
Interpolation non linéaire pour un élément fini de poutre en grandes rotations tri-dimensionnelles

Mazen Al Mikdad — Adnan Ibrahimbegovic

Université de Technologie de Compiègne

Département de Génie Mécanique

Lab. LG2mS, Division MNM, BP 649, 60206 Compiègne cedex

RÉSUMÉ. Nous proposons dans cet article une formulation éléments finis pour les poutres tri-dimensionnelles soumises à des grands déplacements et des grandes rotations mais avec de petites déformations élastiques, situation souvent rencontrée dans les constructions mécaniques et de génie-civil. La caractéristique principale de cette formulation concerne le traitement des rotations finies : nous sommes capables à l'aide d'une paramétrisation des grandes rotations 3D par des matrices orthogonales, grâce à des interpolations éléments finis non linéaires des rotations linéarisées, de fournir une matrice tangente de rigidité symétrique permettant une convergence quadratique vers la solution incrémentale, la linéarisation cohérente étant affectée par cette démarche. Nombreux exemples numériques démontrent l'efficacité de ce développement.

ABSTRACT. We propose in this paper a finite element formulation for three-dimensional beams undergoing large displacement and large rotations but small strains, many structures of mechanical and civil engineering belong to this class of problems. The main feature of this formulation concerns the treatment of finite rotations : by using the orthogonal matrix parametrization of 3D finite rotations and a nonlinear finite element interpolation of linearized rotations, we are able to provide a symmetric tangent stiffness matrix leading to quadratic convergence of the incremental solution procedure, and the consistent linearization being affected by this approach. Several numerical examples demonstrate the efficiency of this development.

MOTS-CLÉS: poutre tri-dimensionnelle de Reissner, grandes rotations, non linéarité géométrique.

KEY WORDS: Reissner's three-dimensional beam, finite rotations, geometric nonlinearity.

1. Introduction

Les grands déplacements et les grandes rotations des structures poutres sont le thème essentiel que nous abordons dans ce document. La difficulté provient de la nature complexe des rotations d'amplitudes finies 3-D (voir [ARG 82]). La paramétrisation intrinsèque des grandes rotations conduit à une matrice orthogonale qui est un élément d'un espace non linéaire dit variété $SO(3)$.

D'un coté, la représentation par des matrices orthogonales des rotations finies tri-dimensionnelles apporte une clarté aux considérations théoriques de ce problème, mais de l'autre coté, elle nous amène à plusieurs conséquences indésirables concernant l'implantation élément fini: la plus remarquable parmi elles étant la non symétrie de la matrice tangente de rigidité (voir [SIM 86] et [CRI 90]).

Ainsi dans ce travail nous proposons une méthode pour surmonter cet inconvénient fondamental, fournissant une matrice tangente de rigidité symétrique. L'idée clé réside dans l'exploitation de la relation entre la matrice orthogonale des grandes rotations et "le vecteur de grande rotation". (Ce dernier étant plutôt un terme de confusion, pour clarifier il est référé au vecteur qui n'est pas affecté par la rotation, c'est-à-dire le vecteur propre de la matrice orthogonale des grandes rotations dont la valeur propre associée est égale à 1). Cette considération et ses issues, comme donné dans Ibrahimbegović et al. [IBR 95b] conduisent à une relation liant la matrice de rotation au vecteur de rotation, et aussi leurs variations. Ensuite, par l'exploitation de ceci et par la définition d'interpolations éléments finis isoparamétriques simples pour les paramètres du vecteur de rotation (et ses variations), nous sommes capables de définir les interpolations éléments finis non linéaires correspondantes valables pour la paramétrisation de la matrice orthogonale.

Le fait que les interpolations éléments finis sont non linéaires implique que les issues dans la linéarisation cohérente deviennent plus subtiles. En particulier la procédure rigoureuse est: on a à linéariser le problème discret obtenu une fois que les interpolations éléments finis choisies sont remplacées dans la forme faible des équations gouvernantes.

Pour les interpolations éléments finis non linéaires, une procédure pareille produit quelques termes additionnels par rapport à la forme simplement obtenue par la discrétisation des équations continues linéarisées. Tous ces termes jouent un rôle important si on veut rendre cet élément fini utile pour l'analyse de flambement [IBR 95c] et garantir une convergence robuste de la stratégie basée sur la méthode de Newton, et donc ne doivent pas être omis. Il est intéressant de noter que cette dernière observation a été faite par Frey et Cescotto [FRE 78] dans un cadre plus simplifié de l'analyse des poutres à deux dimensions.

Le profil de ce document est comme suit: dans la prochaine section nous récapitulons les équations de base concernant les rotations finies 3-D disponibles en versions spatiale et matérielle. Dans la suite, la version spatiale est privilégiée et dans la section 3 nous présentons la forme faible des équations gouvernantes; les interpolations non linéaires choisies et la forme linéarisée du problème dis-

cret conduisant à la forme explicite de la matrice tangente de rigidité. Plusieurs problèmes exigeants ont été résolus dans la section 4 en relation avec des grandes rotations tri-dimensionnelles et de l'analyse du flambement et du post-flambement des structures poutres, illustrant ainsi la valeur de l'approche proposée. Une conclusion est présentée comme la section 5.

Remarques sur la notation: Dans ce document, les scalaires sont notés à l'aide de lettres minuscules standards, les vecteurs sont notés avec des lettres minuscules grasses et les matrices sont écrites en utilisant des caractères majuscules gras. Les produits de deux vecteurs sont notés: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$ pour le produit scalaire, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i b_j \epsilon_{ijk}$ pour le produit vectoriel et $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j$ pour le produit tensoriel.

2. Paramétrisation des grandes rotations tri-dimensionnelles

Considérons une poutre courbe dans l'espace 3-D (voir figure 1) subissant une grande transformation avec à la fois des déplacement et des rotations d'amplitudes finies: Nous associons à chaque abscisse curvilligne s de la configuration de référence de la poutre L un repère orthonormé \mathbf{g}_i en choisissant \mathbf{g}_1 comme vecteur tangent à sa fibre neutre. Le repère transformé \mathbf{a}_i de \mathbf{g}_i est aussi orthonormé. Il est obtenu par une translation de vecteur $\mathbf{x}^\varphi - \mathbf{x}$ (où $\mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x}(s))$ est le vecteur position courant) et une rotation caractérisée par un tenseur à deux points Λ

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= \mathbf{a}_i(s) \otimes \mathbf{g}_i(s) \\ &= \bar{\Lambda}_{ji}(s) \mathbf{e}_j^\varphi \otimes \mathbf{e}_i, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\bar{\Lambda}_{ji}$ est la représentation des coordonnées de Λ dans le système global de coordonnées \mathbf{e}_i de la configuration de référence (dans laquelle nous définissons des objets matériels), et \mathbf{e}_i^φ celui de la configuration déformée (dans laquelle nous définissons des objets spatiaux). Le tenseur Λ appartient au groupe non commutatif $SO(3)$ de matrices orthogonales ($\Lambda^{-1} = \Lambda^T$) spécial ($\det[\Lambda] = 1$) d'ordre 3×3 connu aussi comme le groupe de Lie. Il ne s'agit pas d'un espace linéaire mais d'une variété différentielle [LAN 85].

Nous choisissons de confondre les deux systèmes globaux de coordonnées, mais nous retenons des symboles différents pour distinguer les objets liés à des configurations différentes, ainsi on a:

$$\mathbf{e}_i^\varphi = \mathbf{I} \mathbf{e}_i \implies \mathbf{I} = \mathbf{e}_i^\varphi \otimes \mathbf{e}_i. \tag{2.2}$$

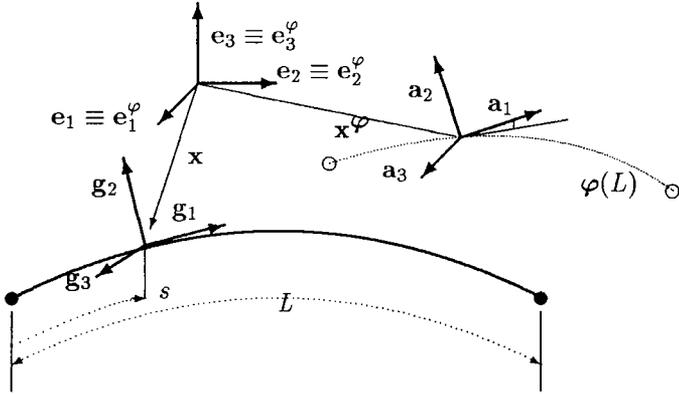


Figure 1.- Poutre courbe dans l'espace

Donnons notre attention à partir d'ici, à la grande rotation d'une section initialement normale à la fibre moyenne de la poutre, ayant pour cordonnée curvilligne s .

