
Application de la méthode des éléments finis aux équations 2-D hyperboliques. Partie I : équation scalaire de convection

Mohamed Boulterhcha* — Yves Secretan** — Gouri Dhatt*** —
Dinh N. Nguyen****

* Faculté des sciences, département de physique, BP 1796 Atlas, Fès, Maroc

** INRS-Eau, 2800 rue Einstein, CP 7500, Ste-Foy, G1V 4C7 Canada

*** INSA-Rouen, département de mécanique

8, place Emile Bondel, 76130 Mont-Saint-Aignan

**** Université Laval, département génie mécanique

Pavillon Pouliot, Québec, G1K 7P4 Canada

RÉSUMÉ. Nous développons dans cette série d'articles des schémas numériques pour capturer les ondes de choc dans les écoulements compressibles. Dans cette première partie nous résolvons l'équation scalaire de convection par deux approches différentes. La première, qui est la méthode de Lax-Wendroff-Richtmyer (LWR), est de type centré. La seconde, appelée méthode de Distribution de la Fluctuation (FS) est de type décentré (Upwinding). Bien qu'initialement cette dernière ait été écrite dans le cadre des volumes finis, nous avons pu la réécrire dans un formalisme strictement éléments finis par un choix adéquat de fonction de pondération. Les deux méthodes ont été validées sur divers exemples impliquant l'équation scalaire de convection en 2-D.

ABSTRACT. The principal goal of this papers is the development of numerical models to capture shock waves in compressible flows. In this first part we should only resolve the scalar convection equation. An explicit scheme for time discretization and FEM with linear triangular element for the space discretization should be employed. We have investigated two approaches. The first one, called the LWR method, is a centered scheme while the other one is the Fluctuation Splitting method based on an upwinding scheme. Initially, the second method was developed in a Finite Volume context, however we have rewritten it in a FE context by suitable choice of weighted functions. These methods are applied to different 2-D scalar convection equation examples.

MOTS-CLÉS : équation de convection, équation de transport, ondes de choc, éléments finis, schéma de Lax-Wendroff, distribution de la fluctuation.

KEY WORDS : convection equation, transport equation, shock waves, finite element method, Lax-Wendroff scheme, fluctuation splitting.

1. Introduction

Dès les années 50, la résolution par les différences finies des problèmes de convection pure, en utilisant un schéma centré explicite s'est heurtée à des difficultés d'instabilité. A cet égard, les travaux de Lax constituent un point de départ fondamental. En effet, en 1954 il introduisit la forme conservative des équations [Lax54]. Il montra notamment qu'une condition nécessaire pour qu'un schéma respecte la relation de Rankine-Hugoniot, et puisse donc reproduire correctement les discontinuités, est de discrétiser la forme conservative des équations de l'écoulement. Par ailleurs, en 1960 il développa son schéma de second ordre connu sous l'appellation de schéma de Lax-Wendroff dont l'originalité réside dans la façon de combiner la discrétisation du temps et de l'espace [LW60]. Avec l'objectif de stabiliser le schéma d'Euler qui est inconditionnellement instable, un développement en série de Taylor dans le temps à l'ordre 2 est d'abord effectué, suivi d'une discrétisation spatiale centrée. Le résultat est un schéma conservatif, précis et stable sous condition.

La méthode des éléments finis de type Galerkin a rencontré des difficultés similaires dans la modélisation de l'équation de convection pure. Les premiers à avoir mis l'accent sur l'importance du couplage existant entre la discrétisation du temps et de l'espace via les caractéristiques ont été Parott et Morton [DQ92, Mor85, MP80]. Ils proposèrent une méthode de type Petrov-Galerkin, dans laquelle la fonction de pondération change à chaque pas de temps afin d'obtenir la meilleure précision possible. Bien que ce schéma ne soit pas conservatif et se généralise difficilement aux systèmes multidimensionnels, il constitue un tournant historique dans l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes de convection. En effet, deux années plus tard, les travaux de Donea donnent naissance à la méthode de Lax-Wendroff en éléments finis appelée également méthode de Taylor-Galerkin [Don84a, Don84b].

L'idée de Donea, à l'instar des travaux de Lax-Wendroff en différences finies et en contraste avec ce qui se faisait jusqu'alors en éléments finis, a été de procéder d'abord à la discrétisation du temps par un schéma d'Euler explicite de second ordre avant d'effectuer la discrétisation dans l'espace par la méthode de Galerkin. Il obtint des schémas d'ordre deux et trois, stables sous condition.

De leur côté, les méthodes décentrées en éléments finis ont jusqu'à récemment été limitées aux méthodes SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) et GLS (Galerkin Lest Square) [HFM86, Joh92, SED94] qui ont connu un grand essor durant les années 80. Ce type de méthodes est cependant très répandu dans les différences finies et les volumes finis, berceau de la méthode des "Fluctuation Splitting".

Woodward et Colella [Roe86, WC84] ont montré que pour ces deux formulations (différences finies et volumes finis), les méthodes décentrées sont plus performantes que les méthodes centrées couplées à un modèle de viscosité numérique dans les écoulements 1-D, alors que l'inverse se produit dans les écoulements bidimensionnels. Ceci, s'explique par le fait que les équations hyperboliques expriment la propagation d'un phénomène physique et qu'en 1-D il n'y a que deux directions possibles de propagation ($\pm \mathbf{1}_x$). En 2-D, une infinité de directions de propagation sont possibles, mais le décentrement est effectué essentiellement par la résolution d'un problème de Riemann perpendiculairement aux interfaces du

maillage, ceci même si la direction de propagation est oblique par rapport à ces interfaces. En conséquence, on assiste à une dépendance de la solution vis à vis du maillage et à des performances moindres que celles obtenues en 1-D [SDR91].

La notion de fluctuation et de signal a été introduite initialement par P. Roe en 1982 [Roe82]. Elle fût appliquée à ce moment à l'équation scalaire de convection en 1-D. Cependant, il est montré que dans ce cas, elle est équivalente à la méthode des volumes finis classiques [SDR91]. Par contre, sa généralisation à l'équation scalaire de convection en 2-D et 3-D réalisée en 1987 [Roe87], est originale et englobe beaucoup de schémas bien connus. Elle est basée sur une discrétisation du domaine en éléments triangulaires et des approximations linéaires. La fluctuation (ou le résidu) est alors calculée sur chaque élément puis distribuée entre ses nœuds moyennant une certaine pondération qui dépend de la direction de la vitesse de convection de l'onde en propagation [BDRS92, DSB⁺92, Roe87, SDP⁺91].

Notre objectif dans cette étude est d'élaborer une présentation unifiée des schémas centrés de type Lax-Wendroff-Richtmyer (LWR) et de schémas décentrés de type Distribution de la Fluctuation (FS: Fluctuation Splitting) dans un formalisme éléments finis. Dans la section 2, nous présentons le schéma de Lax-Wendroff-Richtmyer (LWR) et ses principales caractéristiques. La section 3.1 est consacrée à la notion de fluctuation et ses diverses écritures pour un triangle T3. Dans la section 3.2 nous formulons le problème variationnel et nous donnons les espaces admissibles. Nous consacrons ensuite la section 3.3 au développement de schémas numériques de Distribution de la Fluctuation [DSB⁺92, DSR90, Roe87, SDP⁺91]. La section 3.4 traite de la linéarisation de l'équation scalaire [SDP⁺91, SDR91]. L'étude s'achève par des tests numériques illustrant les propriétés du schéma de LWR et de chacun des schémas de la section 3.3.

2. Schéma de Lax-Wendroff-Richtmyer

Considérons l'équation scalaire non linéaire de convection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0 \quad [1]$$

Nous notons

$$\begin{aligned} u^n &= u(x, y, t^n) & \text{et} & & u^{n+1} &= u(x, y, t^n + \Delta t) \\ f^n &= f(u^n) & \text{et} & & g^n &= g(u^n) \end{aligned}$$

2.1. Modèle discret

Le schéma de Lax-Wendroff-Richtmyer, ou de Taylor-Galerkin en 2 étapes [LMZ85, PPF⁺88, RM67], s'obtient par le développement en série de Taylor de u^{n+1} à l'ordre deux dans le temps, suivi de la conversion des dérivées temporelles en dérivées spatiales par l'intermédiaire de l'équation de base [1] et de la factorisation des termes au temps $n + \frac{1}{2}$. Il s'écrit

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = u^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f^n}{\partial x} + \frac{\partial g^n}{\partial y} \right) \\ u^{n+1} = u^n - \Delta t \left(\frac{\partial f^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial g^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \end{cases} \quad [2]$$

Les termes $f^{n+\frac{1}{2}}$ et $g^{n+\frac{1}{2}}$ seront explicités dans la section 2.2. Le modèle éléments finis est obtenu par l'écriture faible des relations [2]:

$$W_{(I)} = \int_{\Omega} \psi (u^{n+\frac{1}{2}} - u^n) d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \psi \left(\frac{\partial f^n}{\partial x} + \frac{\partial g^n}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad [3]$$

et

$$\begin{aligned} W_{(II)} = \int_{\Omega} \psi (u^{n+1} - u^n) d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} (\psi_{,x} f^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{,y} g^{n+\frac{1}{2}}) d\Omega \\ - \Delta t \int_{\Gamma} \psi (f^{n+\frac{1}{2}} n_x + g^{n+\frac{1}{2}} n_y) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad [4]$$

