
Une méthode simple d'adaptation des maillages pour le calcul des écoulements compressibles

Azzedine Soulaïmani* — Daniel Chassé** — Louis Lamarche*

* *Ecole de technologie supérieure
Université du Québec
Département de génie mécanique
4750, avenue Henri-Julien
Montréal, H2T 2C8, Canada*

** *Conseil national de recherche du Canada
Chemin de Montréal
Édifice M-3
Ottawa, K1A 0R6, Canada*

RÉSUMÉ. *Ce travail est consacré au développement d'une méthode d'adaptation des maillages bidimensionnels appliquée à la simulation des écoulements compressibles. La méthode proposée repose sur des procédures de raffinement et de déraffinement et utilise une norme particulière du résidu discret. Cette norme s'est révélée un indicateur efficace des zones qui nécessitent un enrichissement ou un déraffinement local. L'article présente brièvement la méthode d'éléments finis utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes et d'Euler, discute d'un algorithme de type Delaunay modifié pour la triangulation des domaines bidimensionnels quelconques et détaille les procédures d'adaptativité qui sont employées. Plusieurs problèmes d'écoulements compressibles sont enfin traités.*

ABSTRACT. *This work presents some recent results on the solution of compressible flows using a simple adaptive mesh method and finite element code. This method consists of mesh enrichment and mesh derefinement procedures, and is based upon a special finite element residual norm. The residual norm provides a reliable indicator of regions to be adapted and hence to improve the quality of the solution. The paper presents the finite element formulation used, a modified Delaunay triangulation of arbitrary planar domains and the algorithms related to their adaptivity. Several numerical examples are presented which demonstrate the performance of our methods in solving compressible high speed flows.*

MOTS-CLÉS : *adaptation des maillages, éléments finis, écoulements compressibles.*

KEY WORDS : *adaptive meshes, finite element method, compressible flows.*

1. INTRODUCTION

Le développement des méthodes adaptatives est devenu un aspect important dans l'application de la méthode des éléments finis. Ces méthodes tentent d'optimiser automatiquement le maillage afin d'obtenir une précision souhaitée. Les méthodes adaptatives reposent sur la génération automatique de maillages quelconques et sur l'estimation a posteriori de l'erreur locale. Les travaux théoriques sur les méthodes d'estimation de l'erreur remontent à la fin des années soixante dix [1-4] et se sont intensifiées durant la dernière décennie. En mécanique des fluides, on est encore à la recherche d'estimateurs simples et fiables, surtout pour le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires et non stationnaires (par exemple, les équations de Navier-Stokes à plusieurs dimensions). L'estimateur de l'erreur, ou plutôt l'indicateur d'erreur, le plus simple est sans doute une norme du gradient de la solution. Cependant, ce type d'indicateur ne permet pas de prédire la taille ou la forme des éléments qui sont requises pour atteindre une précision voulue.

Pour les problèmes elliptiques, les estimateurs d'erreurs sont bien établis sur le plan théorique (Babuska-Rheinboldt [1-4], Eriksson-Johnson [5], Zienkiewicz-Zhu [6]). Plusieurs techniques d'estimation d'erreur, plus ou moins heuristiques, ont été proposées dans les cas des écoulements compressibles (Lohner [7], Oden [8], Lefebvre [9], Navert [10], Hansbo- Johnson [11], Eriksson-Johnson [12], Sonar [13], ...). Ces estimateurs sont définis par une norme d'une variable particulière représentative du phénomène comme la densité [7,8] ou encore comme une norme du résidu [9-13]. Si elles peuvent être justifiées théoriquement dans le cas des équations scalaires linéaires, leur généralisation au cas des systèmes multidimensionnels non linéaires reste encore un problème ouvert sur le plan théorique, quoiqu'en pratique elles semblent donner des résultats numériques valables.

Cet article fait suite à un travail récent [14] publié dans cette même revue dans laquelle nous avons détaillé une formulation par éléments finis pour la simulation des écoulements de fluides compressibles visqueux et non visqueux. Le présent travail traite de l'adaptation du maillage. En particulier nous présentons un estimateur de l'erreur basé sur le résidu élémentaire.

Deux techniques s'offrent en principe pour construire un nouveau maillage à partir d'un champ de la norme du résidu. La première consiste en des procédures de raffinement/déraffinement des éléments du maillage initial [8,9,15,16]. Dans la seconde approche, on établit à partir du champ de l'erreur un autre champ de densité ou de taille des éléments du nouveau maillage [17-20]. Par la suite, on construit le nouveau maillage en utilisant une méthode

classique, par exemple une méthode de Delaunay ou une méthode frontale [20-24]. Le choix entre ces deux méthodologies n'est pas nécessairement évident.

Nous préconisons, dans un premier stade de recherche la seconde approche afin d'étudier essentiellement le comportement de la norme du résidu lors des raffinements/déaffinements. Mais d'abord, nous présentons une variante de la méthode de Delaunay pour mailler les domaines convexes et non convexes tout en évitant l'étape d'élimination des éléments qui se trouvent hors des domaines.

L'article est structuré comme suit: Dans la première section nous rappelons brièvement les équations de Navier-Stokes et la formulation variationnelle de type Petrov-Galerkin; par la suite nous proposons une norme du résidu élémentaire de tout le système d'équations aux dérivées partielles. Dans la quatrième section nous présentons un algorithme de maillage automatique de domaines quelconques.

Dans la cinquième section nous détaillons, pour des fins de clareté, les procédures de raffinement et de déaffinement utilisées. Enfin, des exemples numériques sont présentés afin d'étudier le comportement de l'estimateur d'erreur.

2. MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS

Nous désirons résoudre les équations d'Euler et Navier-Stokes pour un fluide compressible s'écoulant dans un domaine bidimensionnel Ω . Ces équations s'écrivent en fonction des variables conservatives $\mathbf{V} = (\rho, \rho u, E)^t$ sous la forme:

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{adv}(\mathbf{V}) - \mathbf{F}_{i,i}^{diff}(\mathbf{V}) = \mathbf{F} \tag{1}$$

où $\mathbf{F}_i^{adv}(\mathbf{V})$ et $\mathbf{F}_i^{diff}(\mathbf{V})$ désignent respectivement les flux de convection et de diffusion dans la direction i , le vecteur \mathbf{F} représente le terme source (forces volumiques et sources de chaleur), ρ est la masse volumique, E étant l'énergie totale par unité de volume, enfin u désigne la vitesse.

Nous présentons ici, brièvement, la formulation variationnelle correspondant au système (1). Celle-ci utilise une variante de la méthode SUPG et une viscosité de capture de chocs. Pour plus de détails à ce sujet on peut consulter la référence [14]. Le problème variationnel s'écrit comme suit: trouver \mathbf{V} tel que pour toute fonction de pondération \mathbf{W} on ait:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{adv} - \mathbf{F}) + \mathbf{W}_{,i} \tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}] d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_i^{diff} \mathbf{n}_i d\Gamma \tag{2}$$

$$+ \sum_e \int_{\Omega^e} [\mathbf{A}_i^t \mathbf{W}_{,i}]_{\tau} [\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{j,j}^{adv} - \mathbf{F}_{j,j}^{diff} - \mathbf{F}] d\Omega = 0.$$

Les fonctions \mathbf{V} et \mathbf{W} appartiennent à des espaces fonctionnels appropriés. La matrice $\underline{\tau}$ est donnée par $\underline{\tau} = (\sum_i |c_{ij} \mathbf{A}_j|)^{-1}$, avec \mathbf{A}_i les matrices jacobiniennes des flux de convection (i.e. $\mathbf{A}_i = \mathbf{F}_{i,i}^{adv}$) et Ω^e désigne un élément du maillage. La matrice $[c_{ij}]$ est la jacobienne de la transformation géométrique de l'élément réel à l'élément de référence. Le vecteur $\tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}$ représente le flux de diffusion dans la direction i , calculé pour une viscosité totale égale à la viscosité physique du fluide plus une viscosité artificielle μ_{cc} , celle-ci étant définie dans la section suivante.

La discrétisation par éléments finis utilise des interpolations continues, qui sont quadratiques pour la quantité de mouvement et la vitesse alors qu'elles sont linéaires pour les autres variables. Il est à rappeler que ces interpolations vérifient la condition de stabilité inf-sup. La méthode de résolution utilise une marche dans le temps avec une discrétisation temporelle du second ordre et l'algorithme itératif GMRES avec un préconditionnement diagonal.

3. NORME DU RÉSIDU DISCRET

Dans l'équation (2), les termes de la première ligne représentent les formes intégrales associées à la formulation classique de type Galerkin. Les autres formes intégrales sont des termes de perturbation qui sont ajoutés afin d'améliorer la stabilité spatiale lorsque la convection domine. L'introduction de ces termes constitue en fait une modification du problème original. Ces termes sont d'ailleurs nuls pour la solution forte exacte, ce qui fait de la méthode SUPG une méthode résiduelle consistante qui converge selon un ordre optimal. Le fait de choisir une interpolation quadratique pour la vitesse nous permet de calculer une bonne approximation de la divergence du flux de diffusion. Une interpolation linéaire conduirait à une divergence nulle de ce flux et par conséquent à une perte de consistance et de précision.

D'autre part, on remarque qu'en appliquant à la formulation SUPG les techniques standards de l'estimation *a priori* de l'erreur, on peut faire apparaître le terme d'erreur $||\underline{\tau} \mathbf{R}||_2$, où $||\cdot||_2$ représente la norme $L_2(\Omega)$ et

$\mathbf{R} = \mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{adv} - \mathbf{F}_{i,i}^{diff} - \mathbf{F}$ le résidu local. Cette erreur peut être réduite grâce en particulier au raffinement du maillage. De plus, lorsque la solution est irrégulière, comme proche d'un choc ou dans une zone de forts gradients, la méthode SUPG n'est pas stable. La stabilité doit être alors renforcée, par exemple, en ajoutant à la viscosité du fluide une viscosité artificielle, dite de capture de chocs, qui dépend du résidu local. La remarque précédente, nous a inspiré dans la définition de cette viscosité artificielle. Celle-ci va dépendre de

la norme $L_2(\Omega^e)$ du residu local \mathbf{R} pondéré par la matrice $\underline{\tau}$. La viscosité de capture de choc est donnée par [14]:

$$\mu_{cc}^e = C_k \left(\int_{\Omega^e} [\underline{\tau} \mathbf{R}] \cdot [\underline{\tau} \mathbf{R}] d\Omega \right)^{1/2} \tag{3}$$

où C_k est un paramètre d'ajustement.

