

---

# Une méthode d'identification inverse des paramètres matériels pour les comportements non-linéaires

Jean-Claude Gelin — Omar Ghouati

Laboratoire de mécanique appliquée R. Chaléat — URA CNRS 004  
Université de Franche-Comté  
La Bouloie  
Route de Gray  
25030 Besançon

---

*RÉSUMÉ. La caractérisation du comportement rhéologique des matériaux dans le domaine non linéaire à l'aide d'essais expérimentaux conduisant très souvent à des états de contrainte et de déformation hétérogènes, complique singulièrement l'identification directe des paramètres matériels. On propose, dans cet article, une méthode d'identification inverse permettant d'éviter les problèmes liés à l'interprétation des essais expérimentaux, et de déterminer avec plus de précision les paramètres matériels. L'algorithme développé est basé sur le couplage d'une méthode d'optimisation et d'une méthode de calcul par éléments finis. La méthode proposée est validée par la détermination des paramètres de comportement élastique non linéaire de polymères, puis appliquée dans le cas élasto-viscoplastique à la détermination des paramètres de la loi d'écoulement d'un alliage d'aluminium.*

*ABSTRACT. The characterization of rheological behaviour of materials in nonlinear range is based on experimental tests, characterized by non-homogeneous stress and strain states, making the direct identification very difficult to perform. In this paper, an inverse identification method is proposed to avoid the problems raised by the interpretation of the experimental tests and to determine more accurately material parameters. The algorithm developed consists of an optimization method and a finite element method. This algorithm is first tested by the determination of material parameters in the case of the nonlinear elastic behaviour of polymers, then applied to the inverse identification of viscoplastic parameters of an aluminium alloy.*

*MOTS-CLÉS : comportements non-linéaires, paramètres matériels, identification inverse, optimisation, éléments finis.*

*KEY WORDS : nonlinear behaviour, material parameters, inverse identification, optimization, finite elements.*

---

## 1. Introduction

La détermination des paramètres matériels caractéristiques intervenant dans les équations de comportement des matériaux se fait généralement à l'aide d'essais expérimentaux de traction, compression plane ou axisymétrique, torsion,.... Dans le domaine non linéaire, et plus particulièrement dans le domaine des grandes déformations (hyperélastiques, élasto-plastiques ou élasto-viscoplastiques), le passage des grandeurs globales, issues de mesures effectuées par l'appareillage expérimental comme les forces ou couples appliqués, déplacements ou rotations d'ensemble, vers les grandeurs locales telles que contraintes, déformations, ou vitesses de déformation nécessite des modèles. Ces modèles sont le plus souvent très approchés et utilisent des hypothèses fortes, telles que l'hypothèse d'homogénéité des champs. Le calcul par la méthode des éléments finis de la réponse de l'éprouvette, considérée comme structure, à une sollicitation donnée, permet de s'affranchir de la plupart des hypothèses utilisées dans les modèles simplifiés, et donc d'accroître *a priori* la précision de l'identification paramétrique, considérée comme problème inverse. En effet, la théorie des problèmes inverses fournit des méthodes mathématiques et algorithmes d'optimisation [TAR 87], [BUI 93], permettant de faire coïncider, selon une certaine norme, la réponse mesurée et la réponse calculée par le modèle considéré pour une sollicitation ou un ensemble de sollicitations. Cette méthodologie reposant sur l'inversion numérique par la méthode des éléments finis a déjà été utilisée dans les problèmes d'élasticité linéaire [SCH 92], ou de thermique linéaire [BEC 85] par exemple. Des problèmes d'identification dans le domaine non linéaire ont également été abordés [MAH 93], [VID 91], mais les problèmes étudiés sont pour la plupart limités au cas des petites déformations.

Dans cet article, nous proposons une méthode d'identification paramétrique inverse applicable aux problèmes non linéaires dans le domaine des grandes déformations. Cette méthode combine une procédure d'optimisation pour réduire l'écart entre réponses globales mesurées et calculées, et une méthode d'éléments finis pour obtenir la réponse de l'éprouvette à une sollicitation similaire imposée expérimentalement. L'algorithme d'optimisation repose sur une approche de type Levenberg-Marquardt [LEV 44], [MAR 63] modifiée afin de permettre la prise en compte de contraintes physiques sur les paramètres. La méthode des éléments finis permettant l'inversion numérique est basée sur l'utilisation et l'exploitation de la décomposition multiplicative du gradient de déformation [SIM 92] et de la décomposition modale de la réponse élastique [GHO 94].

Deux applications de cet algorithme sont présentées. La première application, de validation de la procédure d'optimisation, concerne l'identification des paramètres matériels du comportement hyperélastique non linéaire de polymères, à partir d'essais de traction. La seconde application concerne l'identification paramétrique du comportement élasto-viscoplastique d'alliages d'aluminium, déformés dans un large domaine de déformation, de vitesse de déformation et de température, à l'aide de l'essai de bipoinçonnement. On montre que l'algorithme proposé permet également l'identification du coefficient de frottement entre éprouvettes et outillage de compression.

## 2. Formulation du problème et procédure d'optimisation

### 2.1. Formulation du problème

On considère un solide  $\mathcal{S}$  (éprouvette) occupant un domaine  $\Omega_0$  de frontière  $\Gamma_0$  dans la configuration initiale et un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  dans la configuration courante. Soit  $\mathbb{T}=[0, T]$  l'intervalle de temps (ou d'observation) considéré.

Les équations d'équilibre locales (en l'absence de force de volume et d'inertie) s'expriment classiquement sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{T} = 0 & \text{dans } \Omega & \text{(a)} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}_s & \text{sur } \Gamma_\sigma & \text{(b)} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } \Gamma_u & \text{(c)} \end{cases} \quad [1]$$

où  $\mathbf{T}$  représente le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au domaine considéré,  $\bar{\mathbf{f}}_s$  la densité surfacique de forces imposées sur la partie  $\Gamma_\sigma$  de  $\Gamma$ , et  $\bar{\mathbf{u}}$  le champ de déplacement imposé sur la partie  $\Gamma_u$  de  $\Gamma$ , ( $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$ ).

On suppose que le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  à un instant  $t \in \mathbb{T}$  soit une fonction des déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  par l'intermédiaire des paramètres matériels  $\mathbf{p}$  et des équations de comportement reliant  $\mathbf{T}$  aux dérivées spatiales et temporelles du déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

Soit  $\mathbb{P}$  l'espace des paramètres de dimension  $n$ , et soit  $\mathbf{U} \times \mathbb{T}$  l'espace des solutions en déplacement du problème d'équilibre [1]. On suppose aussi que pour un jeu de paramètres matériels  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}$ , la résolution du problème direct :

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{u}_t(\mathbf{p}) \quad [2]$$

soit possible, moyennant des conditions de régularité suffisante pour le problème [1]. On introduit l'application surjective  $S$  :

$$S: \begin{cases} \mathbb{P} \rightarrow \mathbf{U} \times \mathbb{T} \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{u}_t(\mathbf{p}) \end{cases} \quad [3]$$

et soit  $\tilde{\mathbf{u}}_t$  un élément de  $\mathbf{M} \times \mathbb{T}$ , espace des valeurs mesurées. Il n'est en général pas possible de résoudre le problème inverse, ou encore trouver l'application inverse de  $S$  telle que :

$$\rho: \begin{cases} \mathbf{M} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P} \\ \tilde{\mathbf{u}}_t \rightarrow \mathbf{p} \end{cases} \quad [4]$$

Ceci provient du fait que généralement  $\mathbf{U} \times \mathbb{T} \neq \mathbf{M} \times \mathbb{T}$ , et que l'application inverse

n'est pas unique. Les problèmes de ce type sont qualifiés de mal-posés.

