effectués au cours des deux dernières décennies, notamment en Allemagne et en Grande-Bretagne, qui ont conduit à des progrès importants dans la connaissance fondamentale du comportement des constructions mixtes, permettant la rédaction récente de règles de calcul et de conception au plan européen rassemblées dans l'Eurocode 4 (dénommé plus précisément ENV-1994-Partie 1.1. [IEC 92]). Il convient de noter ici que cet Eurocode, s'il traite de manière approfondie le domaine des poutres et poteaux mixtes, ne fournit pas en revanche beaucoup de règles d'application pour des structures plus complexes, telles que les ossatures en portiques (par exemple, le cas des ossatures souples, fréquent si les ossatures ne sont pas contreventées, n'est pas couvert, et la méthode simplifiée donnée pour la vérification des poteaux se limite au cas de poteaux insérés dans des ossatures rigides ; cf. sections 4.8 et 4.9 de [IEC 92]).

Parallèlement aux études expérimentales évoquées, force est de constater que peu de modèles numériques élaborés ont été développés dans la littérature, permettant une analyse globale des sollicitations et des déplacements des ossatures mixtes lorsque l'évolution de la liaison entre l'acier et le béton doit être prise en compte dans les calculs (en présence, par exemple, d'une connexion partielle). Si le cas de poutres mixtes simplement appuyées ou continues peut être résolu avec efficacité à l'aide de méthodes matricielles simples, par exemple la méthode des matrices de transfert [ARI 85, 86], le cas général des ossatures mixtes exige d'emblée l'utilisation d'une méthode d'éléments finis, à plus forte raison si ces ossatures présentent des déplacements importants (effets dits du "2^{ème} ordre géométrique") lorsque le niveau de chargement approche un état limite ultime. L'article qui suit se place précisément dans ce cadre ; il est consacré essentiellement à présenter un élément fini de barre mixte, original par le choix de ses variables incorporant le glissement dans une formulation en grands déplacements. Des explications spécifiques sont également données au niveau des procédures d'assemblage des éléments finis et de la résolution globale, ces procédures étant très exactement celles introduites dans le programme numérique SISMEF actuellement

implanté au CTICM [ZHA 94]. La dernière partie de l'article porte sur la validation du modèle (comparaison à d'autres solutions, analytique ou numérique, sur des cas de poutres mixtes et de portiques en acier) et sur quelques applications mettant en valeur le gain de résistance des portiques mixtes par rapport aux portiques métalliques correspondants.

2. Contexte bibliographique

Pour mieux situer l'intérêt du modèle numérique présenté dans cet article, il n'est pas inutile de donner un aperçu d'autres travaux effectués sur la méthode des éléments finis en Construction Mixte au cours de la dernière décennie. On peut citer les auteurs suivants :

- PIAZZA et TURRINI ont proposé un élément fini de type poutre plane "multi-couches" [PIA 86]. La connexion est réalisée par annulation des déplacements relatifs verticaux aux noeuds d'extrémité des éléments et par introduction aux noeuds internes de ces éléments d'une loi de comportement axial de type hyperbolique. Mais aucun détail n'est fourni sur la formulation matricielle de base de l'élément, ni sur le modèle qui en découle.
- SCHANZENBACH a développé un élément fini de poutre mixte possédant 8 degrés de liberté (4 par noeud : $[u, v, \theta, \gamma]$ où γ est le glissement entre la dalle de béton et le profilé métallique au noeud considéré) qui permet de traiter la connexion avec des connecteurs ponctuels [SCH 88]. Dans ce modèle, la non-linéarité matérielle est prise en compte d'après l'auteur, mais sans précision particulière ; l'effet de l'effort tranchant dans l'âme du profilé métallique est également considéré dans la vérification de la résistance des sections, mais a posteriori et indépendamment du calcul par éléments finis proprement dit. La confrontation de ce modèle, du premier ordre géométrique, avec des expériences réalisées par l'auteur lui-même, semble montrer toutefois une bonne concordance.
- Egalement, DANIELS a développé un élément fini de poutre mixte en considérant une connexion continue à l'intérieur de l'élément [DAN 89]. Il utilise 3 noeuds et 10 degrés de liberté au total pour chaque élément de poutre. Cet élément a été appliqué essentiellement à la simulation du comportement des dalles mixtes avec la prise en compte de l'effet d'adhérence mécanique entre tôle mince profilée en acier et béton.
- Enfin, BOERAEVE a développé un modèle permettant de simuler non seulement les poutres mixtes mais aussi les dalles mixtes avec la prise en compte de l'effet d'adhérence [BOE 91]. Dans ce modèle, un élément de poutre mixte (ou de dalle mixte) est considéré comme l'assemblage de deux éléments finis de poutre à 3 noeuds et 7 degrés de liberté chacun avec un élément fini de connecteur de 14 degrés de liberté. En supposant que les déplacements relatifs verticaux et les rotations relatives aux noeuds d'extrémité sont nuls, l'élément fini de poutre mixte final peut être réduit à 10 degrés de liberté. L'intérêt essentiel du modèle par rapport aux autres mentionnés précédemment est la prise en compte de la non-linéarité géométrique dans la formulation de base du modèle et l'introduction d'une connexion répartie

adaptée au cas des dalles mixtes. En général, la comparaison modèle-expérience est bonne, d'après l'auteur. Toutefois, il semblerait que la formulation ait fait l'objet d'une certaine approximation sur le glissement localisé à l'interface des deux matériaux (cf. paragraphe 5.2.4 de [BOE 91]), celui-ci étant calculé par simple différence des déplacements axiaux aux centres de gravité des sections de béton et d'acier ; en fait, l'auteur ne fournit que très peu d'illustrations sur les distributions de glissement.

En conclusion, bien que plusieurs types de modèles par éléments finis aient déjà été développés à ce jour pour simuler des cas de poutres mixtes, aucune étude avancée n'a été véritablement publiée, à notre connaissance, sur la modélisation des portiques mixtes par éléments finis avec prise en compte du phénomène de glissement et des effets du second ordre géométrique. L'article qui suit a précisément pour objectif d'apporter une contribution se voulant déterminante dans ce domaine.

3. Formulation de l'équilibre de la structure

Dans toute analyse non linéaire au sens géométrique, on est tenu d'exprimer l'équilibre d'une structure dans sa configuration actuelle. En général, vu que la configuration actuelle doit être déterminée, cette condition oblige à utiliser une formulation incrémentale ; pour cela, on peut introduire une variable du type "temps cinématique", choisie de manière à décrire convenablement le changement de forme et le mouvement de la structure. Les indices 0, t et (t+Δt) désignent respectivement les instants initial, précédent et actuel, auxquels sont associées les configurations initiale, précédente et actuelle de la structure.

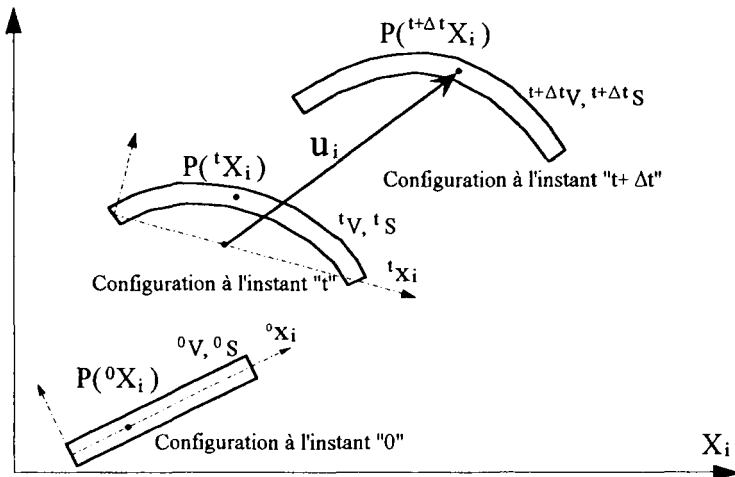


Figure 1. Configurations initiale, précédente et actuelle

En fonction de la configuration de référence choisie, on peut envisager deux formulations possibles, à savoir la **formulation Lagrangienne totale** qui se réfère à

la configuration initiale à l'instant 0, et la **formulation Lagrangienne actualisée** qui se réfère à la configuration précédente à l'instant t . Dans la modélisation développée dans cet article, c'est la deuxième formulation qui a été adoptée du fait qu'elle nécessite moins d'opérations mathématiques ; plus précisément, il s'agit de l'approximation de cette formulation connue sous la désignation de "**formulation Lagrangienne corotationnelle**" et couramment utilisée pour l'analyse des structures de type "mince", en particulier les structures souples à barres.