On remarque que μ_{cc}^e est, effectivement, faible lorsque la solution est lisse et prend des valeurs élevées en présence de chocs. De plus, μ_{cc}^e est conçue de façon à ce qu'elle soit homogène à une viscosité. Elle peut donc servir aussi bien comme une viscosité artificielle de capture de chocs stabilisant la solution et aussi comme indicateur des zones où le résidu n'est pas suffisamment faible. Cette norme constitue aussi une estimation de l'erreur commise dans la résolution du problème physique original puisque la viscosité réelle du fluide se trouve modifiée. Le raffinement adaptatif du maillage a pour but la réduction de cette viscosité artificielle jusqu'à un certain seuil désiré. Les normes les plus courantes dans les techniques d'adaptivité, en écoulement compressible, sont des normes euclidiennes des gradients d'une variable privilégiée, comme la pression ou la densité. Elles permettent en effet de localiser les chocs pour fin de raffinement. Ces normes de gradients, par contre, ne convergent pas vers zéro et ne donnent pas d'indication pour la fin du raffinement. La norme que nous proposons tient compte, quant à, elle de tous les flux du système multi-dimensionnel et reflète dans quelle mesure les équations aux dérivées partielles sont résolues localement.

En effet, le système (1) peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}_{,i} - (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} = \mathbf{F}$$

où $\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j} = \mathbf{F}_i^{\text{diff}}$ et $\mathbf{A}_i = \mathbf{F}_i^{\text{adv}}$. Dans le cas des écoulements compressibles les matrices \mathbf{A}_i et \mathbf{K}_{ij} dépendent de \mathbf{V} . Soient \mathbf{V}^h et $\tilde{\mathbf{V}}$ respectivement la solution continue et discrète du problème variationnel (2) et soit $\mathbf{E}^h = \tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}$ l'erreur. En supposant maintenant que les matrices \mathbf{A}_i et \mathbf{K}_{ij} sont constantes, on peut montrer l'équation d'évolution de l'erreur: pour tout vecteur de fonctions de pondération (continues ou discrètes) \mathbf{W} on a ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot (\mathbf{E}^h_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{E}^h_{,i} - \mathbf{F}) + \mathbf{W}_{,i} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{E}^h_{,j}] d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{E}^h_{,j} \mathbf{n}_i) d\Gamma \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} [(\mathbf{A}_i^t \mathbf{W}_{,i}) \underline{\tau} (\mathbf{E}^h_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{E}^h_{,i} - (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{E}^h_{,j})_{,i} - \mathbf{F})] d\Omega = \\ & - \sum_e \int_{\Omega^e} [(\mathbf{W} + \underline{\tau}^t \mathbf{A}_i^t \mathbf{W}_{,i}) \cdot (\mathbf{V}^h_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}^h_{,i} \end{aligned}$$

$$-(\mathbf{K}_{ij}\mathbf{V}^h_{,j})_{,i} - \mathbf{F} \, d\Omega - \sum_e \int_{\Gamma^e} \mathbf{W} \cdot [[\mathbf{K}_{ij}\mathbf{V}^h_{,j}]]\mathbf{n}_i \, d\Gamma$$

où $[[\mathbf{K}_{ij}\mathbf{V}^h_{,j}]]$ représente le saut du flux de diffusion à travers les cotés des éléments. L'équation ci-dessus montre clairement que l'erreur dépend directement de l'opérateur résidu $\mathbf{R}(\mathbf{V}^h) = (\mathbf{V}^h_{,i} + \mathbf{A}_i\mathbf{V}^h_{,i} - (\mathbf{K}_{ij}\mathbf{V}^h_{,j})_{,i} - \mathbf{F})$ et des sauts du flux de diffusion. Une estimation de la norme de l'erreur \mathbf{E}^h peut être donnée par une norme adéquate du résidu $\mathbf{R}(\mathbf{V}^h)$ du système, telle que celle proposée auparavant. Remarquons aussi que μ_{cc}^e est équivalente à la norme $h||\mathbf{R}(\mathbf{V}^h)||_2$ puisque les coefficients de la matrice τ sont de l'ordre de h/u où u est le module d'une vitesse caractéristique.

4 GÉNÉRATION DES MAILLAGES : MÉTHODE DE DELAUNAY MODIFIÉE

Pour procéder au maillage d'un domaine Ω bidimensionnel, une discrétisation de sa frontière Γ doit être fournie comme une liste de segments qui définissent le polygone $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Le domaine Ω peut également être constitué de plusieurs sous domaines Ω_m convexes ou non convexes, tels que: $\Omega = \bigcup \Omega_m, \quad m = 1, \dots, n$.

La méthode que nous présentons est une amélioration de la méthode classique de Delaunay-Voronoi telle que décrite dans [20,21]. Elle suggère de procéder d'abord à une génération primaire d'un maillage en utilisant strictement les noeuds de la frontière Γ . Avec cette méthode, il faut préalablement recourir à l'addition de quatre nouveaux points d'appui autour des domaines non convexes [20,21]. Les points sont reliés entre eux pour former un encadrement rectangulaire autour du domaine Ω .

Cette procédure a l'inconvénient de créer des éléments qu'il faut par la suite éliminer puisqu'ils se trouvent en dehors de la frontière. En conséquence, cette élimination peut causer une consommation importante du temps de calcul.

Nous avons résolu cette incommodation, pour le cas 2D, en structurant judicieusement la base des données et en utilisant une frontière de visibilité. Celle-ci étant définie comme une enveloppe qui subdivise Ω en deux régions soit Ω_f la région maillée et Ω_j la région non encore remaillée.

Pour ce faire, il a fallu définir par convention un sens positif des arêtes frontières du domaine Ω suivant un ordre antihoraire pour les frontières externes et un ordre horaire pour les frontières internes (fig. 1a). De plus, une convention de signe pour la connectivité des éléments a été définie positivement dans le sens antihoraire. Ainsi, lors de la génération du maillage, tout élément ayant une arête frontière doit avoir une connectivité qui respecte le sens positif de l'arête.

Tel que montré à la figure 1b, l'élément 1-3-2 a une connectivité correcte mais puisqu'il a au moins une arête frontière parcourue dans le sens inverse du parcours de la frontière, cet élément sera refusé. Cette situation se produit lorsque la frontière est non convexe, et c'est ainsi que l'on empêche la formation d'éléments hors du domaine.

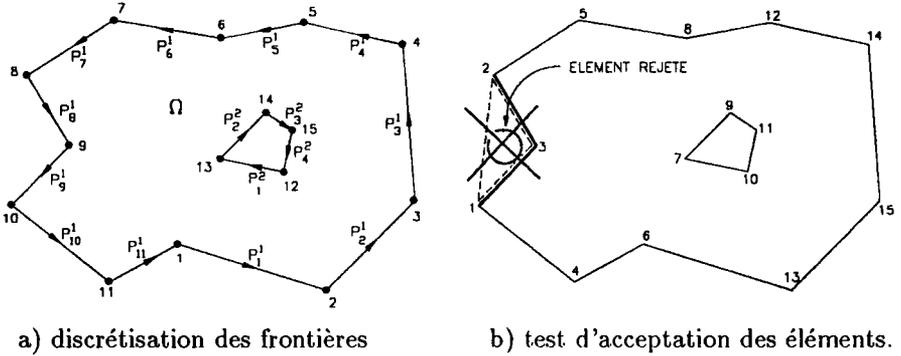


Fig. 1 ordonnancement des points

Pour créer la frontière de visibilité, il a fallu préalablement renuméroter les noeuds suivant une direction donnée i.e: coordonnée en X et en Y croissant, (fig 1b). On prend alors les trois premiers noeuds non colinéaires trouvés suivant cette direction pour former un premier élément et ainsi donner naissance à la création de la frontière. Par la suite, le maillage évolue suivant cette direction en créant des éléments qui utilisent obligatoirement une arête de la frontière et qui respectent les conventions déjà cités. Durant ce processus, la frontière prévient la formation de tout élément ayant une arête qui l'intersecte. La figure 2 montre l'évolution de cette frontière représentée par un trait gras. Les traits pointillés donnent quelques exemples d'éléments que cette frontière empêche de créer.

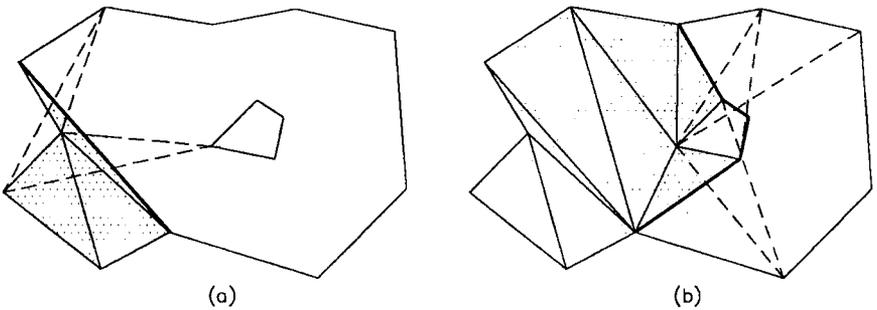


Fig. 2 évolution de la frontière de visibilité

Par ailleurs, l'étape de discrétisation primaire peut engendrer des éléments trop gros ou trop aplatis (fig. 3a). Pour corriger les aplatissements, une étape de retournement d'arêtes doit être appliquée pour obtenir le maillage montré à la figure 3b. Il faudra par la suite parcourir chacun des éléments pour y insérer à leur barycentre un nouveau noeud qui permettra la création de trois nouveaux éléments dans le cas où la taille de l'élément initial est plus grande qu'une valeur d'aire maximale A_o . Il est aussi possible d'insérer des nouveaux noeuds aux arêtes des éléments à couper. L'aire A_o est une variable nodale spécifiée par l'utilisateur pour chaque noeud des frontières du domaine Ω . Par exemple, l'utilisateur demande que les arêtes de la frontière aient une longueur $h \leq h_o$ et que tout élément adjacent ait une aire $A \leq A_o$ avec $A_o = \frac{3\sqrt{3}}{8} h_o^2$.