Les espaces admissibles pour $W_{(I)}$ s'expriment par les conditions: ψ et $u^{n+\frac{1}{2}}$ constant par élément (donc de type C^{-1}) et u^n, f^n, g^n de type C^0 . Pour $W_{(II)}$, elles s'expriment par: ψ, u^{n+1}, u^n de type C^0 ; $f^{n+\frac{1}{2}}, g^{n+\frac{1}{2}}$ sont de type C^0 (cf. section 2.2). En outre, $\psi = 0$ sur la portion de Γ correspondant à des conditions aux limites de type Dirichlet. La discrétisation par éléments finis se fait alors en deux étapes:

Etape 1 (étape locale) : Le choix de ψ dans C^{-1} permet de déduire $u_e^{n+\frac{1}{2}}$ de la forme [3]

$$\begin{aligned} W_{(I)}^e &= \int_{\Omega_e} \psi (u^{n+\frac{1}{2}} - u^n) d\Omega_e - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \psi \left(\frac{\partial f^n}{\partial x} + \frac{\partial g^n}{\partial y} \right) d\Omega_e = 0 \\ \Rightarrow \mathcal{A}^e u_e^{n+\frac{1}{2}} &= \int_{\Omega_e} u^n d\Omega_e - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial f^n}{\partial x} + \frac{\partial g^n}{\partial y} \right) d\Omega_e \end{aligned} \quad [5]$$

A l'issue de cette étape, nous obtenons à partir de u^n, f^n, g^n le terme $u_e^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}^{n+\frac{1}{2}}$ constant sur chaque élément. Nous déterminons par la même occasion $\bar{f}^{n+\frac{1}{2}} = f(\bar{u}^{n+\frac{1}{2}})$ et $\bar{g}^{n+\frac{1}{2}} = g(\bar{u}^{n+\frac{1}{2}})$.

Etape 2 (étape globale) : La forme $W_{(II)}$ est mise sous la forme

$$W_{(II)} = \sum_e W_{(II)}^e \quad [6]$$

qui en utilisant les approximations relatives à $W_{(II)}$ et en effectuant l'assemblage mène à un système linéaire

$$[M]\{\Delta u\} = \{R\} \quad [7]$$

où $[M]$ est la matrice masse, $\{R\}$ le résidu et $\Delta u = u^{n+1} - u^n$.

La résolution de ce système algébrique est effectuée d'une manière itérative par une simple méthode de Jacobi [Str86]. L'algorithme de résolution s'écrit

$$\begin{cases} \{\Delta u^{(0)}\} & = 0 \\ \{\Delta u^{(k+1)}\} & = \{\Delta u^{(k)}\} + [M_L^{-1}] (\{R\} - [M] \{\Delta u^{(k)}\}) \end{cases} \quad [8]$$

Du fait du bon conditionnement de la matrice $[M]$, trois itérations sont en général suffisantes pour avoir une bonne approximation de la solution du système linéaire. Il est très fréquent que le système [7] soit diagonalisé par l'utilisation de la matrice masse diagonale $[M_L]$. Il suffit alors de se limiter à une seule itération dans l'algorithme de résolution [8]. Il convient de noter qu'aucun stockage de matrices n'est nécessaire.

2.2. Traitement des termes $f^{n+\frac{1}{2}}$ et $g^{n+\frac{1}{2}}$

Le calcul de $f^{n+\frac{1}{2}}$ et $g^{n+\frac{1}{2}}$ sur chaque élément peut être réalisé de plusieurs manières [Bou93]. Nous choisissons

$$f^{n+\frac{1}{2}} = f^n + (\bar{f}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{f}^n), \quad g^{n+\frac{1}{2}} = g^n + (\bar{g}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{g}^n) \quad [9]$$

avec

$$\bar{f}^n = \frac{1}{\mathcal{A}^e} \int_{\Omega_e} f \, d\Omega_e \quad \text{et} \quad \bar{g}^n = \frac{1}{\mathcal{A}^e} \int_{\Omega_e} g \, d\Omega_e$$

$f^{n+\frac{1}{2}}$ et $g^{n+\frac{1}{2}}$ appartiennent donc au même espace d'approximation que f^n , g^n .

2.3. Stabilité

Dans le cas de l'équation scalaire 1-D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

l'analyse de stabilité de von Neumann montre que le schéma est stable si le nombre de Courant $\nu < 1$ ou $\nu < 1/\sqrt{3}$, selon que l'on utilise la matrice masse diagonale ou la matrice masse pleine.

Dans le cas de l'équation scalaire 2-D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

et sur un maillage triangulaire régulier, cette analyse [RBT90] montre qu'il y a stabilité lorsque $\nu < 0.5$.

3. Méthode de Distribution de la Fluctuation

3.1. Notion de fluctuation

La méthode de Distribution de la Fluctuation se propose de résoudre numériquement l'équation de convection linéaire en 2-D

$$u_{,t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 \quad [10]$$

où le vecteur vitesse de convection $\mathbf{a} = (a, b)$ est constant. La dérivée temporelle est approximée par la méthode d'Euler explicite

$$u_{,t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \quad [11]$$

Quant à l'approximation spatiale, elle est effectuée par éléments finis en considérant des éléments triangulaires linéaires.

3.1.1. Positivité et consistance

La discrétisation spatio-temporelle conduit à un schéma discret de récurrence représentant l'évolution de la fonction solution. Si l'on utilise la matrice masse diagonalisée en éléments finis, le schéma numérique après assemblage s'écrit sous la forme générale

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=-m}^m c_j u_{i+j}^n \quad [12]$$

où u_i^n indique la valeur de u au point (x_i, y_i) , à l'instant $t = t^n$.

La relation [12] doit respecter la condition de consistance, qui impose au schéma de reproduire tout champ constant $u^n(x, y) = u_0$. Ceci se traduit par

$$\sum_j c_j = 1 \quad [13]$$

Définition 1 *Un schéma est dit linéaire si les coefficients c_j sont indépendants des u_i^n ; dans le cas inverse, il est dit non linéaire. Un schéma est dit positif si les coefficients c_j sont positifs.*

La propriété de positivité implique qu'aucun nouvel extremum ne peut apparaître, donc que

$$\min_k (u_{i+k}^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max_k (u_{i+k}^n)$$

et par conséquent que le schéma n'oscillera pas au voisinage de discontinuités.

Remarque 1 *La positivité locale définie au niveau élémentaire garantit la positivité globale.*

3.1.2. Fluctuation

Définition 2 La fluctuation est le taux d'accumulation qui est défini par

$$\phi_e = \int_{\Omega_e} u_{,t} d\Omega_e = - \int_{\Omega_e} \mathbf{a} \cdot \nabla u d\Omega_e \text{ ou encore } \phi_e = \mathcal{A}^e \bar{\phi}^e \quad [14]$$

où $\bar{\phi}^e$ est l'accumulation par unité de surface. La fluctuation exprime la mesure d'équilibre spatial.

Remarque 2 Si $\mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$, alors $\phi_e = 0$ et l'élément est en équilibre.

3.1.3. Expression de la fluctuation pour un élément T3

Nous présentons d'abord un ensemble de relations qui seront utilisées dans la section 3.3 pour décrire différents schémas de distribution de la fluctuation. Nous donnons ensuite les différentes expressions que peut prendre la fluctuation.

Aspects géométriques [DT84] :

L'approximation élémentaire étant linéaire, les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence s'écrivent

$$\langle N_1, N_2, N_3 \rangle = \langle 1 - \xi - \eta, \xi, \eta \rangle$$

Quant à la fonction τ qui transforme l'élément de référence en un élément réel, elle se définit par la matrice jacobienne

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}_{21} \rangle \\ \langle \mathbf{x}_{31} \rangle \end{bmatrix} \text{ et } [j] = [J]^{-1} = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} \{ \{ \mathbf{n}_{l2} \} \{ \mathbf{n}_{l3} \} \} \quad [15]$$

avec

$$\{ \mathbf{x}_{ij} \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \\ \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j \end{Bmatrix}$$

et $\mathcal{A}^e = \frac{1}{2} \det(J) = \text{Aire du triangle}$. Le vecteur normal \mathbf{n}_{li} , $i = 1, 2, 3$ est orienté vers l'intérieur, son module est égal à la longueur du côté (i), opposé au nœud i de l'élément (fig.1). Nous avons donc

$$\mathbf{n}_{l1} = \begin{Bmatrix} -y_{32} \\ x_{32} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{l2} = \begin{Bmatrix} -y_{13} \\ x_{13} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{l3} = \begin{Bmatrix} -y_{21} \\ x_{21} \end{Bmatrix} \quad [16]$$