Conformément au théorème d'Euler, le vecteur de rotation ϑ reste inchangé après transformation. Il s'agit en fait d'un vecteur propre de Λ associé à sa valeur propre unitaire:

$$\begin{aligned} \theta &= \Lambda \vartheta \\ &= \mathbf{I} \vartheta \end{aligned} \tag{2.3}$$

Comme Λ est tenseur à deux points, liant le vecteur matériel ϑ à son image spatiale θ , les deux vecteurs possèdent les mêmes mesures dans le référentiel qu'on a choisi:

$$\theta \cdot e_i^\varphi = \vartheta \cdot e_i = \theta_i \tag{2.4}$$

Il est possible d'exprimer Λ en fonction de θ par la formule de Rodrigues [GOL 80] et [ARG 82]:

$$\Lambda = \exp[\Theta] = \cos\theta \mathbf{I} + \frac{\sin\theta}{\theta} \Theta + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \theta \otimes \theta \tag{2.5}$$

où nous avons noté $\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$ la magnitude du vecteur de rotation et Θ le tenseur anti-symétrique qui opère sur un vecteur \mathbf{b} comme le produit vectoriel de θ sur ce dernier c'est-à-dire:

$$\Theta \mathbf{b} = \theta \times \mathbf{b} ; \forall \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^3 ; \Theta = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} ; \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

On dit que θ est le vecteur axial de la matrice Θ . La décomposition du vecteur tourné \mathbf{y} de \mathbf{x} dans la figure 2 permet d'établir directement l'expression de Λ (équation [2.5]).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} ; \mathbf{a} = \left(\left(\frac{1}{\theta} \boldsymbol{\theta} \right) \cdot \mathbf{x} \right) \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\theta} , \\
 \mathbf{b} &= \left(\mathbf{x} - \left(\left(\frac{1}{\theta} \boldsymbol{\theta} \right) \cdot \mathbf{x} \right) \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\theta} \right) \cos \theta \text{ et } \mathbf{c} = \left(\left(\frac{1}{\theta} \boldsymbol{\theta} \right) \times \mathbf{x} \right) \sin \theta
 \end{aligned}$$

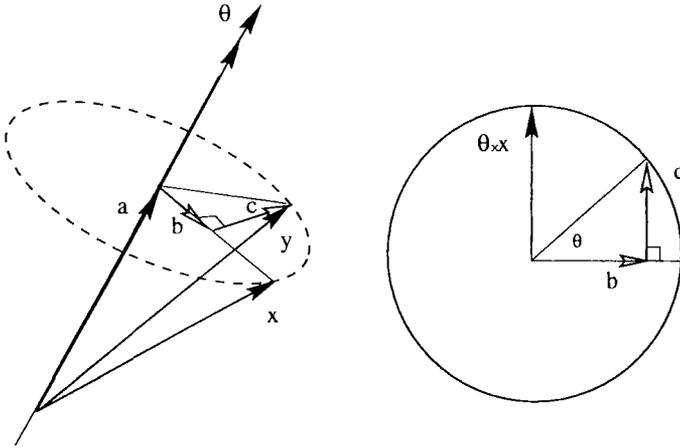


Figure 2.- Grande rotation d'un vecteur \mathbf{x} dans l'espace

La matrice de rotation virtuelle est obtenue par l'application de la dérivée de Gateaux [CIA 88] à la forme exponentielle [2.5] en version spatiale ou matérielle selon la terminologie de Ibrahimbegović et al. [IBR 95b].

En version spatiale, on peut écrire la variation admissible de $\mathbf{\Lambda}$ sous la forme:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{\Lambda} &= \left. \frac{d}{d\alpha} [\mathbf{\Lambda}_\alpha] \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{d\alpha} [\exp(\alpha \delta \mathbf{W}) \mathbf{\Lambda}] \right|_{\alpha=0} \\
 &= \delta \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} ,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

où l'objet spatial $\delta \mathbf{W}$ est une matrice anti-symétrique dont le vecteur axial est $\delta \mathbf{w}$. Autrement dit, le tenseur $\delta \mathbf{W}$ représente une rotation virtuelle \mathbf{a}_i qui vient se superposer à la rotation existante, il est élément de l'espace tangent à $SO(3)$ au point $\mathbf{\Lambda}$ noté $T_{\mathbf{\Lambda}} SO(3)$, la figure 3 en donne une illustration.

Ce qui est le plus important pour la considération suivante est d'exprimer la rotation virtuelle linéarisée spatiale $\delta \mathbf{w}$ en fonction du vecteur de rotation virtuel $\delta \boldsymbol{\theta}$ (voir [IBR 95b] pour les détails)

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{w} &= \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) \delta \boldsymbol{\theta}, \\
 \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\Theta} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} .
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Remarque 1: Nous pouvons d'une autre part formuler la rotation virtuelle $\delta \mathbf{\Lambda}$ dans l'espace $T_I SO(3)$ tangent à $SO(3)$ au point identité (voir figure 3), en ac-

cord avec la représentation matérielle retenue par Argyris [ARG 82] et Cardona et Geradin [CAR 88]

$$\begin{aligned} \delta \Lambda &= \left. \frac{d}{d\alpha} [\Lambda_\alpha] \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} [\Lambda \exp(\alpha \delta \Psi)] \right|_{\alpha=0} \\ &= \Lambda \delta \Psi, \end{aligned}$$

où le tenseur $\delta \Psi$ anti-symétrique caractérisé par le vecteur axial $\delta \psi$ est cette fois-ci un objet matériel. □

Remarque 2: Il existe un isomorphisme entre $T_\Lambda SO(3)$ et \mathfrak{R}^3 et entre $T_I SO(3)$ et \mathfrak{R}^3 , et on peut alors considérer $\delta \mathbf{w}$ et $\delta \psi$ comme des rotations linéarisées c'est-à-dire comme des vecteurs de l'espace linéaire \mathfrak{R}^3 (voir [CAR 88]). Il est d'ailleurs possible de les lier:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} = \Lambda \delta \Psi \Lambda^T &\implies \delta \mathbf{w} = \Lambda \delta \psi \\ \delta \Psi = \Lambda^T \delta \mathbf{W} \Lambda &\implies \delta \psi = \Lambda^T \delta \mathbf{w}. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque 3: Les matrices Λ et \mathbf{T} sont composées des mêmes matrices élémentaires, donc elles partagent les mêmes vecteurs propres. Nous pouvons alors obtenir la relation $\delta \psi = \mathbf{T}^T(\vartheta)$ (voir [IBR 95b]). □

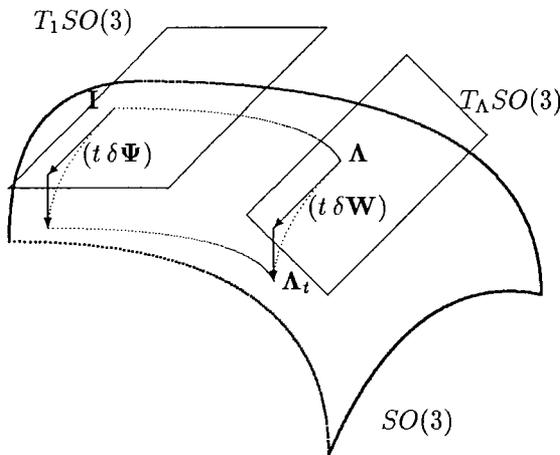


Figure 3.- Rotation virtuelle en versions: spatiale et matérielle

3. Modèle géométriquement exact de poutre tri-dimensionnelle

À partir de cette section, nous nous intéressons à la description spatiale du problème de flexion des poutres, la théorie de Reissner [REI 81] approfondie par Simo et Vu-Quoc [SIM 84] et Ibrahimbegović [IBR 95a] formulant le modèle en efforts résultants est retenue.