Pour remédier à ce fait, l'inversion théorique est remplacée par une approche optimale, se traduisant par le fait que le vecteur solution  $u_t(p)$  doit être le plus proche possible, au sens d'une certaine norme, des grandeurs mesurées  $\bar{u}_t$ .

Une fonctionnelle permettant l'optimisation est ainsi introduite et la solution recherchée  $p \in P$  correspond au minimum de cette fonctionnelle :

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{p \in P} [S(p)] \\ \text{avec} \quad & S(p) = \|u_t(p) - \bar{u}_t\|_{M \times T} \end{aligned} \tag{5}$$

Dans cette expression, la norme sur  $M \times T$  doit être précisée, le choix d'une norme  $L_2$  correspond à l'expression suivante de  $S(p)$  :

$$S(p) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_M} \sum_{j \in I_T} [u_{i,j}(p) - \bar{u}_{i,j}]^2 \tag{6}$$

où  $I_M$  et  $I_T$  sont des ensembles d'indices respectivement sur  $M$  et sur  $T$ .

Bien que dans la formulation ci-dessus, nous ayons considéré que la réponse était du type déplacement  $u_t(p)$ , il est clair que la démarche est applicable pour tout autre type de réponse, tel que par exemple les réactions sur une partie de la frontière, ou bien encore les températures ou flux thermiques. Dans la suite, on utilise le terme générique  $R_t^c(u(p))$  pour désigner la réponse calculée et  $R_t^m$  pour désigner la réponse mesurée.

Comme données du problème, on considère des mesures expérimentales, soit ponctuelles en un nombre  $N_m$  de points du domaine, soit résultantes sur des portions de surfaces du domaine (efforts, ...) correspondant à un nombre  $N_m$  d'essais distincts. Le temps  $t$ , ou le chargement, est discrétisé par  $N_t$  valeurs distinctes.

L'expression de la fonction erreur au sens de la norme  $L_2$  prend la forme :

$$S(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_t} [r_{i,j}(u_t(p))]^2 = \frac{1}{2} r(u_t(p))^T r(u_t(p)) \tag{7}$$

Le vecteur résidu  $r$  représente l'écart entre la réponse mesurée  $R_t^m$  et la réponse calculée  $R_t^c(u(p))$  par le modèle, et prend la forme suivante :

$$r(u_t(p)) = R_t^c(u(p)) - R_t^m \tag{8}$$

La stratégie mise au point ici consiste à tirer profit de l'aspect incrémental de

la méthode des éléments finis dans le cas non linéaire de manière à disposer du nombre nécessaire  $N_t$  de valeurs pour pouvoir identifier les paramètres matériels inconnus. Ainsi, pour chaque valeur  $t_j, j=1, \dots, N_t$ , du temps, on peut calculer une réponse  $\mathbf{R}_t^c(\mathbf{p})$ , le vecteur paramètre  $\mathbf{p}$  étant fixé, à laquelle on fait correspondre une réponse expérimentale  $\mathbf{R}_t^m$ , déterminée à partir de la courbe de charge mesurée au cours de l'essai.

Pour que les paramètres gardent une signification physique, il convient de limiter le domaine d'investigation en tenant compte des bornes imposées par la physique du problème. Ceci est accompli en introduisant des contraintes dans la minimisation de l'équation [7]. Ces contraintes sont écrites sous la forme :

$$C_j(\mathbf{p}) \geq 0 \quad j = 1, q \quad [9]$$

où  $C_j$  sont les fonctions contraintes et  $q$  est le nombre de contraintes. Dans le cas de l'identification de paramètres matériels indépendants, les fonctions  $C_j$  sont des fonctions linéaires en  $\mathbf{p}$ , servant à limiter le domaine de variation de  $\mathbf{p}$ . Le calcul des dérivées de ces fonctions est donc possible.

La fonction erreur est modifiée de façon à tenir compte des contraintes sur les paramètres, en définissant la fonction erreur modifiée  $S^*$  par :

$$S^*(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}) + \sum_{j=1}^q \frac{\omega_j}{C_j(\mathbf{p})} \quad [10]$$

où  $\omega_j$  représentent des poids non-négatifs.

## 2.2. Minimisation de la fonction erreur

Une méthode de Levenberg-Marquardt est utilisée pour minimiser la fonction erreur définie par l'équation [10] [SCH 92].

Partant d'une estimation initiale des paramètres  $\mathbf{p}^{(0)}$  satisfaisant les contraintes et de valeurs initiales  $\omega_j^{(0)}$  pour les poids, une séquence de corrections apportées aux paramètres est déterminée jusqu'à ce que la convergence soit atteinte selon un critère donné. Le pas de variation des paramètres  $d\mathbf{p}$ , à l'itération  $k$  est calculé à partir du système d'équations suivant :

$$\left[ (\mathbf{J}^{(k)})^T \mathbf{J}^{(k)} + \lambda^{(k)} \mathbf{I} + \mathbf{H}^{(k)} \right] d\mathbf{p}^{(k)} = - (\mathbf{J}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{f}^{(k)} \quad [11]$$

où  $\lambda$  (scalaire non-négatif) est le paramètre de Levenberg-Marquardt,  $\mathbf{r}$  est le vecteur

résidu défini par l'équation [8], **J** est la matrice Jacobienne de **S**, **f** et **H** contiennent les dérivées premières et secondes, respectivement, des fonctions de pénalité pondérées par rapport aux paramètres.

Il est à noter ici l'importance des valeurs initiales pour la convergence de la méthode de Levenberg-Marquardt. En effet plus la valeur initiale pour le jeu de paramètres est éloignée de la solution plus le nombre d'itérations est élevé. Pour choisir la valeur initiale, on peut utiliser les résultats de l'identification directe qui fournit un jeu de paramètres proche de la solution "recherchée". En outre, si la méthode de Levenberg-Marquardt permet d'éviter les maxima en comparant les valeurs successives de la fonction erreur, elle ne permet pas d'éviter les minima locaux qui peuvent entraver la convergence de l'optimisation.

Les éléments de **J** sont donnés par :

$$J_{i,j}^\alpha = \frac{\partial r_{i,j}}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial R_{i,j}^c}{\partial p_\alpha} \quad ; \quad i = 1, Nm \quad ; \quad \alpha = 1, n \quad [12]$$

$$j = 1, Nt$$

Comme les paramètres sont atteints d'une manière implicite dans la formulation éléments finis, une approximation par différences finies de la matrice jacobienne, **J**, dans l'équation [11] est utilisée. La matrice jacobienne est recalculée à chaque itération en perturbant les paramètres un par un et en résolvant un problème éléments finis direct pour chaque perturbation.