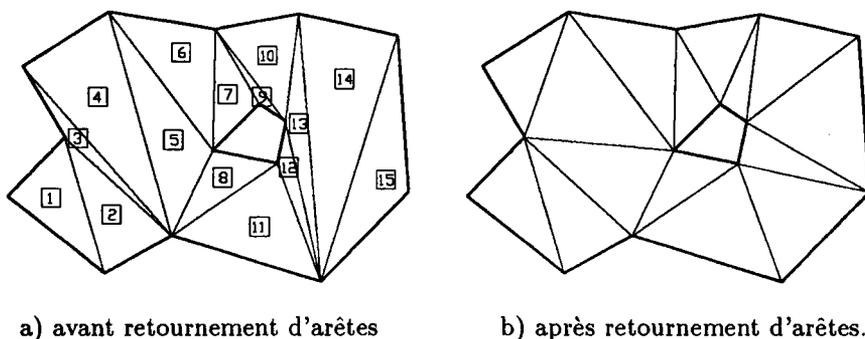


Fig. 3 maillage primaire

La génération du maillage primaire conduit à l'obtention d'un champ scalaire pour A_o , i.e. pour chaque noeud de la frontière est associée une valeur nodale A_o . Par la suite, chaque nouveau noeud généré aura une valeur A_o qui sera la moyenne arithmétique des valeurs des noeuds sommets existants.

L'étape d'insertion des nouveaux noeuds est répétée tant que l'aire de l'élément dépasse le minimum des valeurs nodales de A_o . Cette procédure a l'avantage de propager la distribution de A_o de la frontière vers l'intérieur du domaine, créant ainsi une densité d'éléments selon une finesse désirée. Pour terminer la procédure de maillage, une seconde étape de retournement d'arêtes doit être appliquée pour chercher le maximum d'équilatéralité des éléments et ainsi corriger les aplatissements. Le critère géométrique utilisé pour vérifier l'équilatéralité des éléments se mesure par la norme q_3 [20] donnée par

$$q_3 = \frac{(D-a)(D-b)(D-c)}{D^3} \quad (4)$$

où a , b et c sont les longueurs respectives des arêtes du triangle et D est son demi-périmètre. Pour chaque élément du domaine Ω , une valeur de q_3 est obtenue de (4) et ensuite comparée avec une nouvelle valeur obtenue après un retournement d'arêtes de l'élément avec ses voisins. Si la nouvelle configuration

donne une valeur de q_3 supérieure à la précédente, alors les arêtes des éléments concernés seront retournées.

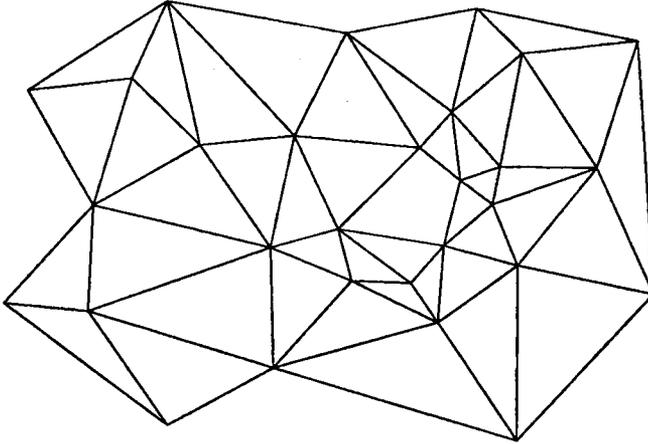


Fig. 4 maillage final après insertion des noeuds barycentriques

La méthodologie proposée, peut être résumée en huit étapes:

- étape 1 : Discrétisation des frontières du domaine en segments $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ orientés suivant un sens antihoraire pour les frontières externes et un sens horaire pour les frontières internes du domaine Ω . (fig. 1a)
- étape 2 : Renumérotation des noeuds suivant une direction choisie. Préférentiellement suivant les directions X et Y. (fig.1b).
- étape 3 : Générer un premier élément constitué des 3 premiers points non colinéaires trouvés suivant la direction choisie, faisant en sorte qu'on peut générer un élément acceptable.
- étape 4 : Initier ou reviser la frontière de visibilité (fig. 1b).
- étape 5 : Retour à l'étape 3 en utilisant obligatoirement une arête de la liste de visibilité combinée au second point trouvé dans la direction privilégié permettant de créer un élément d'aire non nulle et qui n'interfèrent pas avec aucune arête de la liste de visibilité (fig. 2).
- étape 6 : Retournement d'arêtes du maillage primaire (fig. 3) [20].
- étape 7 : Insertion de nouveaux noeuds aux éléments ayant une aire $A^e > A_o$.
- étape 8 : Retournement d'arêtes appliqué aux éléments qui ne respectent pas la norme q_3 .

5 MÉTHODE D'ADAPTATION

La méthodologie proposée pour l'adaptation de maillages utilise des critères basés sur la valeur élémentaire de la viscosité artificielle μ_{cc} . Elle permet principalement d'effectuer des tâches de raffinement et de déraffinement applicables aux éléments triangulaires. Elle est particulièrement bien adaptée pour la capture de chocs et à la résolution des zones à forts gradients.

5.1 Procédure de raffinement

Les techniques d'adaptation des maillages se sont grandement développées aux cours des dernières années. Leur utilité première étant d'améliorer la qualité de la solution tout en minimisant le nombre de variables de calcul et ainsi de réduire les temps de résolution.

Dans la méthode d'adaptation des maillages, il y a généralement deux étapes importantes à franchir. La première étant l'identification des zones du maillage qui ont besoin d'être traitées en utilisant un critère d'estimation d'erreur. La seconde consiste à ajouter ou à éliminer des éléments. Dans l'atteinte du dernier objectif, plusieurs techniques ont été élaborées [15-20]. Par exemple, la plus simple consiste en un enrichissement généralisé du maillage en coupant systématiquement tous les éléments du modèle en deux, trois ou quatre éléments. Cette technique n'est toutefois pas efficace, puisque la croissance rapide du nombre d'éléments augmente inutilement la base des données et le temps de résolution. Pour corriger cet encombrement, l'ajout ou l'élimination des éléments ne se fait que localement selon l'interprétation qu'on fait du critère d'erreur. Dans notre approche, nous utilisons le champ de viscosité artificielle μ_{cc}^e qui est obtenu sur un maillage initial. Par la suite, il s'agit de suivre le comportement de μ_{cc}^e en ajoutant, uniquement dans les zones appropriées, quelques éléments supplémentaires par le biais de la fragmentation des éléments identifiés. Définissons d'abord le ratio ψ^e par: $\psi^e = \mu_{cc}^e / \max(\mu_{cc}^e)$. Par la suite, deux zones à remailler différemment sont identifiées; ce qui implique la création de deux listes d'éléments $L^d = \{\Omega_1^d, \dots, \Omega_n^d\}$, ($d = 1, 2$); avec L^1 pour la liste des éléments à couper en deux et L^2 pour la liste des éléments à couper soit en trois ou en quatre. Donc, pour définir les deux listes, deux ratios $\psi_1 \leq \psi_2$ du résidu maximum devront être fournis. Ainsi, les éléments ayant un ψ^e compris entre ψ_1 et ψ_2 seront sélectionnés pour être bissectés suivant l'arête la plus longue, alors que ceux dont la valeur ψ^e dépasse la borne supérieure ψ_2 seront coupés soit en trois ou en quatre.

Dans les cas où un élément n'est pas sélectionné pour le raffinement mais qu'un voisin vise une de ses arêtes pour être bissecté, ce dernier devra aussi être bissecté pour se conformer au reste du maillage. Cette procédure de conformité a été largement décrite par plusieurs auteurs tel que Sonar [13] sous le nom de "Green refinement" et par Löhner [15] sous le nom de "hanging nodes".

5.2 Procédure de déraffinement

Le principal objectif visé par le déraffinement est de freiner l'augmentation trop brusque du nombre d'éléments par le biais de l'élimination de quelques uns d'entre eux, dans les zones où la concentration n'est plus justifiée. Pour y parvenir, on procède à la création d'une troisième liste L^3 constituée de noeuds à être éliminés. Pour qu'un noeud apparaisse sur cette liste, il faut que le ratio ψ moyen associé à tous les éléments auxquels il appartient ait une valeur inférieure à ψ_3 , évidemment $\psi_3 \leq \psi_1$. D'autre part, aucun élément adjacent aux éléments ayant ce noeud, ne doit être sélectionné pour fin de raffinement. Lorsque cette dernière condition n'est pas respectée, le noeud est automatiquement extrait de la liste. Une fois la liste complétée, on la parcourt en procédant à une extraction noeud par noeud; ce qui nécessite la destruction de tous les éléments auxquels ce noeud appartenait.

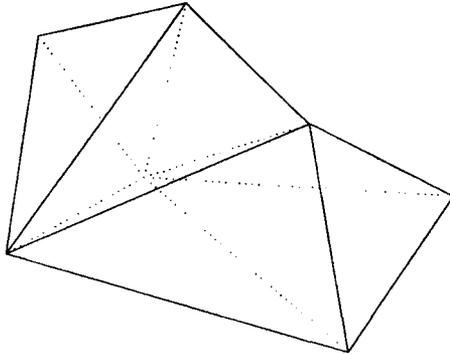


Fig. 5 processus de restauration du maillage suite à l'extraction d'un noeud

Après la destruction des éléments initiaux, on se retrouve avec une frontière interne, qui peut être concave ou convexe par endroit, pour laquelle on applique l'algorithme de Delaunay modifié (voir section 4) afin de reconstruire de nouveaux éléments dont le nombre est assuré d'être inférieur à ce qu'on avait auparavant. Les lignes pointillées de la figure 5 montrent les éléments initiaux alors que les lignes pleines donnent la nouvelle configuration. La procédure se poursuit avec le second noeud de la liste et ce jusqu'à ce que la liste soit vide.

Toutefois, lorsqu'une grande zone comporte un résidu $\psi \leq \psi_3$, cela peut conduire à une élimination massive des noeuds, entraînant ainsi des éléments à devenir très gros dans la zone concernée. Dans ce contexte, il y a risque d'extraire des éléments que l'on devra rajouter à la prochaine phase d'adaptation. Pour prévenir cet inconvénient, un paramètre de contrôle a été prévu pour extraire de façon contrôlée les éléments dont la norme de viscosité est faible.

Ce paramètre, lorsqu'il est activé, agit pour restreindre certains noeuds a ne pas être éliminés lorsqu'ils sont voisins d'un noeud déjà éliminé.