3.1. Principe des travaux virtuels

Les déformations généralisées énergiquement conjuguées aux efforts résultants internes: force \mathbf{n}^φ et moment \mathbf{m}^φ , peuvent être définies par le vecteur de déformation axiale et de cisaillement transverse, et le vecteur de courbure

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^\varphi &= \boldsymbol{\varphi}' - \mathbf{a}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}^\varphi &= \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad [3.1]$$

respectivement, où $(\bullet)' = \frac{d}{ds}(\bullet)$ désigne la dérivation par rapport à l'abscisse curvilligne s , et $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur axial du tenseur anti-symétrique des courbures $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Lambda}'\boldsymbol{\Lambda}^T$.

On considère l'écriture faible des équations d'équilibre et des réactions qui correspond au principe des travaux virtuels en formulation Lagrangienne totale

$$G(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Lambda}) \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi}, \delta\mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda}) = \int_L \{ \mathcal{L}_\delta \boldsymbol{\epsilon}^\varphi \cdot \mathbf{n}^\varphi + \mathcal{L}_\delta \boldsymbol{\kappa}^\varphi \cdot \mathbf{m}^\varphi \} ds - \int_L \{ \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{n}} + \delta\mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{m}} \} ds = 0, \quad [3.2]$$

où $\bar{\mathbf{n}}$ est une densité linéique de forces, $\bar{\mathbf{m}}$ une densité linéique de moments, et $\mathcal{L}_\delta(\bullet^\varphi)' = \boldsymbol{\Lambda}\delta(\boldsymbol{\Lambda}^T\bullet^\varphi)$ (\bullet^φ est un objet vectoriel spatial) représente une forme particulière de la dérivée de Lie [MAR 83], l'application de celle-ci aux déformations généralisées [3.1] nous donne les expressions de leurs variations admissibles:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta \boldsymbol{\epsilon}^\varphi &= \delta\boldsymbol{\varphi}' - \delta\mathbf{w} \times \boldsymbol{\varphi}' \\ \mathcal{L}_\delta \boldsymbol{\kappa}^\varphi &= \delta\mathbf{w}' \end{aligned} \quad [3.3]$$

3.2. Approximations élément fini et interpolation non linéaire des rotations

La poutre est approximée à l'aide d'éléments finis. Sur chaque élément on utilise une interpolation isoparamétrique [BAT 90] du vecteur position:

$$\boldsymbol{\varphi} \Big|_{L^e} = \sum_{I=1}^{Nen} N_I(\xi) \boldsymbol{\varphi}_I = \mathbf{N} \boldsymbol{\varphi}^e; \quad \delta\boldsymbol{\varphi} \Big|_{L^e} = \mathbf{N} \delta\boldsymbol{\varphi}^e. \quad [3.4]$$

Quant au paramètre de rotation virtuelle, son approximation est en fonction des vecteurs de rotation nodaux comme suit:

$$\delta \mathbf{w} \Big|_{L^e} = \mathbf{T} \left(\sum_{J=1}^{Nen} N_J(\xi) \boldsymbol{\theta}_J \right) \sum_{I=1}^{Nen} N_I(\xi) \delta \boldsymbol{\theta}_I = \mathbf{T}(\mathbf{N} \boldsymbol{\theta}^e) \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\theta}^e, \quad [3.5]$$

Notons qu'il s'agit là d'une interpolation non conventionnelle où le champ approximé n'est pas une combinaison linéaire des variables nodales, la matrice \mathbf{T} comportant des fonctions trigonométriques de la magnitude θ elle-même approximée, est fortement non linéaire. Ce type d'interpolation est choisi dans le but d'obtenir une matrice tangente de rigidité qui sera symétrique. Rappelons nous qu'une interpolation isoparamétrique de $\delta \mathbf{w}$ conduit à une matrice tangente de rigidité qui est non symétrique (voir [SIM 86]).

3.3. Discrétisation et linéarisation cohérente du principe des travaux virtuels. Matrice tangente de rigidité

Le type d'interpolations qu'on utilise pour décrire le champ de rotation nécessite que la discrétisation de la forme variationnelle [3.2] précède sa linéarisation cohérente.

Le principe du travail virtuel peut s'exprimer en fonction des paramètres discrets nodaux:

$$\begin{aligned} G \Big|_{L^e} (\boldsymbol{\varphi}^e, \boldsymbol{\theta}^e) \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi}^e, \delta \boldsymbol{\theta}^e) &= \int_{L^e} \{ (\mathbf{N}' \delta \boldsymbol{\varphi}^e - (\mathbf{T} \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\theta}^e) \times (\mathbf{N}' \boldsymbol{\varphi}^e)) \cdot \mathbf{n}^\varphi \\ &\quad + ((\mathbf{T} \mathbf{N}' + \mathbf{N} \mathbf{T}') \delta \boldsymbol{\theta}^e) \cdot \mathbf{m}^\varphi \} ds \\ &\quad - \int_{L^e} \{ \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\varphi}^e \cdot \bar{\mathbf{n}} + \mathbf{N} \mathbf{T} \delta \boldsymbol{\theta}^e \cdot \bar{\mathbf{m}} \} ds = 0, \end{aligned} \quad [3.6]$$

avec l'apparition de la dérivée suivant s de la matrice \mathbf{T} [2.13] mise sous la forme:

$$\mathbf{T}'(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}') (c_1 \mathbf{I} + c_2 \boldsymbol{\Theta} + c_3 \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}) + c_4 \boldsymbol{\Theta}' + c_5 (\boldsymbol{\theta}' \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}'), \quad [3.7]$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^3}, \quad c_2 = \frac{\theta \sin \theta + 2 \cos \theta - 2}{\theta^4}, \quad c_3 = \frac{3 \sin \theta - 2 \theta - \theta \cos \theta}{\theta^5}, \\ c_4 &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}, \quad c_5 = \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir obtenir un système d'équations algébriques non linéaires dont la solution serait obtenue par un schéma itératif de Newton, nous appliquons à la fonctionnelle discrète [3.6] l'opérateur tangent L correspondant à la dérivée directionnelle suivant $\Delta\varphi^e$ et $\Delta\theta^e$:

$$L[G \Big|_{L^e}] = G \Big|_{L^e} + \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \{G \Big|_{L^e} [\varphi^e + \alpha \Delta\varphi^e, \theta^e + \alpha \Delta\theta^e]\} = 0, \quad [3.8]$$

cette linéarisation dite cohérente nous garantit la convergence quadratique de l'algorithme de Newton.

Pour une poutre avec loi de comportement élastique linéaire justifiée pour des petites déformations: $\mathbf{n}^\varphi = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{A}}^T \epsilon^\varphi$ et $\mathbf{m}^\varphi = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{A}}^T \kappa^\varphi$, avec les matrices constitutives $\mathbf{C}_n = \text{diag}(E A, G A'_2, G A'_3)$ pour l'effet de membrane et de cisaillement transverse, et $\mathbf{C}_m = \text{diag}(G J, E I_2, E I_3)$ pour l'effet de torsion et de flexion. La linéarisation peut être mise sous la forme:

$$L[G \Big|_{L^e}] = G \Big|_{L^e} + \int_{L^e} \{ \mathcal{L}_\delta \epsilon \cdot \mathbf{A} \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{A}}^T \mathcal{L}_\Delta \epsilon + \mathcal{L}_\delta \kappa \cdot \mathbf{A} \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{A}}^T \mathcal{L}_\Delta \kappa \} ds + \int_{L^e} \{ \mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi \cdot \mathbf{n}^\varphi + \mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \kappa^\varphi \cdot \mathbf{m}^\varphi \} ds = 0, \quad [3.9]$$

faisant intervenir les déformations incrémentales généralisées discrètes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta \epsilon^\varphi &= \mathbf{N}' \Delta\varphi^e - (\mathbf{T} \mathbf{N} \Delta\theta^e) \times (\mathbf{N}' \varphi^e) \\ \mathcal{L}_\Delta \kappa^\varphi &= (\mathbf{T} \mathbf{N}' + \mathbf{N} \mathbf{T}') \Delta\theta^e, \end{aligned} \quad [3.10]$$

et les incréments sur les déformations virtuelles: axiale et de flexion, discrets eux aussi