Pour faciliter le choix de  $\lambda$  et améliorer le conditionnement du système, l'équation [11] est souvent normée avant résolution. On définit **A** et **b** par :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mathbf{H} & \text{(a)} \\ \mathbf{b} = -\mathbf{J}^T \mathbf{r} + \mathbf{f} & \text{(b)} \end{cases} \quad [13]$$

La matrice normée  $\bar{\mathbf{A}}$  et le vecteur normé  $\tilde{\mathbf{b}}$  sont alors définis par :

$$\begin{cases} \bar{A}_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta}}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}A_{\beta\beta}}} & \alpha, \beta = 1, n \\ \tilde{b}_\alpha = \frac{b_\alpha}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}}} & \alpha = 1, n \end{cases} \quad [14]$$

La forme normée de l'équation à résoudre en  $d\tilde{\mathbf{p}}$ , s'écrit alors de la façon suivante :

$$(\bar{\mathbf{A}} + \lambda \mathbf{I}) d\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{b}} \quad [15]$$

et  $d\mathbf{p}$  est calculé à partir de  $d\tilde{\mathbf{p}}$  en utilisant la relation suivante :

$$dp_\alpha = \frac{d\tilde{p}_\alpha}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}}} \quad \alpha = 1, n \quad [16]$$

- (1). Initialisation des paramètres  $\mathbf{p}^{(0)}$  et du paramètre de Levenberg-Marquardt  $\lambda^{(0)}=0,001$ .
- (2). Résolution du problème éléments finis direct en  $\mathbf{p}^{(0)}$  pour calculer les déplacements  $\mathbf{u}^{(0)}$ , et évaluation de la fonction erreur  $S^{(0)}$ .
- (3). Initialisation des poids des fonctions de pénalité  $\omega_j^{(0)}=0,0001C_j^{(0)}S^{(0)}$ ;  $j=1,q$ .  
 Evaluation des fonctions de pénalité,  $\xi_j^{(0)}$ ;  $j=1,q$  et de la fonction  $S^{*(0)}$ .
- (4). Pour une itération  $k=0,1,2,\dots,K$
- (4a) Calcul de la matrice Jacobienne,  $\mathbf{J}^{(k)}$ , à l'aide d'une méthode de différences finies en résolvant  $n$  problèmes directs.
- (4b) Calcul des dérivées des fonctions de pénalité pour former  $\mathbf{H}^{(k)}$  et  $\mathbf{f}^{(k)}$ .
- (4c) Résolution de l'équation [15] pour déterminer le pas de correction  $d\mathbf{p}^{(k)}$ , et mise à jour des paramètres par :  $\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + d\mathbf{p}^{(k)}$ .
- (4d) Résolution du problème éléments finis direct en  $\mathbf{p}^{(k+1)}$ . Evaluation de  $\xi_j^{(k+1)}$ ;  $j=1,q$  et de  $S^{*(k+1)}$ .
- (4e) Vérifier si  $S^{*(k+1)} < S^{*(k)}$
- (1) Si Faux, augmenter  $\lambda$  et Retour en 4c  
 $\lambda^{(k+1)} = v.\lambda^{(k)}$ ,  $\omega_j^{(k+1)} = v.\omega_j^{(k)}$ , itst = 0 (\*)
- (2) Si Vrai, itst = itst+1, continuer
- (4f) Diminuer  $\lambda$  et  $\omega_j$  :  $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} / v$ ,  $\omega_j^{(k+1)} = \omega_j^{(k)} / v$
- (4g) Vérifier si itst = 5
- (1) Si Faux,  $k = k+1$  et Retour en (4a)
- (2) Si Vrai, Stop.

Tableau 1 : *Algorithme de résolution*

(\*) Le choix de  $v$  est arbitraire mais la valeur  $v = 10$  s'est avérée être un bon choix en pratique [MAR 63].

Il est à noter que  $\tilde{A}_{\alpha\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in [1, n]$ , permet le contrôle de  $\lambda$  d'une manière indépendante du problème et cohérente d'itération en itération.

L'algorithme de résolution est précisé dans le tableau 1.

**2.3. Validation numérique de la procédure d'optimisation**

Afin de valider la procédure numérique d'optimisation, une application est réalisée consistant en la détermination des paramètres matériels du comportement élastique non linéaire de polymères.

La loi de comportement triaxiale retenue est de la forme :

$$T = K (tre) 1 + \frac{2}{3} C \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \|deve\| \right]^{n-1} deve \tag{17}$$

où **T** et **e** représentent respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations infinitésimales ( $e = \nabla^s u$ ). Le vecteur des paramètres à identifier est  $p = [p_1, p_2, p_3]^T = [K, C, n]^T$ .

On choisit, pour réaliser l'identification, l'essai de traction uniaxiale. Dans ce cas la loi [17] se met sous la forme :

$$e = \left( \frac{T}{C} \right)^n + \frac{T}{9K} \tag{18}$$

où  $e$  et  $T$  sont les composantes respectives de **e** et **T** dans la direction de traction.

La fonction erreur s'exprime sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Nt} \left[ e_i^c - \left( \left( \frac{T_i^m}{C} \right)^n + \frac{T_i^m}{9K} \right) \right]^2 \tag{19}$$

où  $Nt$  est le nombre de mesures, correspondant à un ou plusieurs essais pour diverses valeurs de la déformation  $e_i$ . On applique à cette fonction erreur l'algorithme de Levenberg-Marquardt modifié avec les contraintes suivantes :  $K > 0, C > 0, n > 0$ . L'identification inverse a été effectuée dans le cas de deux polymères, un polyamide et un polypropylène. Les caractéristiques géométriques ainsi que les résultats de l'optimisation sont reportés tableau 2.

	Valeur initiale	Polypropylène $S_0=18,85 \text{ mm}^2$ $L_0=50 \text{ mm}$	Valeur initiale	Polyamide $S_0=19,63 \text{ mm}^2$ $L_0=50 \text{ mm}$
<b>K (MPa)</b>	20,0	35,78	10,0	90,76
<b>C (MPa)</b>	30,0	29,71	100,0	107,26
<b>n</b>	10,0	7,19	10,0	7,71

**Tableau 2 : Paramètres identifiés pour les différents essais**

Les figures 1 et 2 représentent les résultats obtenus en fin du processus d'identification pour chaque matériau.

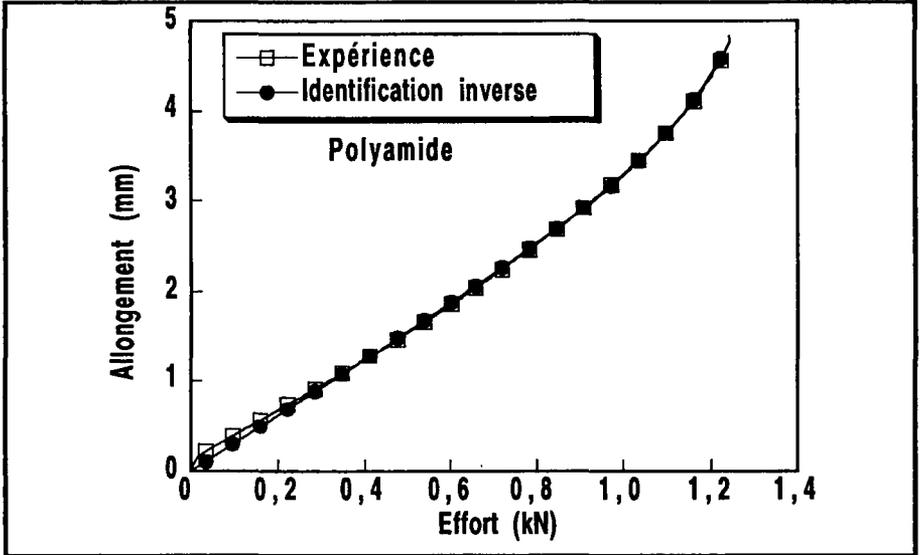


Figure 1. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse pour le matériau à base de polyamide.