A titre de rappel succinct, considérant un petit élément de la structure avec le système d'axes \mathbf{x}_i constamment attachés à cet élément dans son mouvement de corps rigide (avec avec $i=1, 2, 3$) et désignant par \mathbf{u}_i l'accroissement de la composante i du vecteur des déplacements dans cet élément (y compris à sa surface) entre l'instant t et l'instant $(t+\Delta t)$ par rapport au système de référence précédent (d'où le caractère approché de \mathbf{u}_i ; cf. figure 1), l'accroissement associé du tenseur des déformations de **Green-Lagrange**, défini par rapport à la configuration à l'instant t , s'écrit :

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} = {}_t\epsilon_{ij} + {}_t\eta_{ij} \quad (1)$$

avec :

$${}_t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial {}^t\mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial {}^t\mathbf{x}_i} \right) \quad (2)$$

$${}_t\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial {}^t\mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial {}^t\mathbf{x}_j} \right) \quad (3)$$

Moyennant certaines approximations (limitation aux termes du second ordre, linéarisation du comportement élastique incrémental), l'équilibre de la structure peut être exprimé, de manière classique, à l'aide du théorème des travaux virtuels, sous la forme suivante [BAT 82] :

$$\begin{aligned} & \int_{t_v} {}_t\mathbf{C}_{ijrs} {}_t\epsilon_{rs} \delta {}_t\epsilon_{ij} {}^t dV + \int_{t_v} {}^t\sigma_{ij} \delta \eta_{ij} {}^t dV \\ & = \int_{t_v} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_i^V \delta \mathbf{u}_i {}^t dV + \int_{t_s} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_i^S \delta \mathbf{u}_i {}^t dS - \int_{t_v} {}^t\sigma_{ij} \delta {}_t\epsilon_{ij} {}^t dV \end{aligned} \quad (4)$$

où la notation δ signifie "variation virtuelle" ;

${}^t\sigma_{ij}$ est le tenseur des contraintes de **Cauchy** défini à l'instant t ;

${}_t\mathbf{C}_{ijrs}$ est le tenseur de rigidité du comportement incrémental "contrainte-déformation" ;

${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_i^V$ et ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_i^S$ sont respectivement les vecteurs des forces extérieures volumiques et des forces extérieures surfaciques à l'instant $(t+\Delta t)$, mais projetés dans la configuration à l'instant t définie par le système de coordonnées \mathbf{x}_i .

Compte-tenu de l'hypothèse de petites déformations associée à la formulation, le volume et la surface de l'élément de structure peuvent être supposés inchangés dans les différentes configurations (${}^{t+\Delta t}\mathbf{V} = {}^t\mathbf{V} = {}^0\mathbf{V}$; ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = {}^t\mathbf{S} = {}^0\mathbf{S}$).

Telle qu'elle est écrite, la partie droite de l'équation (4) traduit le déséquilibre entre le travail virtuel des forces extérieures à l'instant $(t + \Delta t)$ et celui des forces intérieures considérées seulement à l'instant t . Cette équation doit être écrite ensuite dans le repère global de la structure, de coordonnées fixes \mathbf{X}_1 , par le biais d'une transformation classique de coordonnées (matrice rotation) qui correspond physiquement au mouvement de corps rigide entre la configuration initiale et celle à l'instant t .

L'application de la méthode des éléments finis aux équations de type (4) ainsi transformées va conduire à une équation matricielle d'équilibre global de la forme :

$$({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL}) \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \tag{5}$$

- où ${}^t\mathbf{K}_L$ est la matrice de rigidité pour la déformation linéaire ;
 ${}^t\mathbf{K}_{NL}$ est, par contre, la matrice de rigidité pour la déformation non-linéaire ;
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ est le vecteur de charges extérieures nodales à l'instant $(t+\Delta t)$;
 ${}^t\mathbf{F}$ est le vecteur des charges nodales équivalentes qui correspondent aux contraintes obtenues dans les éléments à l'instant t ;
 Enfin, \mathbf{U} est le vecteur de l'accroissement des déplacements entre l'instant t et l'instant $(t+\Delta t)$, défini en coordonnées globales :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \mathbf{U} \tag{6}$$

4. Définition du vecteur des déplacements nodaux et construction d'un élément de barre mixte

4.1. Élément fini de barre mixte

Afin de pouvoir prendre en compte l'effet du glissement à l'interface acier-béton pour une poutre mixte, un élément de barre mixte est considéré comme composé de trois sous-éléments (figure 2), à savoir :

- le profilé métallique et la dalle en béton, considérés chacun comme un élément fini de barre classique comportant un noeud à chaque extrémité ; ces deux sous-éléments sont supposés ici rester en contact l'un avec l'autre ;
- un élément de connexion, de type ressort en cisaillement, représentant un connecteur (ou un groupe de connecteurs) ; cet élément, parfaitement rigide en rotation et en traction, assemble les deux éléments de barre (profilé métallique et dalle en béton) à chaque noeud de leurs extrémités.

L'élément de connexion ponctuelle considéré ici exclue donc tout soulèvement de dalle à son niveau. Par ailleurs, en présence de connecteurs classiques qui présentent une résistance en traction au moins égale à 10% de leur résistance en

cisaillement (par exemple, les goujons soudés à tête), il a été montré à la fois théoriquement [ARI 85, 86] et expérimentalement [ARI 90] que le phénomène de soulèvement n'influence pas véritablement le comportement global en flexion d'une poutre mixte jusqu'au stade limite ultime du chargement (en dehors du cas de traction directe), même lorsque la connexion est partielle ou relativement espacée. En quelque sorte, le soulèvement constitue un phénomène du deuxième ordre à l'égard du comportement global.

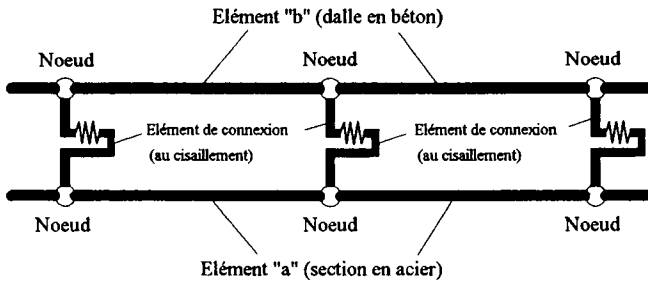


Figure 2. Composition d'un élément de barre mixte

Si l'on néglige le phénomène de soulèvement à l'interface acier-béton, il est évident que les deux éléments de barre vont présenter la même rotation nodale. Par ailleurs, le glissement nodal à l'interface acier-béton doit être défini dans la configuration déformée de la barre mixte ; il correspond très exactement à la différence de déplacement entre l'acier et le béton selon la direction parallèle à l'interface au droit du noeud concerné (Figure 3). En conséquence, si l'on adopte la droite entre les deux noeuds de l'élément de barre en acier comme axe local de cet élément, on constate que le glissement au noeud n'est pas parallèle, en général, à cet axe.

Tenant compte des observations précédentes, les déplacements nodaux au noeud i ($i = 1, 2$) ont été définis comme suit :

$$\tilde{\mathbf{U}}_{ci} = [\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i, \Theta_i, \mathbf{u}_{abi}]^T \quad (7)$$

où $\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i, \Theta_i$ sont les accroissements, entre t et $(t + \Delta t)$, des trois variables nodales classiques, ici propres à l'élément en acier, dans le repère global de l'ossature (\mathbf{U}_i : translation suivant $\vec{\mathbf{X}}$; \mathbf{V}_i : translation suivant $\vec{\mathbf{Y}}$; Θ_i : rotation suivant $\vec{\mathbf{Z}}$;

\mathbf{u}_{abi} est une variable nodale particulière qui représente très exactement l'accroissement du déplacement relatif entre les deux centres de gravité des parties acier et béton, dans la direction parallèle à l'interface ; il s'agit par conséquent du glissement défini précédemment.

Ainsi, le vecteur des déplacements nodaux est défini dans deux repères différents, à savoir le repère global et un repère nodal qui seront désignés ensemble comme "repère global généralisé" pour simplifier la présentation qui suit (l'indice c

dans \tilde{U}_{ci} marque le fait que l'une des variables nodales est liée à l'orientation de la connexion).

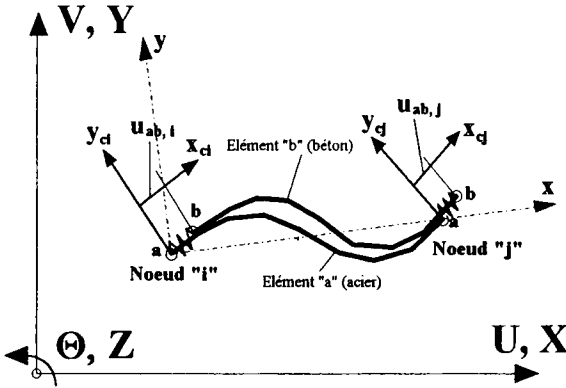


Figure 3. Repères global, local et nodal

4.2. Matrices de rigidité des sous-éléments (en repère local)

L'élément mixte défini précédemment comporte deux éléments de barre en matériau homogène et un élément de connexion de type ressort. Il est donc nécessaire d'établir les matrices de rigidité de ces sous-éléments avant de procéder à l'assemblage de l'élément mixte.

1. Élément de barre :

Le déplacement transversal $v(x)$ d'un point quelconque à l'intérieur de l'élément dans son repère local (figure 4) est défini par une interpolation polynomiale de type **Hermite**. En tenant compte également d'une interpolation linéaire en $u(x)$ et de l'hypothèse de **Bernoulli**, on obtient pour champs des déplacements dans l'élément :

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = H [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \tag{8}$$

où $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2$ et θ_2 désignent les déplacements nodaux de l'élément dans son repère local, et où H est une matrice d'interpolation classique, fonction de x, y et L . Ici, L est la longueur initiale de l'élément (conformément à l'hypothèse de rotations modérées de celui-ci par rapport au repère corotationnel lié à ses extrémités).

