
Un élément quadrilatéral de plaque basé sur une formulation mixte-hybride avec projection en cisaillement

Rézak Ayad* — Jean-Louis Batoz** — Gouri Dhatt***

* Laboratoire de mécanique — UFR des Sciences, BP 347, 51062 Reims

** Laboratoire de génie mécanique pour les matériaux et les structures URA 1505 du CNRS — Université de technologie de Compiègne BP 649, 60206 Compiègne cedex

*** Institut national des sciences appliquées de Rouen BP 8, 76131 Mont-Saint-Aignan cedex

RÉSUMÉ. Ce travail concerne la formulation d'un nouvel élément quadrilatéral à 4 nœuds pour l'analyse linéaire de plaques en flexion-cisaillement transversal(CT). Elle est basée sur un modèle variationnel mixte-hybride appelé MiSP (Mixed Shear Projected). L'approximation des efforts de CT résulte de celle des moments de flexion en satisfaisant explicitement deux des trois équations d'équilibre. Les déformations de CT sont définies en fonction des déformations de bords projetées sur les degrés de liberté nodaux. La convergence de l'élément est vérifiée à l'aide de patch-tests de modes rigides et constants. Sa précision est évaluée à travers une série de cas-tests standards relatifs aux problèmes de plaques biaisées et circulaires.

ABSTRACT. This work deals with the formulation of a new 4-node quadrilateral element for the linear analysis of plate bending with transverse shear effect. This formulation is based on a variational hybrid-mixed model called MiSP (Mixed Shear Projected). The approximation of the shear forces results from that of bending moments with an explicit satisfaction of two of the three equilibrium equations. The TS deformations are defined in terms of the edge deformations which are projected on the nodal degrees of freedom. The convergence of the element is checked on a series of constant and rigid mode patch-tests, and its precision is evaluated on two series of benchmark examples related to skewed and circular plates.

MOTS-CLÉS : flexion, plaque, cisaillement transversal, MiSP4.

KEY WORDS : bending, plate, transverse shear, MiSP4.

1. Introduction

Comme alternative aux modèles déplacements, les éléments mixtes de plaque avec prise en compte des déformations de cisaillement transversal(CT) sont apparus au milieu des années 60. La première tentative fût celle d'Herrmann (1965) [1]. Mais ce n'est qu'à la fin des années 70 qu'ils ont été introduits pour tenter de surmonter les difficultés liées au blocage en CT et aux modes parasites. L'apport de

Malkus et Hughes (1978) [2] sur la notion d'équivalence entre modèles mixtes et déplacements avec intégration sélective fût d'une grande utilité, en permettant une justification des techniques d'intégration réduite ou sélective. Les approches remèdes utilisées dans les modèles déplacements pour vaincre le blocage en CT peuvent être généralement reliées à des formulations mixtes où les variables mécaniques et cinématiques sont approchées de façon indépendante [5,6,14,21,22].

A notre connaissance, Hughes&al [10] et Lee&Pian (1978) [7] ont été les premiers à expliquer les causes de la présence du blocage en CT dans le cas des structures minces et à donner des solutions pour l'éviter en utilisant le principe modifié ou non modifié de Hellinger-Reissner. Ces travaux ont permis à Lee&Pian [7] de proposer des éléments triangulaires et quadrilatéraux sans blocage mais avec des modes parasites dans certains cas. Les travaux de Noor&al (1981)[3] et de Lee&al(1982) [9] ont directement suivi ceux de Lee&Pian [7]. Notons que l'élément mixte le plus simple (triangle à 3 nœuds avec approximations linéaires du déplacement w et des rotations β_x, β_y et efforts tranchants T_x, T_y constants) conduit à un blocage sévère en CT [4].

La plupart des approches mixtes ont d'abord utilisé des fonctions d'interpolation des variables mécaniques (contraintes, efforts) exprimées dans le repère cartésien (x,y) . Il était donc nécessaire, pour préserver l'invariance des éléments par rapport aux changements de repères, de considérer des bases d'interpolation complètes. Ceci augmentait de façon considérable le nombre de paramètres mécaniques pouvant nuire à la précision et à la stabilité numérique du modèle. Une autre technique, plus attrayante, consiste à définir les contraintes ou les efforts dans le repère isoparamétrique de l'élément (ξ, η) , l'invariance de celui-ci étant donc préservée [17]. Cette approche semble idéale pour la formulation d'éléments de coque mixtes où il est convenable d'approcher les contraintes en se référant à la base naturelle ou isoparamétrique élémentaire. Actuellement, beaucoup d'éléments (quadrilatéraux dans la plupart des cas) utilisent cette approche. Nous citons en particulier :

- L'élément de Pinsky et Jasti (1989) [15] basé sur un modèle mixte général dans lequel l'approximation des variables cinématiques (continuité C^0) est associée à un ensemble de fonctions "bulle" indépendantes (w, β_x, β_y internes) exprimées en fonction des paramètres généralisés que les deux auteurs éliminent par condensation statique au niveau local. L'élément "4-node bubble" est défini par une interpolation bilinéaire des variables cinématiques (w, β_x, β_y) et mécaniques $\langle M \rangle = \langle M_x \ M_y \ M_{xy} \rangle, \langle T \rangle = \langle T_x \ T_y \rangle$ et par une approximation cubique des fonctions "bulle" internes. En tout, il y a 29 paramètres à éliminer par condensation statique, ce qui est élevé pour un élément de plaque.
- La famille d'éléments mixtes-hybrides de Saleeb&al [17,18] : l'élément quadrilatéral HMPL5 [17] est associé à 3 fonctions "bulle" (w, β_x, β_y) représentées par le 5ème nœud interne. Les fonctions d'interpolation des variables cinématiques sont biquadratiques, celles des variables mécaniques $\{M\}$ et $\{T\}$ étant linéaires. Dans ce cas, un schéma d'intégration à 3×3 points de Gauss(PG) est nécessaire pour évaluer l'énergie de cisaillement ($2 \times$

2 PG suffisent pour la flexion). L'élément triangulaire correspondant HMPL3 [18] est très simple à formuler (w, β_x, β_y : linéaires, $\{M\}$: constants et $\{T\}$: linéaire) mais reste toujours utilisé sous forme de quatre sous-triangles croisés dans un maillage donné.

- L'élément T63B3 de Zienkiewicz et Lefebvre (1988) [19] (triangle à 6 noeuds avec fonctions "bulle" d'ordre 4 pour β_x et β_y) possède 12 variables internes : 3 pour T_x , 3 pour T_y , 3 pour β_x et 3 pour β_y qui sont éliminées au niveau local par condensation statique. Cet élément est considéré par plusieurs auteurs comme robuste. De bons résultats ont été obtenus pour les problèmes standards de plaques minces et épaisses [11,19].
- L'élément triangulaire, très particulier, d'Arnold et Falk (1990) [20] est un élément à continuité semi- C^0 pour w , C^0 pour β_x et β_y avec fonction bulle quadratique ($\lambda \xi \eta$, $\lambda = 1 - \xi - \eta$) et T_x, T_y constants. Cet élément est considéré par Zienkiewicz et son groupe [6, 12] comme simple et sans blocage. Une évaluation numérique de l'élément a été faite par les auteurs [13,32]. Les résultats ont révélé l'existence d'un mode parasite. Sa disparition dépend malheureusement du maillage considéré.
- Onate, Taylor, Zienkiewicz et leurs collaborateurs [6,34,35,36] ont récemment proposé une famille d'éléments DRM (Discrete Reissner Mindlin) triangulaires et quadrilatéraux avec des degrés de liberté additionnels au milieu des côtés. Ces éléments, basés sur le modèle déplacement avec des déformations de CT indépendantes, généralisent ceux de Kirchhoff discrets DKT et DKQ de Batoz et al [4,37,38,22]. Notons toutefois que l'élément DRM (triangle) donne des résultats identiques à ceux de l'élément DMT (Discrete Mindlin Triangle) d'Aalto (1988) [39] bien que les ddl (degrés de liberté) additionnels ne soient pas les mêmes (ref. [13]).

Pour éliminer le blocage en CT, tous les éléments mixtes précédents (à l'exception de HMPL3 [18]) font appel à la notion de fonctions "bulle" d'ordre supérieur (quadratiques, cubiques et d'ordre 4), en particulier pour les rotations. L'inconvénient majeur est le coût élevé qu'engendrent ces fonctions, à cause du nombre de points d'intégration numérique nécessaires au calcul des matrices élémentaires. Les calculs deviennent encore plus coûteux lorsque l'on traite par exemple des problèmes non linéaires... L'augmentation des paramètres généralisés associés aux fonctions "bulle" peut constituer également un inconvénient, lié cette fois-ci aux opérations d'inversion de matrices lors du processus de condensation statique.

Dans cet article, nous présentons la formulation (matrice de rigidité et efforts internes) d'un élément quadrilatéral de plaque combinant les approximations mixtes, l'utilisation des équations d'équilibre et les déformations de CT de substitution. Une évaluation numérique approfondie met en évidence les bonnes performances du nouvel élément.