$$\mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi = -(\mathbf{T} \mathbf{N} \Delta\theta^e) \times (\mathbf{N}' \delta\varphi^e + (\mathbf{N}' \varphi^e) \times (\mathbf{T} \mathbf{N} \delta\theta^e)) + (\mathbf{N}' \Delta\varphi^e) \times (\mathbf{T} \mathbf{N} \delta\theta^e) + (\mathbf{N}' \varphi^e) \times (\Delta \mathbf{T} \mathbf{N} \delta\theta^e), \quad [3.11]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \kappa^\varphi &= -(\mathbf{T} \mathbf{N} \Delta\theta^e) \times ((\mathbf{T} \mathbf{N}' + \mathbf{S} \mathbf{N}) \delta\theta^e + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T} \mathbf{N} \delta\theta^e) \\ &+ (\Delta \mathbf{T} \mathbf{N}' + \Delta \mathbf{S} \mathbf{N}) \delta\theta^e + \Delta \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T} \mathbf{N} \delta\theta^e) \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times (\Delta \mathbf{T} \mathbf{N} \delta\theta^e), \end{aligned} \quad [3.12]$$

où \mathbf{S} est une matrice purement cinématique:

$$\mathbf{S} = c_1[\boldsymbol{\theta}' \otimes \boldsymbol{\theta}] + c_2[(\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta}') \otimes \boldsymbol{\theta}] + c_3(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')[\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}] - c_4[\boldsymbol{\theta}'] + c_5(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')[\mathbf{I}] + c_5[\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}'], \quad [3.13]$$

et $\Delta \mathbf{T}$ et $\Delta \mathbf{S}$ sont les dérivées de Gateaux des matrices \mathbf{T} et \mathbf{S} .

Finalement le système d'équations non linéaires de taille $6 N_{en} \times 6 N_{en}$ relatif à un élément peut être mis en évidence:

$$L[G \Big|_{L^e}] = \begin{pmatrix} \delta\varphi^e \\ \delta\theta^e \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{r}^e - \mathbf{f}^e + [\mathbf{K}_m^e + \mathbf{K}_g^e] \begin{pmatrix} \Delta\varphi^e \\ \Delta\theta^e \end{pmatrix}) = 0, \quad [3.14]$$

où on a noté \mathbf{r}^e le vecteur résidu interne élémentaire, dont la partie associée à un noeud I est:

$$\mathbf{r}_I^e = \int_{L^e} \begin{pmatrix} N_I' \mathbf{n}^\varphi \\ -N_I \mathbf{T}^T [\mathbf{N}' \varphi^e \times] \mathbf{n}^\varphi + (N_I' \mathbf{T}^T + N_I \mathbf{T}'^T) \mathbf{m}^\varphi \end{pmatrix} ds, \quad [3.15]$$

\mathbf{f}^e est le vecteur des forces externes, pour un noeud I on a

$$\mathbf{f}_I^e = \int_{L^e} \begin{pmatrix} N_I \bar{\mathbf{n}} \\ N_I \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{m}} \end{pmatrix} ds, \quad [3.16]$$

la matrice tangente de rigidité élémentaire est décomposée d'une manière classique dans une formulation Lagrangienne totale en sa partie matérielle \mathbf{K}_m^e (matrice nettement symétrique) et sa partie géométrique \mathbf{K}_g^e ; leurs parties associées aux noeuds I et J sont respectivement:

$$\mathbf{K}_{mIJ}^e = \int_{L^e} \left[\begin{array}{c} N_I' \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{A}}^T N_{J'} \\ -N_I \mathbf{T}^T [\mathbf{N}' \varphi^e \times] \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{A}}^T N_{J'} \\ N_I' \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{A}}^T [\mathbf{N}' \varphi^e \times] \mathbf{T} N_J \\ -N_I \mathbf{T}^T [\mathbf{N}' \varphi^e \times] \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{A}}^T [\mathbf{N}' \varphi^e \times] \mathbf{T} N_J \\ +(N_I' \mathbf{T}^T + N_I \mathbf{T}'^T) \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{A}}^T (\mathbf{T} N_{J'} + \mathbf{T}' N_J) \end{array} \right] ds, \quad [3.17]$$

et

$$\mathbf{K}_{gIJ}^e = \int_{L^e} \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ N_I \mathbf{T}^T [\mathbf{n}^\varphi \times] N_{J'} \\ -N_I' [\mathbf{n}^\varphi \times] \mathbf{T} N_J \\ N_I (\mathbf{T}^T [\mathbf{n}^\varphi \otimes (\mathbf{N}' \varphi^e) - (\mathbf{n}^\varphi \cdot (\mathbf{N}' \varphi^e)) \mathbf{I}] \mathbf{T} + \Xi (\mathbf{n}^\varphi \times (\mathbf{N}' \varphi^e)) N_J \\ + N_I (\mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \otimes \omega - (\mathbf{m}^\varphi \cdot \omega) \mathbf{I}] \mathbf{T} + \Xi (\mathbf{m}^\varphi \times \omega)) N_J \\ + N_I (\mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{S} - \mathbf{S}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} + \mathbf{H}) N_J \\ + N_I (\mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} + \Xi^T (\mathbf{m}^\varphi)) N_{J'} \\ + N_I' (-\mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} + \Xi (\mathbf{m}^\varphi)) N_J \end{array} \right] ds. \quad [3.18]$$

Nous avons écrit $[\bullet \times]$ pour noter la matrice anti-symétrique d'un vecteur axial \bullet , avec les matrices fortement non linéaires dépendant des forces internes généralisées assurant la symétrie de \mathbf{K}_g^e suivantes:

$$\Xi(\mathbf{a}) = c_1[\mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\theta}] - c_2[(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\theta}] + c_3(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a})[\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}] + c_4[\mathbf{A}] + c_5(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a})[\mathbf{I}] + c_5[\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{a}] , \tag{3.19}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & (c_1(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}') + c_2\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta}') + c_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')) [\mathbf{I}] \\ & + (a_1(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}') + a_2\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta}') + a_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')) [\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}] + c_5[\boldsymbol{\theta}' \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\theta}'] \\ & + c_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta})[\boldsymbol{\theta}' \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}'] + c_3(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')[\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\theta}] + c_2[(\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{m}) \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes (\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{m})] . \end{aligned} \tag{3.20}$$

et les coefficients scalaires:

$$a_1 = c_3 - c_2 , \quad a_2 = (c_1 - 4c_2)/\theta^2 , \quad a_3 = (c_2 - 5c_3) \theta^2 .$$

Remarque 4: Si l'on obtient d'abord la forme linéarisée de l'équation [3.2] et puis on y remplace les interpolations [3.4] et [3.5], l'expression du vecteur résidu interne ne change pas par rapport à ce que l'on trouve dans [3.15]. On trouve de même pour \mathbf{K}_m^e , tandis que la partie géométrique de la matrice tangente devient:

$$\mathbf{K}_{gIJ}^e = \int_{L^e} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ N_I \mathbf{T}^T [\mathbf{n}^\varphi \times] N_{J'} \\ -N_I' [\mathbf{n}^\varphi \times] \mathbf{T} N_J \\ N_I (\mathbf{T}^T [\frac{1}{2}(\mathbf{n}^\varphi \otimes (\mathbf{N}' \varphi^e) + (\mathbf{N}' \varphi^e) \otimes \mathbf{n}^\varphi) - (\mathbf{n}^\varphi \cdot (\mathbf{N}' \varphi^e))\mathbf{I}]\mathbf{T}) N_J \\ + N_I \frac{1}{2} (-\mathbf{S}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} + \mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{S}) N_J \\ + N_I (\frac{1}{2} \mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T}) N_{J'} \\ + N_I' (-\frac{1}{2} \mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T}) N_J \end{bmatrix} ds ,$$

ce qui ressemble à l'expression proposée par Cardonna et Geradin (voir [CAR 88]). Nous constatons dans les exemples numériques qui suivent que les termes qu'on ne trouve pas dans cette dernière expression par rapport à l'expression [3.18] sont très importants pour garantir la convergence quadratique de la méthode de Newton. Nous constatons également (voir [IBR 95c]) que ces termes manquant dans la dernière expression pour \mathbf{K}_{gIJ}^e sont très importants pour l'analyse du flambement.

3.4. Mises à jour des grandes rotations et des courbures

L'actualisation après chaque itération du vecteur position φ et du vecteur déformation ϵ^φ ne pose pas de difficulté particulière. Par contre la matrice de rotation Λ , puisque nous utilisons $\Delta \mathbf{w}$ comme paramètre de rotation au point de Gauss, est mise à jour d'une manière optimale en ayant recours aux paramètres d'Euler et à quelques éléments de l'algèbre des quaternions [SPR 86].