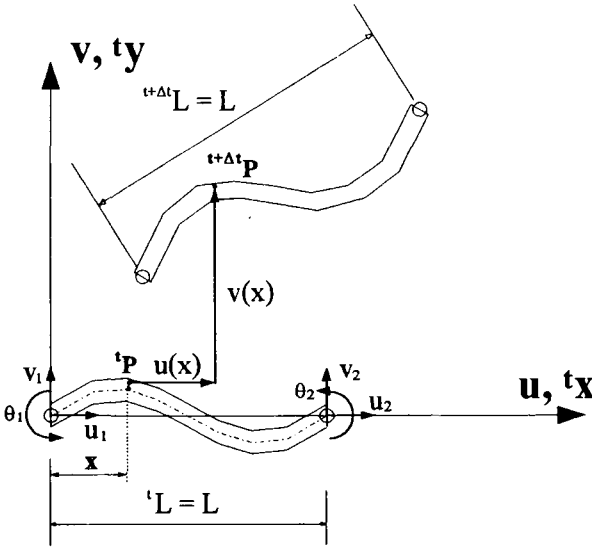


Figure 4. Evolution d'un élément de barre en repère local

D'une part, en introduisant la relation (8) dans la partie gauche de la relation (4) appliquée à l'élément et en considérant une seule composante de déformation et de contrainte dans cet élément, à savoir la déformation et la contrainte suivant sa direction axiale, d'autre part en notant que les coefficients constitutifs du matériau ${}^t C_{ijkl}$ se réduisent à une seule composante ${}^t C_{1111}$, qui sera désignée plus simplement par le module E , on obtient facilement les matrices de rigidité de l'élément qui s'expriment sous la forme suivante :

$${}^t \mathbf{k}_{eL} = \int_0^L \int_S {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{E} {}^t \mathbf{B}_L dS dx \quad (9)$$

$${}^t \mathbf{k}_{eNL} = \int_0^L \int_S {}^t \mathbf{B}_{NL}^T {}^t \sigma_x {}^t \mathbf{B}_{NL} dS dx \quad (10)$$

avec :

$${}^t \mathbf{B}_L = \left[-\frac{1}{L} \quad -y \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \quad -y \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \quad \frac{1}{L} \quad -y \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \quad -y \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right] \quad (11)$$

$${}^t \mathbf{B}_{NL} = \left[0 \quad -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \quad 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \quad 0 \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \quad -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right] \quad (12)$$

Les matrices ${}^t \mathbf{k}_{eL}$ et ${}^t \mathbf{k}_{eNL}$ correspondent respectivement à la matrice de rigidité pour la déformation linéaire et à la matrice de rigidité pour la déformation non-linéaire de l'élément.

2. Elément de connexion (connecteur) :

Cet élément, par définition même, ne concerne que la seule variable de déplacement, u_{abi} . Dans le repère nodal attaché à l'interface acier-béton, sa matrice de rigidité ne comporte donc qu'une seule composante, à savoir une rigidité de cisaillement, désignée ici par k_{ci} . Cette rigidité, qui a le sens d'une rigidité tangente, se déduit directement de la courbe de comportement "effort de cisaillement - glissement" établie à partir d'essais sur éprouvettes de type "push-out" (cf. chapitre 10 de l'Eurocode 4 [CCE 92]).

4.3. Condition de compatibilité des déplacements entre les sous-éléments de barre

A ce stade, les matrices de rigidité des sous-éléments ont été établies dans leurs repères locaux respectifs. Mais, pour effectuer l'assemblage des éléments, il est nécessaire de les transformer dans le même repère, c'est-à-dire le repère global généralisé vis-à-vis duquel toutes les variables de déplacement et d'effort doivent être définies. Comme les variables de déplacement du vecteur \bar{U}_{ci} ne sont pas définies dans un seul repère, il est nécessaire d'exprimer la compatibilité cinématique de ces variables lorsque l'élément mixte passe de la configuration à l'instant t à celle à l'instant $(t+\Delta t)$.

Conformément à la figure 5, considérons un système quelconque de coordonnées $(x' - y')$ et le système $(x_c - y_c)$ du repère nodal d'un élément de connexion. Distinguons également les points a et b représentant respectivement le noeud i des deux éléments de barre (centres de gravité des sections du profilé en acier et de la dalle en béton). L'angle entre les deux repères est noté ϕ_i à l'instant t . Désignant par u_{abi} le glissement existant dans le repère nodal à l'instant t , et par u_{abi} l'accroissement de glissement entre les instants t et $(t+\Delta t)$, les accroissements des déplacements et de la rotation u'_{bi} , v'_{bi} et θ'_{bi} du point b dans le système $(x' - y')$ peuvent s'exprimer par rapport à ceux u'_{ai} , v'_{ai} et θ'_{ai} du point a à l'aide des relations suivantes, obtenues par différence de coordonnées (et en négligeant les termes petits du second ordre) :

$$\begin{cases} u'_{bi} = u'_{ai} - (\sin \phi_i) u_{abi} \theta'_i + (\cos \phi_i) u_{abi} - (\cos \phi_i) d \theta'_i \\ v'_{bi} = v'_{ai} + (\cos \phi_i) u'_{abi} \theta'_i + (\sin \phi_i) u_{abi} - (\sin \phi_i) d \theta'_i \\ \theta'_{bi} = \theta'_{ai} = \theta'_i \end{cases} \quad (13)$$

d est ici la distance entre les centres de gravité des sections du profilé en acier et de la dalle en béton.

Dans ces relations, θ'_i est l'accroissement de l'inclinaison du repère nodal par rapport au repère $(x' - y')$ entre les instants t et $(t+\Delta t)$:

$$\theta'_i = {}^{t+\Delta t}\phi'_i - {}^t\phi'_i.$$

Par ailleurs, vu l'identité ici des axes \bar{z}' et \bar{Z}' , on a évidemment : $\theta'_i = \Theta_i$, défini en (7).

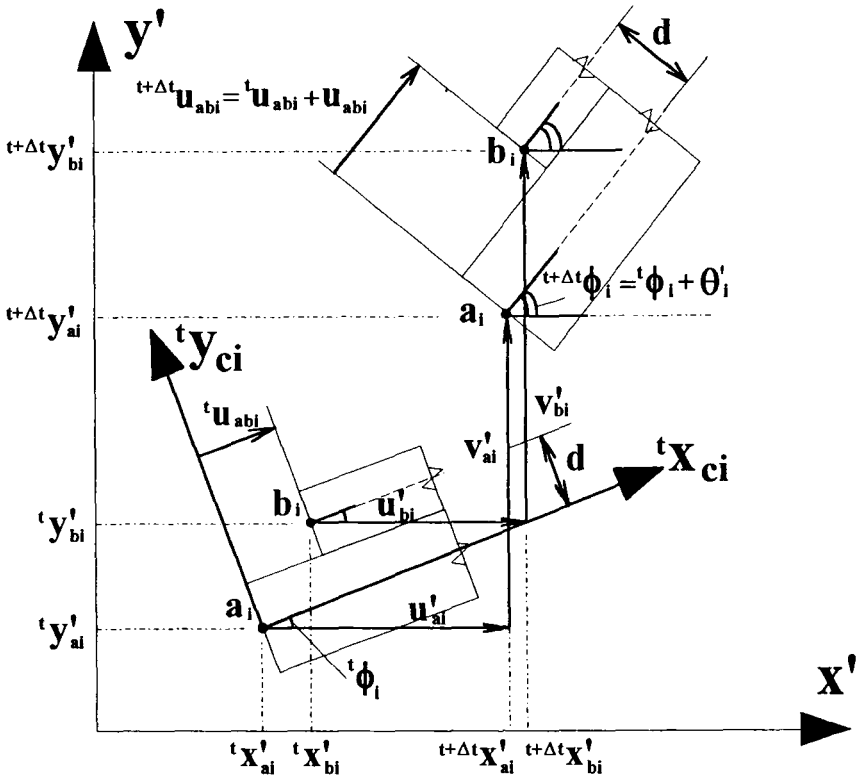


Figure 5. *Compatibilité des accroissements de déplacements et rotations propres aux parties acier et béton*

4.4. Transformations des matrices de rigidité en repère global généralisé

Les relations de compatibilité (13) des déplacements entre le point a et le point b étant applicables dans n'importe quel système de coordonnées $(x' - y')$, il sera opportun ici de les utiliser dans le repère global $(X - Y)$ de la structure. Dans un premier temps, les matrices de rigidité des éléments de barre (acier et béton), définies chacune dans leur propre repère local, sont transformées en repère global de manière tout à fait classique. Ainsi, on a :

- pour l'élément en acier :

$${}^t\mathbf{K}_{ea} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_a \end{bmatrix}^T {}^t\mathbf{k}_{ea} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_a \end{bmatrix} \tag{14-a}$$

avec la matrice en rotation :

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} \cos^t\alpha_{ea} & \sin^t\alpha_{ea} & 0 \\ -\sin^t\alpha_{ea} & \cos^t\alpha_{ea} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15-a}$$

où ${}^t\alpha_{ea}$ est l'inclinaison du repère local à l'instant t de la barre en acier par rapport au repère global et en désignant par ${}^t\mathbf{k}_{ea}$ la somme des matrices linéaire et non-linéaire :

$${}^t\mathbf{k}_{ea} = {}^t\mathbf{k}_{eLa} + {}^t\mathbf{k}_{eNLa} \tag{16-a}$$

- de même, pour l'élément en béton :

$${}^t\mathbf{K}_{eb} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_b \end{bmatrix}^T {}^t\mathbf{k}_{eb} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_b \end{bmatrix} \tag{14-b}$$

avec :

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} \cos^t\alpha_{eb} & \sin^t\alpha_{eb} & 0 \\ -\sin^t\alpha_{eb} & \cos^t\alpha_{eb} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15-b}$$

$$\text{et : } {}^t\mathbf{k}_{eb} = {}^t\mathbf{k}_{eLb} + {}^t\mathbf{k}_{eNLb} \tag{16-b}$$

en notant que l'inclinaison ${}^t\alpha_{eb}$ est en général différente de ${}^t\alpha_{ea}$.