Le deuxième exemple d'application numérique que nous analyserons à la prochaine section montre l'effet d'une telle démarche. Cependant, lorsqu'une grande concentration d'éléments devient inutile, plusieurs itérations de déraffinement seront nécessaires pour réduire la densité d'éléments. Nous verrons dans le troisième exemple de la section suivante un cas où il est avantageux d'utiliser un déraffinement massif. En conséquence, il faudra sélectionner les plages de contrôle avec soin afin d'empêcher que des éléments enlevés à une étape d'adaptation soient introduits de nouveau à une étape ultérieure.

5.3 Découpage anisotrope

L'idée derrière cette procédure est d'orienter le découpage des éléments selon une direction privilégiée. Pour y parvenir, on permet aux nouveaux noeuds d'insertion de se positionner à des endroits qui peuvent être différents de la position médiane d'une arête. Ainsi, il devient possible de fragmenter les éléments de manière anisotrope (fig. 6).

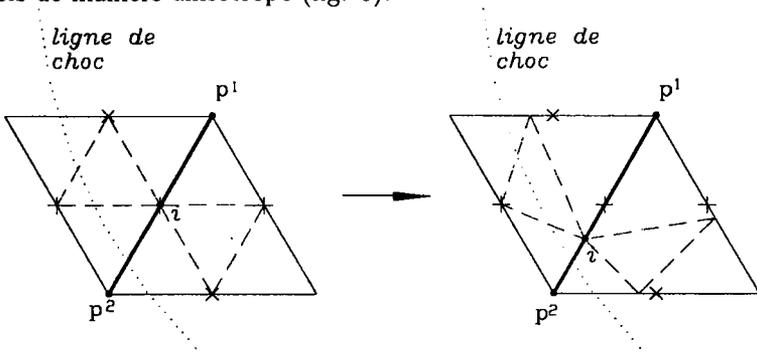


Fig. 6 insertion anisotrope des noeuds.

Définissons d'abord les paramètres suivants relatifs à l'arête que l'on veut découper:

$$\delta_i = \frac{p^1 - p^2}{p^1 + p^2} \quad \text{et} \quad \varphi_i = p^i / \max(p^i)$$

où p^1 et p^2 sont les pressions aux sommets de l'arête et $\max(p^i)$ est la pression maximale dans tout le domaine Ω . Alors, les coordonnées du point i sont:

$$(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \left[(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \delta_i e x p^{-|\varphi_i - \beta|} + (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \right]$$

avec β un paramètre fourni par l'utilisateur tel que $\beta \leq 1.0$ (typiquement, on prend $\beta = 0.95$). Le facteur δ_i sert à déplacer le noeud vers le sommet où la pression

est la plus élevée, alors que le facteur $\exp^{-|\varphi_i - \beta|}$ permet d'éviter que le point i se superpose à l'un des sommets de l'arête.

6 APPLICATIONS NUMÉRIQUES

6.1 Écoulement supersonique autour d'un cylindre

Un essai a été réalisé pour simuler un écoulement supersonique non visqueux autour d'un demi-cylindre. Les conditions imposées aux frontières sont illustrées à la figure 7. Pour mettre en relief l'effet du déraffinement, le même modèle a été adapté suivant deux façons, dont l'une exclu le déraffinement. Pour les deux cas le maillage initial est constitué de 3637 noeuds et de 1746 éléments triangulaires quadratiques à six noeuds.

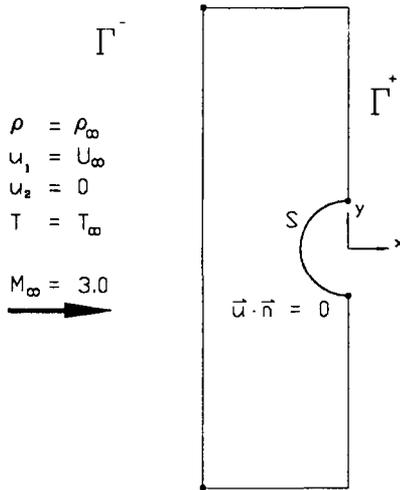


Fig. 7 conditions aux frontières.

Le choix des paramètres de remaillage est effectué afin de mettre en relief l'importance du déraffinement. A cet effet, nous avons désactivé l'option du découpage anisotrope des éléments ainsi que tous les paramètres de contrôle du déraffinement. Pour les deux cas, la zone de 18% à 100% de la viscosité artificielle $max\mu_{cc}^e$ est utilisée pour sélectionner les éléments à être coupés en quatre. Concernant le déraffinement, une plage de 0% à 2% du résidu maximum de viscosité artificielle $max\mu_{cc}^e$ est sélectionnée. Les paramètres de calculs utilisés pour la résolution sont donnés dans le tableau 1.

Les figures 8-a à 8-e montrent l'évolution du maillage en quatre étapes d'adaptation sans déraffinement. Les figures 9-a à 9-e montrent les isobares obtenues respectivement à chaque étape.

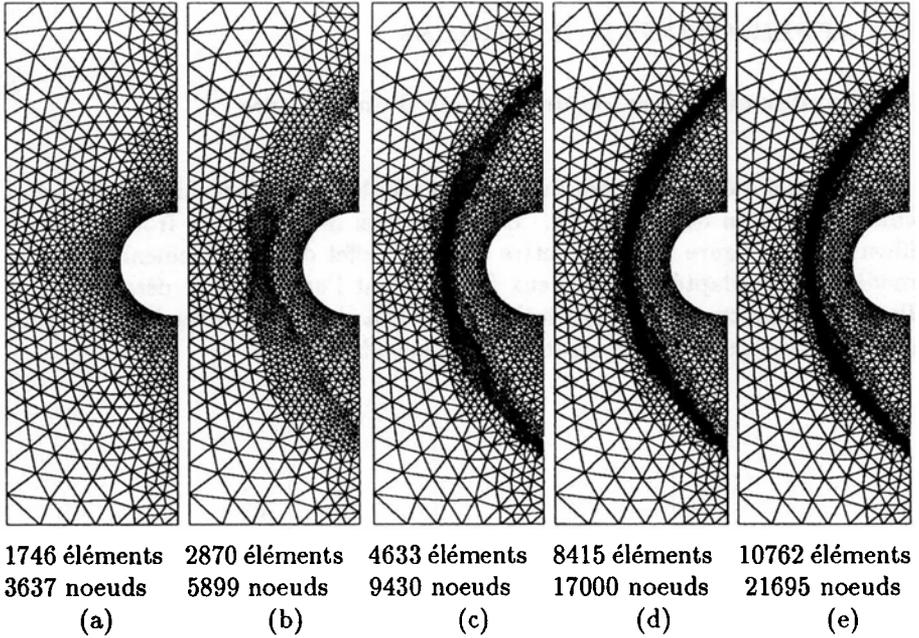


Fig. 8 étapes d'adaptation du maillage.

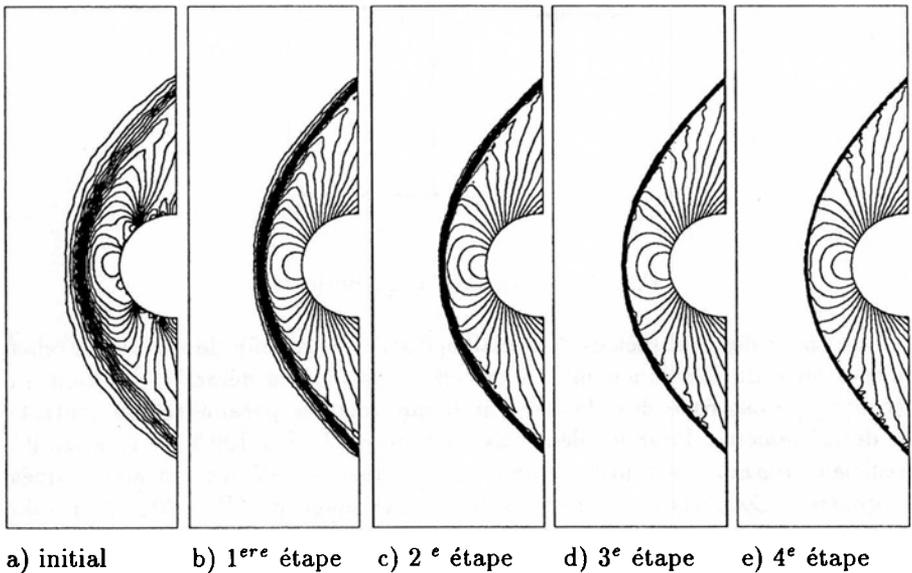
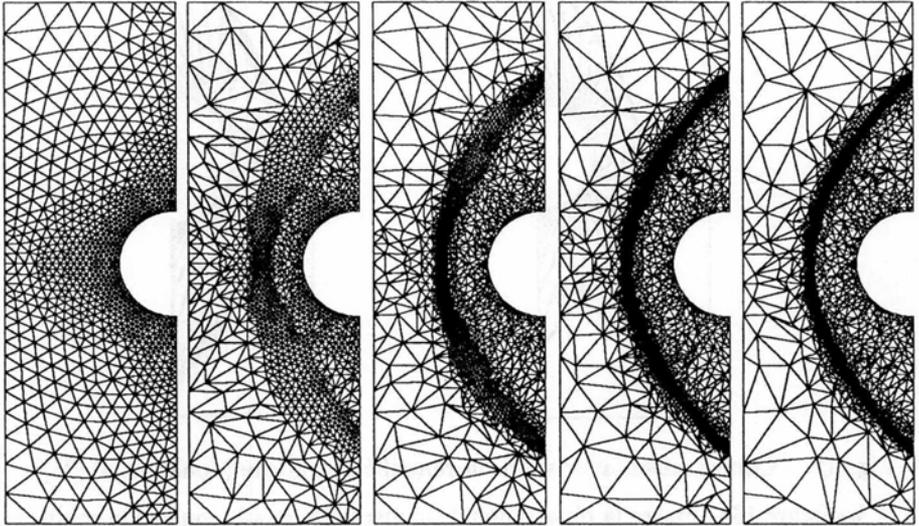


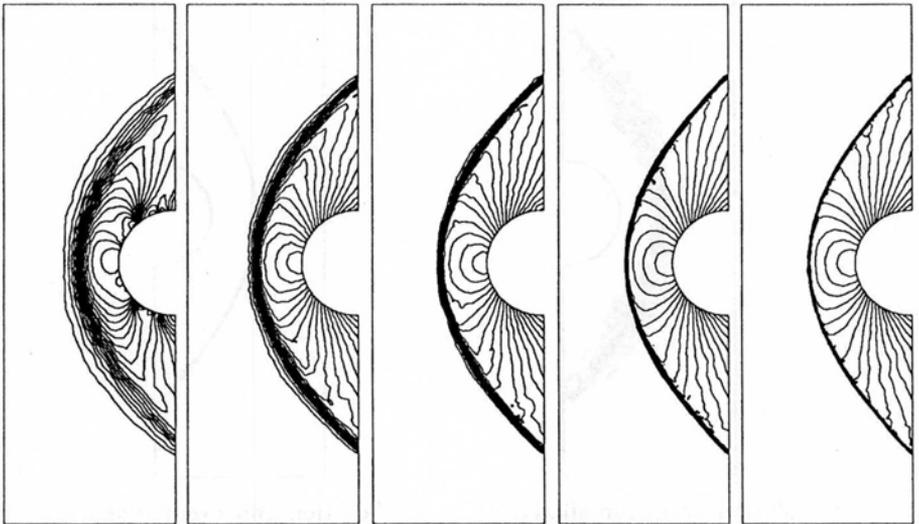
Fig. 9 évolution des isobares.