Les paramètres d'Euler associés à la rotation autour du vecteur $\Delta \mathbf{w}$ de magnitude Δw représente un couple constitué d'un scalaire q_{0w} et d'un vecteur \mathbf{q}_w , appelé quaternion unitaire ($q_{0w}^2 + \mathbf{q}_w \cdot \mathbf{q}_w = 1$) et défini par:

$$\{q_{0w}, \mathbf{q}_w\} = \left\{ \cos \frac{\Delta w}{2}, \frac{\sin \frac{\Delta w}{2}}{\Delta w} \Delta \mathbf{w} \right\}, \quad [3.21]$$

permettant d'évaluer par des opérations simples la matrice orthogonale de la rotation $\Delta \mathbf{w}$

$$\exp[\Delta \mathbf{W}] = (q_{0w} - \mathbf{q}_w \cdot \mathbf{q}_w) \mathbf{I} + 2 q_{0w} [\mathbf{q}_w \times] + 2 \mathbf{q}_w \otimes \mathbf{q}_w. \quad [3.22]$$

L'ensemble des paramètres d'Euler est un sous-groupe de l'espace hyper-complexe [SIM 86] qui permet de composer des rotations à l'aide d'une opération de multiplication des quaternions, c'est-à-dire que mettre à jour la matrice de rotation

$$\Lambda^{(i+1)} = \exp[\Delta \mathbf{W}^{(i)}] \Lambda^{(i)}, \quad [3.23]$$

revient à multiplier de la manière suivante par le quaternion $\{q_{0w}^{(i)}, \mathbf{q}_w^{(i)}\}$ de $\Delta \mathbf{w}^{(i)}$, le quaternion $\{q_0^{(i)}, \mathbf{q}^{(i)}\}$ associé à la matrice de rotation $\Lambda^{(i)}$:

$$\begin{pmatrix} q_0^{(i+1)} \\ \mathbf{q}^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0w}^{(i)} & -\mathbf{q}_w^{(i)T} \\ \mathbf{q}_w^{(i)} & q_{0w}^{(i)} \mathbf{I} + [\mathbf{q}_w^{(i)} \times] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_0^{(i)} \\ \mathbf{q}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad [3.24]$$

Concernant la déformation de flexion/torsion, on montre facilement (voir IBR 95a) en utilisant sa paramétrisation par une matrice anti-symétrique, que son actualisation peut s'effectuer à l'aide de l'expression suivante:

$$\omega^{(i+1)} = \mathbf{T}(\Delta \mathbf{w}^{(i)}) \Delta \mathbf{w}^{(i)'} + \exp[\Delta \mathbf{W}^{(i)}] \omega^{(i)}. \quad [3.25]$$

4. Exemples Numériques

Nous validons notre formulation avec des tests classiques bien connus en analyse non linéaire géométrique de structures de type poutre sous chargement, à l'aide d'exemples de calcul de charges critiques, et avec des simulations

du flambement et du post flambement de poutres accompagnées de courbes complètes charge-déplacement. L'implantation de l'élément fini en question avec les variantes: intégration réduite, modes incompatibles enrichissant les champs de position, avec 2 ou 3 noeuds, a été réalisée dans le code FEAP [ZIE 89].

4.1. Poutre de Bathe et Boulourchi

Un exemple bien connu de poutre courbe complètement tri-dimensionnelle est celui de Bathe et Boulourchi [BAT 79]. Une portion à 45 degrés d'un cercle de diamètre 200 est encastree à une extrémité et sollicitée par une force $P = 600$ normale à son plan à l'autre extrémité. La section est de forme carrée et sa valeur est l'unité. Nous adoptons les valeurs de $E = 10^7$ et $\nu = 0$ pour le module d'Young et le coefficient de Poisson respectivement. Le maillage comporte 8 éléments à 2 noeuds et la solution très satisfaisante (voir tableau 1) est obtenue avec seulement 6 pas égaux de charge (60 pas sont utilisés dans [BAT 79]). La figure 4 est une vue 3-D des déformées de l'arc en fin de chaque pas.

Tableau 1.- Déplacements de la poutre de Bathe et Boulourchi

Modèle	Dép. u_1	Dép. u_2	Dép. u_3
présent avec int. réd.	13.5469	-23.4505	53.3737
présent avec mod. inc.	13.5245	-23.4775	53.2829
[BAT 79]	13.4	-23.5	53.4
[SIM 86]	13.50	-23.48	53.37
[CAR 88]	13.73	-23.67	53.50

4.2. Cantilever sous moment et force perturbatrice

Une cantilever (voir figure 5) de longueur $l = 10$ caractérisée par $EA = 10^4$, $GA = 10^4$, $EI = 10^2$ et $GJ = 10^2$ (rigidités de traction, de cisaillement transverse, de flexion et de torsion) est l'objet de deux sollicitations, un moment de flexion $M = 2.5\pi$ et une perturbation normale au plan du moment, de valeur $F = 0.0625$. La cantilever est discrétisée avec 10 éléments et 21 noeuds et chargée avec un seul pas.

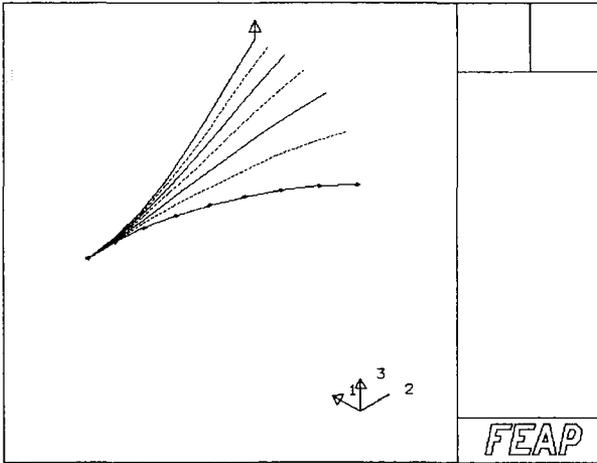


Figure 4.- Poutre de Bathe et Boulourchi. Déformées successives.
 $F = 100, 200, 300, 400, 500$ et 600

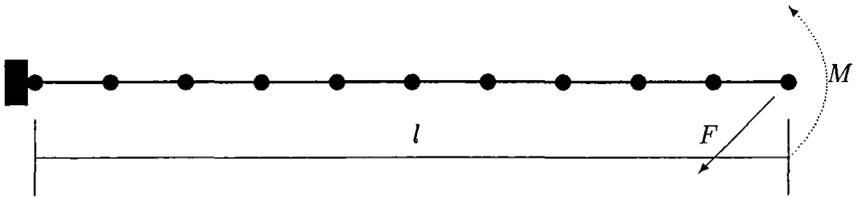


Figure 5.- Cantilever soumise à un moment et à une charge de perturbation

Cet exemple est proposé dans [IBR 95b] pour mettre en évidence la limitation du taux de convergence du modèle utilisant la proposition de Simo [SIM 92] permettant de prendre la partie symétrique de la matrice tangente de rigidité non symétrique dans une formulation basée sur les interpolations isoparamétriques de Δw .

Tableau 2.-Déplacements de la cantilever

Modèle	Dép. u_1	Dép. u_2	Dép. u_3
présent avec int. réd.	-0.996651	3.72892	0.203059
présent avec mod. inc.	-0.998969	3.72796	0.203041
[SIM 92]	-0.996188	3.72855	0.195071
[CAR 88]	-0.996651	3.72892	0.203058

Tableau 3.- Normes de convergence pour la cantilever

Présent avec int.réd			[SIM 92]	
It.	Résidu	Energie	Résidu	Energie
0	7.854×10^0	6.181×10^0	7.854×10^0	6.181×10^0
1	3.381×10^3	1.849×10^3	3.381×10^3	1.849×10^3
2	2.657×10^{-2}	1.022×10^{-5}	1.764×10^{-1}	4.852×10^{-3}
3	3.091×10^{-3}	2.088×10^{-9}	4.313×10^{-1}	2.381×10^{-4}
4	4.956×10^{-8}	3.309×10^{-17}	8.064×10^{-2}	3.371×10^{-5}
5	7.635×10^{-12}	2.677×10^{-27}	1.887×10^{-2}	5.865×10^{-6}
6			3.721×10^{-3}	9.925×10^{-7}
7			1.369×10^{-3}	1.700×10^{-7}
8			5.299×10^{-4}	2.909×10^{-8}
9			2.180×10^{-4}	4.980×10^{-9}
.		
.		
27			6.902×10^{-11}	4.505×10^{-23}

[CAR 88]		
It.	Résidu	Energie
0	7.854×10^0	6.181×10^0
1	3.381×10^3	1.849×10^3
2	1.831×10^{-1}	1.559×10^{-3}
3	3.924×10^{-2}	3.010×10^{-5}
4	9.433×10^{-3}	7.016×10^{-7}
5	4.986×10^{-4}	1.721×10^{-8}
7	8.245×10^{-5}	4.343×10^{-10}
8	1.269×10^{-5}	1.105×10^{-11}
9	2.067×10^{-6}	2.821×10^{-13}
.
15	3.724×10^{-11}	7.889×10^{-23}

Dans le tableau 3 on observe que contrairement aux formulations antérieures (voir [CAR 88] et [SIM 92]), avec notre élément dont la matrice tangente de rigidité est symétrique, nous arrivons à assurer une convergence quadratique de la méthode de Newton vers la solution du tableau 2, même pour ce problème 3-D de forces non conservatives.