En ce qui concerne l'élément de connexion, il n'est pas nécessaire d'effectuer de transformation particulière puisque sa matrice de rigidité, définie en repère nodal, est également valable en repère global généralisé.

Compte tenu de la définition du vecteur des variables nodales $\tilde{\mathbf{U}}_{ei}$, et des relations de compatibilité (13) considérées en repère général, les vecteurs des accroissements de déplacements aux points \mathbf{a} et \mathbf{b} dans le repère global, $[\mathbf{U}_{a1}, \mathbf{V}_{a1}, \Theta_{a1}]^T$ et $[\mathbf{U}_{b1}, \mathbf{V}_{b1}, \Theta_{b1}]^T$, peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{ai} \\ \mathbf{V}_{ai} \\ \Theta_{ai} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \\ \Theta_i \\ \mathbf{u}_{abi} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}_{ai} \tilde{\mathbf{U}}_{ci} \quad (17-a)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{bi} \\ \mathbf{V}_{bi} \\ \Theta_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -[\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] & {}^t\mathbf{u}_{abi} - [\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)]d & \cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i) \\ 0 & 1 & [\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] & {}^t\mathbf{u}_{abi} - [\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)]d & \sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i) \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \\ \Theta_i \\ \mathbf{u}_{abi} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}_{bi} \tilde{\mathbf{U}}_{ci} \quad (17-b)$$

où ${}^t\Theta_i$ est la rotation totale du noeud i à l'instant t et ${}^0\phi_i$ l'inclinaison initiale du repère nodal au noeud i (pour le glissement) par rapport au repère global.

Finalement, les expressions des matrices de rigidité des éléments en acier et en béton dans le repère global généralisé sont données par :

$${}^t\tilde{\mathbf{K}}_{ea} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{ai} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}}_{aj} \end{bmatrix}^T {}^t\mathbf{K}_{ea} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{ai} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}}_{aj} \end{bmatrix} \quad (18-a)$$

$${}^t\tilde{\mathbf{K}}_{eb} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{bi} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}}_{bj} \end{bmatrix}^T {}^t\mathbf{K}_{eb} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{bi} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}}_{bj} \end{bmatrix} \quad (18-b)$$

Il faut noter ici que les matrices de rigidité ${}^t\mathbf{K}_{ea}$ et ${}^t\mathbf{K}_{eb}$ avaient la dimension 6×6 , alors que maintenant, les matrices transformées ${}^t\tilde{\mathbf{K}}_{ea}$ et ${}^t\tilde{\mathbf{K}}_{eb}$ ont la dimension 8×8 . On souligne également que la variable \mathbf{u}_{abi} n'a plus maintenant qu'une signification scalaire, attachée au noeud i (l'aspect vectoriel étant pris en compte par la matrice $\tilde{\mathbf{T}}_{bi}$).

Quant à la matrice de rigidité de l'élément de connexion dans le repère global généralisé, elle prend simplement la forme suivante :

$${}^t\tilde{\mathbf{K}}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{k}_{ci} \end{bmatrix} \quad (19)$$

4.5. Transformations du vecteur de chargement en repère global généralisé

En méthode classique d'éléments finis, le vecteur de chargement et le vecteur de déplacement sont tous deux définis dans le repère global, pour une résolution cohérente du problème, et il n'est pas nécessaire d'opérer une transformation particulière sur le vecteur de chargement. Avec le type d'élément développé ici, le

vecteur de chargement \mathbf{R}_i au noeud i nécessite de faire une distinction dans les données des forces et du moment appliquées au noeud, entre deux sous-vecteurs \mathbf{R}_{a_i} et \mathbf{R}_{b_i} puisque les points a et b n'ont pas les mêmes déplacements. Définissons alors :

- pour le point a :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{a_i} = \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{a_i} \mid {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{a_i} \mid {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}_{a_i} \right]^T,$$

- pour le point b :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{b_i} = \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} \mid {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \mid {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}_{b_i} \right]^T,$$

où \mathbf{F} , \mathbf{P} et \mathbf{M} correspondent respectivement à deux composantes de force et à un moment.

En multipliant à gauche \mathbf{R}_{a_i} et \mathbf{R}_{b_i} respectivement par les transposés des matrices de transformation correspondantes, à savoir, $\tilde{\mathbf{T}}_{a_i}$ et $\tilde{\mathbf{T}}_{b_i}$, on obtient les nouveaux vecteurs suivants (à quatre composantes chacun) :

pour le point a :

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{R}}_{a_i} = \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{a_i} \mid {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{a_i} \mid {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}_{a_i} \mid 0 \right]^T,$$

et pour le point b :

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{R}}_{b_i} = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \dots\dots\dots \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}_{b_i} - [\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^t\mathbf{u}_{ab} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} + [\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^t\mathbf{u}_{ab} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \\ -[\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] d \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} - [\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] d \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \\ \dots\dots\dots [\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} + [\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

Le regroupement de ces deux vecteurs de chargement constitue alors le vecteur de chargement final au noeud i :

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{R}}_i = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{a_i} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{a_i} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \dots\dots\dots \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}_{a_i} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}_{b_i} - [\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^t\mathbf{u}_{ab} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} + [\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^t\mathbf{u}_{ab} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \\ -[\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] d \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} - [\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] d \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \\ \dots\dots\dots [\cos({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{b_i} + [\sin({}^t\Theta_i + {}^0\phi_i)] {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_{b_i} \dots\dots\dots \end{array} \right\} \tag{20}.$$

Une signification physique de ce vecteur de chargement peut être donnée de la manière suivante : le sous-vecteur $[\ ^{t+\Delta t}\mathbf{F}_a + \ ^{t+\Delta t}\mathbf{F}_b \ ; \ ^{t+\Delta t}\mathbf{P}_a + \ ^{t+\Delta t}\mathbf{P}_b \ ; \ ^{t+\Delta t}\mathbf{M}_a + \ ^{t+\Delta t}\mathbf{M}_b]^T$ correspond aux charges extérieures cumulées pour les points **a** et **b** et associées aux seuls déplacements nodaux \mathbf{U}_i , \mathbf{V}_i et Θ_i ; à ce sous-vecteur s'ajoute, au niveau de la troisième et la quatrième ligne de (20), la contribution provenant des charges extérieures $\ ^{t+\Delta t}\mathbf{F}_b$, $\ ^{t+\Delta t}\mathbf{P}_b$ au point **b** par suite de l'utilisation de la variable nodale \mathbf{u}_{ab} .

5. Equation matricielle d'équilibre de la structure dans le repère global généralisé et résolution

Après avoir développé toutes les transformations nécessaires pour les matrices de rigidité de différents éléments et le vecteur de chargement nodal dans le repère global généralisé, on peut établir l'équation d'équilibre de la structure sous forme matricielle en assemblant successivement tous les éléments de cette structure. La procédure d'assemblage d'éléments finis est tout à fait classique, mais la présence d'une variable nodale de glissement de déplacement dans le vecteur de déplacement généralisé conduit à donner quelques explications sur cette procédure.

En ce qui concerne les poutres mixtes sur appuis de même niveau, on peut utiliser directement les matrices de rigidité des différents éléments et les vecteurs de chargement nodaux établis aux paragraphes précédents, pour effectuer l'assemblage.