Le même exemple est repris à la figure 10, montrant l'état progressif du maillage lorsque l'option du déraffinement est activée. Les isobares correspondantes sont montrées à la figure 11.



1746 éléments 3637 noeuds	2651 éléments 5436 noeuds	4357 éléments 8846 noeuds	7804 éléments 15733 noeuds	9996 éléments 20117 noeuds
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

Fig. 10 étapes d'adaptation du maillage.



a) initial	b) 1 ^{ère} étape	c) 2 ^e étape	d) 3 ^e étape	e) 4 ^e étape
------------	---------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

Fig. 11 évolution des isobares.

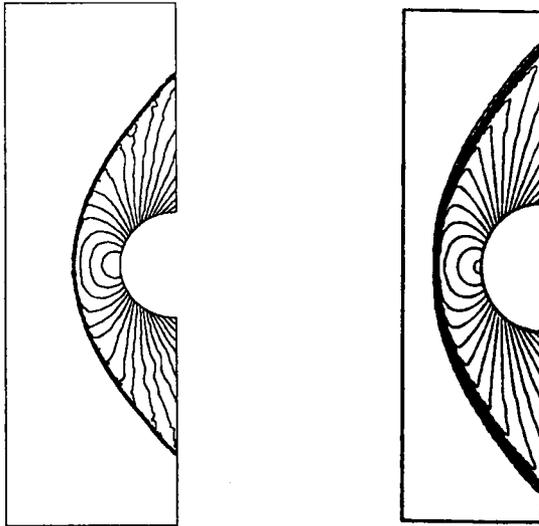
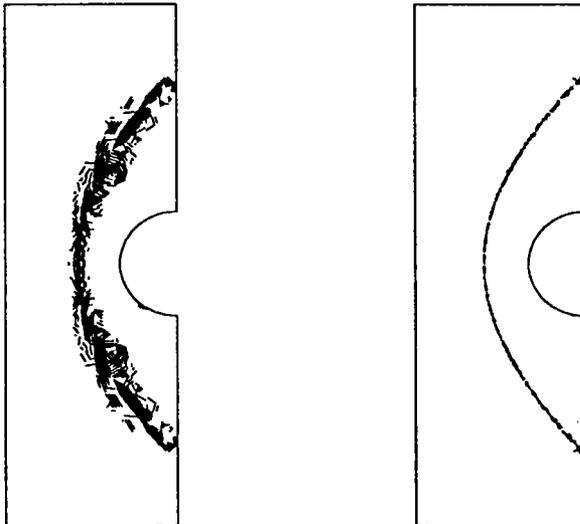


Fig. 12 Comparaison avec solution remaillé extrait de (Johan et al.[25])

La figure 13a montre la répartition de la viscosité μ_{cc} obtenue de la solution initiale avant l'adaptation du maillage. Après 4 étapes d'adaptation, on se retrouve avec un $max \mu_{cc}$ beaucoup plus faible (voir tableau 1). Le choc est bien résolu comme en témoigne la figure 13b.



a) Solution avant remaillage

b) Solution après remaillage.

Fig. 13 Distribution de μ_{cc}

Commentaires des résultats

Dans les deux situations, le choc est très bien localisé. Cependant, le nombre moyen de directions GMRES par pas s'est amélioré d'environ 6% lorsque l'option du déraffinement est activée. Cela s'explique par le fait que la déramification permet d'atteindre une plus grande densité d'éléments se localisant dans le choc, même si le nombre total d'éléments est d'environ 7.2% moins élevé que pour le cas de l'enrichissement seul. De plus, l'option de déraffinement a réduit le temps de calcul d'environ 26% par rapport au cas non déraffiné. Il est important de noter la décroissance du maximum de la norme résiduelle μ_{cc}^e au cours des étapes de raffinements/déraffinements, alors que le maximum de la norme euclidienne du gradient de la pression croît continuellement, comme prévu d'ailleurs. Il serait aussi possible de faire une prédiction a priori de la taille h_0 des éléments du nouveau maillage en utilisant les valeurs calculées de μ_{cc}^e sur un maillage existant en posant

$$\mu_{cc}^e \leq C_k h_0 \max(\|\underline{\tau R}\|) = \mu_{max},$$

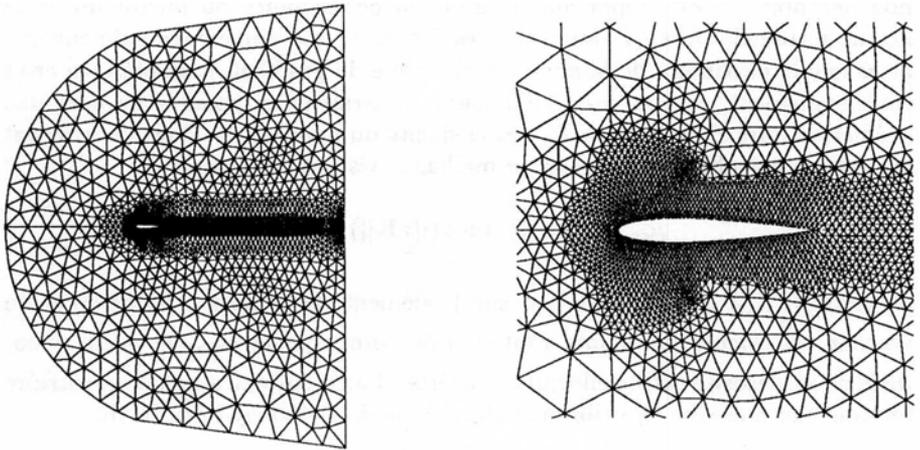
où $\max(\|\underline{\tau R}\|)$ est le maximum sur l'élément de la norme euclidienne du vecteur $\underline{\tau R}$ calculé aux points d'intégration numérique et μ_{max} la valeur maximale de la viscosité artificielle qui est tolérée. Par la suite, il s'agit de construire un nouveau maillage en utilisant l'algorithme de Delaunay déjà décrit.

TABLEAU 1

DESCRIPTION	INITIAL	ÉTAPE 1	ÉTAPE 2	ÉTAPE 3	ÉTAPE 4
A) Modèle du raffinement seul					
◦ Résidu max. viscosité artificielle	0.173214	0.122116	0.066966	0.056709	0.029430
◦ Norme du gradient de pression	5.932	5.922	11.701	23.000	44.163
◦ Nombre total d'éléments	1746	2870	4633	8415	10762
◦ Nombre total de noeuds	3637	5899	9430	17000	21695
◦ Nombre de pas de calcul	200	100	100	100	100
◦ Mémoire requise (Mo)	2.99	4.69	7.52	13.60	17.37
◦ Nombre d'éléments coupés en 4	---	324	491	1075	463
◦ Nombre d'éléments coupés en 2	---	152	290	557	958
◦ Nombre moyen de directions GMRES par pas de calcul	---	9.38	8.93	9.68	15.68
b) Modèle avec déraffinement actif					
◦ Résidu max. viscosité artificielle	0.173214	0.095121	0.062100	0.052629	0.026987
◦ Norme du gradient de pression	5.932	5.888	11.006	22.554	43.234
◦ Nombre total d'éléments	1746	2651	4357	7804	9996
◦ Nombre total de noeuds	3637	5436	8846	15733	20117
◦ Nombre de pas de calcul	200	100	100	100	100
◦ Mémoire requise (Mo)	2.99	4.32	7.06	12.60	16.12
◦ Nombre d'éléments coupés en 4	---	324	612	1125	603
◦ Nombre d'éléments coupés en 2	---	152	256	531	1096
◦ Nombre d'éléments enlevés	---	219	386	459	713
◦ Nombre moyen de directions GMRES par pas de calcul	---	8.05	9.94	10.88	10.35

6.2 Écoulement transsonique autour d'un profil NACA 0012

Cet exemple est utilisé pour montrer le comportement du critère de viscosité artificielle dans l'adaptation d'un écoulement transsonique non visqueux. Il s'agit d'un écoulement autour d'un profil NACA 0012 avec un angle d'attaque faible de 1.25% par rapport à un écoulement à l'infini ayant un nombre de Mach de 0.8. Le maillage initial est constitué de 8150 éléments triangulaires à 6 noeuds et de 16496 noeuds (figure 14). La solution obtenue est montrée à la figure 15.



a) vue d'ensemble du domaine

b) agrandissement du profil.

Fig. 14 maillage initial

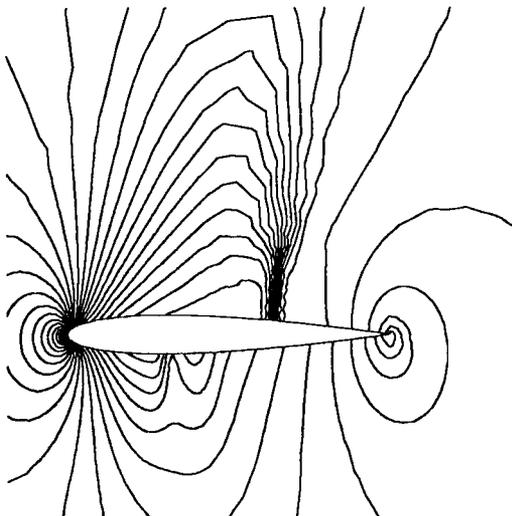


Fig. 15 contour de pression initiale.