4.3. Flambement plan d'un arc circulaire

Nous considérons les grandes rotations bidimensionnelles lors d'un flambement d'un arc circulaire ouvert de 215 degrés sous l'effet d'une charge ponctuelle agissant à son centre. L'anneau mince est encastré d'un coté et repose sur un

appui simple de l'autre coté. La solution de référence est due à DaDeppo et Schmidt [DAD 75]. On utilise pour ce problème 40 éléments avec 2 noeuds par élément, et un pilotage de type longueur d'arc.

Tableau 4.- Forces critiques pour l'arc circulaire

Modèle	Force critique
présent	905.5
[SIM 86]	905.28
présent 20 élé. à 3 noe.	897.4
référence	897.

La force critique calculée est en accord avec le travail de Simo et Vu-Quoc [SIM 86]. Une meilleure estimation de celle-ci est obtenue avec 20 éléments courbes (3 noeuds par élément) en raison de la forte courbure initiale de la structure.

La réponse force-déplacement dans la figure 7 nous montre que le flambement de l'arc se produit après la manifestation de grands déplacements et de grandes rotations (voir les déformées de la figure 8). La non linéarité de la courbe est importante avant d'atteindre le point limite. Il est donc indispensable de traiter ce problème avec une théorie géométriquement exacte, et non comme un problème de flambement linéaire.

4.4. Déversement d'une lame équerre sous charge ponctuelle

On étudie la réponse non linéaire transversale de la poutre encastree de forme L schématisée dans la figure 9 quand une force P_x agit dans son plan. La section de la poutre est une parois très mince, présentant une rigidité de flexion dans son plan beaucoup plus importante que celle dans son plan normal. Le flambement est provoqué par une perturbation P_s perpendiculaire au plan de l'équerre, retirée dès que la charge critique est atteinte, comme recommandé par les auteurs de cet exemple: Argyris et al. [ARG 79].

Tableau 5.- Charges critiques de la lame équerre

Modèle	Force critique (N)
présent	1.083
[ARG 79]	1.088
[SIM 86]	1.09
[CRI 90]	1.084
[LEE 94]	1.084

La force critique (voir tableau 5) trouvée avec un maillage de 20 éléments est en très bon accord avec les résultats que l'on trouve dans les articles spécialisés.

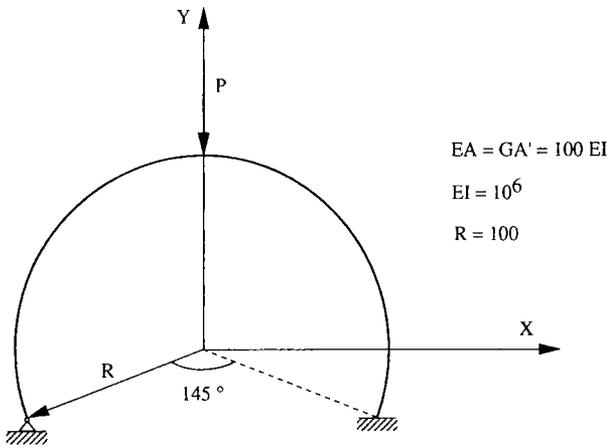


Figure 6.- Arc circulaire simplement appuyé sous charge concentrée

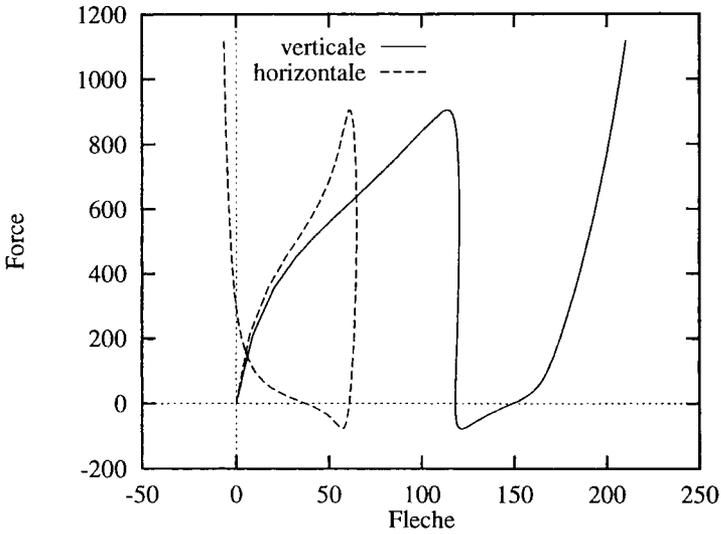


Figure 7.- Arc circulaire. Courbe charge-déplacement au centre

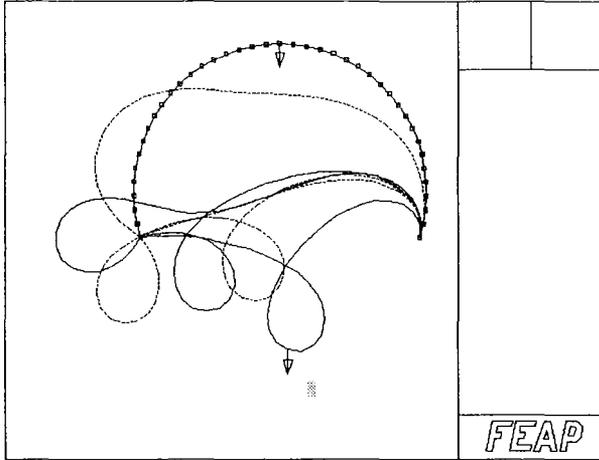
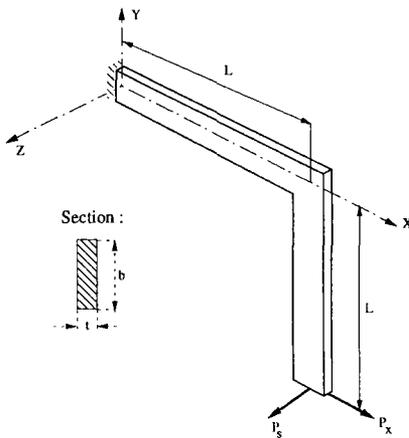


Figure 8.- Arc circulaire. Déformées successives
 $P = 453.0, 905.5, 452.9, -77.12, 456.3$ et 955.8



<u>Géométrie</u>	<u>Matériau</u>	<u>Charges</u>
$L = 240$ mm	$E = 71240$ N/mm ²	$P_x = P$: sollicitation ponctuelle
$b = 30$ mm	$\nu = 0.3$	$P_s = 0.001 P$: force de perturbation
$t = 0.6$ mm		

Figure 9.- Lame équerre sous charge ponctuelle

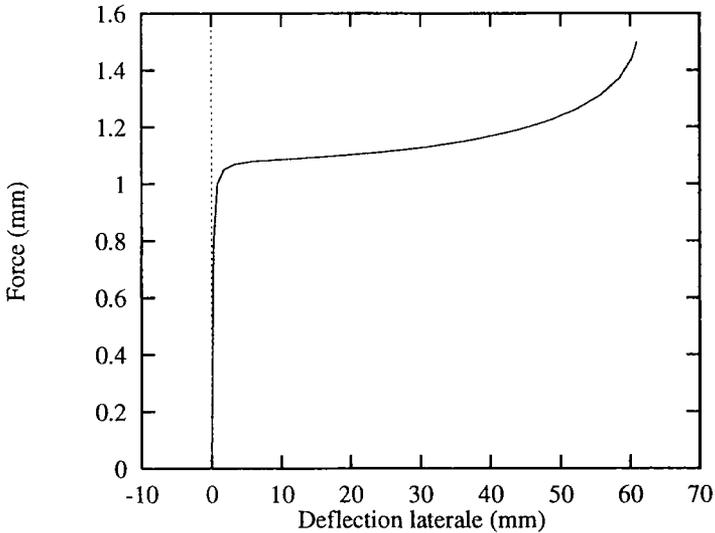


Figure 10.- *Lame équerre sous charge ponctuelle. Courbe charge-déplacement latéral*

Elle est associée comme le montre la loi charge-déplacement de la figure 10 à un point de bifurcation après lequel le régime de réponse de la structure reste stable. La forme déformée est donnée dans la figure 11.