Les vecteurs \mathbf{n}_{li} vérifient

$$\mathbf{n}_{l1} + \mathbf{n}_{l2} + \mathbf{n}_{l3} = 0 \quad [17]$$

Par ailleurs, pour un vecteur unitaire \mathbf{m} quelconque, on a

$$\langle \mathbf{m} \rangle [j] [J] \{ \mathbf{m} \} = 1 \quad [18]$$

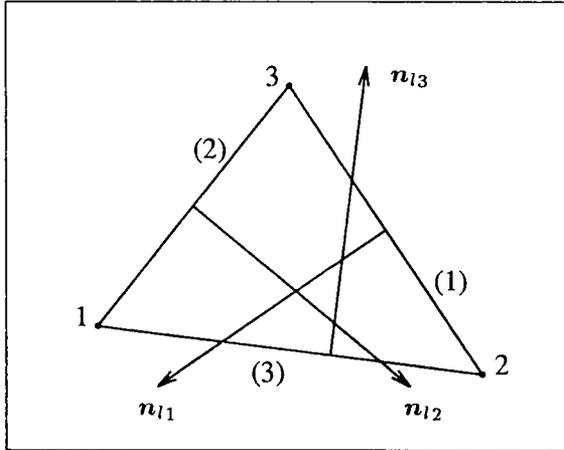


Figure 1 : Normales aux côtés.

qui en utilisant [15] devient

$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{12})(\mathbf{x}_{21} \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{13})(\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{m}) = 1 \tag{19}$$

Expression du gradient :

Les gradients de u sur l'élément par rapport à (ξ, η) et par rapport (x, y) sont reliés par le jacobien :

$$\{\nabla_{(\xi, \eta)} u\} = \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ u_3 - u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{21} \cdot \nabla u \\ \mathbf{x}_{31} \cdot \nabla u \end{Bmatrix} = [J] \{\nabla_{(x, y)} u\} \tag{20}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \{\nabla_{(x, y)} u\} &= \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = [j] \{\nabla_{(\xi, \eta)} u\} = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} [\{\mathbf{n}_{12} \quad \mathbf{n}_{13}\}] \{\nabla_{(\xi, \eta)} u\} \\ &= \frac{1}{2\mathcal{A}^e} ((u_2 - u_1) \{\mathbf{n}_{12}\} + (u_3 - u_1) \{\mathbf{n}_{13}\}) \end{aligned}$$

qui, compte tenu de [17], devient

$$\{\nabla_{(x, y)} u\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} \sum_{i=1}^3 \{\mathbf{n}_{1i}\} u_i \tag{21}$$

En particulier, le gradient des fonctions d'interpolation s'écrit

$$\nabla N_i = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} \mathbf{n}_{1i} \tag{22}$$

Expression de la fluctuation ϕ_e :

La variable u est linéaire et la vitesse de propagation \mathbf{a} constante sur chaque élément. La fluctuation se met alors sous la forme

$$\phi_e = \int_{\Omega_e} u_{,t} d\Omega_e = - \int_{\Omega_e} \mathbf{a} \cdot \nabla u d\Omega_e = -\mathcal{A}^e (\mathbf{a} \cdot \nabla u) \quad [23]$$

Or à partir de [21]

$$\mathbf{a} \cdot \nabla u = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} \sum_{i=1}^3 \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{i_i} u_i = \frac{1}{\mathcal{A}^e} \sum_{i=1}^3 k_i u_i \quad [24]$$

les coefficients k_i étant définis par

$$k_i = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{i_i} \quad [25]$$

De plus, grâce à [17], les k_i vérifient la propriété:

$$\sum_{i=1}^3 k_i = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_{i_i} \implies \sum_{i=1}^3 k_i = 0 \quad [26]$$

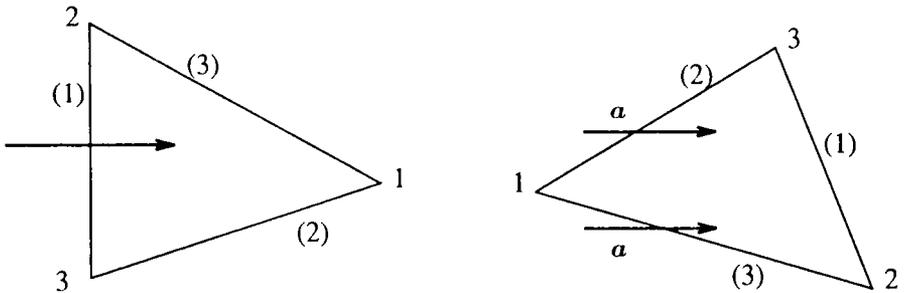


Figure 2 : Triangle à un seul côté amont (à gauche) ; Triangle à deux côtés amont (à droite).

Une conséquence importante de la définition de k_i est qu'elle permet de distinguer les côtés par où la perturbation rentre de ceux par où la perturbation sort. Si $k_i > 0$, le flux est entrant dans l'élément à travers le côté (i); si $k_i < 0$, elle en sort. Pour un triangle de sommets 1,2,3, deux cas se présentent: la perturbation rentre par un côté et sort par deux côtés, ou elle rentre par deux côtés et sort par un seul (fig.2).

En utilisant [24], l'expression de la fluctuation [23] s'écrit

$$\phi_e = - \sum_{i=1}^3 k_i u_i \tag{27}$$

Elle peut prendre différentes formes selon l'orientation de \mathbf{a} . En particulier, ϕ_e prend une forme simple dans les deux cas suivants:

1. La direction de \mathbf{a} est selon le côté 1-2 (fig.3), nous avons alors

$$k_3 = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{13} = 0$$

A cause de [26], l'expression [27] devient

$$\phi_e = -k_2 (u_2 - u_1) \tag{28}$$

2. De même si la direction de \mathbf{a} est selon le côté 1-3 (fig.3), nous avons

$$k_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{12} = 0$$

La fluctuation [27] prend la forme

$$\phi_e = -k_3 (u_3 - u_1) \tag{29}$$

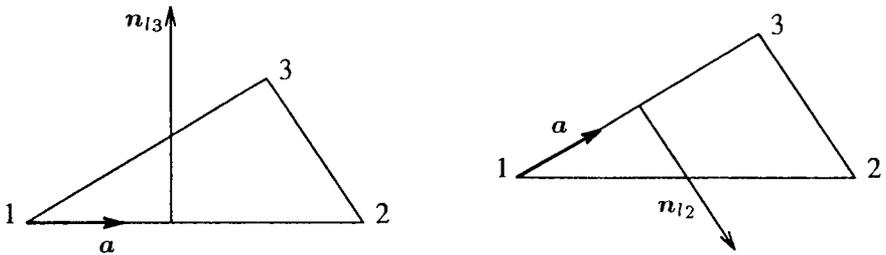


Figure 3 : Cas 1 : $k_3 = 0$ (à gauche) ; Cas 2 : $k_2 = 0$ (à droite).

On souhaite construire différents schémas qui distribuent la fluctuation sur les nœuds de l'élément. Il est alors utile d'écrire l'expression de ϕ_e sous différentes formes et obtenir ainsi diverses décompositions de cette fluctuation. Dans la présentation suivante, nous supposons que le vecteur \mathbf{a} est orienté tel que le flux entre par deux côtés. Pour la simplicité, les deux côtés considérés sont le côté (3) de sommets 1-2 et le côté (2) de sommets 1-3 (fig.2 à droite).

Expression bi-directionnelle :

La vitesse de convection \mathbf{a} est projetée sur les côtés 1-2 et 1-3 (fig.4):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{13} \tag{30}$$

La fluctuation est ainsi composée de deux termes

$$\phi_e = -\mathcal{A}^e (\mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{13}) \cdot \nabla u = \phi_{12} + \phi_{13}$$

Les expressions de ϕ_{12} et ϕ_{13} se déduisent de [28] et [29] pour donner

$$\phi_{12} = -k_2(u_2 - u_1) \quad \text{et} \quad \phi_{13} = -k_3(u_3 - u_1) \quad [31]$$

Nous pouvons également exprimer ϕ_{12} et ϕ_{13} en fonction de ϕ_e tel que

$$\phi_{12} = \alpha_2 \phi_e \quad \text{et} \quad \phi_{13} = \alpha_3 \phi_e$$

En effet, la définition des k_i , jointe à la relation [20] montrent que les relations [31] s'écrivent

$$\phi_{12} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{l2})(\mathbf{x}_{21} \cdot \nabla u) = \alpha_2 \phi_e$$

$$\phi_{13} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{l3})(\mathbf{x}_{31} \cdot \nabla u) = \alpha_3 \phi_e$$

En utilisant la relation [23] nous obtenons:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{l2})(\mathbf{x}_{21} \cdot \nabla u)}{\mathbf{a} \cdot \nabla u}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{l3})(\mathbf{x}_{31} \cdot \nabla u)}{\mathbf{a} \cdot \nabla u} \quad [32]$$

D'après [18],

$$\langle \mathbf{a} \rangle [j][J]\{\nabla u\} = \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \{\nabla u\}$$

En utilisant les expressions [15], nous obtenons

$$\frac{1}{2\mathcal{A}^e} ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{l2})(\mathbf{x}_{21} \cdot \nabla u) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{l3})(\mathbf{x}_{31} \cdot \nabla u)) = \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \{\nabla u\} \quad [33]$$

qui montre que α_2 et α_3 vérifient la propriété fondamentale

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad [34]$$

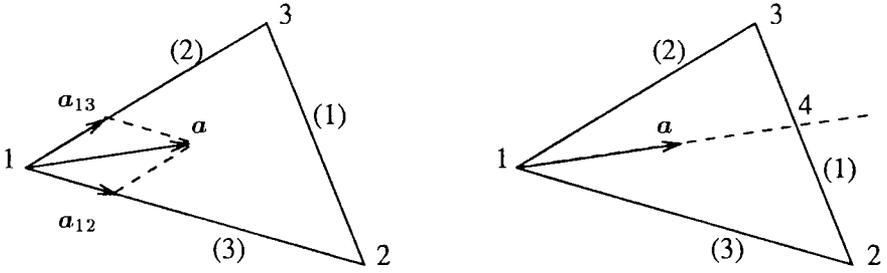


Figure 4 : Forme bi-directionnelle (à gauche) ; Forme bi-région (à droite).