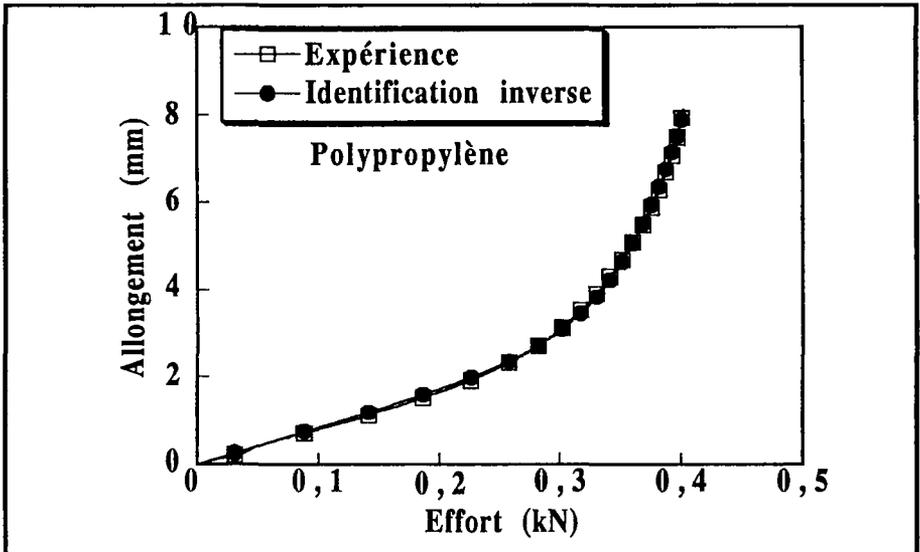


Figure 2. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse pour le matériau à base de polypropylène.

La figure 3 représente l'évolution de la fonction erreur ainsi que des paramètres matériels en fonction du nombre d'itérations, dans le cas du Polyamide, et ce pour deux estimations initiales différentes des paramètres. Le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence de la méthode d'optimisation est dans ce cas de 9.

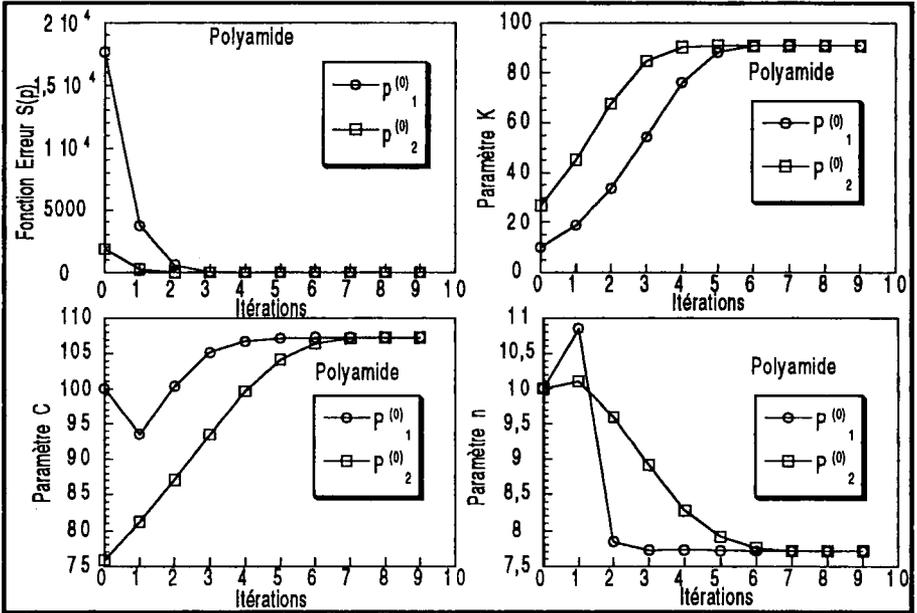


Figure 3. Evolution de la fonction erreur et des paramètres matériels au cours de l'identification.

Cette application a permis de mettre au point et de valider l'algorithme d'optimisation mis en place. L'application à un modèle de comportement plus complexe et à un essai avec champ de déformation hétérogène devient alors envisageable, après avoir précisé la technique d'inversion par la méthode des éléments finis.

### 3. Calcul de la réponse de la structure par la méthode des éléments finis

La résolution du problème d'équilibre [1] par la méthode des éléments finis utilise la formulation faible associée qui s'écrit sous la forme :

$$G(\mathbf{u}_t(\mathbf{p}), \eta) = \int_{\Omega_t} \mathbf{T}(\mathbf{u}_t(\mathbf{p})) : \nabla_{\mathbf{x}_t}^s \eta \, dV - \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{\mathbf{f}}_s \cdot \boldsymbol{\eta}) \, dS = 0 \quad [20]$$

où  $\eta$  est un champ de déplacement homogène associé ( $\eta=0$  sur  $\Gamma_u$ ) et  $\nabla_{\mathbf{x}_t}^s \eta$  désigne le gradient symétrique de  $\eta$  par rapport à la configuration courante.

L'équation  $G(\mathbf{u}_t(\mathbf{p}), \eta) = 0$  est non-linéaire en  $\mathbf{u}_t(\mathbf{p})$ . La résolution de cette équation est effectuée par une méthode itérative de type Newton exprimée sous la forme :

$$D_u G(\mathbf{u}_t(\mathbf{p}), \eta) \delta \mathbf{u}_t(\mathbf{p}) + G(\mathbf{u}_t(\mathbf{p}), \eta) = 0 \quad [21]$$

où  $\delta \mathbf{u}$  représente l'accroissement de la variable  $\mathbf{u}$ .

En tenant compte de la forme de  $G(\mathbf{u}_t(\mathbf{p}))$ , l'équation [21] se transforme en :

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{C}(\nabla_{x_t}^s \mathbf{u}_t(\mathbf{p})) : \nabla_{x_t} \delta \mathbf{u}_t(\mathbf{p}) : \nabla_{x_t}^s \eta dV + G(\mathbf{u}_t(\mathbf{p}), \eta) = 0 \quad [22]$$

La quantité  $\mathbf{C}(\nabla_{x_t}^s \mathbf{u}_t(\mathbf{p}))$  représente l'opérateur tangent cohérent évalué en tenant compte de l'algorithme de calcul des contraintes et variables d'état. Cet opérateur tangent est non singulier en l'absence d'instabilités géométriques et matérielles, ce qui assure la convergence de la méthode de Newton. Dans le cas où l'opérateur tangent deviendrait singulier, il convient de compléter la méthode de Newton par une technique de continuation pour assurer la convergence.

Dans la méthode des éléments finis avec formulation en déplacement, la forme discrétisée de [1] est utilisée pour le calcul d'un accroissement incrémental de déplacement  $\delta \mathbf{u}$  entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  que l'on notera  $\delta \mathbf{u}_{n+1}$  [BAT 82], [ZIE 89]. L'équation [22] est donc écrite, après discrétisation, et sous forme implicite itérative :

$$[\mathbf{K}_T]_{n+1}^{(i)} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = [\mathbf{F}_{ext}]_{n+1} - [\mathbf{F}_\sigma(\nabla_{(n+1)} \mathbf{u}_t(\mathbf{p}))]_{n+1}^{(i)} \quad [23]$$

Le vecteur  $[\mathbf{F}_\sigma(\nabla_{(n+1)} \mathbf{u}_t(\mathbf{p}))]_{n+1}$  représente le vecteur des forces nodales

internes, tandis que la matrice  $[\mathbf{K}_T]_{n+1}$  représente la matrice de raideur tangente.