2. Formulation de l'élément MiSP4 (Mixed Shear Projected 4-nodes)

2.1. Fonctionnelle mixte en déplacements et contraintes généralisées

L'élément proposé dans la section 2.4, noté MiSP4, résulte de l'utilisation d'une fonctionnelle mixte pour les plaques de Reissner/Mindlin avec modification des approximations de cisaillement transversal (CT). Nous présentons dans un premier temps un élément mixte noté MiQ4(st) (§2.2) basé sur la fonctionnelle mixte suivante [22] :

$$\Pi = \sum_{\epsilon} (\Pi_{int}^{\epsilon} - \Pi_{ext}^{\epsilon}) \tag{1}$$

avec $w = \bar{w}$; $\beta_x = \bar{\beta}_x$ et $\beta_y = \bar{\beta}_y$ sur Su

Su : partie du contour où les déplacements w et rotations β_x et β_y sont imposés.

$$\Pi_{int}^{\epsilon} = \int_{A^{\epsilon}} \left(-\frac{1}{2} \langle M \rangle [H_f]^{-1} \{M\} - \frac{1}{2} \langle T \rangle [H_c]^{-1} \{T\} + \langle M \rangle \{ \chi \} + \langle T \rangle \{ \gamma \} \right) dA \tag{2}$$

$$\Pi_{ext}^{\epsilon} = \int_{A^{\epsilon}} w f_z dA \tag{3}$$

avec $\langle M \rangle = \langle M_x \ M_y \ M_{xy} \rangle$; $\langle T \rangle = \langle T_x \ T_y \rangle$

$\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x} \ \beta_{y,y} \ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle$; $\langle \gamma \rangle = \langle w_{,x} + \beta_x \ w_{,y} + \beta_y \rangle$

w, β_x, β_y : déplacement suivant z et rotations de la normale dans les plans xz et yz.
 f_z : charge suivant z par unité de surface.

Pour un matériau isotrope homogène :

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} ; [H_c] = \frac{5}{6} \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Les équations d'Euler-Lagrange correspondant aux conditions de stationnarité de Π (avec $\delta w = \delta \beta_x = \delta \beta_y = 0$ sur Su) sont :

- sur la surface A :

$$T_{x,x} + T_{y,y} + f_z = 0 \quad ; \quad M_{x,x} + M_{x,y,y} - T_x = 0 \quad ; \quad M_{x,y,x} + M_{y,y} - T_y = 0 \tag{5}$$

$$\{\chi\} - [H_f]^{-1} \{M\} = \{0\} \quad ; \quad \{\gamma\} - [H_c]^{-1} \{T\} = \{0\}$$

- sur la frontière Sf de A :

$$M_x n_x + M_{xy} n_y = M_{xn} \quad ; \quad M_{xy} n_x + M_y n_y = M_{yn} \quad ; \quad T_x n_x + T_y n_y = T_n \quad (6)$$

Les variables indépendantes sont $w, \beta_x, \beta_y, M_x, M_y, M_{xy}, T_x$ et T_y .

2.2. Elément mixte-hybride MiQ4(st). Approximations

On considère un élément quadrilatéral (figure 1) avec les approximations suivantes :

* La géométrie de l'élément est définie par :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (7)$$

x_i, y_i sont les coordonnées des noeuds. Les fonctions de forme isoparamétriques N_i s'écrivent [21] :

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad ; \quad i = 1, 4 \text{ et } -1 \leq \xi \text{ et } \eta \leq 1 \quad (8)$$

La matrice Jacobienne [J] et son inverse [j] sont :

$$[J] = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$[j] = \frac{1}{\det J} \begin{vmatrix} J_{11} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} \quad ; \quad \det J = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \quad (10)$$

$N_{,\xi}$ et $N_{,\eta}$ sont les dérivées des fonctions N_i par rapport à ξ et η . $\det J$ est le déterminant de la matrice Jacobienne.

* Les variables cinématiques w, β_x et β_y (C^0) sont interpolées par :

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{vmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{vmatrix} \quad (11)$$

* Les variables mécaniques $\{M\}$ et $\{T\}$ sont définies par :

$$\{M\} = [P_M] \{\alpha_M\} \quad ; \quad \langle M \rangle = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle \quad (12)$$

$$[P_M] = \begin{bmatrix} \langle p \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p \rangle \end{bmatrix} ; \quad \langle p \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle \quad (13)$$

$\{\alpha_M\}$ représentent des paramètres indéterminés

* Les efforts de cisaillement $\{T\}$ sont obtenus directement à partir de l'approximation des moments de flexion (rel 12) par l'intermédiaire des équations d'équilibre des moments :

$$\langle T \rangle = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} \end{Bmatrix} = [P_T] \langle \alpha_M \rangle \quad (14)$$

$$[P_T] = \begin{bmatrix} \langle p_1 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle & \langle p_1 \rangle \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\langle p_1 \rangle = \langle 0 \quad j_{11} \quad j_{12} \quad \eta j_{11} + \xi j_{12} \rangle ; \quad \langle p_2 \rangle = \langle 0 \quad j_{21} \quad j_{22} \quad \eta j_{21} + \xi j_{22} \rangle$$

j_{11}, j_{12}, j_{21} et j_{22} sont les termes de la matrice Jacobienne inverse, constants si l'élément est rectangulaire. Ils deviennent variables en ξ et η dans le cas général.

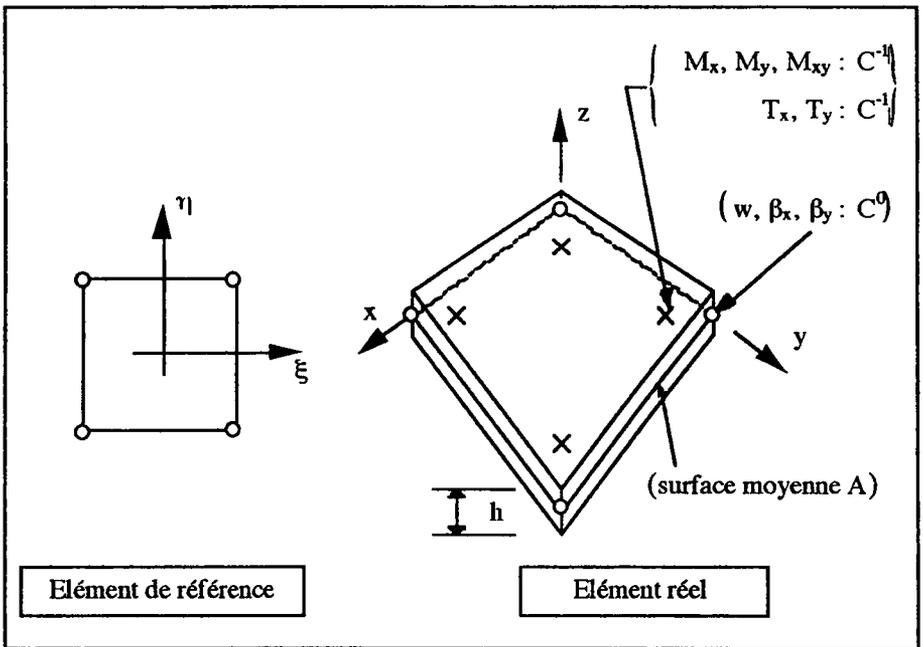


Figure 1. Géométrie de l'élément

Remarques :

- $\{T\}$ est défini directement en fonction de $\{\alpha_M\}$ (rel 12) via deux équations d'équilibre. Ainsi, les paramètres $\{\alpha_T\}$ sont liés à $\{\alpha_M\}$ et ne sont plus indépendants, comme c'est le cas dans les modèles mixtes classiques.
- 3 ddl cinématiques sont considérés pour chaque noeud : le déplacement transversal w et les rotations de la normale β_x et β_y (figure 1).
- Les efforts $\langle M \rangle = \langle M_x \ M_y \ M_{xy} \rangle$ et $\langle T \rangle = \langle T_x \ T_y \rangle$ sont décrits localement (par élément) par des approximations locales à continuité C^{-1} .
- L'élément est basé sur un modèle mixte-hybride au sens de Hellinger-Reissner, avec satisfaction explicite des équations d'équilibre.
- La condensation statique des paramètres $\{\alpha_M\}$ permet d'obtenir des éléments mixtes-hybrides à variables nodales de type déplacement et rotations (comme dans les modèles en déplacements).
- L'élément n'utilise pas de fonctions "bulle", la condensation statique reste limitée aux paramètres $\{\alpha_M\}$.
- L'utilisation des équations d'équilibre pour définir $\{T\}$ en fonction de $\{\alpha_M\}$ diminue le nombre d'inconnues du problème, ce qui facilite les opérations matricielles lors du processus de condensation statique.