Expression par bi-région :

L'élément 123 est divisé en deux triangles 124 et 143 selon la direction de la vitesse **a** (fig.4). La fluctuation est également décomposée en deux parties

$$\phi_e = \phi_{143} + \phi_{124} \tag{35}$$

tel que

$$\phi_{143} = - \int_{143} \mathbf{a} \cdot \nabla u \, d\Omega_e \text{ et } \phi_{124} = - \int_{124} \mathbf{a} \cdot \nabla u \, d\Omega_e \tag{36}$$

D'après [28], [29] nous avons

$$\phi_{143} = -k_2(u_4 - u_1) \text{ et } \phi_{124} = -k_3(u_4 - u_1) \tag{37}$$

et à cause de [35]

$$\phi_e = -(k_2 + k_3)(u_4 - u_1) = k_1(u_4 - u_1)$$

d'où

$$u_4 - u_1 = \frac{1}{k_1} \phi_e \tag{38}$$

Finalement, en utilisant [37]

$$\phi_{124} = \alpha_2 \phi_e \text{ , } \phi_{143} = \alpha_3 \phi_e$$

les coefficients α_2 , α_3 étant définis par $\alpha_2 = -\frac{k_2}{k_1}$, $\alpha_3 = -\frac{k_3}{k_1}$ et vérifiant $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$

Remarque 3 Les coefficients α_2 et α_3 sont égaux si la direction de **a** passe par le milieu du côté 2-3.

Expression frontale :

Soit \mathbf{m} le vecteur unitaire défini par

$$\mathbf{m} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

Nous définissons la vitesse frontale \mathbf{a}_m par

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} \quad [39]$$

Nous avons alors

$$\mathbf{a}_m \cdot \nabla u = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) |\nabla u| = \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) |\nabla u| = \mathbf{a} \cdot \nabla u \quad [40]$$

La fluctuation s'exprime en fonction de la vitesse frontale par

$$\phi_e = -\mathcal{A}^e(\mathbf{a} \cdot \nabla u) = -\mathcal{A}^e(\mathbf{a}_m \cdot \nabla u)$$

Elle peut être décomposée de la même manière que dans le cas de la décomposition bi-directionnelle, mais en utilisant cette fois la vitesse frontale \mathbf{a}_m au lieu de la vitesse \mathbf{a} . Cette démarche, que nous ne détaillons pas puisqu'elle est identique à [30]-[34] dans lesquelles \mathbf{a} est remplacé par \mathbf{a}_m , conduit à

$$\phi_e = \phi_{12} + \phi_{13} \text{ tel que } \phi_{12} = \alpha_2 \phi_e, \quad \phi_{13} = \alpha_3 \phi_e$$

avec des coefficients α_i définis par

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\mathcal{A}^e}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{12})(\mathbf{x}_{21} \cdot \mathbf{m}), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\mathcal{A}^e}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{13})(\mathbf{x}_{31} \cdot \mathbf{m}) \quad [41]$$

Ces coefficients vérifient la propriété

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

3.2. Forme variationnelle

L'écriture variationnelle considérée dans cette section permet de développer de façon originale les schémas scalaires de type Distribution de la Fluctuation par éléments finis. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle variable ϕ pour récrire l'équation scalaire de convection sous la forme

$$\begin{cases} u_{,t} - \phi = 0 \\ \phi + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 \end{cases} \quad [42]$$

La discrétisation temporelle étant effectuée à l'aide du schéma d'Euler explicite, la formulation faible associée à [42] s'écrit en fonction de (u, ϕ)

$$W_{(I)} = \sum_e W_{(I)}^e = \sum_e (W_M^e + \Delta t W_k^e) = 0 \quad [43]$$

$$W_{(II)} = \sum_e W_\phi^e = 0 \quad [44]$$

avec

$$\begin{aligned}
 W_M^e &= \int_{\Omega_e} \psi^{(M)} (u^{n+1} - u^n) d\Omega_e \\
 W_k^e &= - \int_{\Omega_e} \psi^{(k)} \phi d\Omega_e \\
 W_\phi^e &= \int_{\Omega_e} \psi^{(\phi)} (\phi + \mathbf{a} \cdot \nabla u) d\Omega_e
 \end{aligned}$$

$\psi^{(M)}, \psi^{(k)}, \psi^{(\phi)}$ étant les fonctions de pondération. Dans cette étude, nous choisissons les espaces admissibles suivants: u dans l'espace C^0 , avec une variation linéaire sur l'élément: $u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i$.

$\psi^{(\phi)}, \phi$ dans l'espace C^{-1} (constants sur l'élément). L'espace des fonctions $\psi^{(M)}$ est choisi afin d'obtenir une matrice masse diagonale. Quant à l'espace des fonctions $\psi^{(k)}$, il est choisi dans le but de distribuer la fluctuation sur différents nœuds. Le choix de $\psi^{(k)}$ est la composante essentielle pour la construction de schémas par la notion de distribution de la fluctuation. On peut ainsi obtenir des schémas linéaires positifs, non linéaire positifs, etc ... Sur chaque élément triangulaire, nous avons

$$\psi^{(k)} = \langle P_1^k \ P_2^k \ P_3^k \rangle \{ \psi_i \}$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont les coefficients nodaux. Les fonctions $P_i^{(k)}$ vont être définies de différentes manières, suivant le schéma que l'on veut obtenir. Par exemple, dans le cas où l'on a un seul côté amont 2-3 (le flux entre par le seul côté 2-3 et nous renvoyons toute la fluctuation sur le nœud aval 1, (fig.2 à gauche)):

$$P_1^k = 1 \quad , \quad P_2^k = P_3^k = 0$$

Afin de respecter la conservation, il est nécessaire que

$$\sum_{i=1}^3 P_i^{(k)} = 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^3 N_i = 1 \tag{45}$$

3.3. Schémas scalaires en deux dimensions

Nous présentons cinq schémas de la famille de distribution de la fluctuation. Pour ce faire, nous distinguons deux situations, le flux est entrant soit par le côté (2-3), soit par les deux côtés (1-2) et (2-3) (fig.2).

Les approximations pour l'élément triangulaire associées aux formulations variationnelles [43]-[44] sont:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^3 N_i u_i \\
 \phi &= \bar{\phi} = \frac{\phi_e}{\mathcal{A}^e} \\
 \psi^{(\phi)} &= 1
 \end{aligned}$$

L'expression de W_ϕ^e qui est locale (par élément) s'écrit

$$W_\phi^e = \phi_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{a} \cdot \nabla u \, d\Omega_e = 0$$

d'où

$$\phi_e = - \int_{\Omega_e} \mathbf{a} \cdot \nabla u \, d\Omega_e = - \sum_{i=1}^3 k_i u_i$$

k_i étant donné par [25]. Pour la forme W_M^e , nous utilisons la matrice masse diagonale

$$W_M^e = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \rangle \frac{\mathcal{A}^e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1^{n+1} - u_1^n \\ u_2^{n+1} - u_2^n \\ u_3^{n+1} - u_3^n \end{array} \right\} \quad [46]$$

La fonction

$$\psi^{(k)} = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \rangle \left\{ P_i^{(k)} \right\} \quad [47]$$

peut être choisie de deux manières. La première consiste à prendre

$$P_i^{(k)} = \alpha_i \quad \text{tel que} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Ce qui conduit à

$$W_k^e = - \int_{\Omega_e} \psi^{(k)} \frac{\phi_e}{\mathcal{A}^e} \, d\Omega_e = - \langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \rangle \left(\{ \alpha_i \} \phi_e \right)$$

et la forme intégrale élémentaire

$$W_{(I)}^e = \langle \psi_i \rangle \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \{ u_i^{n+1} \} - \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \{ u_i^n \} + \Delta t \{ \alpha_i \} \phi_e \right) \right) \quad [48]$$

La deuxième possibilité consiste à décomposer ϕ_e

$$\phi_e = \phi_1 + \phi_2$$

puis à choisir des fonctions $\psi^{(k)}$ différentes pour ϕ_1 et pour ϕ_2 . La forme intégrale

$$W_k^e = - \int_{\Omega_e} \psi^{(k)} \frac{\phi_e}{\mathcal{A}^e} \, d\Omega_e$$

devient

$$W_k^e = - \int_{\Omega_e} \psi^{(k)} \frac{\phi_1}{\mathcal{A}^e} \, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \psi^{(k)} \frac{\phi_2}{\mathcal{A}^e} \, d\Omega_e$$

dans laquelle nous choisissons

$$\psi_{(1)}^{(k)} = \langle \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \rangle \left\{ \alpha_i^{(1)} \right\} \tag{49}$$

$$\psi_{(2)}^{(k)} = \langle \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \rangle \left\{ \alpha_i^{(2)} \right\} \tag{50}$$

tel que

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 1 \text{ et } \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 1$$

Cette procédure mène à une forme intégrale élémentaire de la forme

$$W_k^e = - \langle \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \rangle \left(\left\{ \alpha_i^{(1)} \right\} \phi_1 + \left\{ \alpha_i^{(2)} \right\} \phi_2 \right) \tag{51}$$

3.3.1. Schéma linéaire positif (Schéma N)

Grâce au coefficient k_i , il est possible de différencier les côtés correspondant à un flux entrant ($k_i > 0$) des côtés correspondant à un flux sortant ($k_i < 0$).