Ces deux grandeurs sont données par les expressions :

$$\begin{cases} [\mathbf{F}_\sigma(\nabla_{(n+1)} \mathbf{u}_t(\mathbf{p}))]_{n+1}^{(i)} = \mathbf{A}_e \int_{\Omega_{n+1}^{e(i)}} (\beta_{n+1}^{e(i)})^T \mathbf{T}_{n+1}(\mathbf{u}_t(\mathbf{p})) dV^e \\ [\mathbf{K}_T]_{n+1}^{(i)} = \mathbf{A}_e \left[ \int_{\Omega_{n+1}^{e(i)}} (\beta_{n+1}^{e(i)})^T \mathbf{C}_{n+1}^{(i)}(\nabla_{(n+1)}^s \mathbf{u}_t(\mathbf{p})) \beta_{n+1}^{e(i)} dV^e \right] \end{cases} \quad [24]$$

où  $\beta^e$  est la matrice élémentaire d'interpolation des déformations et  $\Omega^e$  le volume de l'élément fini considéré,  $\mathbf{A}_e$  représente l'opérateur d'assemblage sur les éléments.

## 4. Application à l'identification du comportement élasto-viscoplastique d'un alliage d'aluminium

### 4.1. Description de la procédure de calcul direct

Les opérations de laminage des alliages d'aluminium à chaud ou à tiède mettent en jeu de grandes déformations, accompagnées de températures élevées et de hautes vitesses de déformation. Dans ce cadre, les variations de vitesse de déformation modifient notablement l'état de contrainte dans le matériau et le caractère dominant est le comportement élasto-viscoplastique. On doit donc disposer d'une formulation élasto-viscoplastique en grandes déformations, capable de représenter le comportement du matériau de l'ambiante aux hautes températures. Le modèle doit être suffisamment précis pour rendre compte des phénomènes physiques accompagnant la déformation à chaud tels que la restauration dynamique ou la recristallisation dynamique. Un tel modèle a été proposé et décrit dans [GEL 93a, GEL 93b, GEL 94a, GEL 94b]. On ne s'intéresse ici qu'à l'algorithme de calcul du gradient de déformation, des contraintes et des variables internes. Cet algorithme est basé sur la décomposition multiplicative du gradient de déformation et sur un schéma d'intégration temporel de type prédiction-correction.

Pour une configuration à l'instant  $t_{n+1}$ , le gradient de déformation total peut s'exprimer en fonction du gradient de déformation à l'instant  $t_n$  et du gradient incrémental selon la relation multiplicative :

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_u \mathbf{F}_n = (1 + \nabla_n \mathbf{u}_{n+1}) \mathbf{F}_n \quad [25]$$

Il convient ensuite de déterminer la partie élastique et viscoplastique du gradient de déformation en utilisant la décomposition multiplicative  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  [GEL 86].

#### 4.1.1. Phase de prévision élastique

On considère qu'à l'instant  $t_{n+1}$ , pour la phase de prévision élastique, le gradient de déformation plastique est fixé et égal à la valeur à l'instant  $t_n$ . Ceci implique la relation suivante [GHO 94] :

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e(0)} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1} \quad [26]$$

Considérant les relations [25] et [26] ci-dessus, on obtient la prévision élastique pour le tenseur de Cauchy-Green gauche  $\mathbf{B}^e$  :

$$\mathbf{B}_{n+1}^{e(0)} = \mathbf{F}_u \mathbf{B}_n^e \mathbf{F}_u^T \quad [27]$$

Le choix d'une mesure logarithmique pour les déformations élastiques implique :

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e(0)} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}_{n+1}^{e(0)} \quad [28]$$

Finalement, le tenseur des contraintes de Cauchy est évalué par la relation contrainte-déformation sous la forme [GHO 94] :

$$\mathbf{T}_{n+1}^{e(0)} = \mathbf{C}^e : \mathbf{e}_{n+1}^{e(0)} \quad [29]$$

où  $\mathbf{C}^e = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G\left(\mathbf{I}_4 - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\right)$ , est le tenseur d'élasticité isotrope.

#### 4.1.1.1. Phase de correction plastique

Sous l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement plastique, le tenseur des taux de déformation plastique s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{D}_{n+1}^P = \left( \frac{3\dot{\mathbf{E}}^P}{2\sigma_f} \right)_{n+1} \text{dev} \mathbf{T}_{n+1} \quad [30]$$

où  $\text{dev} \mathbf{T}$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy, définie par :

$\text{dev} \mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{\text{tr} \mathbf{T}}{3} \mathbf{1}$  ( $\mathbf{1}$  est le tenseur identité du second ordre) et

$\dot{\mathbf{E}}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} (\text{dev} \mathbf{D}^P : \text{dev} \mathbf{D}^P)^{1/2}$  est la vitesse de déformation viscoplastique. Dans l'équation [30]  $\sigma_f$  représente la contrainte d'écoulement du matériau dépendant de la déformation plastique équivalente et des variables internes.

Dans cette équation, le tenseur des taux de déformation est colinéaire à la direction du tenseur des contraintes de Cauchy, comme dans la théorie de plasticité  $J_2$ . La différence majeure est qu'ici l'écoulement viscoplastique a toujours lieu même pour de faibles valeurs de la contrainte [KOC 75].

On montre que le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}_{n+1}$  peut être calculé à partir de la résolution de l'équation scalaire [GEL 94a] :

$$(\sigma_f)_{n+1} + 3G\dot{\mathbf{E}}_{n+1}^P \Delta t = \sqrt{\frac{3}{2}} |\text{dev} \mathbf{T}_{n+1}^{e(0)}| \quad [31]$$

où la contrainte d'écoulement  $\sigma_f$  s'exprime en fonction de la déformation viscoplastique équivalente, la vitesse de déformation viscoplastique équivalente et la température sous la forme [GEL 93a], [GEL 93b], [GEL 94a], [GEL 94b] :

$$\sigma_f(\mathbf{p}) = \sigma_0 + (\sigma_{ss} - \sigma_0) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{K^2 \epsilon}{(\sigma_{ss} - \sigma_0)^2}\right) \right]^{1/2} \quad [32]$$

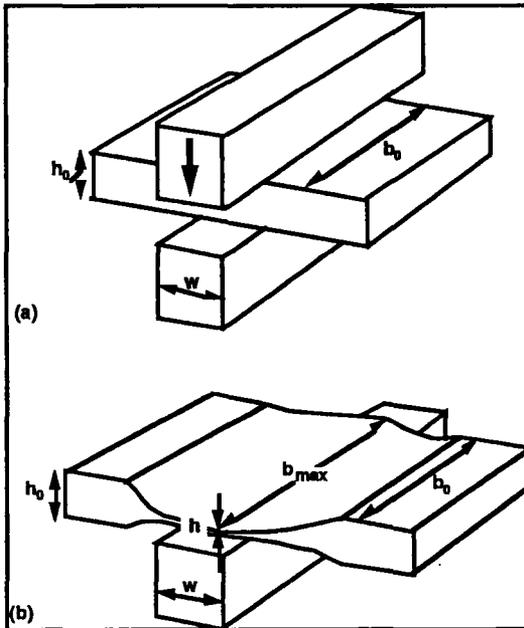
où  $\sigma_0 = \frac{\sigma_Y}{1 + \left[\frac{\exp(Z^*)}{Z}\right]^m}$ ,  $\sigma_{ss} = \beta \text{Argsh}\left[\frac{Z}{\exp(A)}\right]^{1/n}$  et  $Z = \dot{\epsilon}^{vp} \exp\left[\frac{Q}{R\theta}\right]$ .

On considère que les propriétés élastiques sont identifiées et on ne s'intéresse qu'à l'identification de la partie viscoplastique du comportement. Les six paramètres à identifier sont donc :  $\mathbf{p}=[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6]=[Z^*, m, \beta, A, n, K]$ .