4.5. Flambement latéral d'une lame équerre sous moments

Ce test très sévère est aussi rapporté du travail de Argyris et al. [ARG 79]. Il concerne la structure de l'exemple précédent. Les bords de la lame sont cette fois sous l'action de moments de flexion, ils ne peuvent se déplacer qu'horizontalement et ne peuvent tourner que dans le plan de celle-ci (voir figure 12).

En raison de la symétrie géométrique et physique de ce test, seulement la moitié de la poutre est modélisée avec une discrétisation de 10 éléments finis à 3 noeuds chacun. Le déversement de la structure est provoqué en exerçant au milieu C une force $P_s = 10^{-5}M$ dans la direction transversale, pour simuler une imperfection. Elle est retirée au niveau critique de charge pour continuer l'analyse.

Comparé à la solution de référence de Timoshenko et Gere [TIM 61] ainsi qu'aux différents travaux antérieurs, le moment critique dans le tableau 6 correspondant à un flambement par bifurcation est très bien estimé. Le moment est tracé en fonction du déplacement transversal du centre C de la lame dans la fi-

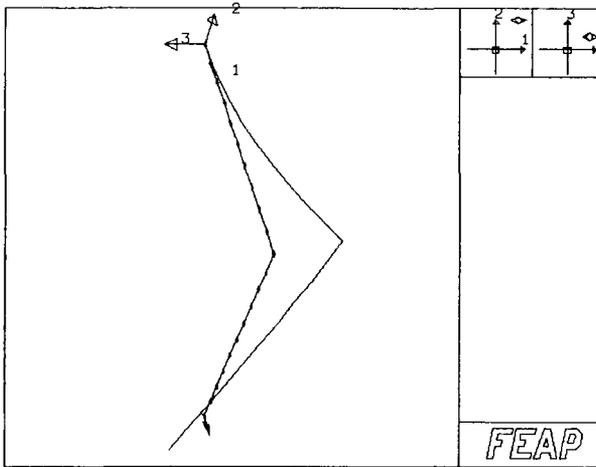
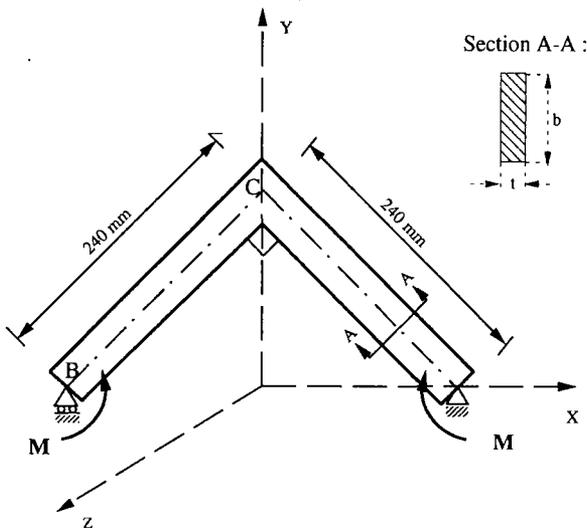


Figure 11.- *Lame équerre sous charge ponctuelle. Déformée en fin d'analyse*



Géométrie	Matériau	Conditions aux limites en B
L = 240 mm	E = 71240 N/mm ²	V = W = $\theta_x = \theta_y = 0$
b = 30 mm	$\nu = 0.3$	Conditions de symétrie en C
t = 0,6 mm		U = $\theta_y = \theta_z = 0$

Figure 12.- *Lame équerre sous moments*

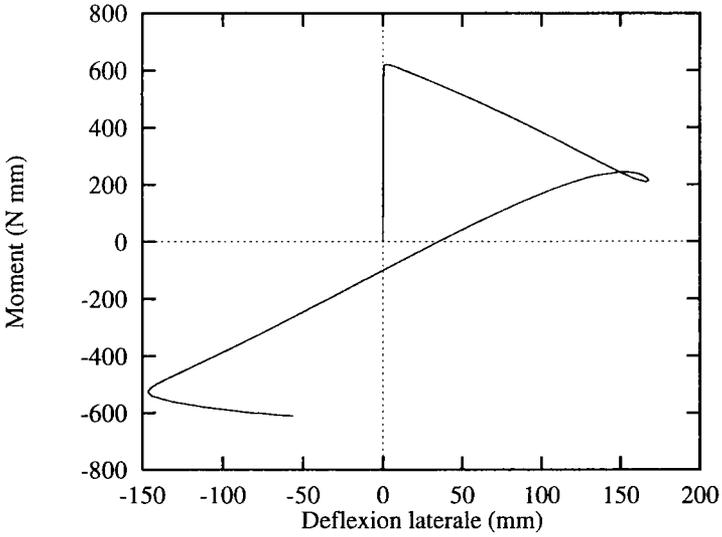


Figure 13.- *Lame équerre sous moments. Réponse latérale au point C*

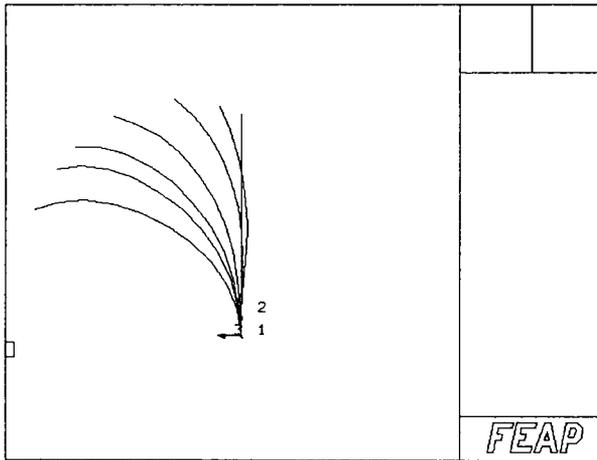
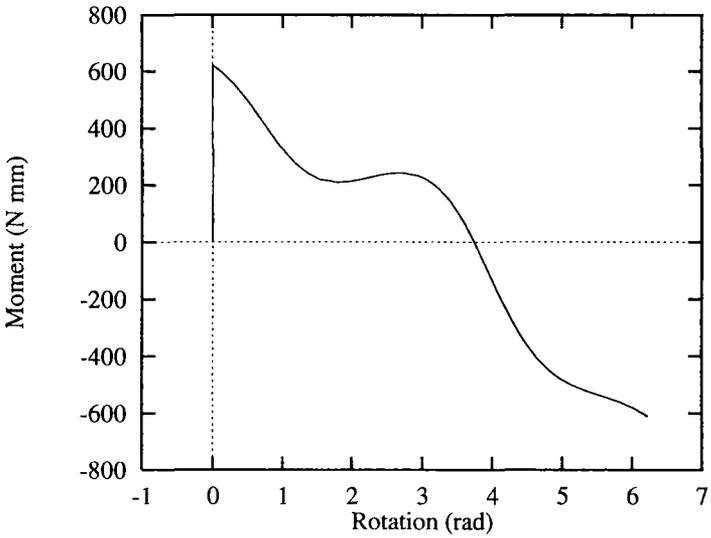
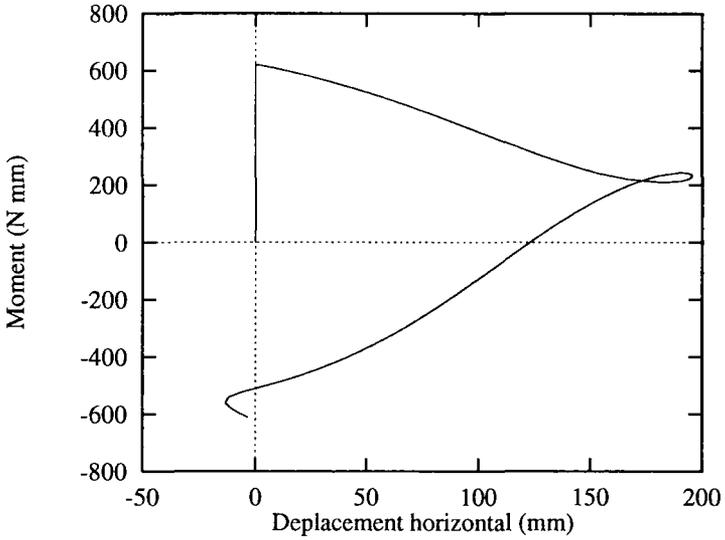