2.3. Matrice de rigidité de l'élément MiQ4(st)

L'élément mixte-hybride standard MiQ4(st) est celui pour lequel les déformations de flexion et les déformations de CT sont définies à partir de l'approximation standard des variables cinématiques :

$$\{\chi\} = [B_f] \{u_n\} \quad ; \quad \{\gamma\} = [B_c] \{u_n\} \quad (16), (17)$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{i,y} & \dots \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & \dots \end{bmatrix} \quad i = 1, 4 \quad (18)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & N & 0 & \dots \\ N_{i,y} & 0 & N & \dots \end{bmatrix} \quad i = 1, 4 \quad (19)$$

$$\langle u_n \rangle = \langle w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad \dots \rangle \quad i = 1, 4 \quad (20)$$

$$N_{i,x} = j_{11} N_{i,\xi} + j_{12} N_{i,\eta} \quad \text{et} \quad N_{i,y} = j_{21} N_{i,\xi} + j_{22} N_{i,\eta}$$

Substituons les relations (12), (14), (16) et (17) dans l'expression de Π_{int}^e (rel 2), écrite sous forme matricielle :

$$\Pi_{int}^e = - \frac{1}{2} \langle \alpha_M \rangle [k_\alpha] \{ \alpha_M \} + \langle \alpha_M \rangle [k_{\alpha u}] \{ u_n \} \tag{21}$$

$$[k_\alpha] = \int_{A^e} ([P_M]^T [H_f]^{-1} [P_M] + [P_T]^T [H_c]^{-1} [P_T]) dA \tag{22}$$

$$[k_{\alpha u}] = \int_{A^e} ([P_M]^T [B_f] + [P_T]^T [B_c]) dA \tag{23}$$

Un schéma d'intégration à 2 x 2 points de Gauss permet l'intégration exacte des matrices $[k_\alpha]$ et $[k_{\alpha u}]$. De plus, les produits $[B_f] dA$ et $[B_c] dA$ (rel 23) ne font pas intervenir le déterminant de $[J]$ (rel 10).

La forme Π_{int}^e (21) s'écrit, si $\langle \bar{u}_n \rangle = \langle \langle \alpha_M \rangle \langle u_n \rangle \rangle$

$$\Pi_{int}^e = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_n \rangle [k^v] \{ \bar{u}_n \} \tag{24}$$

$$[k^v] = \begin{bmatrix} -[k_\alpha] & \vdots & [k_{\alpha u}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [k_{\alpha u}]^T & \vdots & [0] \end{bmatrix} \tag{25}$$

L'élimination des paramètres $\{ \alpha_M \}$ par condensation statique conduit à la matrice de rigidité élémentaire finale : ($[k_\alpha]$ étant non singulière).

$$[k^e] = [k_{\alpha u}]^T [k_\alpha]^{-1} [k_{\alpha u}] \tag{26}$$

Les variables finales sont : w, β_x, β_y aux noeuds des éléments.

Le blocage en CT de MiQ4(st) est observé à travers une série de tests qui consistent à évaluer l'influence de l'élancement L/h (Longueur/épaisseur) sur la flèche au centre d'une plaque carrée avec ou sans distorsion et d'une plaque biaise (30°) (fig.2).

L'élément MiQ4(st) présente un blocage à partir de $L/h = 20$ en convergeant vers une fausse valeur pour un maillage donné (figure 2). En conséquence, le modèle mixte-hybride standard est incohérent. Nous proposons d'éliminer ce blocage numérique en choisissant de représenter autrement le champ de déformations de CT.

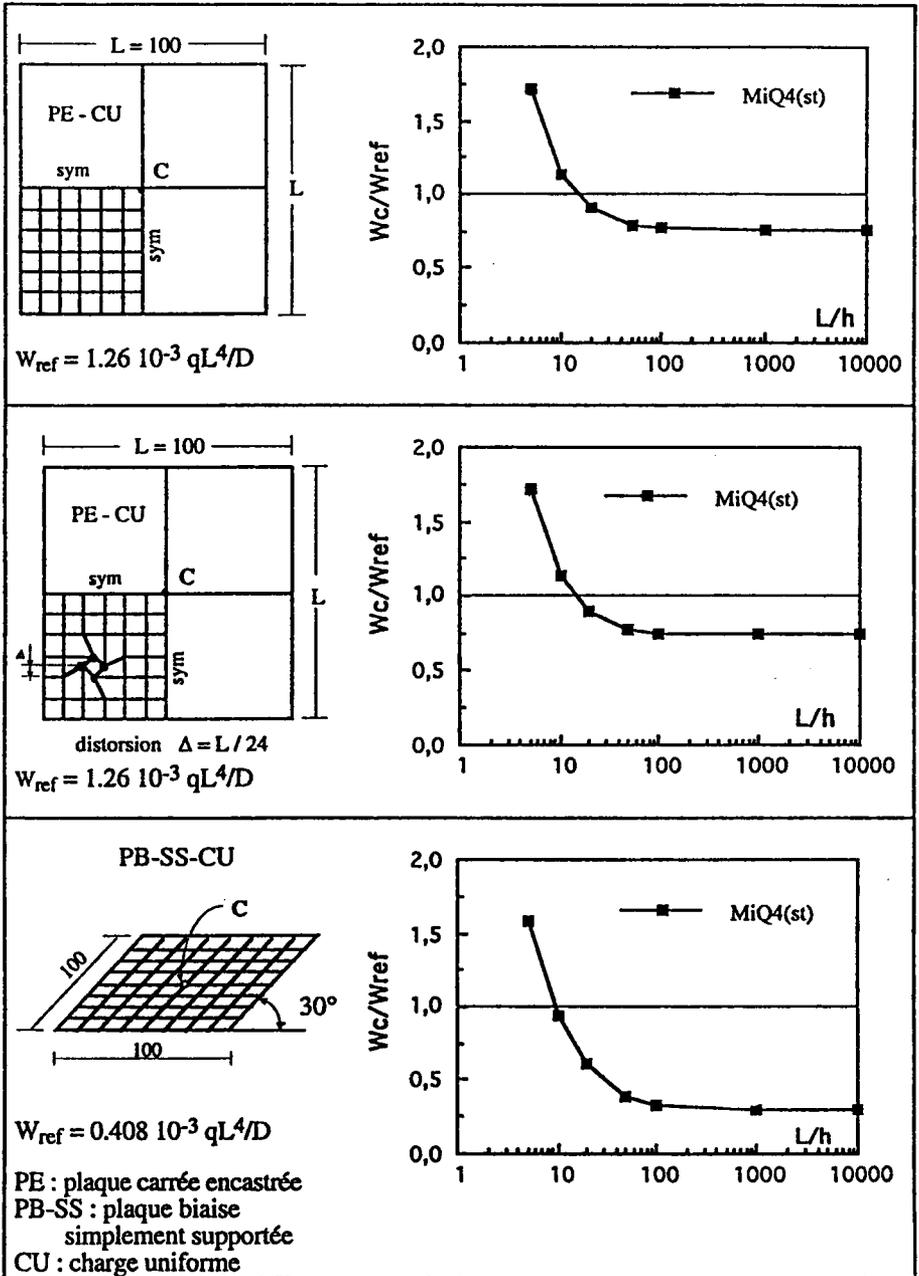


Figure 2. Influence de l'élongement L/H sur la flèche au centre W_c . Blocage en CT du modèle mixte-hybride standard

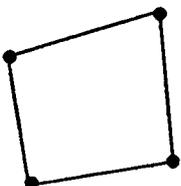
2.4. Matrice de rigidité de l'élément MiSP4

L'abandon de la formulation déplacement conventionnelle pour laisser place aux formulations naturelles (méthodes ANS, formulation libre,...) est le thème commun des investigations actuelles dans la recherche d'éléments à haute performance (réf. [13,23]).

Pour ce qui est des éléments mixtes, nous avons suivi cette nouvelle stratégie dès 1989 (réf. [24]) en proposant l'élément quadrilatéral à 4 noeuds QM4 γ basé sur le modèle mixte modifié de Hellinger-Reissner avec une représentation indépendante des déformations de CT. Cet élément donne de très bons résultats pour les problèmes de plaques minces et épaisses mais présente deux modes parasites [22, 24, 25, 32].

Nous avons étendu l'utilisation de l'introduction des hypothèses de Mindlin sous forme discrète, au modèle mixte-hybride sous sa forme générale. Le modèle standard MiQ4(st) est ainsi remplacé par un nouveau modèle appelé "Modèle Mixte Projeté en Cisaillement" (Mixed Shear Projected Model). L'élément de plaque correspondant est appelé MiSP4. Celui-ci considère le vecteur des déformations de CT $\{\gamma\}$ indépendamment de l'interpolation des variables w , β_x et β_y tout en gardant le nombre de paramètres généralisés α_M de départ. $\{\gamma\}$ est défini en fonction des quantités $\{\gamma_k\}$ sur les côtés d'un élément. Celles-ci sont ensuite projetées sur les variables w , β_x , β_y aux noeuds en introduisant les hypothèses de Mindlin sous forme discrète.