Quant aux poteaux, on admet très souvent que le glissement ne se produit pas. Cette hypothèse pourrait être inexacte pour certains poteaux mixtes ; mais d'une part le glissement dans un poteau mixte est un phénomène beaucoup moins important que dans une poutre mixte, d'autre part la complexité du phénomène de liaison à l'interface acier-béton dans un poteau fait qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de modélisation mécanique précise. Aussi, dans notre modélisation numérique, l'élément de barre **b** et celui de connexion ont-ils été supprimés, seul subsistant l'élément de barre **a** (en y incluant la partie béton). Cette disposition ne pose aucune difficulté vis-à-vis de la formulation numérique adoptée : il suffit de bloquer le déplacement lié avec le glissement, c'est-à-dire de faire \mathbf{u}_{ab} nul dans le vecteur de déplacement nodal $[\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i, \Theta_i, \mathbf{u}_{ab}]^T$, aux noeuds d'extrémité de chaque élément discrétisant un poteau. En ce qui concerne l'assemblage du poteau avec une poutre, le glissement de la poutre doit être pris en compte au niveau de l'assemblage ; puisque l'élément **b** n'existe plus pour le poteau, il est toujours possible de considérer l'élément fini de poteau avec un élément **b** virtuel dont toutes les rigidités sont nulles. Dans ces conditions, l'assemblage du poteau avec la poutre peut être réalisé indépendamment du glissement à ce niveau.

L'assemblage de tous les éléments de la structure permet d'écrire l'équation matricielle d'équilibre global de la structure sous la forme incrémentale suivante, semblable à la forme générale annoncée en (5) et résolue par une procédure itérative de type **Newton-Raphson modifié** :

discretisées en plusieurs sous-sections afin de pouvoir représenter convenablement la géométrie des sections et le comportement non linéaire du matériau dans ces sections. En pratique, cinq paramètres de section ont été déterminés numériquement à savoir :

- les trois rigidités :

$$ES = \int_s \mathbf{E} \, dS = \sum_j \mathbf{E}_j S_j$$

$$EZ = \int_s \mathbf{E} y \, dS = \sum_j \mathbf{E}_j y_j S_j$$

$$EI = \int_s \mathbf{E} y^2 \, dS = \sum_j \mathbf{E}_j y_j^2 S_j$$

- et les deux forces :

$$N = \int_s \sigma_x \, dS = \sum_j \sigma_{xj} S_j$$

$$M = \int_s \sigma_x y \, dS = \sum_j \sigma_{xj} y_j S_j$$

où j est l'indice des sous-sections discrétisant la section concernée,

S_j la surface d'une sous-section j ,

E_j le module de déformation longitudinale au centre de gravité de la sous-section,

y_j l'ordonnée du centre de gravité de la sous-section, et

σ_{xj} la contrainte calculée à partir de la déformation au centre de gravité de la sous-section.

En appliquant la formule de quadrature de **Gauss** aux expressions (9) et (10) et à l'expression :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_e^{(k-1)} = \int_0^L \int_s {}^t \mathbf{B}_L^T {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}_x^{(k-1)} \, dS \, dx,$$

on détermine facilement les coefficients numériques des matrices de rigidité linéaire et non linéaire et des charges équivalentes nodales de l'élément de barre.

6.2 Première validation au niveau de la non-linéarité géométrique

On considère une poutre en console avec un comportement linéaire élastique, en supposant de plus que sa rigidité de flexion en section est relativement faible par rapport à sa rigidité axiale (dans ce cas, l'allongement de la poutre est tout à fait négligeable). Les dimensions et les conditions de chargement sont données sur la figure 6. Le même exemple a été traité dans la littérature [MAT 81] où la solution analytique exacte est établie en fonction d'intégrales elliptiques complètes. La comparaison entre notre simulation numérique et la solution analytique concerne

les deux déplacements et la rotation à l'extrémité de la poutre (figures 7, 8 et Tableau 1 en annexe, pour plus de précision) ; on constate immédiatement que la concordance entre les deux calculs est excellente, avec ici une discrétisation de la poutre en dix éléments finis.

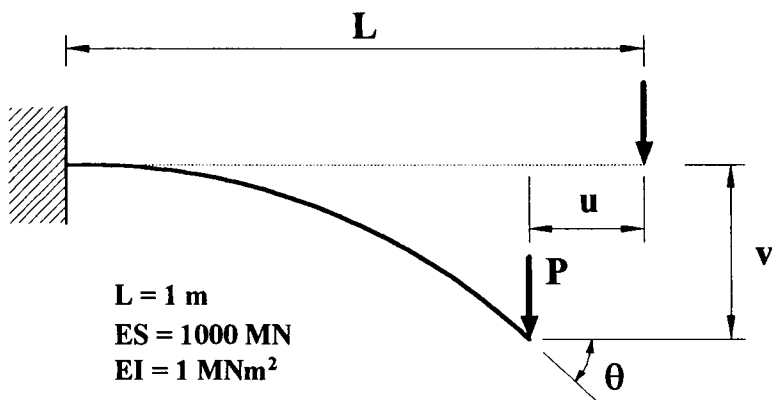


Figure 6. Exemple d'une poutre en console

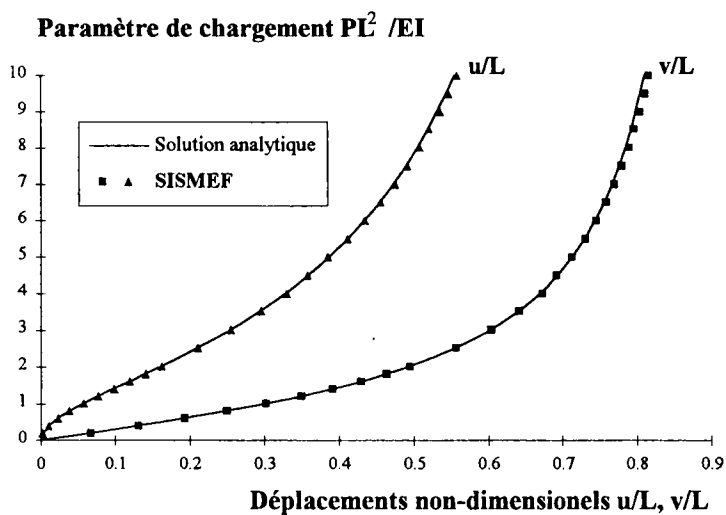


Figure 7. Comparaison des courbes "charge-déplacements"

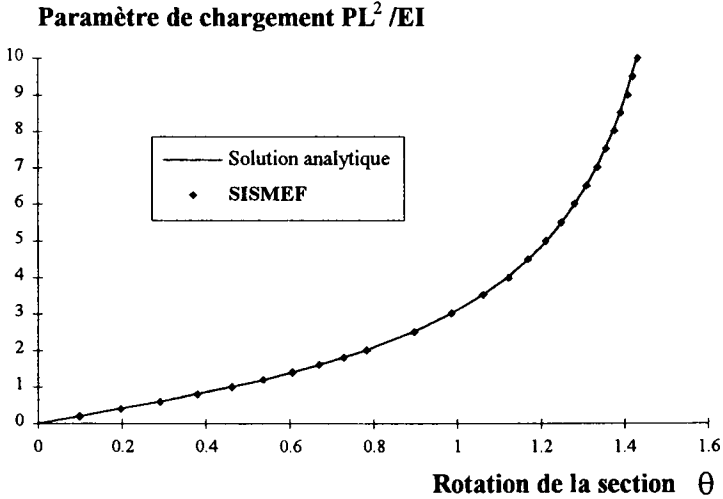


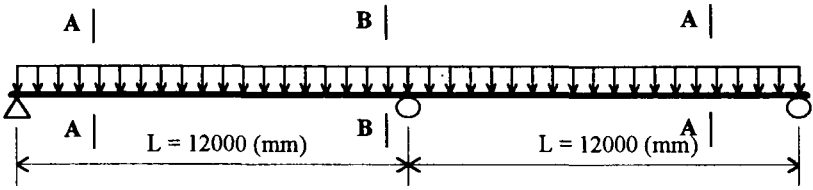
Figure 8. Comparaison des courbes "charge-rotation"

6.3. Validation du modèle au niveau du fonctionnement en poutre mixte avec différents degrés de connexion

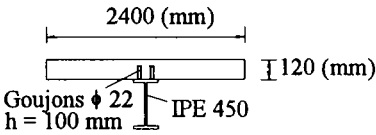
On compare ici le modèle par éléments finis avec un modèle de poutre mixte utilisant une méthode de matrices de transfert, dont la validité a fait l'objet de nombreuses justifications expérimentales [ARI 86, 90].

L'exemple traité concerne une poutre mixte continue à deux travées égales avec tout d'abord une connexion complète, puis une connexion partielle (de l'ordre de 65 %). Les dimensions de la poutre, le mode de chargement et les distributions des connecteurs (goujons soudés) sont précisés sur la figure 9. Les caractéristiques des matériaux sont les suivantes :

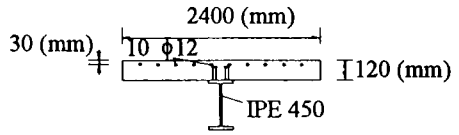
- Profilé métallique (comportement élasto-plastique parfait) :
 - Limite d'élasticité : 235 MPa
 - Module d'élasticité : 210000 MPa
 - Dalle en béton (comportement en compression de type parabole suivie d'une branche linéaire descendante) :
 - Résistance à la compression : 30 MPa
 - Résistance à la traction : 3 MPa
 - Goujons soudés à tête ($\phi 22$ mm, $h=100$ mm) :
 - Résistance ultime au cisaillement : $Q_u = 98$ kN
 - Capacité ultime de glissement : $\gamma_u = 6$ mm
 - Loi de comportement : $Q \cong Q_u (1 - e^{-0,7|\gamma|})^{0,4}$
- où Q est l'effort de cisaillement et γ le glissement (en mm), avec $\gamma \leq \gamma_u$.