Nous avons effectué une seule étape d'adaptation incluant le raffinement et un déraffinement contrôlé; ce qui a donné un maillage de 9424 éléments et de 19050 noeuds tel que montré à la figure 16a). Cet exemple a été traité par Sonar[13] (fig.16b). Il avait alors montré que l'utilisation de divers gradients d'une variable de l'écoulement ne permet pas d'arrêter le processus de raffinement. C'est pourquoi, il a opté pour un indicateur du type $h\|R^h\|_2$ (fig 17b), puisque celui-ci décroît avec le raffinement. Nos résultats obtenue avec le résidu μ_{cc} (fig. 17a) semblent se comparer favorablement à ceux qu'il a obtenus, compte tenu qu'il a effectué 3 étapes d'adaptations sur un maillage initiale beaucoup plus dense.

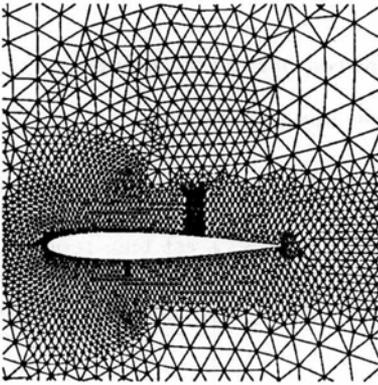


Fig. 16 a) 1 adaptation avec μ_{cc}

b) tiré de Sonar [13]

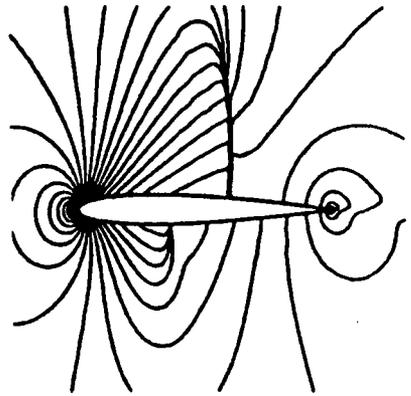
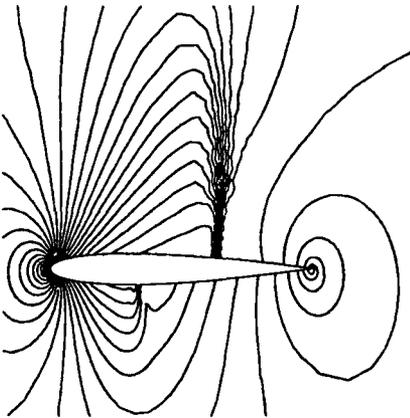


Fig. 17 a) 30 Isobares avec μ_{cc}

b) Isobares tiré de Sonar [13]

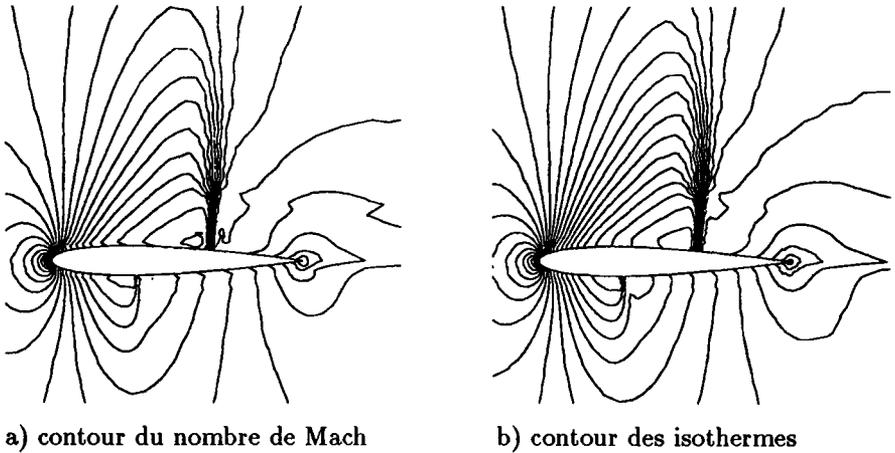


Fig. 18 solution finale après une adaption

La figure 19 montre l'évolution du coefficient de pression C_p le long du profil pour les deux maillages. On remarque bien que les chocs sont plus raides avec le raffinement. A remarquer que le choc à l'intrados est bien reproduit, ce qui n'est pas le cas dans plusieurs résultats présentés dans la littérature. Les courbes avec des '+' sont associées au maillage initial alors que celles en traits continus sont pour le maillage adapté.

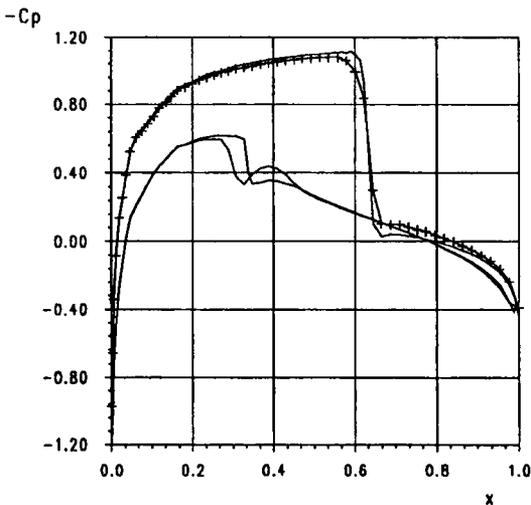


Fig. 19 profil du coefficient de pression C_p

6.3 Réflexion d'un choc oblique

Ce troisième exemple servira à montrer certains avantages qu'il peut y avoir à utiliser un déraffinement massif plutôt qu'un déraffinement contrôlé. D'abord définissons un déraffinement massif comme étant un processus par lequel on peut extraire plusieurs éléments adjacents durant la même séance d'adaptation du maillage. En contrepartie, un déraffinement contrôlé ne pourra pas extraire deux éléments voisins afin d'empêcher que les éléments ne deviennent trop gros. Pour mettre en évidence l'intérêt du déraffinement massif, nous traitons le problème de la réflexion d'un choc oblique. Les conditions aux limites imposées sont schématisées sur la figure 20.

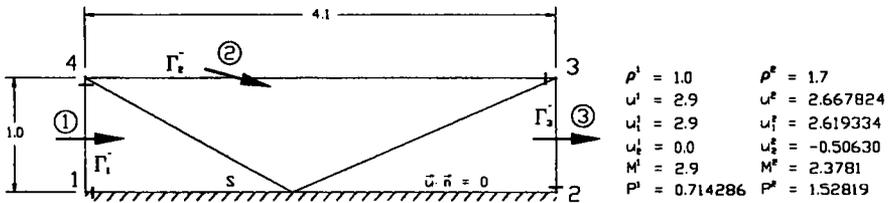


Fig. 20 conditions aux frontières.

Contrairement aux deux exemples précédents, nous sommes partis cette fois d'un maillage structuré de 1536 éléments triangulaires quadratique à 6 noeuds tel qu'illustré à la figure 21. Nous avons imposé la condition d'imperméabilité sur la paroi]1-2]. Tous les degrés de liberté sont imposés aux frontières [1-4[et [4-3[alors que la frontière]2-3] est laissée libre. La solution obtenue avec le maillage initial possède la distribution de pression illustrée par la figure 22.

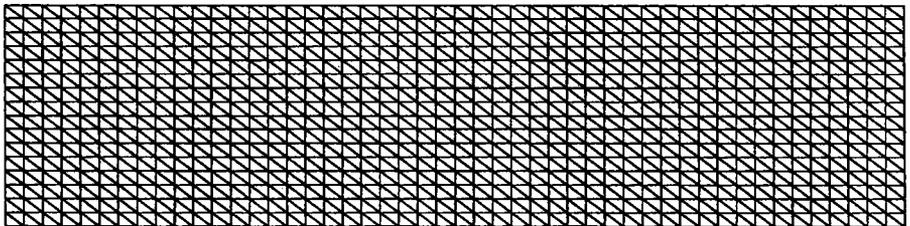


Fig. 21 maillage initial.

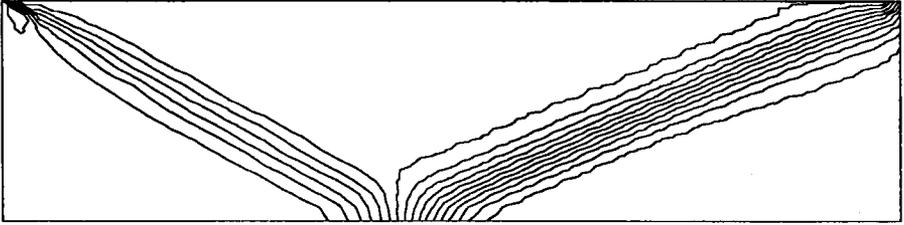


Fig. 22 contour initial du profil isobare.

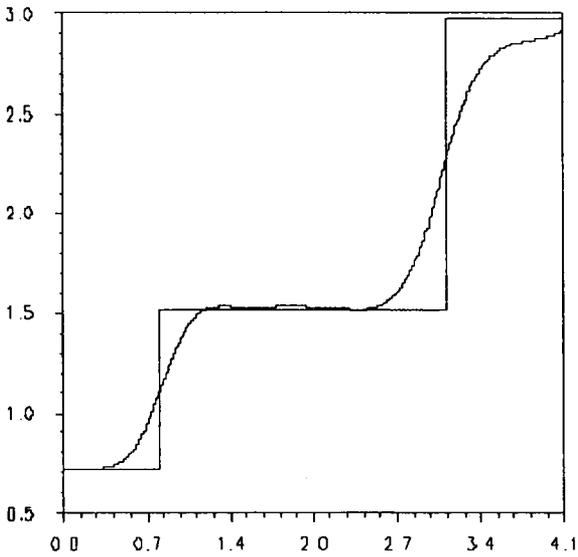


Fig. 23 pression à $Y = 0.57$

Une première étape d'adaptation est effectuée. Les éléments ayant un ratio ψ supérieur à 2.4% ont été choisis pour être subdiviser en quatre alors que ceux ayant un ratio inférieur à 0.5%, verront leurs noeuds sélectionnés pour être éliminés. L'option de déraffinement massif est aussi activée. Cette étape d'adaptation a permit l'extraction de 510 éléments inutiles alors que 1916 nouveaux éléments ont été ajoutés dans la zone de discontinuité pour finalement atteindre un total de 2942 éléments. Le second maillage et la solution correspondante sont présentés aux figures 24 et 25. Le contour de pression de cette solution est donné pour 20 isobars.