**4.2. Identification inverse du coefficient de frottement et des paramètres matériels à l'aide de l'essai de bipoinçonnement**

L'essai utilisé pour l'identification des paramètres matériels est l'essai de bipoinçonnement dont la géométrie est représentée figure 4.

Au cours de chaque essai, on enregistre l'évolution de l'effort de compression ainsi que de l'élargissement latéral  $\Delta b_{max}$  en fonction de la réduction d'épaisseur  $\Delta h=h-h_0$ .



**Figure 4. Géométrie de l'essai de bipoinçonnement (a) avant (b) après la déformation.**

#### 4.2.1. Identification inverse du coefficient de frottement pour un essai de bipoinçonnement

Une bonne identification paramétrique à l'aide de l'essai de bipoinçonnement doit tenir compte du frottement accompagnant cet essai. Pour évaluer le coefficient de frottement pour un lubrifiant donné, on utilise l'algorithme d'identification inverse développé précédemment. Dans cette évaluation, on exploite le fait que l'élargissement latéral ne dépend que du frottement. En effet, des observations expérimentales ont montré que l'élargissement ne dépendait ni de la composition de l'alliage ni des conditions thermomécaniques d'essai. Ces observations ont été, par ailleurs, confirmées grâce à des simulations numériques tridimensionnelles [GHO 94]. La sollicitation consiste, dans ce cas, en une réduction d'épaisseur  $\Delta h$  alors que la réponse est l'élargissement latéral maximal  $\Delta b_{\max}$  (figure 4).

La géométrie de l'échantillon est choisie de telle sorte que l'élargissement soit plus élevé pour les faibles valeurs du frottement, c'est-à-dire  $b > w$  (figure 4).

##### 4.2.1.1. Calcul de la réponse par éléments finis

La modélisation de l'élargissement latéral nécessite une discrétisation 3D du problème. L'élément utilisé pour la discrétisation est un élément hexaédrique à huit nœuds et à trois degrés de liberté par nœud, avec une procédure mixte à trois champs pour la prise en compte de l'incompressibilité (méthode  $\bar{B}$ ). Le déplacement est imposé de façon incrémentale. Pour chaque incrément correspondant à une réduction d'épaisseur on calcule l'élargissement correspondant, en résolvant le problème d'équilibre discrétisé. La figure 5 représente le maillage initial utilisé pour l'identification inverse, tandis que la figure 6 représente un exemple de maillage déformé.

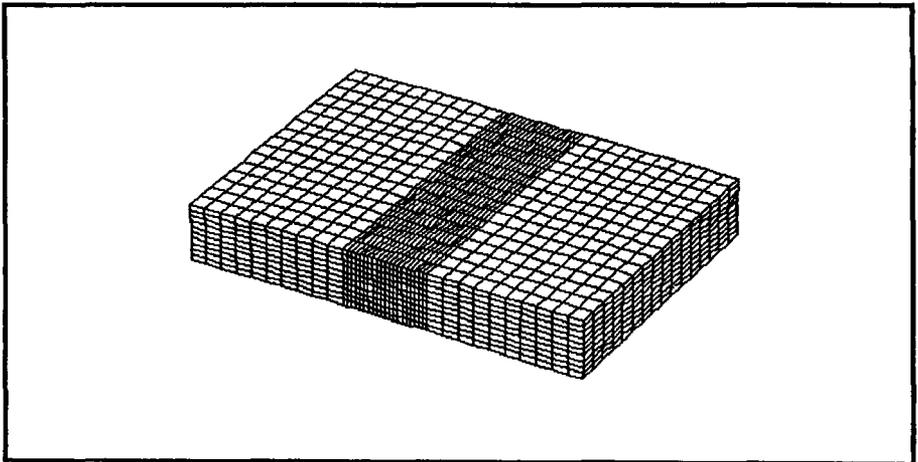


Figure 5. Maillage initial utilisé pour l'identification inverse.

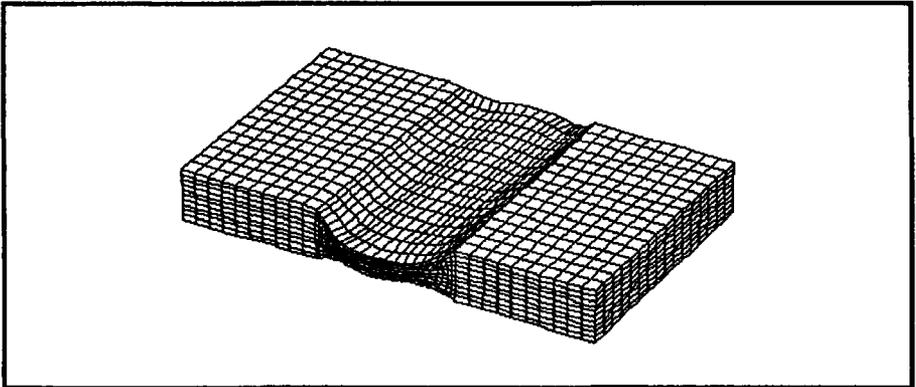


Figure 6. Maillage déformé obtenu par le type de calcul réalisé.

4.2.1.2. Optimisation par la méthode des moindres carrés

Pour chaque incrément  $\Delta h_i$  de réduction d'épaisseur, on peut calculer une réponse en élargissement  $\Delta b_i^c$ , à laquelle on fait correspondre une réponse expérimentale  $\Delta b_i^e$ , déterminée à partir de la courbe d'élargissement mesurée au cours de l'essai.

Etant donné que les conditions thermomécaniques d'essai ont un faible effet sur l'élargissement latéral, un seul essai expérimental est utilisé pour l'identification ( $Nm=1$ ). La fonction erreur s'écrit donc dans ce cas sous la forme suivante :

$$S(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Nt} (\Delta b_i^c - \Delta b_i^e)^2 \quad [33]$$

Dans le procédé d'optimisation, les contraintes  $0 < \mu < 1$  sont introduites afin que le coefficient de frottement garde des valeurs réalistes comprises entre 0 et 1.

Les figures 7 à 9 représentent les résultats obtenus à la fin du processus d'identification pour un alliage d'aluminium et pour différents lubrifiants.

Le tableau 3 représente les valeurs du coefficient de frottement identifié pour différents lubrifiants.

	Huile minérale	Graphite	Téflon
$\mu$	0,255	0,11	0,075

Tableau 3 : Valeurs des coefficients de frottement identifiés pour les lubrifiants considérés.

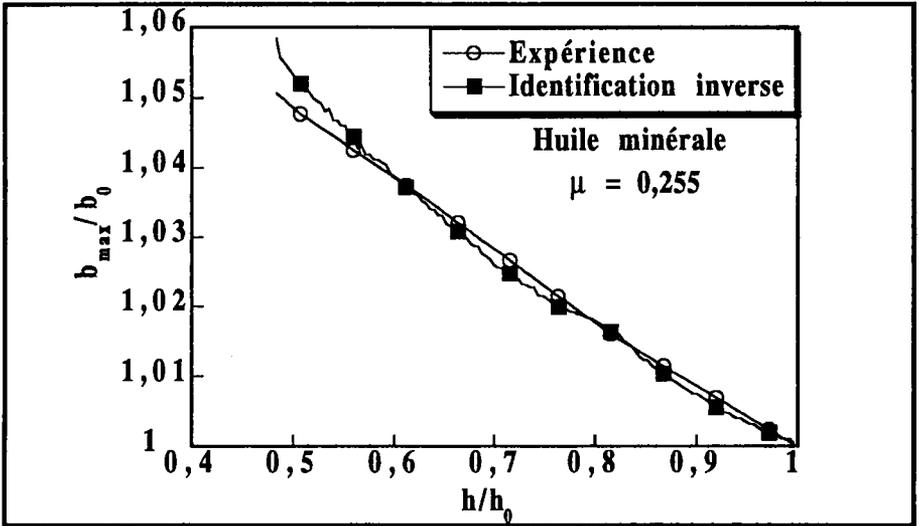


Figure 7. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse avec comme lubrifiant l'huile minérale.