Élément avec 1 côté amont :

Dans le cas d'un élément avec un seul côté amont, par exemple tel que $k_1 > 0, k_2 < 0, k_3 < 0$ (fig.2), toute la fluctuation est envoyée au nœud aval 1. La fonction test de distribution est alors

$$\psi^{(k)} = \sum_{i=1}^3 P_i^{(k)} \psi_i \text{ avec } P_1^{(k)} = 1, P_2^{(k)} = 0, P_3^{(k)} = 0$$

d'où

$$\psi^{(k)} = \psi_1$$

La forme intégrale

$$W_{(I)}^e = W_M^e + \Delta t W_k^e$$

devient

$$W_{(I)}^e = \langle \psi_i \rangle \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \{ u_i^{n+1} \} - \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \{ u_i^n \} + \Delta t \{ \alpha_i \} \phi_e \right) \right) \tag{52}$$

avec

$$\alpha_1 = 1 \text{ , } \alpha_2 = 0 \text{ , } \alpha_3 = 0$$

Le schéma sera positif si le pas de temps est tel que

$$\Delta t k_1 < \frac{\mathcal{A}^e}{3} \text{ ou } \Delta t < \frac{\mathcal{A}^e}{3k_1} \tag{53}$$

Élément avec 2 côtés amont :

Si le flux est rentrant par rapport aux côtés 1-2 et 1-3 (fig.2), et dans le but d'obtenir un schéma positif, on décompose ϕ_e en deux parties à la manière de la décomposition bi-directionnelle [31]

$$\phi_e = \phi_{12} + \phi_{13}$$

avec

$$\phi_{12} = -k_2(u_2 - u_1) \quad \text{et} \quad \phi_{13} = -k_3(u_3 - u_1)$$

La fonction $\psi^{(k)}$ est choisie différente pour ϕ_{12} et ϕ_{13} de façon identique à [49]-[50], et tel que le nœud cible soit en aval i.e. nœud 2 pour ϕ_{12} et nœud 3 pour ϕ_{13} . Nous reprenons donc [49]-[50] avec

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= 0, \quad \alpha_2^{(1)} = 1, \quad \alpha_3^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(2)} &= 0, \quad \alpha_2^{(2)} = 0, \quad \alpha_3^{(2)} = 1 \end{aligned}$$

La forme intégrale s'écrit alors

$$W_{(I)}^e = \langle \psi_i \rangle \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \begin{Bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{Bmatrix} - \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \end{Bmatrix} \right) \right) \quad [54]$$

Le schéma obtenu est linéaire et il est localement positif si le pas de temps est tel que

$$\Delta t \leq \frac{\mathcal{A}^e}{3} \min \left(\frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3} \right) \quad [55]$$

3.3.2. Schéma linéaire avec faible diffusion A (LDA)

Ce schéma est linéaire mais pas positif. Il reproduit correctement l'influence de la fluctuation constante (u linéaire en coordonnées spatiales).

Dans le cas d'un élément à un seul côté amont, le schéma est identique au schéma N [52]. Si l'élément admet 2 côtés amont (fig.2), la fonction $\psi^{(k)}$ est choisie selon [47] avec

$$\{P_i^k\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{k_1} \\ -\frac{k_3}{k_1} \end{Bmatrix}$$

La forme intégrale s'écrit

$$W_{(I)}^e = \langle \psi_i \rangle \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \{u_i^{n+1}\} - \left(\frac{\mathcal{A}^e}{3} \{u_i^n\} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{k_1} \\ -\frac{k_3}{k_1} \end{Bmatrix} \phi_e \right) \right) \quad [56]$$

Les coefficients de distribution de la fluctuation sont donc

$$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{k_2}{k_1} \quad , \quad \alpha_3 = -\frac{k_3}{k_1} \tag{57}$$

et vérifient

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

i.e. la fluctuation est distribuée selon la décomposition bi-région.

Le schéma est localement positif sous la condition

$$\Delta t \leq \frac{\mathcal{A}^e}{3} |k_1| \min \left(\frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3} \right) \tag{58}$$

3.3.3. Schéma de Lax-Wendroff

Il est également possible de construire un schéma de type Lax-Wendroff dans le cadre de la méthode de Distribution de la Fluctuation en choisissant $\psi^{(k)}$ adéquatement. Soit

$$\psi^{(k)} = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \rangle \left(\left\{ N_i \right\} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \mathbf{a} \cdot \nabla N_i \right\} \right)$$

La forme intégrale

$$W_k^e = - \int_{\Omega_e} \psi^{(k)} \frac{\phi_e}{\mathcal{A}^e} d\Omega_e$$

se met alors sous la forme

$$W_k^e = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \rangle \left\{ \alpha_i \right\} \phi_e$$

Les α_i se déterminent en utilisant [22]

$$\mathbf{a} \cdot \nabla N_i = \frac{1}{2\mathcal{A}^e} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{li} = \frac{1}{\mathcal{A}^e} k_i$$

Nous obtenons

$$\alpha_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t k_i}{\mathcal{A}^e} \tag{59}$$

Nous retrouvons le schéma de Lax-Wendroff qui est linéaire mais non positif.

3.3.4. Schéma non linéaire NN

La non linéarité du schéma est naturellement introduite par l'utilisation de la vitesse frontale \mathbf{a}_m au lieu de la vitesse \mathbf{a} , puisqu'ainsi les k_i vont dépendre de ∇u . Nous allons résoudre l'équation non linéaire

$$u_{,t} + \mathbf{a}_m \cdot \nabla u = 0$$

qui est équivalente à

$$u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$$

à cause de [40]. Il convient de noter que cette approche est purement multidimensionnelle.

Il y a cependant une difficulté à définir la vitesse frontale dans les régions où la solution est lisse ($|\nabla u|$ petit). Une combinaison linéaire de \mathbf{a} et de \mathbf{a}_m de la forme

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a}_m + \beta \mathbf{a}_p$$

est utilisée dans ce cas. Le vecteur $\mathbf{a}_p = \mathbf{a} - \mathbf{a}_m$ est un vecteur parallèle aux isolignes (fig.5), et β une fonction positive de $|\nabla u|$ variant entre 0 et 1 qui permet d'utiliser une vitesse de propagation égale à \mathbf{a}_m ou à \mathbf{a} , suivant que l'on est en région lisse ($\beta = 1$, $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$) ou en région à fort gradient ($\beta = 0$, $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}_m$). La fonction β qui intervient dans [60] est définie par

$$\beta(|\nabla u|) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nabla u| \leq 10^{-6} \\ -\frac{1}{5} (\log_{10}(|\nabla u|) + 1) & \text{si } 10^{-6} \leq |\nabla u| \leq 10^{-1} \\ 0 & \text{si } |\nabla u| \geq 10^{-1} \end{cases}$$

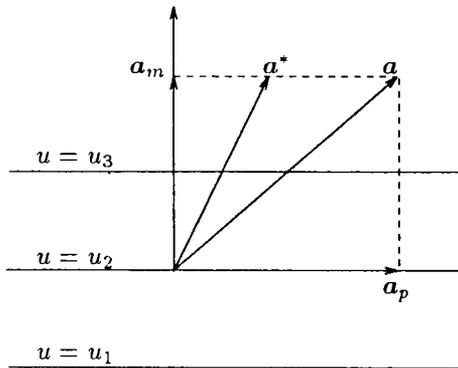


Figure 5 : Vitesse frontale.

Considérons tout d'abord le cas où il y aurait un seul nœud cible déterminé à partir de la vitesse \mathbf{a} . Il n'y a pas lieu alors d'introduire la vitesse frontale \mathbf{a}_m , le schéma [52] est encore utilisé.