Figure 14.- *Lame équerre sous moments. Vue latérale des déformées successives $M = 599.3, 509.9, 367.0, 268.0, 224.0$ et 180.9*



Figures 15.- *Lame équerre sous moments. Réponses dans le plan au point B*

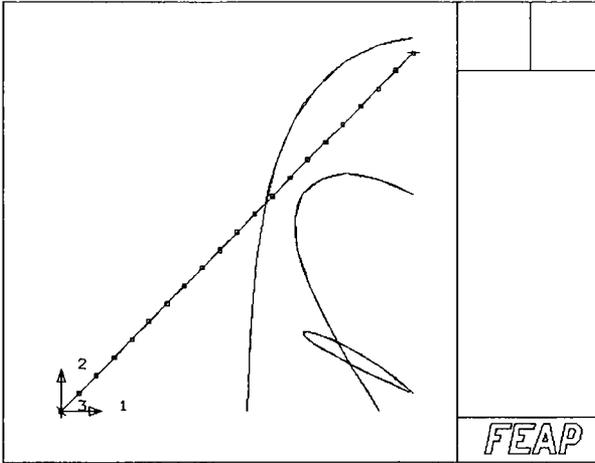


Figure 16.- *Lame équerre sous moments. Projection des déformées successives $M = 417.0, 241.6$ et 212.4*

gure 13, et au point B, dans les figures 15 nous donnons la variation du moment en fonction du glissement et en fonction de la rotation permise. Les figures 14 et 16 illustrent des projections planes de quelques déformées. La lame retrouve après la révolution autour de l'axe X la même valeur du moment critique de 620.0 en raison de l'élimination de la force perturbatrice.

Tableau 6.- *Moments critiques pour la lame équerre*

Modèle	Moment critique (N mm)
présent	620.0
[ARG 79]	618.75
[SIM 86]	615.5
[LEE 94]	618.3
Référence	622.21

5. Conclusions

Dans cet effort nous avons présenté un nouveau traitement des grandes rotations 3-D vis-à-vis d'une implantation dans un calcul par éléments finis, avec les deux options équivalentes: spatiale et matérielle. L'objectif visé par ce travail était de construire un élément fini de poutre géométriquement exact satisfaisant. L'élément est basé sur une paramétrisation simple des grandes rotations par les matrices orthogonales et une interpolation non linéaire. Cette

dernière est une interpolation originale construite après une considération soignée de la relation entre la matrice orthogonale et le vecteur de rotation. Nous avons trouvé que:

(1) L'interpolation non linéaire exige une nouvelle démarche dans la linéarisation cohérente où on doit d'abord discrétiser la forme faible par les interpolations proposées dans cet article, et ensuite linéariser ce résultat;

(2) On trouve une matrice tangente de rigidité symétrique quelque soit la charge externe appliquée;

(3) On obtient toujours une convergence quadratique de la méthode de Newton;

(4) On peut s'attaquer aux problèmes de flambement linéaire et non linéaire ainsi que les problèmes de post-flambement;

(5) Si l'on néglige quelques termes dans la matrice tangente de rigidité (voir [CAR 88]), nous ne pouvons garantir ni la convergence quadratique de la méthode de Newton, ni la précision du calcul de la charge de flambement.

Remerciements

Nous tenons à remercier le Ministère de l'Enseignement Supérieur algérien et l'abondement ANVAR 95 pour leurs appuis financiers.

6. Bibliographie

- [ARG 79] ARGYRIS J.H., H. BALMER, J.St. DOLTSINIS, P.C. DUNNE. M. HAASE, M. KLEIBER, G.A. MALEJANNAKIS, H.P. MLEJNEK and D.W. SCHARPF, Finite Element Method- The Natural Approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 17/18, [1979] 1-106
- [ARG 82] ARGYRIS J.H., An Excursion Into Large Rotations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32, [1982] 85-155
- [BAT 79] BATHE K.J. and S. BOLOURCHI, Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 14, [1979] 961-986
- [BAT 90] BATOZ J.L. and G. DHATT, *Modélisation des structures par éléments finis, I. Solides élastiques, II. Poutres et plaques, III. Coques*, Hermes, Paris, [1990]
- [CAR 88] CARDONA A. and M. GERADIN, A Beam Finite Element Non-linear Theory With Finite Rotations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, [1988] 2403-2438
- [CIA 88] CIARLET Ph. G., *Mathematical Elasticity. Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, [1988]

- [CRI 90] CRISFIELD M.A., A Consistent Co-Rotational Formulation for Non-Linear, Three-Dimensional Beam Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 81, [1990] 131-150
- [DAD 75] DADEPPO D.A. and R. SCHMIDT, Instability of Clamped-Hinged Circular Arches Subjected to a Point Load, *J. Appl. Mech.*, 97, [1975] 894-896
- [FRE 78] FREY F. and S. CESCOTTO, Some New Aspects of the Incremental Total Lagrangian Description in Nonlinear Analysis, in *Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, (eds. P.G. Bergan et al.), Tapir Publisher, Trondheim, [1978] 323-343
- [GOL 80] GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, [1980]
- [IBR 93] IBRAHIMBEGOVIĆ A., F. FREY, Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Planar Deformation of Elastic Initially Curved Beams, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36, [1993] 3239-3258
- [IBR 95a] IBRAHIMBEGOVIĆ A., On FE Implementation of Geometrically Non-linear Reissner's Beam Theory: Three-Dimensional Curved Beam Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 122, [1995] 11-26
- [IBR 95b] IBRAHIMBEGOVIĆ A., F. FREY and I. KOŽAR, Computational Aspects of Vector-Like Parameterization of Three-Dimensional Finite Rotations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, [1995] in press
- [IBR 95c] IBRAHIMBEGOVIĆ A., H. SHAKOURZADEH, J-L. BATOZ, M. AL MIKIDAD and Y-Q. GUO, On the Role of Geometrically Exact and Second Order Theories in Buckling and Post-buckling Analysis of Three-dimensional Beam Structures, *Comp. and Structures*, [1995] in press
- [LAN 85] LANG S., *Differential Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, [1985]
- [LEE 94] LEE H., D-W. JUNG, J-H. JEONG and I. SEYOUNG, Finite Element Analysis of Lateral Buckling for Beam Structures, *Comp. and Structures*, 53, [1994] 1357-1371
- [MAR 83] MARSDEN J.E. and T.J.R. HUGHES, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N.J., [1983]
- [REI 81] REISSNER E., On Finite Deformations of Space Curved Beams, *J. Appl. Math. Phys.*, 32, [1981] 734-744
- [SIM 84] SIMO J.C. and L. VU-QUOC, A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 49, [1984] 55-70
- [SIM 86] SIMO J.C. and L. VU-QUOC, A Three-Dimensional Finite-Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 58, [1986] 79-116

- [SIM 92] SIMO J.C., The (Symmetric) Hessian for Geometrically Nonlinear Models in Solid Mechanics: Intrinsic Definition and Geometric Interpretation, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 96, [1992] 189-200
- [SPR 86] SPRING K.W., Euler Parameters and the use of Quaternion Algebra in the Manipulation of Finite Rotations: A Review, *Mechanism and Machine Theory*, 21, [1986] 365-373
- [TIM 61] TIMOSHENKO S.P. and J.M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, London, [1961]
- [ZIE 89] ZIENKIEWICZ O.C. and R.L. TAYLOR, *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*, vol I, McGraw-Hill, London, [1989]