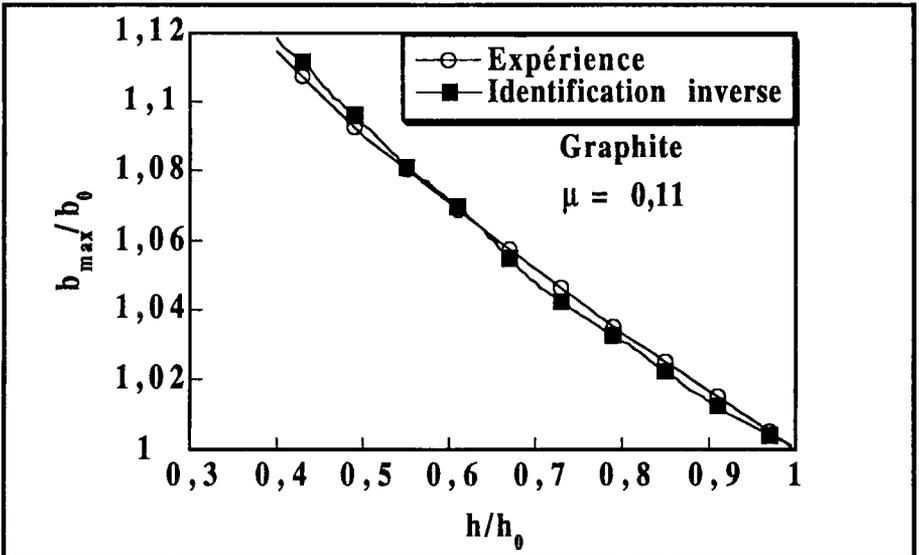


Figure 8. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse avec comme lubrifiant le graphite

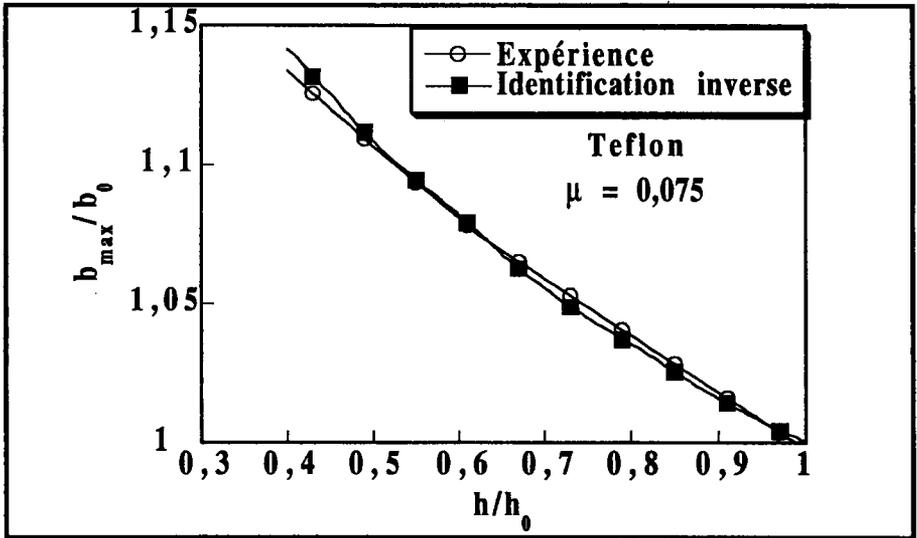


Figure 9. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse avec comme lubrifiant le téflon.

#### 4.2.2. Identification inverse des paramètres matériels

Dans la partie précédente, nous avons déterminé de manière inverse le coefficient de frottement associé à un lubrifiant donné. La valeur trouvée va être utilisée au cours de l'identification inverse des paramètres matériels de la loi d'écoulement. Ainsi, comme les essais expérimentaux ont été réalisés en utilisant le lubrifiant téflon, une valeur de  $\mu=0.075$  pour le coefficient de frottement a été adoptée au cours des calculs éléments finis portant sur l'essai de bipoinçonnement.

##### 4.2.2.1. Calcul de la réponse par éléments finis

De la même façon que pour l'identification du coefficient de frottement, le déplacement est imposé de façon incrémentale. Pour chaque incrément de déplacement du poinçon, on calcule l'effort normal sur le poinçon en calculant la somme des réactions nodales normales pour les nœuds en contact avec le poinçon.

##### 4.2.2.2. Optimisation par la méthode des moindres carrés

Pour chaque incrément  $u_i$  de déplacement, on peut calculer une réponse en effort correspondant à l'effort imposé sur le poinçon  $R_i^c$ , à laquelle on fait correspondre une réponse expérimentale  $R_i^e$ , déterminée à partir de la courbe de charge mesurée au cours de l'essai. Le comportement étudié ici étant fortement dépendant de la vitesse de déformation ainsi que de la température, les résultats de plusieurs essais réalisés pour différentes températures (300°C, 400°C et 500°C) et à

diverses vitesses de déformation ( $0,1s^{-1}$ ;  $5s^{-1}$  et  $40s^{-1}$ ) ont été exploités au cours de l'identification, et dans ce cas  $Nm=9$ .

La fonction coût s'écrit, donc :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_t} (R_{i,j}^c - R_{i,j}^e)^2 \quad [34]$$

A cette fonction coût, on applique l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt, dans lequel on introduit les contraintes reportées tableau 4, qui représente aussi les valeurs des paramètres identifiés correspondantes, ainsi que les valeurs initiales choisies.

Paramètre	Contraintes	Valeur initiale	Valeur identifiée
$Z^*$	$0 < Z^* < 50$	20,0	34,086
m	$0 < m < 1$	0,1	0,21
$\beta$	$0 < \beta < 100$	40,0	45,7435 MPa
A	$0 < A < 50$	20,0	27,962
n	$0 < n < 1$	0,1	0,191
K	$0 < K < 500$	200,0	243,5503 MPa

Tableau 4 : Valeurs des paramètres identifiés.

Les figures 10a à 10c représentent les résultats obtenus en fin du processus d'identification pour un alliage d'aluminium pour diverses conditions thermomécaniques.

Afin d'évaluer l'efficacité de la méthode développée, quelques comparaisons entre identifications directe et inverse ont été effectuées. Les résultats sont reportés sur les figures 11a et 11b. On remarque sur ces figures que l'identification paramétrique inverse permet une meilleure représentation de la réponse mesurée.

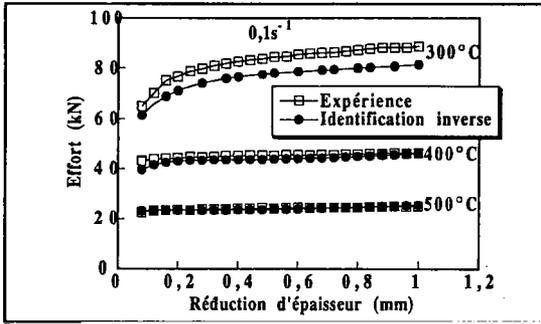


Figure 10a. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse pour un alliage déformé à une vitesse de  $0,1s^{-1}$ .