Si par contre, deux nœuds cibles sont détectés, les coefficients k_i sont recalculés à partir de \mathbf{a}_m

$$k_i^m = \frac{1}{2} \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{n}_{li} \quad [60]$$

et on vérifie que l'on a encore les mêmes côtés amont avec \mathbf{a}_m . Dans ce cas, comme l'indique la figure 6 (à gauche), on se retrouve à distribuer une fluctuation

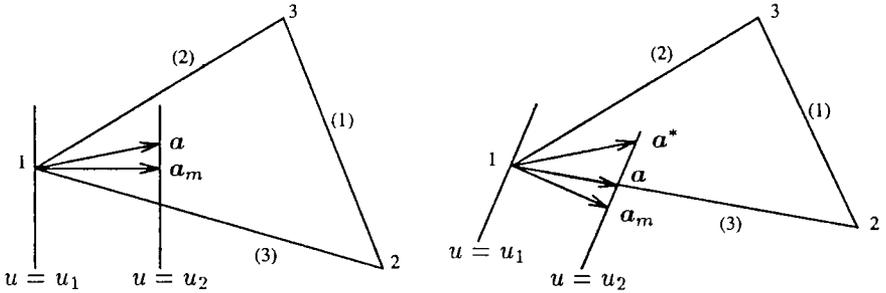


Figure 6 : Schéma NN : cas 1 (à gauche). Schéma NN : cas 2 (à droite).

dû à \mathbf{a}_m . Nous reprenons alors la démarche pour définir le schéma N en utilisant \mathbf{a}_m au lieu de \mathbf{a} .

Il pourrait arriver que les nœuds cibles déterminés à partir de \mathbf{a}_m soient différents de ceux déterminés à partir de \mathbf{a} . La figure 6 (à droite) en est une illustration; d'après la direction de \mathbf{a} la fluctuation sera distribuée entre 2 et 3, or d'après la direction de \mathbf{a}_m , elle sera envoyée sur le seul nœud 2. Dans de telles circonstances, on choisit le nœud commun qui est ici le nœud 2.

La logique du schéma NN proposée par l'équipe VKI [DSB⁺92] est la suivante :

Déterminer les nœuds cibles en utilisant \mathbf{a} ,
 S'il y a un seul nœud aval, envoyer toute la fluctuation dessus,
 S'il y a 2 nœuds aval (2 et 3 par exemple):

1. Si $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{n}_{l2} > 0$ et $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{n}_{l3} > 0$ (fig.6 à gauche) distribuer la fluctuation entre les nœuds 2 et 3 suivant [54], le calcul de k_2^m et k_3^m étant basé sur la vitesse frontale.
2. Si $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{n}_{l2} > 0$ et $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{n}_{l3} < 0$ (fig.6 à droite) envoyer la fluctuation sur le nœud 2,
3. Sinon l'envoyer sur le nœud 3

3.3.5. Schéma de niveau de Roe

Comme dans les autres schémas, si le triangle admet un seul côté amont, la fluctuation entière est envoyée sur le nœud aval. Si le triangle admet 2 nœuds cibles 2 et 3, deux cas se présentent:

1. La ligne de niveau passant par le nœud amont 1 coupe le côté aval (1) (fig.8), alors la fluctuation est envoyée sur un seul parmi les nœuds 2 et 3 de telle sorte que la ligne de niveau est redirigée dans la direction de la vitesse de convection.

2. Si la ligne de niveau passe hors du segment [2,3] (fig.9), la fluctuation va être distribuée entre les nœuds 2 et 3 de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{A}^e}{3} u_2^{n+1} &= \frac{\mathcal{A}^e}{3} u_2^n + \mathcal{A}_2 \Delta u_2 \\ \frac{\mathcal{A}^e}{3} u_3^{n+1} &= \frac{\mathcal{A}^e}{3} u_3^n + \mathcal{A}_3 \Delta u_3\end{aligned}\quad [61]$$

\mathcal{A}_i est le $\frac{1}{3}$ de la surface de tous les triangles entourant le nœud i , elle est représentée sur la figure 7.

En comparant [61] à [48], nous obtenons

$$\mathcal{A}_2 \Delta u_2 = \Delta t \alpha_2 \phi_e, \quad \mathcal{A}_3 \Delta u_3 = \Delta t \alpha_3 \phi_e$$

d'où

$$\mathcal{A}_2 \Delta u_2 + \mathcal{A}_3 \Delta u_3 = \Delta t (\alpha_2 + \alpha_3) \phi_e = \Delta t \phi_e \quad [62]$$

Par ailleurs, la figure 9 montre que

$$\frac{\Delta u_2}{u_2^n - u_1^n} = \frac{\Delta u_3}{u_3^n - u_1^n} \quad [63]$$

et de [62]-[63] nous déduisons

$$\Delta u_i = \frac{u_i^n - u_1^n}{\mathcal{A}_2(u_2^n - u_1^n) + \mathcal{A}_3(u_3^n - u_1^n)} \Delta t \phi_e \quad \text{pour } i = 2, 3 \quad [64]$$

Les coefficients de distribution de la fluctuation seront donc

$$\alpha_i = \frac{\mathcal{A}_i(u_i^n - u_1^n)}{\mathcal{A}_2(u_2^n - u_1^n) + \mathcal{A}_3(u_3^n - u_1^n)} \quad \text{pour } i = 2, 3 \quad [65]$$

L'algorithme du schéma de Roe s'écrit finalement [SDR91] :

```

If (seul  $k_i > 0$ ) then
    envoyer la fluctuation sur le nœud  $i$ 
else if (seul  $k_k < 0$ ) then
    if  $((u_i^n - u_k^n) (u_j^n - u_k^n) > 0)$  then
        distribuer la fluctuation entre les nœuds  $i$  et  $j$ 
    else if  $((u_i - u_k) \phi_e < 0)$  then
        envoyer la fluctuation sur le nœud  $i$ 
    else
        envoyer la fluctuation sur le nœud  $j$ 
    end if
end if

```

Le dénominateur dans [64] peut devenir petit. Ceci se produit si $(u_1 - u_3)$ et $(u_2 - u_3)$ ont le même signe et sont petits individuellement. Pour que l'on ait une indétermination il faut aussi que ϕ_e soit petit. De tels triangles peuvent être considérés comme étant en équilibre et sont ignorés.

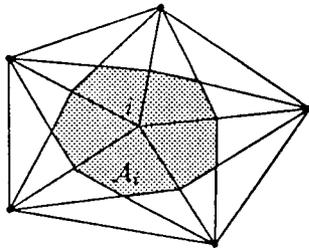


Figure 7 : Surface A_i autour du nœud i .

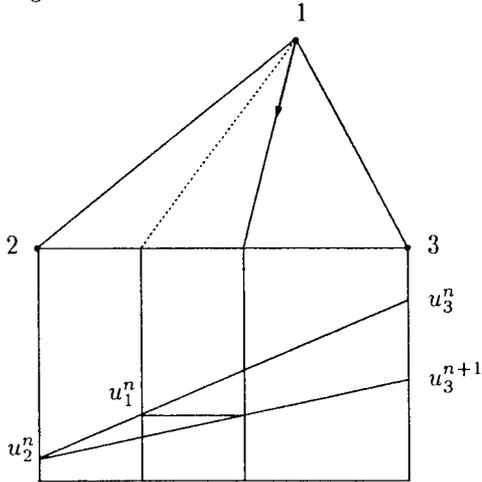


Figure 8 : Schéma de niveau de Roe : cas 1.

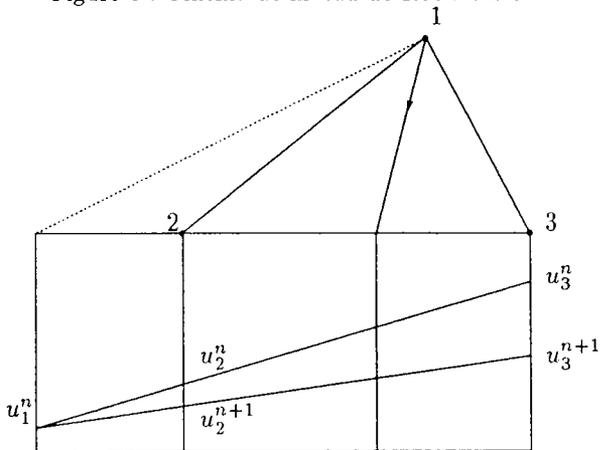


Figure 9 : Schéma de niveau de Roe : cas 2.

3.4. Linéarisation conservative

Dans la section précédente, nous avons présenté différents schémas pour une vitesse de propagation $\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{a} = \text{constante}$. En pratique, on retrouve des vitesses non uniformes autant pour les problèmes linéaires ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$) que non linéaires ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(u(x, y))$). Nous présentons dans cette section, la démarche pour obtenir une vitesse constante élémentaire $\bar{\mathbf{a}}$, en respectant la conservation de la fluctuation.