Cette approche a été utilisée pour les modèles déplacements par Bathe & Dvorkin [26, 27, 28], Ibrahimbegovic[44] et Polit, Touratier & Lory[8]. Elle est également utilisée pour construire un élément triangulaire par Hughes et al [43] et par Boisse & al [33, 42]. L'élément MiSP4 peut donc être interprété comme une amélioration du modèle mixte standard. Les caractéristiques de l'élément MiSP4 sont données dans le tableau suivant :

Géométrie	Label	ddl	Approximations
	<p>MiSP4</p> <p><u>Mixed Shear Projected</u> <u>4-node</u></p>	<p>w, β_x, β_y</p> <p>(12 ddl)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - β_x, β_y bilinéaires - M_x, M_y, M_{xy} bilinéaires - T_x, T_y équations d'équilibre - γ_ξ, γ_η linéaires en η et ξ - γ_s constant par côté

La matrice $[k_{\alpha}]$ (rel. 22) reste inchangée. L'introduction des déformations de CT projetées permet de substituer la matrice $[\bar{B}_c]$ à la matrice $[B_c]$ dans l'expression de $[k_{\alpha}]$ (rel. 23). En conséquence :

$$[k_{\text{ca}}] = \int_{A^c} \left([P_M]^T [B_c] + [P_T]^T [\bar{B}_c] \right) dA \quad (27)$$

Pour obtenir la matrice $[B_c]$ on utilise les approximations suivantes :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [j] \{\gamma_{\xi}\} \quad (28)$$

avec

$$\{\gamma_{\xi}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [A] \{\gamma_{\xi k}\} \quad (29)$$

$$[A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 \\ 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\langle \gamma_{\xi k} \rangle = \langle \gamma_{\xi z}^A \quad \gamma_{\eta z}^B \quad \gamma_{\xi z}^C \quad \gamma_{\eta z}^D \rangle \quad (\text{figure 3}) \quad (31)$$

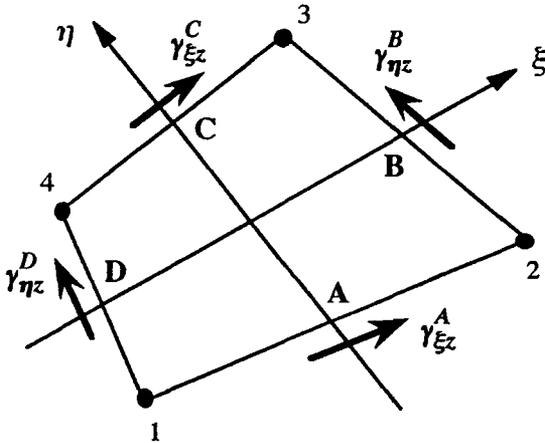


Figure 3. Elément MiSP4. Déformations de CT le long des côtés

Les quantités $\langle \gamma_{\xi k} \rangle$ sont projetées sur les ddl aux nœuds en utilisant les intégrales de contour le long de chaque côté (hypothèses de Mindlin sous forme discrète) :

$$\int_{-1}^1 (\gamma_{\xi z} - w_{,\xi} - \beta_{\xi}) d\xi = 0 \quad (\text{côtés 1 - 2 et 3 - 4}) \quad (32)$$

$$\int_{-1}^1 (\gamma_{\eta z} - w_{,\eta} - \beta_{\eta}) d\eta = 0 \quad (\text{côtés } 2 - 3 \text{ et } 4 - 1) \quad (33)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_{\xi} \\ \beta_{\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} ; \quad [J] \quad (\text{rel. } 9)$$

Ainsi,

$$\gamma_{\xi z}^A = \frac{1}{2}(w_2 - w_1 + \beta_{\xi 1} + \beta_{\xi 2}) ; \quad \gamma_{\xi z}^C = \frac{1}{2}(w_3 - w_4 + \beta_{\xi 3} + \beta_{\xi 4}) \quad (34)$$

$$\gamma_{\eta z}^D = \frac{1}{2}(w_4 - w_1 + \beta_{\eta 1} + \beta_{\eta 4}) ; \quad \gamma_{\eta z}^B = \frac{1}{2}(w_3 - w_2 + \beta_{\eta 2} + \beta_{\eta 3}) \quad (35)$$

$$\{\gamma_{\xi k}\} = [B_{CS}] \{u_n\} ; \quad \langle u_n \rangle = \langle w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad i = 1, 4 \rangle \quad (36)$$

d'où finalement : $\{\gamma\} = [\bar{B}_c] \{u_n\} \quad (37)$

$$[\bar{B}_c] = [j][A][B_{CS}] \quad (38)$$

La matrice constante $[B_{CS}]$ est facile à obtenir. La matrice de projection $[\bar{B}_c]$ est linéaire en ξ, η contrairement au modèle déplacement classique où $[B_C]$ est bilinéaire. Notons que l'état de déformation constant est représenté correctement par le champ (34) et (35). La matrice $[\bar{B}_c]$ est identique à celle de l'élément Q4 γ (ref. [22], Chap. 4).

Les efforts résultants $\{M\}$ et $\{T\}$ sont définis par les relations (12) et (14) respectivement. Les paramètres $\{\alpha_M\}$, éliminés au niveau local par condensation statique, sont donnés par :

$$\{\alpha_M\} = [K_{\alpha}]^{-1} [K_{\alpha u}] \{u_n\} \quad (39)$$

Le test de blocage effectué précédemment sur le modèle standard MiQ4(st) (figure2) est appliqué au modèle MiSP4. Les résultats de la figure 4 montrent la cohérence du modèle. De plus, la solution de Kirchhoff est atteinte pour un élanement $L/h = 50$ dans tous les cas. Elle demeure cependant stable quel que soit L/h . Il n'ya pas de blocage en CT, ni de mode parasite.

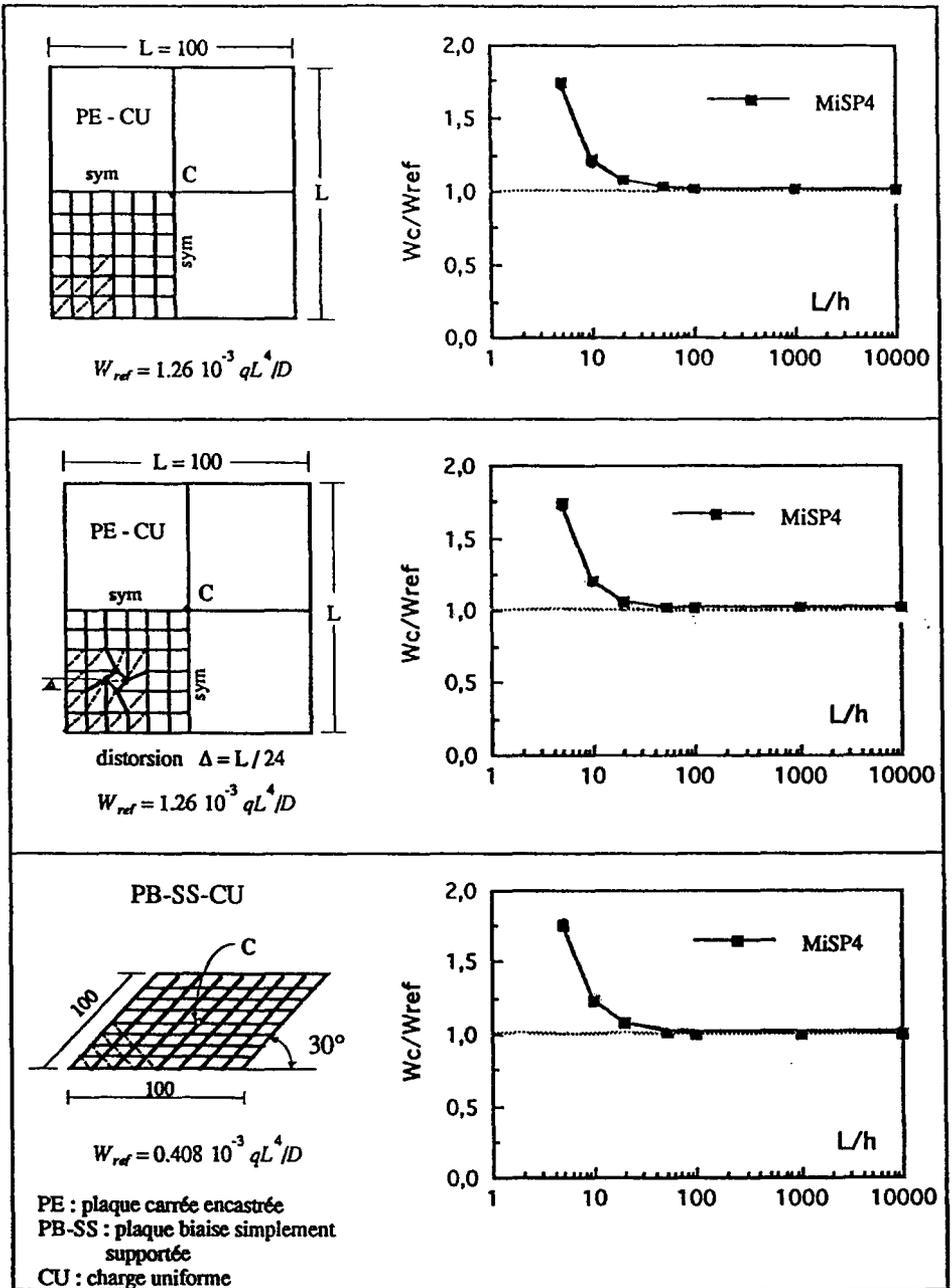


Figure 4. Influence de l'élancement L/h sur la flèche au centre W_c . Cohérence du modèle MiSP4

3. Evaluation numérique des performances de l'élément MiSP4

L'élément MiSP4 est de type ingénieur (géométrie simple avec un minimum de ddl). Son intérêt sur le plan industriel dépend des performances qu'il présente. Pour cela, nous avons étudié deux aspects essentiels, à savoir, la vérification de la convergence (cohérence ou consistance + stabilité) et l'évaluation de la précision pour un maillage donné (vitesse de convergence, influence des distorsions géométriques,...).

3.1. Convergence du modèle MiSP4

Le calcul des valeurs propres de la matrice de rigidité d'un élément ou d'un assemblage d'éléments MiSP4 a révélé l'existence de trois valeurs propres nulles correspondant aux trois mouvements de corps rigides d'une plaque. MiSP4 n'a donc aucun mode parasite.