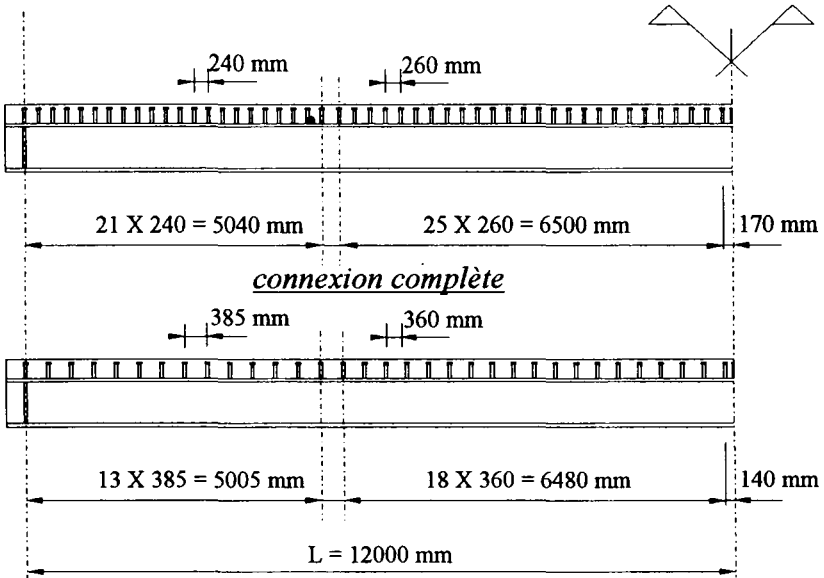
Chargement uniformément réparti



Coupe A-A



Coupe B-B



Distribution des connecteurs

Figure 9. Exemples de poutres mixtes continues

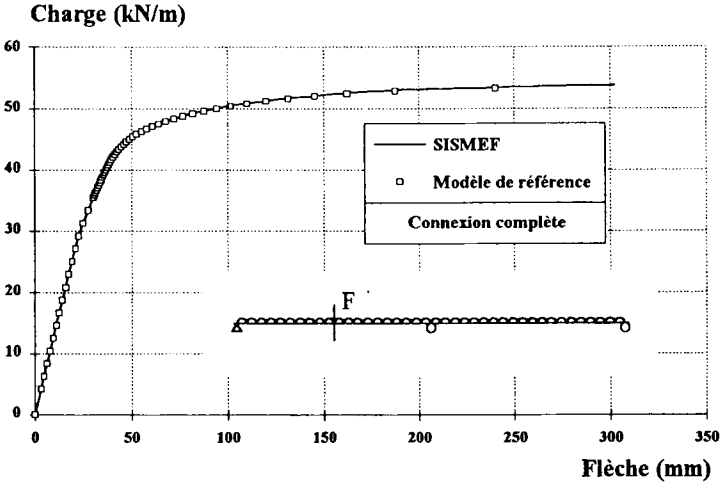


Figure 10. Comparaison des courbes "charge-flèche"
(connexion complète)

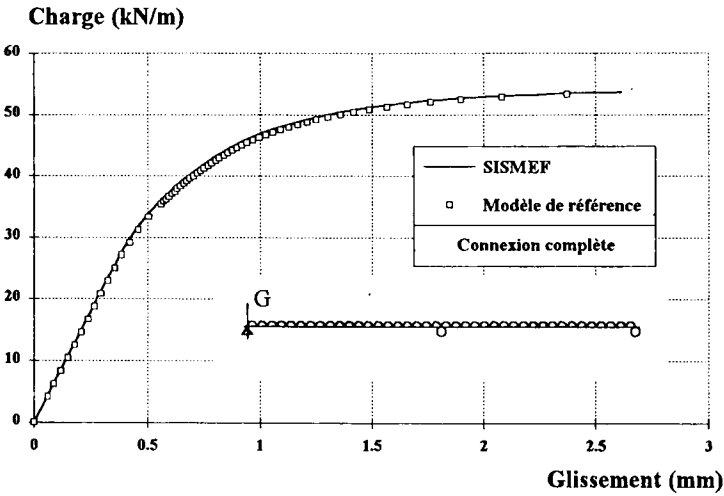


Figure 11. Comparaison des courbes "charge-glissement d'extrémité"
(connexion complète)

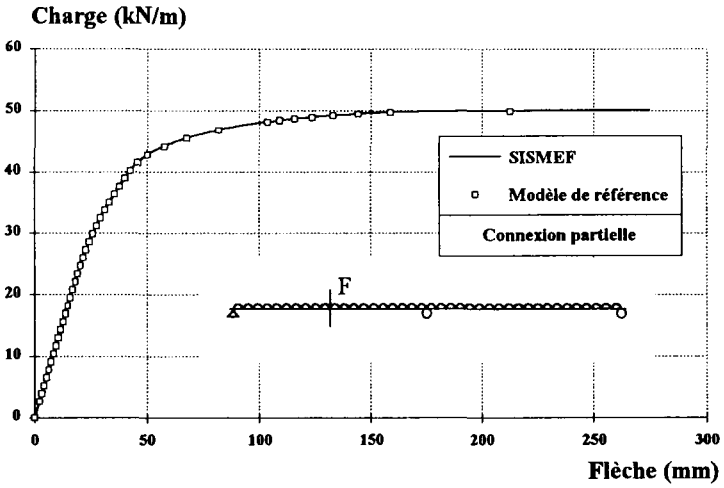


Figure 12. Comparaison des courbes "charge-flèche" (connexion partielle)

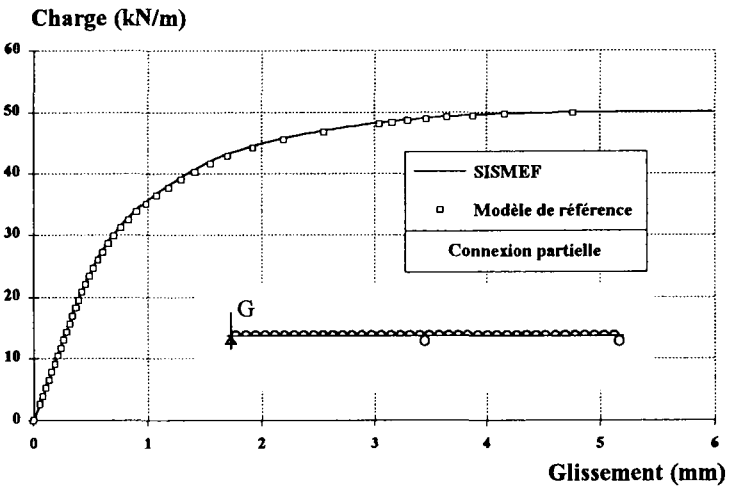


Figure 13. Comparaison des courbes "charge-glisement d'extrémité" (connexion partielle)

- Armatures (une nappe de 10 barres de diamètre 12 mm) :

Limite d'élasticité : 400 MPa

Les poutres ont été simulées avec les deux modèles jusqu'à la charge maximale obtenue sans divergence numérique. Les comparaisons portent sur les flèches à mi-travée des poutres et sur les glissements aux extrémités en fonction de la charge (ici uniformément répartie par unité de longueur) ; elles sont données d'une part aux figures 10 et 11 pour le cas de connexion complète et d'autre part aux figures 12 et 13 pour le cas de connexion partielle. A partir de ces comparaisons, on peut noter que :

- les résultats obtenus avec les deux modèles sont très proches l'un de l'autre, ce qui est vrai non seulement pour les flèches mais aussi pour les glissements ;
- les effets du second ordre pour les poutres mixtes continues sont tout à fait négligeables (le modèle par éléments finis ayant été utilisé au second ordre et celui par matrices de transfert n'ayant été formulé qu'au premier ordre).

Il convient de signaler que la même précision numérique a été obtenue ici par les deux modèles en les discrétisant géométriquement avec le même nombre d'éléments (l'élément ayant été défini ici comme le tronçon entre deux connecteurs successifs).

6.4. Validation du modèle au niveau des non-linéarités géométrique et matérielle dans le cas d'un portique métallique

Un portique métallique simple a été choisi pour comparer le modèle présenté ici avec le logiciel **PEP**, développé au CTICM en France, dont la bonne précision a pu être vérifiée lors de plusieurs confrontations avec d'autres modèles [GAL 78, 86,92].