Soit l'équation scalaire non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0 \quad [66]$$

Sous forme quasi-linéaire elle s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad [67]$$

avec

$$a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \quad b(u) = \frac{\partial g(u)}{\partial u}$$

On définit les composantes \bar{a}, \bar{b} sur chaque élément de telle sorte que la fluctuation soit conservée par

$$-\phi_e = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \left(\bar{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{b} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad [68]$$

Une solution pour \bar{a}, \bar{b} qui vérifie la conservation de la fluctuation consiste à choisir

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial f(u)}{\partial x} d\Omega_e = \bar{a} \int_{\Omega_e} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega_e, \quad \int_{\Omega_e} \frac{\partial g(u)}{\partial y} d\Omega_e = \bar{b} \int_{\Omega_e} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega_e \quad [69]$$

Sous l'hypothèse u, f et g linéaires en x, y sur chaque élément, nous obtenons

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i, \quad f = \sum_{i=1}^3 N_i f_i, \quad g = \sum_{i=1}^3 N_i g_i$$

$$\nabla u = \sum_{i=1}^3 \nabla N_i u_i, \quad \nabla f = \sum_{i=1}^3 \nabla N_i f_i, \quad \nabla g = \sum_{i=1}^3 \nabla N_i g_i$$

Compte tenu de [22], \bar{a}, \bar{b} sont déduits de [69],

$$\bar{a} = \frac{\sum \mathbf{n}_{lix} f_i}{\sum \mathbf{n}_{lix} u_i}, \quad \bar{b} = \frac{\sum \mathbf{n}_{liy} g_i}{\sum \mathbf{n}_{liy} u_i} \quad [70]$$

\bar{a} et \bar{b} étant ainsi calculés, tous les schémas de la section 3.3 peuvent être appliqués pour résoudre l'équation de convection. La forme de la fluctuation est

similaire au cas de l'équation linéaire, mais elle est définie à partir des vitesses de convection linéarisées. En effet, en notant

$$\bar{\mathbf{a}} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{a} \\ \bar{b} \end{array} \right\}$$

l'expression [68] devient

$$-\phi_e = \mathcal{A}^e \bar{\mathbf{a}} \cdot \nabla u$$

A l'aide de [21] elle se réécrit

$$-\phi_e = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{a}} \cdot \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{n}_{li} = \sum_{i=1}^3 \bar{k}_i u_i$$

où

$$\bar{k}_i = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{n}_{li}$$

La fluctuation est uniquement fonction des variables nodales u_i et de la vitesse $\bar{\mathbf{a}}$, les flux n'ont pas besoin d'être évalués.

4. Exemples numériques

La validation d'un modèle numérique constitue une étape fondamentale dans toutes les méthodes de résolution numérique. Outre la vérification de la programmation, elle permet de mieux cerner le comportement des algorithmes. Dans ce but, nous soumettons le schéma de Lax-Wendroff-Richtmyer (LWR) avec masse pleine et les cinq schémas issus de la méthode de Distribution de la Fluctuation, à une série de tests faisant ressortir leurs caractéristiques essentielles.

Dans les trois exemples que nous allons considérer, le maillage est isotrope (fig.10), le pas de temps est $\Delta t = 0.01$, et le régime permanent est considéré atteint lorsque

$$\frac{\|u^{n+1} - u^n\|_{max}}{\|u^1 - u^0\|_{max}} < 10^{-6}$$

4.1. Introduction des exemples

4.1.1. Discontinuité de contact

Ce test modélise une discontinuité de contact (ou onde de cisaillement) [Spe87]. Il s'agit en fait de résoudre numériquement l'équation linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{71}$$

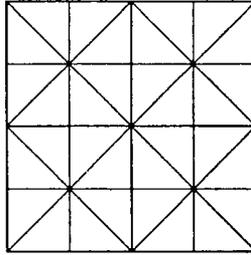


Figure 10 : Maillage isotrope.

où $a = \cos 22.5^\circ$, $b = \sin 22.5^\circ$. Le domaine de calcul est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) &= 1, & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Lorsque le régime permanent est atteint, la solution exacte est

$$\begin{cases} u_{ex}(x, y) = 1 & \text{si } bx - ay < 0 \\ u_{ex}(x, y) = 0 & \text{si } bx - ay > 0 \end{cases}$$

Le maillage est isotrope (fig.10) et comprend 30×30 éléments. La solution initiale est $u = 1$ sur tout le domaine.

4.1.2. Rotation d'un profil carré

Ce test concerne le transport d'un profil carré [Spe87], modélisé par l'équation linéaire à coefficients non constants

$$\frac{\partial u}{\partial t} + y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad [72]$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 & \text{si } x &\leq -0.65 \\ u(x, 0) &= 1 & \text{si } -0.65 < x &\leq -0.35 \\ u(x, 0) &= 0 & \text{si } -0.35 < x &\leq 0 \\ u(-1, y) &= 0 & \text{si } 0 &\leq y \leq 1 \\ u(x, 1) &= 0 & \text{si } 0 &\leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Le domaine de calcul étant constitué du rectangle $[-1, 1] \times [0, 1]$. La solution exacte vaut 1 entre les deux cercles de rayons 0.35 et 0.65 et 0 ailleurs.

Le maillage est composé de 60×30 éléments, et la fonction $u = 1$ est choisie comme solution initiale.

4.1.3. Equation de Burgers

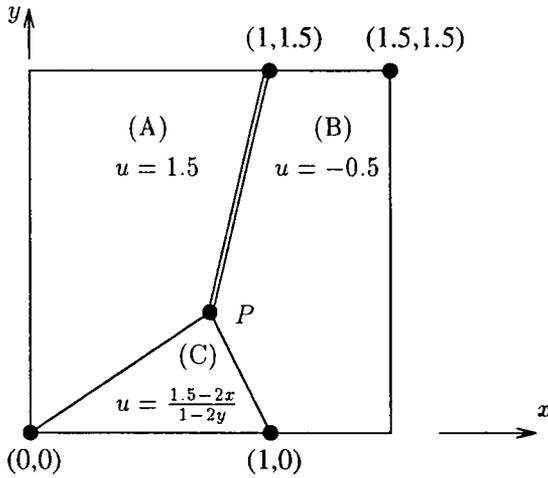


Figure 11 : Equation de Burgers, solution exacte.

L'objectif est de résoudre l'équation de Burgers [Spe87], qui constitue un modèle simplifié des équations d'Euler avec présence d'ondes de choc. Sur le domaine $[0, 1.5] \times [0, 1.5]$, nous résolvons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{73}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1.5 - 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 0) &= -0.5 & \text{si } 1 \leq x \leq 1.5 \\ u(0, y) &= 1.5 & \text{si } 0 \leq y \leq 1.5 \\ u(1.5, y) &= -0.5 & \text{si } 0 \leq y \leq 1.5 \end{aligned}$$

A l'état permanent, l'équation [73] s'écrit

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{74}$$

dont la solution exacte est donnée par (fig.11)

$$\begin{aligned} u_{ex}(x, y) &= 1.5 & \text{dans la région A} \\ u_{ex}(x, y) &= -0.5 & \text{dans la région B} \\ u_{ex}(x, y) &= \frac{1.5 - 2x}{1 - 2y} & \text{dans la région C} \end{aligned}$$

Le passage de la région (A) à la région (C) et de la région (C) à la région (B) se fait de manière continue, alors que durant le passage de (A) à (B), la variable

subit une discontinuité et passe de 1.5 à -0.5. Le point P origine du choc est de coordonnées (0.75, 0.50).

Le maillage contient 40×40 éléments, et la solution initiale est $u = -0.5$ sur tout le domaine.

4.2. Discussion

Les résultats numériques sont présentés sur les figures (12, 14, 16) sous formes d'isolignes. Des coupes effectuées à $x = 1$, à $y = 0$ et à $y = 0.975$, pour les exemples 1, 2 et 3 respectivement, sont représentées sur les figures (13, 15, 17).

Pour le schéma LWR, le choc de l'exemple 1 est assez bien localisé, mais il y a apparition d'oscillations au voisinage de la discontinuité. Ces oscillations sont assez fortes dans l'exemple 2 bien que l'équation à résoudre est linéaire. Cela est dû à la vitesse de convection qui contrairement à l'exemple précédent n'est pas constante. Dans l'exemple 3, nous assistons à de très fortes oscillations au voisinage du choc. En fait, si l'on tente de résoudre les équations d'Euler avec le schéma LWR sans addition de diffusion numérique, l'ampleur de ces oscillations est tellement intense qu'il devient impossible de converger. Il est alors impératif dans ce cas de recourir aux techniques de "shock capturing" afin d'amortir ces oscillations.

Pour les schémas construits par la méthode de Distribution de la Fluctuation, les résultats numériques confirment les résultats théoriques de la section 3. La grande diffusion et le manque de précision du schéma N, qui est du premier ordre sont apparents sur tous les tests. Le schéma LDA et le schéma de Lax-Wendroff sont nettement plus précis, mais le caractère oscillatoire au voisinage de discontinuités est confirmé. Egalement, il convient de noter que le schéma de Lax-Wendroff déduit dans le cadre de la méthode de Distribution de la Fluctuation est très proche du schéma Lax-Wendroff-Richtmyer avec masse diagonale de la section 2. Le schéma NN et le schéma de Roe sont certes meilleurs, ils ne présentent aucune oscillation, mais ils sont tout de même diffusifs, cela est manifeste dans la rotation du profil carré (fig.15). Notons que le choc présent dans le test sur l'équation de Burgers est très bien capté par ces deux derniers schémas.

5. Conclusion

Ce travail traite de la résolution de l'équation de convection bidimensionnelle en présence de discontinuités dans le domaine. Nous utilisons des schémas explicites pour la discrétisation du temps et la méthode des éléments finis pour la discrétisation de l'espace. Grâce à sa souplesse, l'élément triangulaire linéaire s'adapte particulièrement à ce type de problèmes.