Les patch-tests cinématiques et mécaniques de déformations constantes, respectivement condition nécessaire et condition nécessaire et suffisante de convergence, ont été effectués. Quelle que soit la distorsion du maillage, l'élément MiSP4 reproduit tous les états constants de déformations et de contraintes.

En conséquence, La convergence de notre élément est assurée quand la taille des éléments tend vers zéro.

3.2. Tests de précision de l'élément

La précision de l'élément MiSP4 est évaluée à travers une série de cas tests standards incluant des plaques épaisses ou minces, avec prise en compte des distorsions géométriques. Les résultats correspondants sont comparés à ceux obtenus par d'autres éléments avec CT.

3.2.1. Plaque biaise (30°) mince simplement supportée sous charge uniforme

Ce problème est considéré comme délicat par l'ensemble des chercheurs en éléments finis. Classiquement, une solution de référence due à Morley est obtenue en utilisant la théorie de Kirchhoff [29]. Nous avons étudié ce problème en considérant deux valeurs de l'élancement ($L/h = 100$ et 1000).

Les résultats de la flèche au centre, obtenus par l'élément MiSP4, sont reportés sur la figure 6. Nous les avons comparés à ceux obtenus par deux éléments de plaque épaisse considérés comme robustes : l'élément T63B3 de Zienkiewicz et

Lefebvre [19] et l'élément Q4 γ [22,24] (ou MITC4 de Bathe et Dvorkin [26]). Ces résultats sont donnés en fonction du nombre de ddl actifs (nombre total de ddl libres après imposition des conditions aux limites).

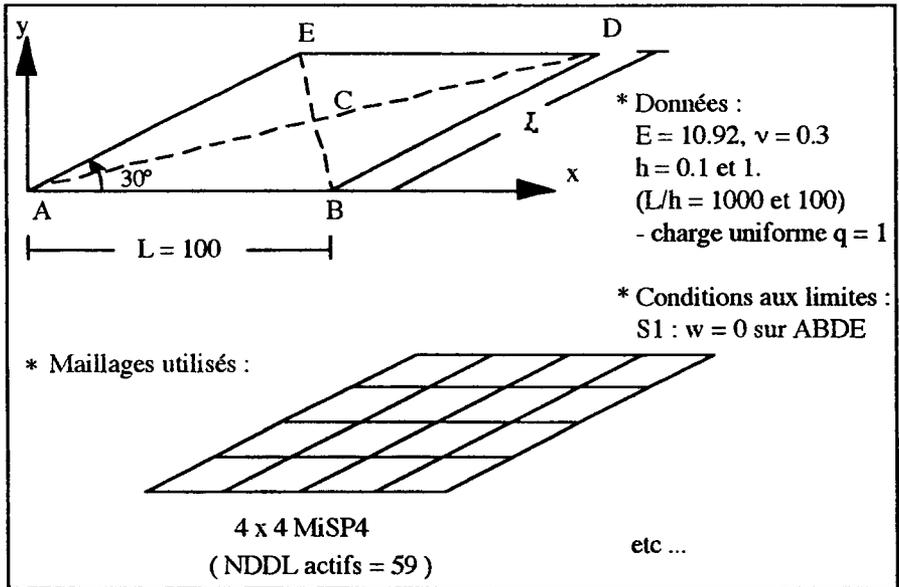


Figure 5. Plaque biaisée ($\alpha=30^\circ$) simplement supportée sous charge uniforme. Données

Commentaires :

- Dans le cas très mince ($L/h = 1000$), la convergence vers la solution de plaque mince (Morley [29]) est obtenue par l'ensemble des éléments avec des vitesses différentes. La distorsion du maillage semble influencer les résultats de l'élément Q4 γ . Notons qu'un maillage 4*4 a suffi à l'élément MiSP4 pour atteindre la solution de Morley.
- Cependant, le cas limite ($L/h = 100$) a suscité un certain nombre de questions pour les chercheurs. Si nous examinons le résultat de la figure 6, nous remarquons la convergence vers une solution autre que celle de Morley pour les plaques minces. Babuska et Scapolla [30] ont beaucoup étudié ce problème. La solution 3D pour $L/h = 100$ est très proche de celle obtenue par notre élément MiSP4 et l'élément T63B3, à l'exception de Q4 γ qui reste toujours lent.

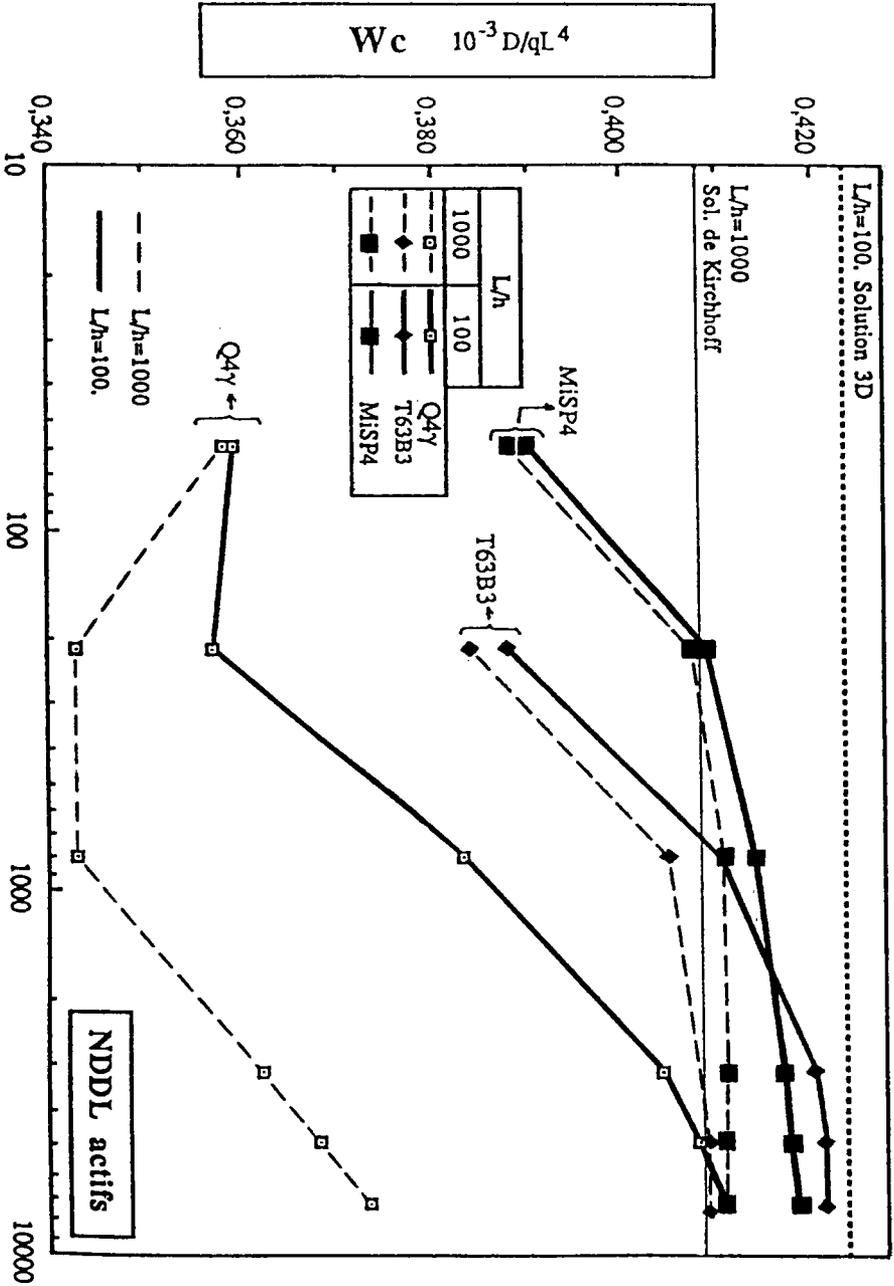


Figure 6. Plaque biaise (30°) simplement supportée sous charge uniforme. Flèche au centre en fonction du nombre de ddl actifs. Performance de l'élément MiSP4.

Nous avons également évalué, pour le cas $L/h = 1000$, les moments maximum et minimum au centre de la plaque. Leurs valeurs ainsi que celle de la flèche au centre sont normalisées par rapport à la solution de référence de plaque mince (Morley). Les résultats correspondants sont reportés sur les figures 7,8 et 9 où l'élément MiSP4 est confronté à quelques éléments récents de plaque avec CT. Le nombre de ddl étant différent pour chaque élément, les courbes de convergence sont données en fonction du nombre de ddl actifs.