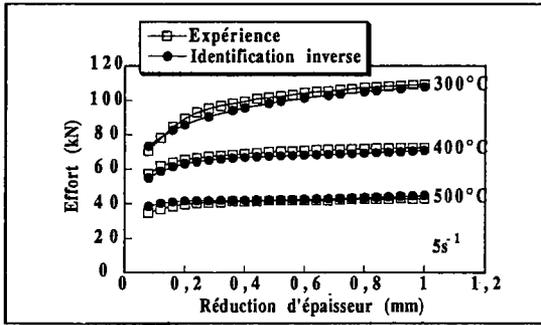


Figure 10b. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse pour un alliage déformé à une vitesse de  $5s^{-1}$ .

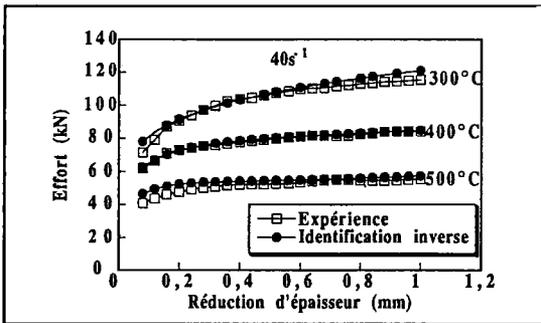
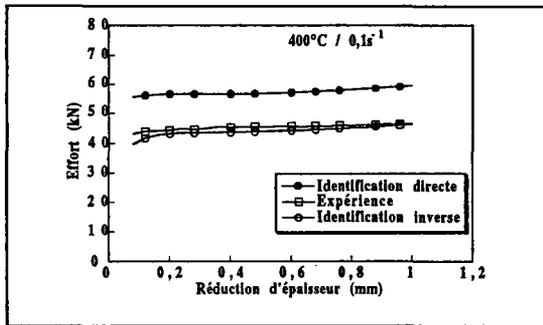
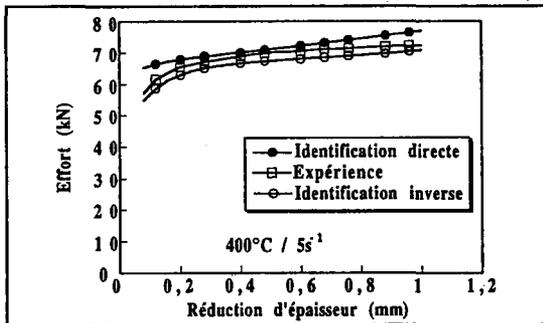


Figure 10c. Courbes expérimentale et calculée en fin de processus d'identification inverse pour un alliage déformé à une vitesse de  $40s^{-1}$ .



**Figure 11a.** Comparaison entre identification directe et identification inverse pour une température de 400°C et une vitesse de déformation de 0,1s<sup>-1</sup>.



**Figure 11b.** Comparaison entre identification directe et identification inverse pour une température de 400°C et une vitesse de déformation de 5s<sup>-1</sup>.

## 5. Conclusions

La méthode d'identification paramétrique inverse proposée dans cet article, pour la détermination des paramètres matériels de comportements non linéaires, repose sur l'utilisation d'une méthode d'optimisation d'une fonction erreur de type moindres carrés, couplée à une méthode de résolution non linéaire du problème direct discrétisé par éléments finis. L'algorithme d'optimisation est basé sur la méthode de Levenberg-Marquardt modifié pour tenir compte des contraintes sur les paramètres.

La méthode proposée a été appliquée pour l'identification des paramètres d'une loi d'écoulement viscoplastique à l'aide de l'essai de bipoinçonnement dans le domaine des grandes déformations où le domaine considéré est de forme largement variable. On a montré de plus que la méthode proposée permet, moyennant l'adoption d'une fonction erreur appropriée, d'identifier le coefficient de frottement de l'essai de bipoinçonnement.

Des développements sont en cours pour remplacer le calcul de sensibilité par différences finies, par un calcul de sensibilité par différenciation directe par rapport aux paramètres.

## 6. Bibliographie

- [BEC 85] BECK J.V., BLACKWELL B., St. CLAIR C.R., Jr, *Inverse heat conduction Ill-posed problems*. John Wiley & Sons, New York, (1985).
- [BUI 93] BUI H.D., *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*, Eyrolles, Paris, (1993).
- [BAR 74] BARD Y., *Nonlinear Parameter Estimation*, Academic Press, New York, (1974).
- [BAT 82] BATHE K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Ed. Prentice Hall Int., New York, (1982).
- [CAR 61] CARROLL C.W., "The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems", *Operations Res.*, 9, 169-184, (1961).
- [GEL 86] GELIN J.C., "Application of implicit methods for the analysis of damage with temperature effects in large strain plasticity problems", *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Vol. 3, Pineridge Press, Swansea, 494, (1986).
- [GEL 93a] GELIN J.C., GHOUATI O., RAYNAUD G.M., TREPIED L., "Numerical and experimental simulation of hot rolling of aluminium alloys". In *Large Plastic Deformations*, Ed. by C. Teodosiu and F.Sidoroff, A.A. Balkema, 405-414. (1993).
- [GEL 93b] GELIN J.C., GHOUATI O., SHAHANI R., "Identification and modelling of constitutive equations for hot rolling of aluminium alloys from the plane strain compression test", In *Modelling of Metal Rolling Processes*, The Institute of Materials, London, 239-255. (1993).
- [GEL 94a] GELIN J.C., GHOUATI O., SHAHANI R., "Apports de la simulation numérique pour l'identification du comportement rhéologique des alliages d'aluminium par essai de bipoinçonnement", *J. Phys.* III, France, 4, pp.685-706, (1994).
- [GEL 94b] GELIN J.C., GHOUATI O., SHAHANI R., "Modelling the plane strain compression test to obtain constitutive equations of aluminium alloys", *Int. J. Mech. Sci.*, 36, 773-796, (1994).
- [GHO 94] GHOUATI O., "Identification et modélisation numérique directe et inverse du comportement viscoplastique des alliages d'aluminium", Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Juillet 1994.
- [KOC 75] KOCKS U.F., "Constitutive Relations for Slip", in A.S. Argon (ed.), *Constitutive Equations in Plasticity*, M.I.T. Press., Cambridge, 81, (1975).
- [LEV 44] LEVENBERG K., "A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares", *Quart. Appl. Math.*, 2, pp.164-168, (1944).
- [Mah 94] MAHNKEN R., and STEIN E., "The identification of parameters for visco-plastic models via finite-element methods and gradient methods". *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2, 597-616. (1994).
- [MAR 63] MARQUARDT D.W., "An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters", *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, 431-440, (1963).
- [SCH 92] SCHNUR D.S. and ZABARAS N., "An inverse method for determining elastic material properties and material interface", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol.33, 2039-2057, (1992).

[SIM 92] SIMO J.C., "Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 99, pp 61-112. (1992).

[TAR 87] TARANTOLA A., *Inverse Problem Theory*, Elsevier, (1987).

[VID 92] VIDAL C.A., LEE H.S., HABER R.B. "The consistent tangent operator for design sensitivity analysis of history-dependent response". *Comp. Syst. in Eng.*, 2, 509-523. (1991).

[ZIE 89] ZIENKIEWICZ O.C. and TAYLOR R.L., The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol.1, *Basic Formulation and Linear Problems*, Mc Graw Hill Book company, (1989).

Article soumis le 25 juillet 1994.  
Version révisée le 10 juillet 1995.