Les dimensions du portique et les conditions de charge sont illustrées sur la figure 14 où tous les poteaux sont des **HEB200** et toutes les poutres des **IPE300**, de limite d'élasticité $f_y = 235 \text{ MPa}$. De plus, une imperfection initiale des poteaux a été introduite sous la forme d'un faux-aplomb se voulant conforme à l'Eurocode 3 [CCE 92]. Quant aux assemblages poutre-poteaux, ils ont été admis parfaitement rigides et pleinement résistants. Dans les simulations numériques, on a supposé que les charges évoluent d'une manière monotone et croissante jusqu'à la ruine de la structure. La figure 15 montre les courbes de type charge-déplacement obtenues avec les deux logiciels ; on précise que dans le modèle considéré ici, chaque barre a été discrétisée initialement en 10 éléments finis de même longueur et ensuite un élément fini de petite longueur a été ajouté à chaque extrémité de poutre afin de mieux traduire la formation des rotules plastiques (pour sa part, le logiciel **PEP** utilise directement le concept de rotule plastique sans épaisseur). On constate l'excellente concordance des déplacements donnés par les deux modèles, y compris au niveau de la rigidité initiale.

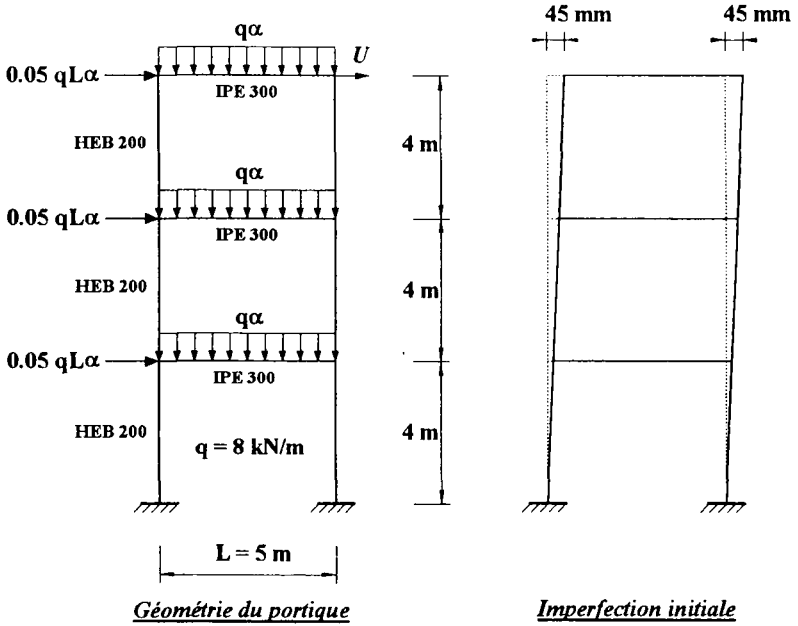


Figure 14. Exemple de portique métallique

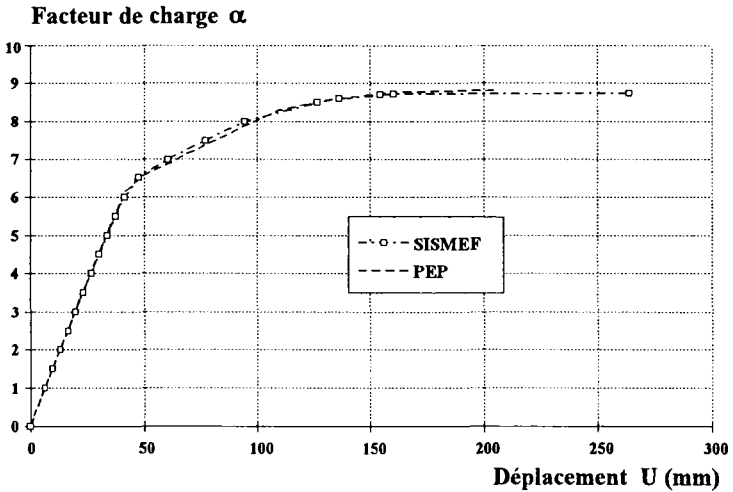


Figure 15. Comparaison des courbes "charge-déplacement latéral en tête de portique"

6.5. Application du modèle au cas des portiques mixtes

A notre connaissance, il n'existe pas de résultats théoriques précis publiés dans la littérature qui auraient permis une confrontation avec le modèle présenté dans le cas de portiques mixtes souples. L'un des buts essentiels de l'étude qui suit est de chiffrer les gains que l'on peut tirer d'une conception en portique mixte par rapport à celle en portique métallique, même avec une connexion partielle dans les poutres mixtes, sur le comportement global des portiques (résistance ultime, flèche en service).

Pour cela, on a considéré un portique à deux travées (figure 16), en adaptant en conséquence les dimensions et les conditions de charge du portique calculé précédemment (figure 14). Trois types de fonctionnement ont été étudiés. Dans un premier temps, le portique est considéré au titre de l'ossature métallique seule. Dans un deuxième temps, les poutres métalliques **IPE300** sont supposées fonctionner en collaboration avec une dalle de béton (normalement présente) dont les dimensions sont données à la figure 17 (en notant que la largeur de dalle est ici légèrement inférieure à la largeur participante habituellement adoptée). En outre, trois cas de connexion ont été calculés en plaçant dans chaque demi-travée de poutre, respectivement 17, 12 et 6 goujons (de diamètre 19 mm et de hauteur 100 mm) de manière à pouvoir illustrer l'influence des poutres mixtes en connexion partielle. Dans un troisième temps, les poteaux métalliques **HEB200** sont également transformés en poteaux mixtes partiellement enrobés de béton (figure 17) ; comme dans le cas précédent, trois degrés de connexion des poutres sont utilisés.

Les caractéristiques des matériaux sont les mêmes que celles définies à l'occasion des poutres mixtes calculées en 6.3.

Les résultats de calcul, pour les trois situations et les trois degrés de connexion, sont rassemblés sur la figure 18 sous la forme de courbes "charge-déplacement" et sur la figure 19 sous la forme de courbes "charge-glissement". Il peut être constaté facilement que :

- les charges ultimes et les rigidités latérales des portiques mixtes avec la dalle collaborante augmentent de manière appréciable par rapport à la situation du portique métallique seul ;
- les charges ultimes augmentent de manière importante en présence des poteaux mixtes, ceci en raison d'une plus grande résistance de ces poteaux au flambement, mais les rigidités latérales des portiques dans ce cas n'augmentent que légèrement par rapport à la situation des portiques mixtes au niveau des poutres seules ;
- le glissement à l'extrémité des poutres supérieures s'amplifie nettement lorsque la connexion des demi-travées de poutre passe de 17 à 6 connecteurs ;
- en revanche, le degré de connexion n'a pas un effet très significatif sur la résistance globale des portiques mixtes, en présence ou non des poteaux mixtes (figure 18). Une explication possible de cette observation, mais sans doute incomplète, réside dans le fait que la structure atteint sa ruine par flambement avant de pouvoir tirer parti de la pleine résistance plastique des poutres mixtes.

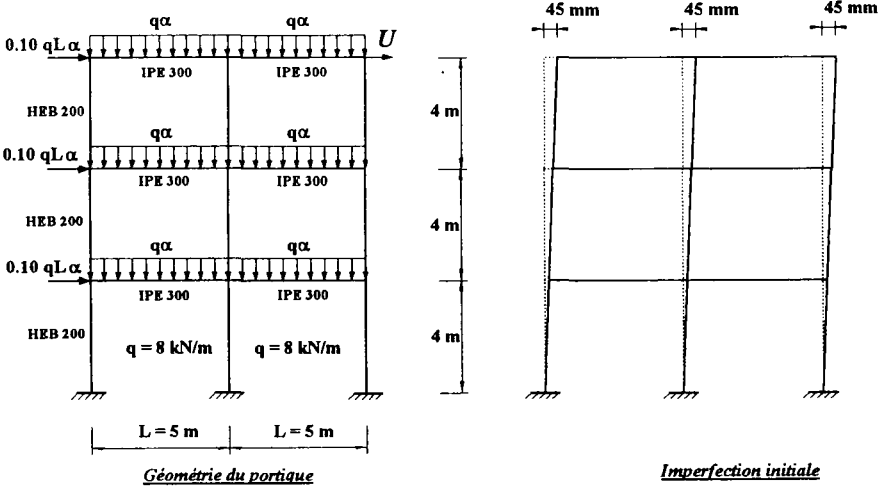


Figure 16. Exemple de portique mixte

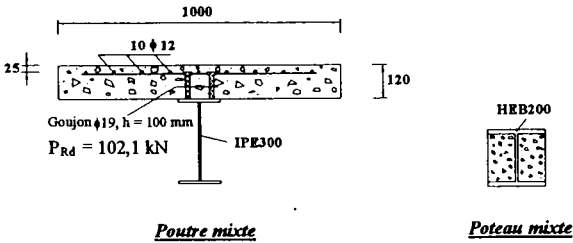


Figure 17. Définition des sections des éléments de portique

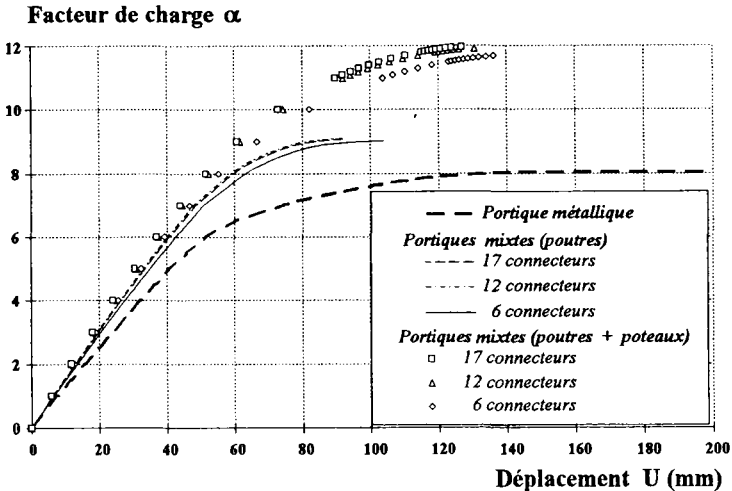


Figure 18. Courbes "charge-déplacement latéral en tête de portique"