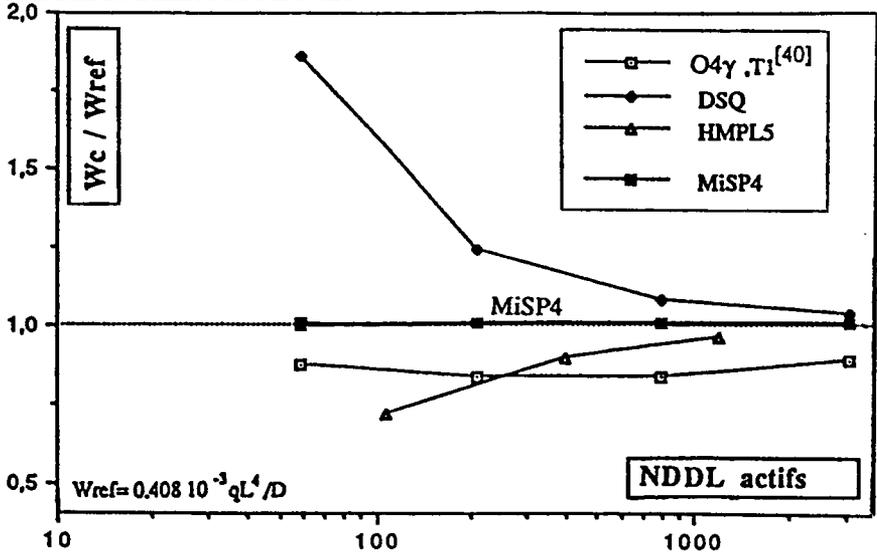


Figure 7. Plaque biaisée (30°) simplement supportée sous charge uniforme ($L/h=1000$). Convergence de la flèche au centre.

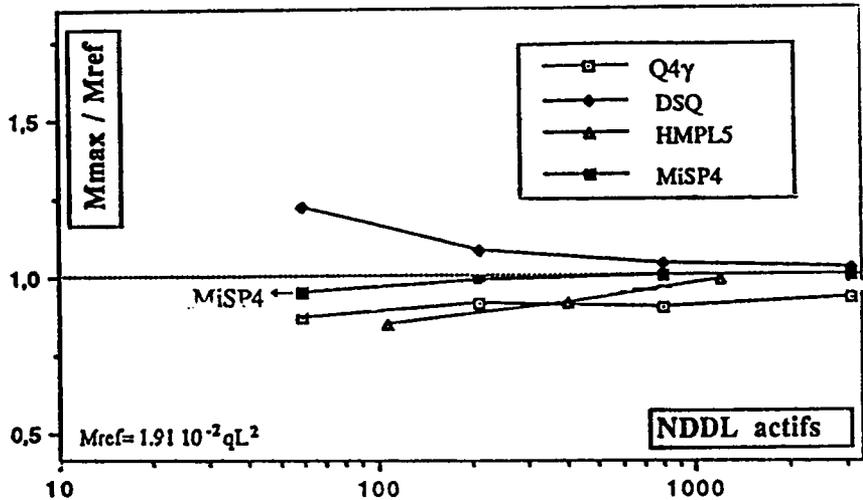


Figure 8. Plaque biaisée (30°) simplement supportée sous charge uniforme ($L/h=1000$). Convergence du moment maximum au centre.

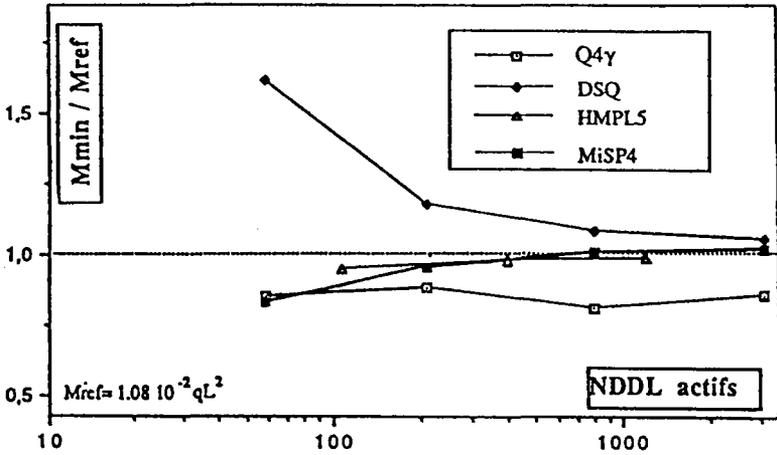


Figure 9. Plaque biaisée (30°) simplement supportée sous charge uniforme (L/h=1000). Convergence du moment minimum au centre.

3.2.2. Analyse d'une plaque circulaire épaisse et mince

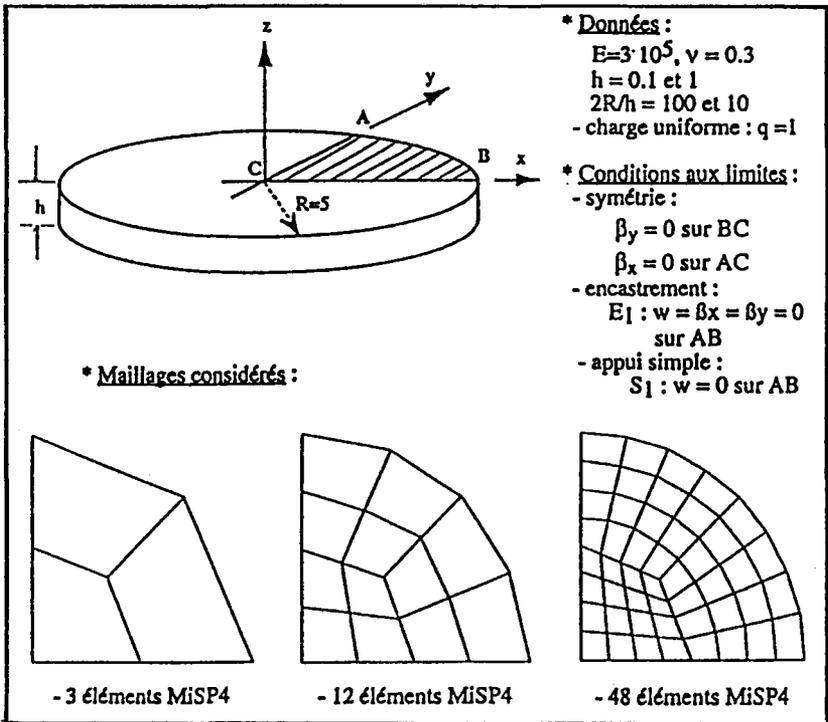


Figure 10. Plaque circulaire isotrope. Données et maillages

La figure 10 montre la géométrie et le maillage éléments finis utilisé pour l'analyse d'une plaque circulaire isotrope épaisse ($R/h = 5$) et mince ($R/h = 50$). Ce test est également intéressant car il met en évidence la distorsion géométrique des éléments. Un quart de plaque est discrétisé en tenant compte des conditions de symétrie et deux types de conditions aux limites sont considérés.

Des solutions analytiques incluant les effets de CT sont obtenues pour les problèmes de plaque à comportement axisymétrique [22, 31].

Plaque mince sous charge uniforme. Convergence de la flèche et du moment de flexion radial M_r au centre

En utilisant les maillages de la figure 10 pour une plaque mince ($R/h = 50$) sous charge uniforme $q = 1$, nous avons évalué la flèche au centre C, pour les cas simplement supporté (S1) et encastré (E1), et le moment M_r au centre pour le cas S1 uniquement. Les résultats correspondants (figures 11 et 12) sont normalisés par rapport aux solutions de référence et donnés en fonction du nombre de ddl actifs obtenus après imposition des conditions aux limites.

L'élément MiSP4 est comparé à quelques éléments existants de plaque avec CT. L'élément quadrilatéral de Saleeb & al HMPL5 [17] est formulé avec un nœud "bulle" interne. Le nombre de ddl actifs serait donc important par rapport à l'élément MiSP4. Notons le bon comportement de notre élément pour ce type de problème.