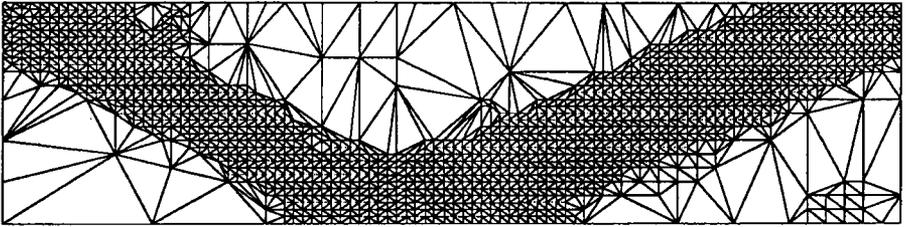


Fig. 24 1^{er} remaillage.

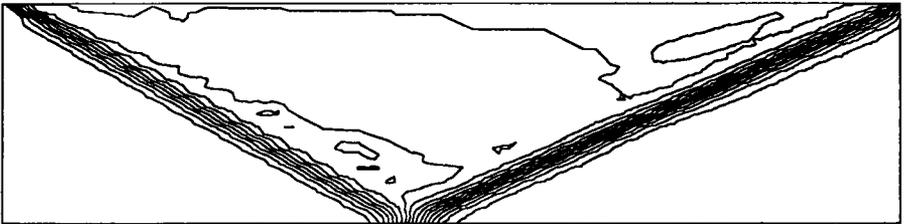


Fig. 25 contour de pression 20 isolignes.

Cette nouvelle solution est par la suite adaptée en utilisant une plage de 8% du résidu maximum jusqu'à 100% pour la sélection des éléments à être coupés en quatre et ceux ayant une norme inférieure à 1.5% ont été sélectionnés pour le déaffinement. La nouvelle configuration a forcé 886 éléments à être coupés en quatre et 266 en deux. De plus elle a dû extraire 1479 éléments dû au fait que nous avons ajouté volontairement trop d'éléments en périphérie des chocs, tel que discuté à la section 5.2. La figure 26 montre le maillage final comportant 4387 éléments et 8870 noeuds. La figure 27 montre le contour de pression calculé pour 20 isobars.

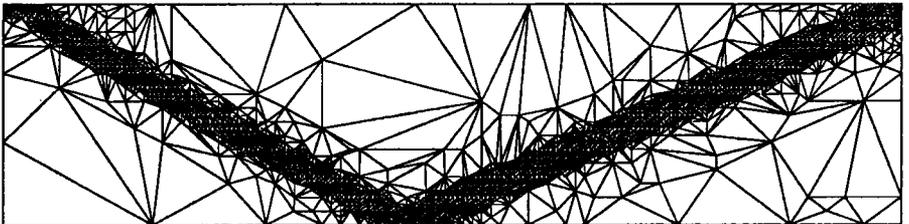


Fig. 26 maillage final.

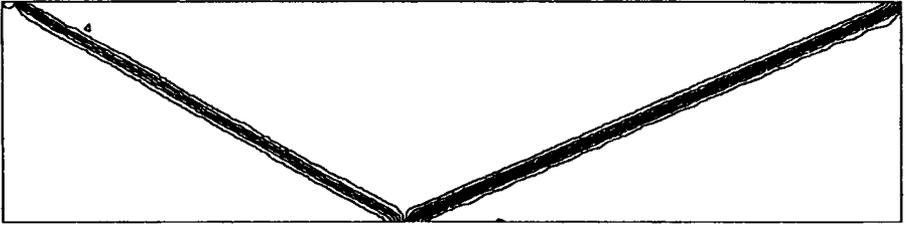


Fig. 27 contour isobare 20 isolignes.

Une coupe prise à $y = 0.57$ sur le contour de pression (Fig.28) permet de constater l'amélioration de la solution par la clarté des plateaux et des deux chocs très voisin de la solution analytique montré auusi sur la même figure. Pour donner une meilleure idée de la zone de discontinuité une vue en perspective est montrée à la figure 29.

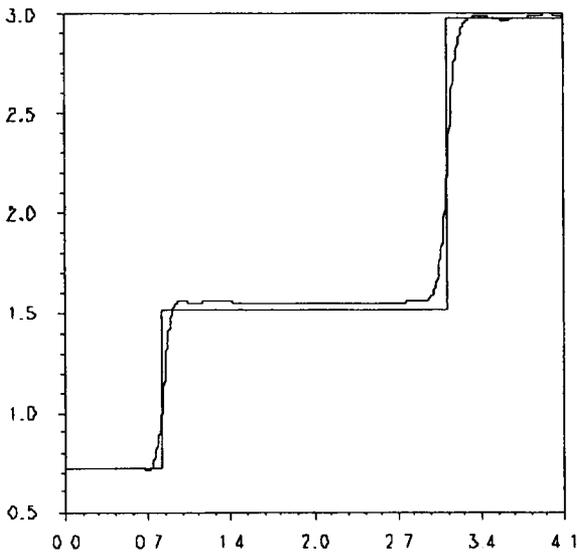


Fig. 28 pression à $y = 0.57$

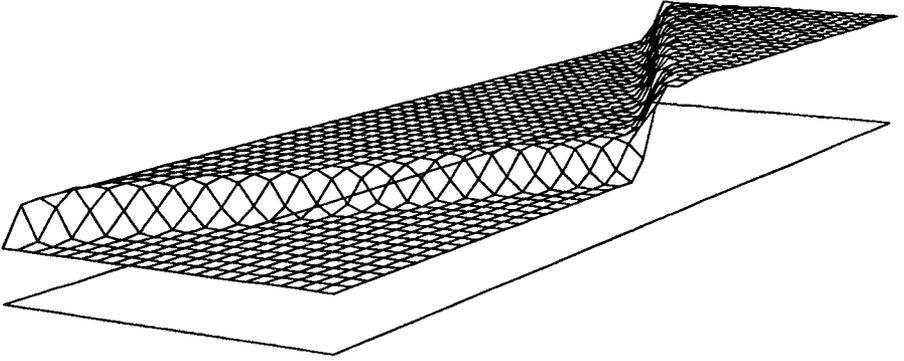


Fig. 29 vue isométrique de la pression.

6.4 Écoulement complexe dans un éjecteur

Cet exemple montre la performance du code d'éléments finis dans la résolution d'un écoulement visqueux relativement complexe d'un éjecteur supersonique où les interactions des ondes de choc avec les couches limites sont importantes. Les éjecteurs ou thermocompresseurs sont utilisés dans une grande variété d'applications industrielles telles que le pompage, le brassage, l'augmentation de poussée et la recompression de vapeur. Le principe de fonctionnement des éjecteurs consiste à mélanger deux courants: un dit primaire de niveau énergétique très élevé qui entraîne un autre courant dit secondaire de niveau énergétique très faible. Les deux écoulements entrent en contact et interagissent dans une conduite constituant la zone de mélange où l'écoulement secondaire est ré-énergisé pour une utilisation ultérieure. Dans les applications modernes à hautes efficacités énergétiques, les éjecteurs fonctionnent en régime supersonique, ce qui complique leur conception et le mode de fonctionnement.

Aux conditions de simulation utilisées (l'écoulement reste stationnaire au nombre de Reynolds utilisé et la géométrie est symétrique par rapport à l'axe central), le champ d'écoulement est symétrique si bien que les calculs ne sont effectués que sur la moitié du domaine représentée à la figure 30. A l'entrée du domaine l'écoulement est subsonique, ainsi la pression et l'enthalpie totales sont imposées. L'écoulement simulé doit sortir à une certaine pression statique imposée. Les conditions de non glissement et d'adiabaticité sont utilisées sur toutes les parois solides du domaine.

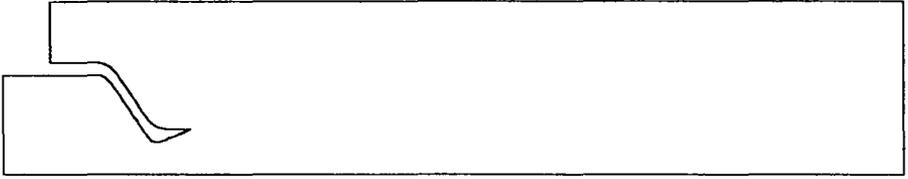


Fig. 30 Géométrie de la tuyère

Les calculs numériques ont été menés sur un éjecteur supersonique dont le rapport de section de la zone de mélange A_m à la section au col de la tuyère du primaire A_p est de 5.45. Le rapport de la pression totale du secondaire P_{os} à la pression totale du primaire P_{op} est de 0.3. Le nombre de Reynolds, basé sur la hauteur de la section de mélange, est de 2000 alors que le nombre de Prandtl est de 0.72. Les calculs sont d'abord effectués sur un maillage initial comportant 3515 éléments triangulaires quadratiques pour un total de 7418 noeuds (fig. 31). Selon les travaux de Fabri et Siestrunk [25], l'écoulement dans les éjecteurs se fait selon différents régimes. Si l'écoulement à la sortie de la tuyère primaire est supersonique, il s'agit d'un éjecteur supersonique pour lequel on peut avoir deux régimes: le régime mixte pour lequel l'écoulement secondaire reste subsonique ou bien le régime supersonique pour lequel le jeu des rapports de pression statiques permet à l'écoulement secondaire de devenir supersonique. Les résultats numériques obtenus, représentés sur les figures 32 à 36, correspondent au régime mixte. L'éjecteur étant supersonique, les ondes de choc et de détente qui se forment à la sortie du primaire se réfléchissent sur la surface de pression constante que délimite la couche limite interne du jet. Aussi, on constate une zone de décollement et de recirculation sur la paroi de la zone de mélange. La figure 32 montre la distribution de μ_{cc} qui est concentrée à l'axe de symétrie et à la sortie de la tuyère secondaire où le maillage initial est grossier. Un remaillage adaptatif sans déraffinement a été effectué, consistant à décomposer en quatre les éléments ayant un μ_{cc} supérieure à 10% de $\max(\mu_{cc}) = 0.023$ qui se trouve localisée au niveau de l'entrée de l'écoulement secondaire sur un élément grossier. Le maillage final obtenu comporte alors 5350 éléments et 11173 noeuds (figure 37). Les résultats sont montrés sur les figures 38 à 42. On constate que la norme maximale de μ_{cc} a été réduite à 0.016.