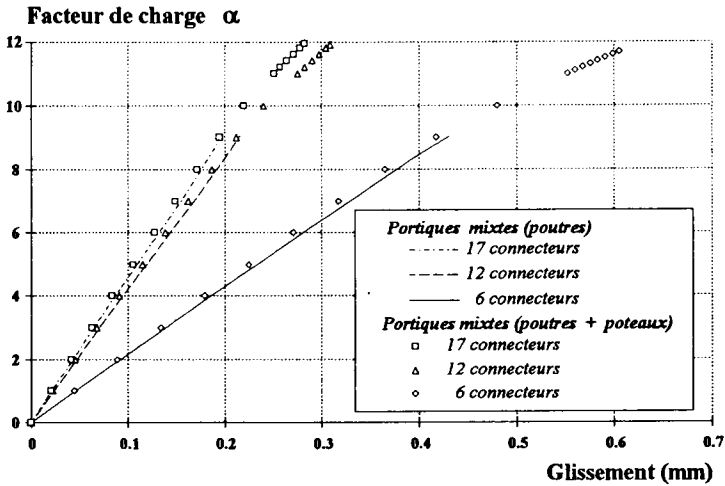


Figure 19. Courbes "charge-glisement d'extrémité de portique"

7. Conclusions

On a présenté dans cet article un modèle de calcul par éléments finis, relativement général, applicable non seulement aux poutres mixtes mais aussi aux portiques mixtes rigides ou souples. En présence d'effets du second ordre géométrique, le choix du glissement à l'interface acier-béton comme inconnue nodale a conduit à développer une formulation originale pour le calcul, en repère Lagrangien corotationnel, des matrices de rigidité relatives aux déformations linéaire et non linéaire ainsi que pour le calcul du vecteur de chargement nodal ; en particulier, l'introduction d'une matrice de transformation traduisant les relations de compatibilité en déplacements entre les parties acier et béton d'un élément mixte s'est avérée indispensable pour effectuer l'assemblage des éléments.

La bonne précision du modèle développé a été justifiée par confrontation à d'autres modèles numériques moins généraux (et même à une solution analytique) sur des aspects particuliers, mais essentiels comme critères, tels que la non-linéarité géométrique, la non-linéarité matérielle (rotules plastiques), la continuité et le fonctionnement en connexion partielle de poutres mixtes, etc.

A titre d'illustration, le modèle a permis de constater que, même en présence d'un faible degré de connexion des dalles de plancher avec les poutres métalliques, la rigidité et surtout la résistance ultime des portiques souples peuvent être augmentées de manière appréciable vis-à-vis de celles de ces mêmes portiques constitués de la partie métallique seule.

Pour terminer, il convient de signaler que le présent modèle a fait l'objet, à l'heure actuelle, d'autres généralisations [ZHA 94] permettant :

- la simulation, jusqu'à la ruine, d'une ossature mixte soumise à l'action d'un incendie (conventionnel ou naturel), incluant éventuellement l'effet du fluage de l'acier à haute température ;

- l'introduction de différents types d'assemblages poutre-poteau (concepts de semi-rigidité, de résistance partielle, etc.).

Bibliographie

- [ARI 85] ARIBERT J.M. et ABDEL AZIZ K. "Calcul des poutres mixtes jusqu'à l'état ultime, avec un effet de soulèvement à l'interface acier-béton", *Construction Métallique*, n°4, 1985.
- [ARI 86] ARIBERT J.M. et ABDEL AZIZ K. "Modèle général pour le calcul des poutres mixtes hyperstatiques jusqu'à la ruine", *Construction Métallique*, n°4, 1986.
- [ARI 90] ARIBERT J.M. "Slip and Uplift Measurements along the Steel and Concrete Interface of Various Types of Composite Beams", *Proceedings of the International Workshop RI-LEM, "Testing of Metals for Structures"*. Chapman and Hall, Naples, May 1990.
- [BAT 82] BATHE K.J. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.*, 1982.
- [BOE 91] BOERAEVE P. "Contribution à l'analyse statique non linéaire des structures mixtes planes formées de poutres, avec prise en compte des effets différés et des phases de construction", *Thèse de doctorat*, Université de Liège, 1991.
- [CCE 92] Commission des Communautés Européennes, Eurocode 3 "Calcul des structures en acier, Partie 1.1 : Règles générales et règles pour les bâtiments", *Eurocode 3*, Avril 1992.
- [CCE 92] Commission des Communautés Européennes, Eurocode 4 "Conception et dimensionnement des structures mixtes acier-béton, Partie 1.1. : Règles générales et règles pour les bâtiments", Octobre 1992.
- [DAN 89] DANIELS B.J. "Non linear analysis of composite members in bending and shear", *Rapport ICOM 223, EPFL, Lausanne*, 1989.
- [GAL 78] GALEA Y. "Programme d'analyse élasto-plastique non-linéaire de structures planes à barres", *Construction Métallique*, n°4, 1978.
- [GAL 86] GALEA Y. "Programme d'analyse de structures planes à barres avec liaisons semi-rigides à comportement non-linéaire", *Construction Métallique*, n°2, 1986.
- [GAL 92] GALEA Y. et BUREAU A. "PEP-micro, analyse plastique au second ordre de structures planes à barres", *Manuel d'utilisation, version 2.0, CTICM FRANCE*, Mars 1992.
- [MAT 81] MATTIASSON K. "Numerical results from large deflection beam as frame problems analyzed by means of elliptic integrals", *Int. j. numer. methods eng.*, 17, 1981.
- [PIA 86] PIAZZA M. et TURRINI G. "L'influenza della deformabilità delle connessioni sul comportamento delle travi composte", *Costruzioni metalliche n°6*, 1986.
- [SCH 88] SCHANZENBACH J. "Zum Einfluss von Dübelnachgiebigkeit und unter Verdübelung auf das Tragverhalten von Verbunddurchlaufträgern im hoch-und industriebau", *Thèse de doctorat*, Université de Kaiserslautern, 1988.
- [ZHA 94] ZHAO B. "Modélisation numérique des poutres et portiques mixtes acier-béton avec glissements et grands déplacements - Résistance à l'incendie", *Thèse de doctorat*, INSA de Rennes, 1994.

Annexe

PL ² /EI	Solution numérique			Solution analytique		
	v/L	u/L	θ	v/L	u/L	θ
0.2	0.06637	0.00265	0.09964	0.06636	0.00265	0.09964
0.4	0.13098	0.01037	0.19716	0.13098	0.01035	0.19716
0.6	0.19238	0.02253	0.29078	0.19235	0.02249	0.29074
0.8	0.24951	0.03824	0.37916	0.24945	0.03817	0.37906
1.0	0.30182	0.05654	0.46150	0.30172	0.05643	0.46135
1.2	0.34918	0.07657	0.53756	0.34901	0.07640	0.53730
1.4	0.39169	0.09754	0.60732	0.39147	0.09732	0.60698
1.6	0.42974	0.11891	0.67116	0.42941	0.11860	0.67065
1.8	0.46368	0.14019	0.72939	0.46326	0.13981	0.72876
2.0	0.49397	0.16111	0.78252	0.49346	0.16064	0.78175
2.5	0.55642	0.21065	0.89613	0.55566	0.20996	0.89500
3.0	0.60429	0.25535	0.98751	0.60325	0.25442	0.98602
3.5	0.64169	0.29508	1.06191	0.64039	0.29394	1.06012
4.0	0.67155	0.33030	1.12334	0.66996	0.32894	1.12124
4.5	0.69258	0.35703	1.16793	0.69397	0.35999	1.17228
5.0	0.71360	0.38572	1.21265	0.71379	0.38763	1.21537
5.5	0.73127	0.41143	1.25079	0.73042	0.41236	1.25211
6.0	0.74628	0.43449	1.28349	0.74457	0.43459	1.28370
6.5	0.75920	0.45529	1.31174	0.75676	0.45468	1.31107
7.0	0.77045	0.47413	1.33631	0.76737	0.47293	1.33496
7.5	0.78035	0.49127	1.35782	0.77670	0.48957	1.35593
8.0	0.78915	0.50695	1.37676	0.78498	0.50483	1.37443
8.5	0.79704	0.52135	1.39351	0.79239	0.51886	1.39084
9.0	0.80415	0.53462	1.40839	0.79906	0.53182	1.40547
9.5	0.81063	0.54690	1.42168	0.80510	0.54383	1.41854
10.0	0.81656	0.55830	1.43358	0.81061	0.55500	1.43029

Tableau 1