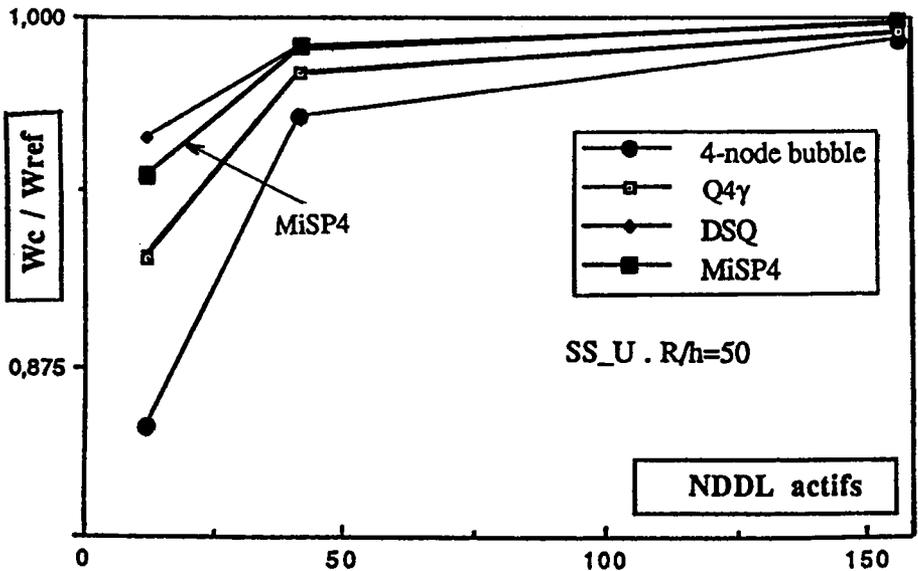
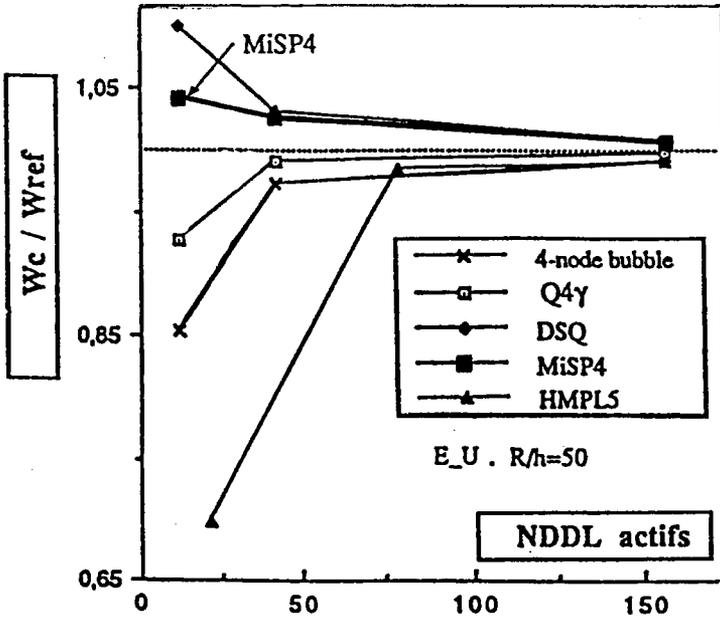
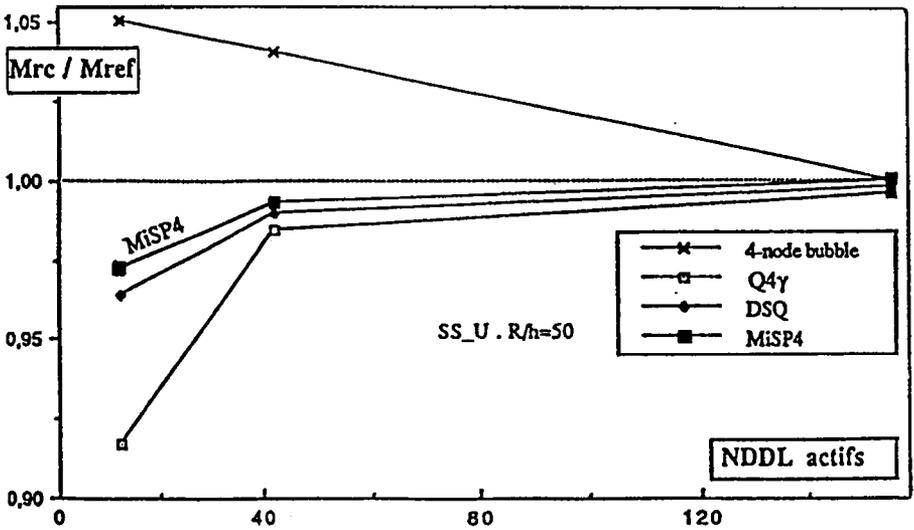


Figure 11. Plaque circulaire mince ($R/h=50$) simplement supportée sous charge uniforme. Convergence de la flèche au centre



(a) Plaque encastree. Flèche au centre



(b) Plaque simplement supportee. Moment Mr au centre

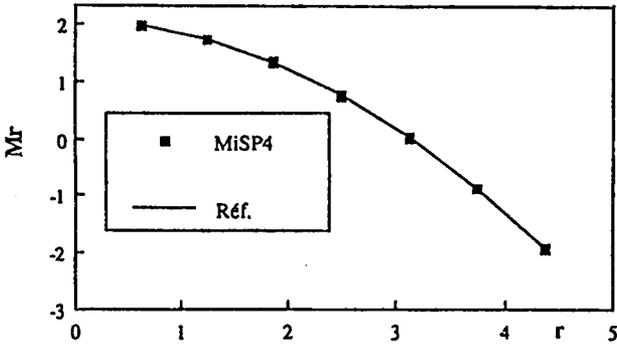
Figure 12. Plaque circulaire mince ($R/h=50$) sous charge uniforme. Convergence de la flèche et du moment M_r au centre

Distribution des efforts résultants suivant le rayon d'une plaque encastree soumise à une charge uniforme

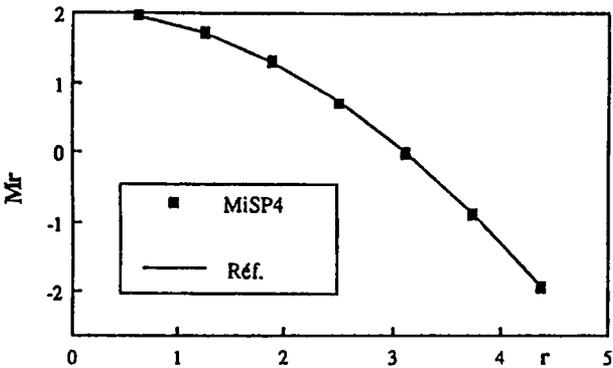
Sur les figures 13, 14 et 15 sont présentées les courbes de distribution des moments de flexion M_r et M_θ et de l'effort tranchant T_r le long du rayon de la plaque encastree sous charge uniforme. Deux valeurs du rapport rayon/épaisseur sont considérées : $R/h = 5$ (plaque épaisse, $\nu \approx 0.2$) et $R/h = 50$ (plaque mince, $\nu \approx 0.002$). Les solutions de référence sont (réf.22) :

$$M_r(r) = a \left(R^2 - \frac{3 + \nu}{1 + \nu} r^2 \right) ; \quad M_\theta(r) = a \left(R^2 - \frac{1 + 3\nu}{1 + \nu} r^2 \right) ; \quad T_r(r) = -q \frac{r}{2} ; \quad a = q \frac{1 + \nu}{16}$$

Le résultat des figures 13 à 15 est obtenu en considérant le maillage à 48 éléments MiSP4. Les efforts M_r , M_θ et T_r sont évalués aux nœuds. On observe que l'élément MiSP4 permet une très bonne approximation de la solution exacte pour les efforts M_r , M_θ et T_r dans le cas épais et mince.



(a) plaque épaisse ($R/h = 5$)



(b) plaque mince ($R/h = 50$)

Figure 13. Plaque circulaire encastree sous charge uniforme. Moment M_r suivant le rayon.

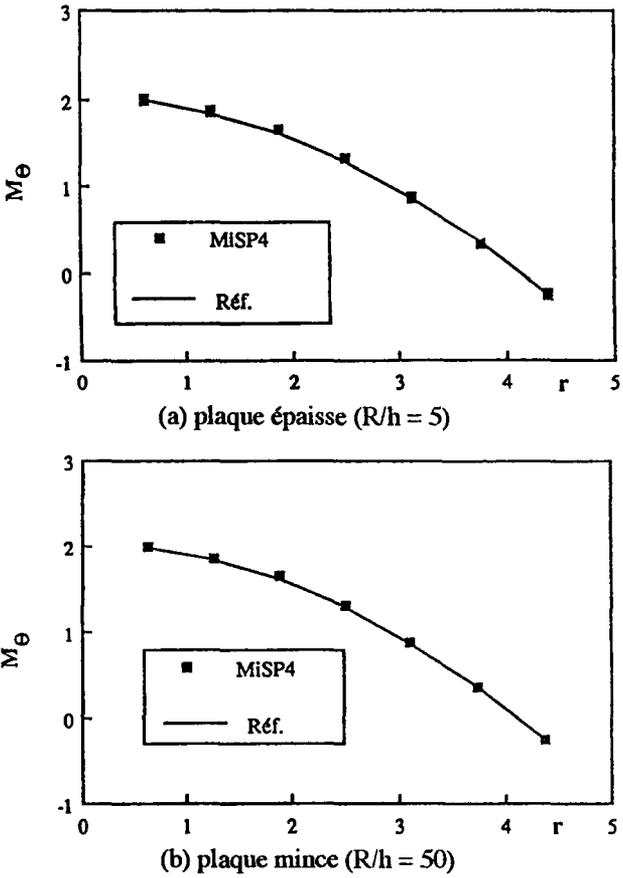


Figure 14. Plaque circulaire encastrée sous charge uniforme. Moment M_{θ} suivant le rayon.

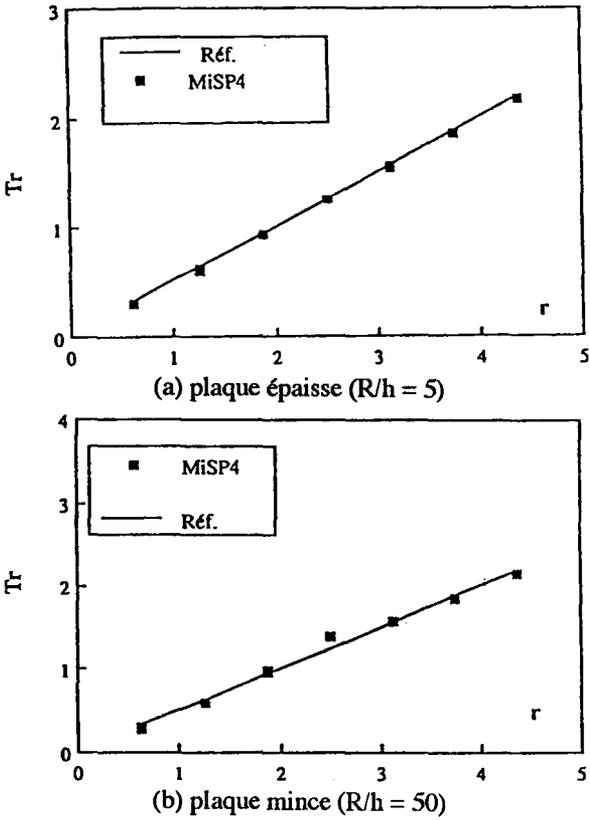


Figure 15. Plaque circulaire encastree sous charge uniforme. Effort T_r suivant le rayon

4. Conclusion

Un nouvel élément fini de plaque en flexion/CT est développé dans ce travail. Il s'agit d'un élément quadrilatéral à 4 nœuds MiSP4 (Mixed Shear Projected 4-nodes), formulé à partir d'un modèle variationnel mixte-hybride au sens de Hellinger-Reissner. Les déformations de cisaillement transversal sont des déformations de substitution définies en fonction des déformations tangentielles aux bords de l'élément. Celles-ci sont ensuite projetées sur les variables nodales en utilisant l'hypothèse de Mindlin sous forme discrète. Les efforts tranchants sont obtenus en satisfaisant explicitement les équations d'équilibre des moments.