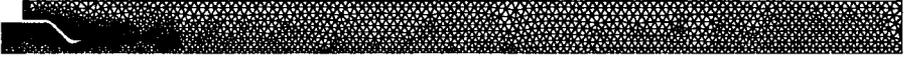


Fig. 31 Maillage initial 3515 éléments



Fig. 32 Distribution de μ_{cc} .

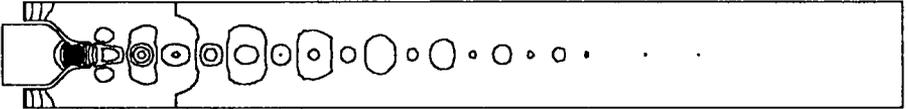


Fig. 33 Contour de pression pour 30 isobares



Fig. 34 Contour du nombre de Mach

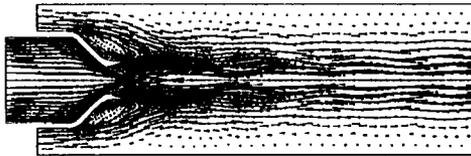
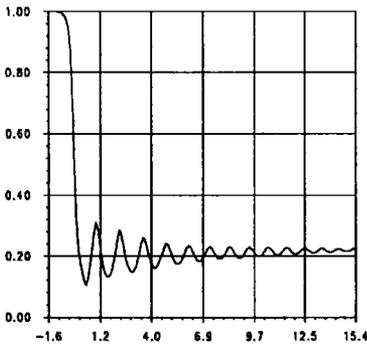
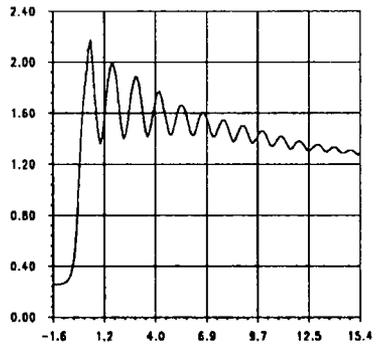


Fig. 35 Vecteurs de vitesses



a) Pression



b) Nombre de Mach

Fig. 36 Coupe longitudinale à l'axe de symétrie

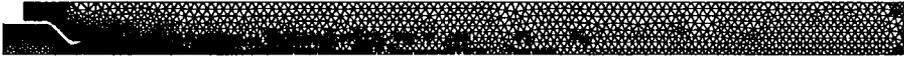


Fig. 37 Maillage final après une adaptation 5350 éléments



Fig. 38 Distribution de μ_{cc} .

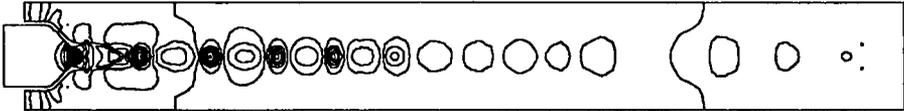


Fig. 39 Contour de pression

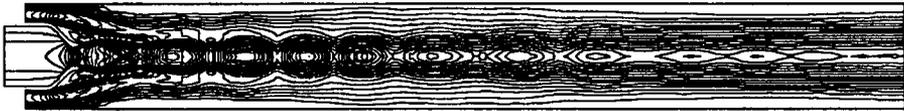


Fig. 40 Contour du nombre de Mach

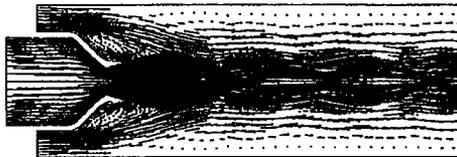
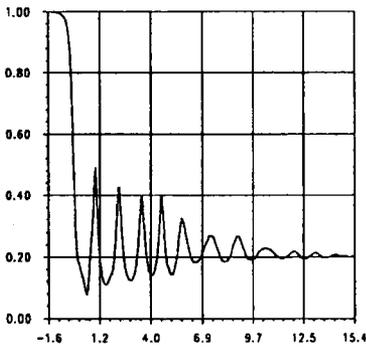
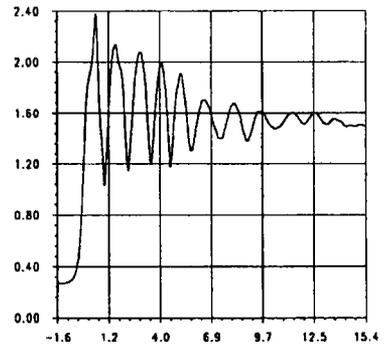


Fig. 41 Vecteurs de vitesses



a) Pression



b) Nombre de Mach

Fig. 42 Coupe longitudinale à l'axe de symétrie

CONCLUSION

Nous avons présenté un algorithme simple pour générer des triangulations de type Delaunay en évitant la création et par conséquent l'élimination d'éléments externes aux frontières du domaine. Le mailleur obtenu est très robuste pour générer des domaines planaires quelconques. Il est aussi possible de l'utiliser pour effectuer des raffinements adaptatifs lorsque le champ des tailles des éléments est connu.

En présence de chocs, la formulation variationnelle est stabilisée en utilisant une viscosité artificielle qui est définie en fonction de la norme locale du résidu du système d'équations aux dérivées partielles. Cette norme constitue naturellement une estimation de l'erreur commise lors de la stabilisation. Les maillages adaptatifs ont donc pour but la réduction de cette norme. Les résultats numériques montrent que le maximum de la viscosité artificielle converge avec le raffinement. Les procédures de raffinement/déaffinement présentées ne constituent pas nécessairement la meilleure technique pour réaliser le remaillage. Elles ont été développées pour des raisons de simplicité afin d'étudier le comportement de la norme résiduelle. Il est intéressant de tester la méthode consistant à faire une prédiction a priori de la taille des éléments à partir de la viscosité artificielle et de remailler avec la méthode de Delaunay.

REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche a été réalisé grâce au support financier du Conseil de Recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et aux Fonds Institutionnels de recherche de l'É.T.S. Nous remercions aussi monsieur Ali Rebaine pour son analyse de l'éjecteur.

REFERENCES

- [1] I. Babuška, W.C. Rheinboldt, Error estimates for adaptive finite element computations., *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol 15, (1978), 736-754.
- [2] I. Babuška, W.C. Rheinboldt, A posteriori error estimates for the finite element method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol 12, (1978), 1597-1615.
- [3] I. Babuška, W.C. Rheinboldt W.C., Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method, in: J.T. Oden, ed., *Computational Methods in Nonlinear Mechanics* (North-Holland, Amsterdam), (1980), 67-108

- [4] I. Babuška, W.C. Rheinboldt, A posteriori error analysis of finite element solutions for one-dimensional problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol 18, (1981), 565-589.
- [5] K. Eriksson and C. Johnson ' Adaptive finite element methods for linear elliptic problems' *Math. Comp.* 50 (1988) 361-383
- [6] O.C. Zienkiewicz. and J.Z. Zhu, A simple error estimator and the adaptive procedure for practical engineering analysis, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol 24, pp 337-357, (1987)
- [7] R. Löhner, K. Morgan and O.C. Zienkiewicz ' Adaptive finite element procedure for high speed flows' *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* 51, (1985), 441-165
- [8] J.T. Oden, T. Strouboulis And P. Devloo ' Adaptrive finite element methods for the analysis of invicid compressible flow: part I.Fast refinement/unrefinement and moving mesh methods for unstructured meshes'. *Compt. Meths. Appl. Mech. Eng.* 59 (1986) 327-362
- [9] D. Lefebvre , J. Peraire and K Morgan ' Finite element least squares solution of the Euler equations using linear and quadratic approximations ', *Compt. Fluid Dyn.*, vol. 1, (1993) 1-23
- [10] U. Navert ' A finite element method for convection- diffusion problems ' Thesis Department of Computer Science, Chalmers University of Technology, Sweden
- [11] P. Hansbo and C. Johnson ' Adaptive streamline diffusion methods for compressible flow using conservative variables' *Compt. Meths. Appl. Mech. Eng.* 87, (1991), 267-280
- [12] K. Eriksson and C. Johnson ' Adaptive streamline diffusion finite element methods for convection-diffusion problems. Technical report. Department of Mathematics. Chalmers University of Technology, Sweden (1990).
- [13] T. Sonar, Strong and weak norm refinement indicators based on the finite element residual for compressible flow computation, *Impact of computing in science and engineering* 5, (1993), 111-127.
- [14] A. Soulaïmani, N.E. El Yamani, et C. Deschênes, Une méthode d' éléments finis pour le calcul des écoulements compressibles utilisant les variables conservatives et la méthode SUPG, *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol 3, No. 2, (1994), 211-245.
- [15] R. Löhner, K. Morgan, O.C. Zienkiewick, Adaptive grid refinement for the compressible Euler Equations, Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computation, *Wiley & Sons*,(1986), 281-297
- [16] R. Löhner, An adaptive finite element scheme for transient problems in cfd, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 61 (1987) 323-338
- [17] R.A. Shapiro and E.M. Murman ' Adaptive finite element methods for the Euler equations ' *AIAA Paper* 88-0034.
- [18] B. Palmerio and A. Dervieux ' 2D and 3D unstructured mesh adaptation relying on physical analogy ' presented at Conf. on Numerical Grid

- Generation in Computational Fluid Dynamics, Miami. (1988).
- [19] J. Perraire, M. Vahdati, K. Morgan and O.C. Zienkiewicz ' Adaptive remeshing for compressible flow computations ' J. Comp. Phy., 72, (1987), 449-466
- [20] M-G Vallet, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, Thèse de doctorat de l' Université de Paris, (1992).
- [21] P.L. George, Génération automatique de maillages, Application aux méthodes d'éléments finis, Masson, (1991).
- [22] P.L. George, F. Hecht and E. Saltel, Automatic mesh generation with specified boundary, Computer Methods in Applied Mechanics and
- [23] R. Löhner ' Some useful data structures for the generation of unstructured grids' Compt. Meths. Appl. Mech. Eng. 4, (1988) 123-135
- [24] R. Löhner and P. Parikh ' Generation of three-dimensional unstructured grids by advancing-front method. International Journal for Numerical methods in Fluids, Vol.8, (1988), 1135-1149
- [25] J. Fabri and Siestrunk ' Supersonic air ejector ' , Advances in Applied Mechanics, Academic Press, 5 (1958), 1-34.
- [26] A. Rebaine, A. Soulaïmani and Y. Mercadier, Modélisation des éjecteurs fonctionnant en régime Supersonique avec une méthode d'éléments finis, à paraître dans CFD 95 conférence.

Article soumis le 30 septembre 1994.

Version révisée le 25 mai 1995.