L'élément MiSP4 peut être utilisé pour l'analyse des structures élastiques formées de plaques minces ou épaisses. Il passe tous les patch-tests de modes rigides et de déformations constantes. Les tests de plaques biaises à 30° et de plaques circulaires sont considérés par les ingénieurs comme sévères, une convergence monotone vers les solutions de référence est obtenue par notre élément dans tous les cas traités. L'élément permet également d'obtenir une bonne précision sur les efforts résultants pour les deux cas-tests.

Notons que les tests classiques relatifs aux problèmes de plaques carrées et rectangulaires, non présentés dans ce travail, ont également été effectués. De très bons résultats ont été obtenus pour des cas de chargement et de conditions aux limites différents.

L'élément MiSP4 peut être considéré comme parmi les éléments mixtes les plus simples et les plus performants.

6. Bibliographie

- [1] Herrman L.R. "A bending analysis for plates". Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. in structural Mech., Ohio, October 1965, page 577-602.
- [2] Malkus D.S. & Hughes T.J.R. "Mixed finite element methods-reduced and selective integration techniques ; a uniform of concepts ". Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 15, 63-81 (1978).
- [3] Noor A.K. & Anderson C.M. "Mixed methods and reduced /selective integration displacement models for nonlinear shell analysis". in Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells, Hughes & Al Eds, AMD 48, 119-146 (1981), AMSE, New York.
- [4] Batoz J.L., Bathe K.J. & Ho L.W "A study of three-node triangular plate bending elements". IJNME, Vol. 15, p. 1771-1812 (1980).
- [5] Zienkiewicz O.C. & Lefebvre D. "three field mixed approximation and the plate bending problem". Communic. App. Num. Meth. 3, 301-309 (1987).

- [6] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Papadopoulos P. & Onate E. "Plate bending elements with discrete constraints : new triangular elements". *Comp. Struct.* V35, 505-522 (1990).
- [7] Lee S.W. & Pian T.H.H. "Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations". *AIAA Journal* 16, N°1, 29-34 (1978).
- [8] Polit O., Touratier M. et Lory P. "A new eight-node quadrilateral shear bending plate finite element", *IJNME*, Vol.37, pp. 387-411, 1994.
- [9] Lee S.W. & Wong "Mixed formulation finite elements for Mindlin theory plate bending". *IJNME* 18, 1297-1311 (1982).
- [10] Hughes T.J.R, Taylor R.L & Kanoknukulchai W. "A simple and efficient finite element for plate bending". *IJNME* 11, 1529-1543 (1977).
- [11] Zienkiewicz O.C & Taylor R. "The finite element method". Volume 2: Plates, shell, fluids and non-linear problems. 4th Ed., Mc Graw-Hill, London 1991.
- [12] Onate E., Taylor R.L. & Zienkiewicz O.C. "Consistent formulation of shear constrained Reissner-Mindlin plate elements". *Proceedings on the IUTAM/IACM meeting on discretization Methods in Structural Mechanics*, Vienne, 12 pages, 1989.
- [13] Ayad R., Batoz J.L., Dhatt G. & Katili I. "A study of recent triangular elements for thin and thick plates". In *New advances in computational structural mechanics*, Eds Ladeveze & Zienkiewicz, p.259-271(1992).
- [14] Simo J.C. & Hughes T.J.R. "On the variational foundations of assumed strain methods". *Journal App. Mech.* 53, 51-54 (1989).
- [15] Pinsky P.M. & Jasti R.V. "A mixed finite element formulation for Reissner-Mindlin plates based on the use of bubble functions". *IJNME* 28, 1677-1702 (1989).
- [16] Pian T.H.H. & Chen D.P. "Alternative ways for formulation of hybrid stress elements". *IJNME* 18, 1679-1684 (1982).
- [17] Saleeb A.F. & Chang T.Y. "An efficient quadrilateral element for plate bending analysis". *IJNME* 24, 1123-1155 (1987).
- [18] Saleeb A.F., Chang T.Y. & Yingyeunyoung S. "A mixed formulation of C⁰-Linear triangular plate-shell element - the role of edge shear constraints". *IJNME* 26, 1101-1128 (1988).
- [19] Zienkiewicz O.C. & Lefebvre D. "A robust triangular plate bending element of the Reissner-Mindlin type". *IJNME* 26, 1169-1184 (1988).
- [20] Arnold D.N. & Falk R.S. "A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate". *SIAM J. Num. Anal.* 26, 1276-1290 (1989).
- [21] Batoz J.L. & Dhatt G. "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 1 : Solides élastiques. Hermès Ed., Paris 1990.
- [22] Batoz J.L. & Dhatt G. "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 2 : Poutres et plaques. Hermès Editeur, Paris 1990.
- [23] Felippa C.A. & Militello C. "Developments in variational methods for high performance plate and shell elements". In *Analytical and Computational Models of Shells*, Noor et al. Eds, CED - Vol.3, ASME, p. 191-215 (1989).
- [24] Ayad R. "Evaluation des différents éléments quadrilatéraux pour les problèmes de plaque avec cisaillement transversal". UTC, Division MNM, Déc 1989.
- [25] Ayad R., Dhatt G. et Batoz J.L. "Présentation et évaluation des différents éléments quadrilatéraux de plaques avec CT". *Actes du 3ème colloque Maghrébin sur les modèles numériques de l'ingénieur*, 26-29 Novembre 1991, Tunis, Tunisie.
- [26] Bathe K.J & Dvorkin E.N "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation". *IJNME* 21, 367-383 (1985).
- [27] Bathe K.J & Dvorkin E.N "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components". *IJNME* 22, 697-722 (1986).
- [28] Dvorkin E.N. & Bathe K.J. "A continuum mechanics based four node-shell element for general non-linear analysis". *Eng.Comput.* 1, 77-88 (1984).
- [29] Morley L.S.D. "Skew plates and structures". Pergamon, Oxford, 1963.

- [30] Babuska I. & Scapolla T. "Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem". IJNME 28, p.155-179 (1989).
- [31] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L., Papadopoulos P. & Onate E. "Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements". Comp.Struct V35, 505-522 (1990).
- [32] Ayad R. "Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement ". Thèse de Doctorat UTC, Mars 1993.
- [33] Boisse P., Daniel J.L. & Gelin J.C. "A simple isoparametric three node shell finite element ". Comp.Struct ,44,n°6,1263-1273(1992).
- [34] Papadopoulos P. & Taylor R.L. "A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory". IJNME 30, 1029-1049 (1990).
- [35] Onate E., Zienkiewicz O.C, Suarez B. & Taylor R.L "A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements". IJNME, 33, 345-367 (1992).
- [36] Onate E. & Castro J. "Derivation of plate based on assumed shear strain fields". in New Advances in Computational Structural Mechanics Ladevèze & Zienkiewicz eds, p. 237-288, Elsevier, Amsterdam (1992).
- [37] Batoz J.L. & Ben Tahar M. "Evaluation of a new thin plate quadrilateral element". IJNME, Vol.18, N°11, p. 1655-1678 (1982).
- [38] Batoz J.L. & Dhatt G. "Revue et bilan des éléments de plaque de type Kirchhoff discret". Calcul des Structures et I.A, Vol.2, Fouet et al. Eds Pluralis, p. 137-160 (1988).
- [39] Aalto J. "From Kirchhoff to Mindlin plate element". Comm.App.Num.Meth 4, 231-241 (1988).
- [40] Hughes T.J.R & Tezduyar T.E. "Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element" Jou.App.Mech. 48,587-596(1981).
- [41] Lardeur P. "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal". Thèse de Doctorat, UTC, 1990.
- [42] Boisse, P., Daniel, J.L., Gelin, J.C., "A C^0 three node shell element for nonlinear structural analysis", IJNME, Vol. 37, N° 14, pp. 2339-2364, 1994.
- [43] Hughes, T.J.R. et Taylor, R.L., "The linear triangle bending element". In the Mathematics of Finite Element and Applications IV, MAFELAP 1981, London, Academic Press, pp. 127-142 (1982).
- [44] Ibrahimbegovic A. "Quadrilateral finite element for analysis of thick and thin plates". Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 110, 195-209 (1993).

Légende :

IJNME : International Journal for Numerical Methods in Engineering

Article soumis le 25 novembre 1994.

Version révisée le 1^{er} mars 1995.