Nous avons considéré deux méthodes. La première, de type centré, consiste à déterminer la solution au cours d'un pas de temps en deux étapes: une collocation par sous domaines avec un élément par sous domaine, suivie par l'application de la méthode de Galerkin. Le schéma obtenu est conservatif, précis, mais il génère des oscillations aux voisinages des chocs et nécessite l'incorporation d'un modèle de diffusion numérique.

La deuxième méthode, Distribution de la Fluctuation, est de type décentré (Upwinding). Bien qu'écrite initialement dans le cadre des volumes finis, nous avons pu réécrire les différents schémas dans un formalisme strictement éléments finis par un choix adéquat de fonctions de pondération. Les caractéristiques de chacun des schémas ayant été montrées sur une série d'exemples, nous retiendrons le schéma NN, à cause de sa simplicité et sa précision, pour capturer les chocs en fluide compressible dans la deuxième partie de cette étude [BSDN95]. Il sera comparé au schéma de Lax-Wendroff-Richtmyer.

Nous pensons qu'une suite immédiate à ce travail serait l'application de la méthode de Distribution de la Fluctuation à l'équation de convection-diffusion.

Bibliographie

- [BDRS92] G. Bourgeois, H. Deconinck, P. L. Roe, and R. Struijs. Multidimensional upwind schemes for scalar advection on tetrahedral meshes. *First European CFD Conference, Brussels*, 1992.
- [Bou93] M. Boulerhcha. *Écoulements eulériens par éléments finis avec raffinement de maillage; comparaison d'un schéma centré et de schémas décentrés*. PhD thesis, Université Laval, Québec, 1993.
- [BSDN95] M. Boulerhcha, Y. Secretan, G. Dhatt, and D. N. Nguyen. Application de la méthode des éléments finis aux équations 2-D hyperboliques: partie II: Equations d'euler en fluide compressible. *Revue européenne des éléments finis*, 1995. A paraître.
- [Don84a] J. Donea. Recent advances in computational methods for steady and transient transport problems. *Nuclear Engineering and Design*, 80:141-162, 1984.
- [Don84b] J. Donea. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:101-119, 1984.
- [DQ92] J. Donea and L. Quartapelle. An introduction to finite element methods for transient advection problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95:169-203, 1992.
- [DSB⁺92] H. Deconinck, R. Struijs, G. Bourgeois, H. Paillère, and P. L. Roe. Multi-dimensional upwind methods for unstructured grids. *AGARD R-787*, 1992.
- [DSR90] H. Deconinck, R. Struijs, and P. L. Roe. Fluctuation splitting for multidimensional convection problems: an alternative to finite volume and finite element methods. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1990-03*, 1990.
- [DT84] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne. Maloine S.A., 1984.
- [HFM86] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54:223-234, 1986.

- [Joh92] C. Johnson. Finite element methods for flow problems. *AGARD Report AR-787*, 1992.
- [Lax54] P. D. Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 7:159–193, 1954.
- [LMZ85] R. Löhner, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz. An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:441–465, 1985.
- [LW60] P. D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 13:217–237, 1960.
- [Mor85] K. W. Morton. Generalized Galerkin methods for hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52:847–871, 1985.
- [MP80] K. W. Morton and A. K. Parrott. Generalized Galerkin methods for first-order hyperbolic equations. *Journal of Computational Physics*, 36:249–270, 1980.
- [PPF⁺88] J. Peraire, J. Peiro, L. Formaggia, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz. Finite element Euler computations in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 2135–2159, 1988.
- [RBT90] R. Ramakrishnan, K. S. Bey, and E. A. Thornton. Adaptive quadrilateral and triangular finite element scheme for compressible flows. *AIAA Journal*, 28:51–59, 1990.
- [RM67] R. D. Richtmyer and K. W. Morton. *Difference methods for initial value problems*. Wiley, 1967.
- [Roe82] P. L. Roe. Fluctuations and signals, a framework for numerical evolution problems. *Proceedings of Numerical Methods for Fluid Dynamics I*, pages 219–257, 1982. Ed. K. W. Morton and M. J. Baines, Academic Press, London.
- [Roe86] P. L. Roe. Discrete models for the numerical analysis of time-dependant multidimensional gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 63:458–476, 1986.
- [Roe87] P. L. Roe. 'optimum' upwind advection on triangular meshes. *Cranfield Inst. of Techn. Report No 8720*, 1987.
- [SDP⁺91] R. Struijs, H. Deconinck, P. De Palma, P. L. Roe, and K. G. Powell. Progress on multidimensional upwind Euler solvers for unstructured grids. *AIAA 91-1550*, 1991.
- [SDR91] R. Struijs, H. Deconinck, and P. L. Roe. Fluctuation splitting schemes for the 2D Euler equations. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1991-01*, 1991.
- [SED94] A. Soulaïmani, N-E. Elkhadir Elyamani, and C. Deschênes. Une méthode d'éléments finis pour le calcul des écoulements compressibles utilisant les variables conservatives et la méthode SUPG. *Revue européenne des éléments finis*, 3:211–245, 1994.

- [Spe87] S. P. Spekreijse. Multigrid solution of monotone second-order discretisations of hyperbolic conservation laws. *Mathematic of computation*, 49:135–155, 1987.
- [Str86] G. Strang. *Introduction to applied mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [WC84] P. Woodward and P. Colella. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 54:115–173, 1984.

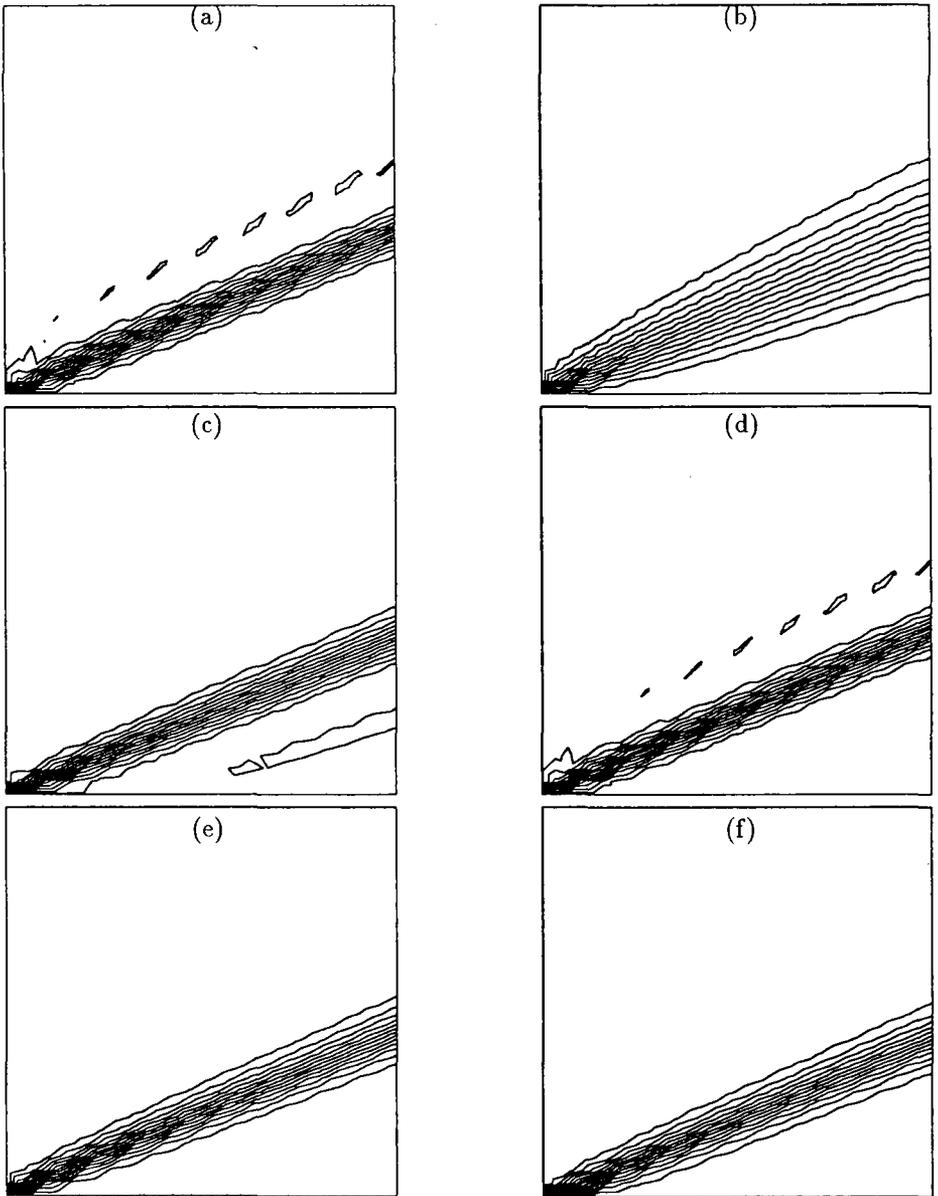


Figure 12 : Onde de cisaillement : (a) schéma LWR, (b) schéma N, (c) schéma LDA, (d) schéma Lax-Wendroff, (e) schéma NN, (f) schéma de Roe.

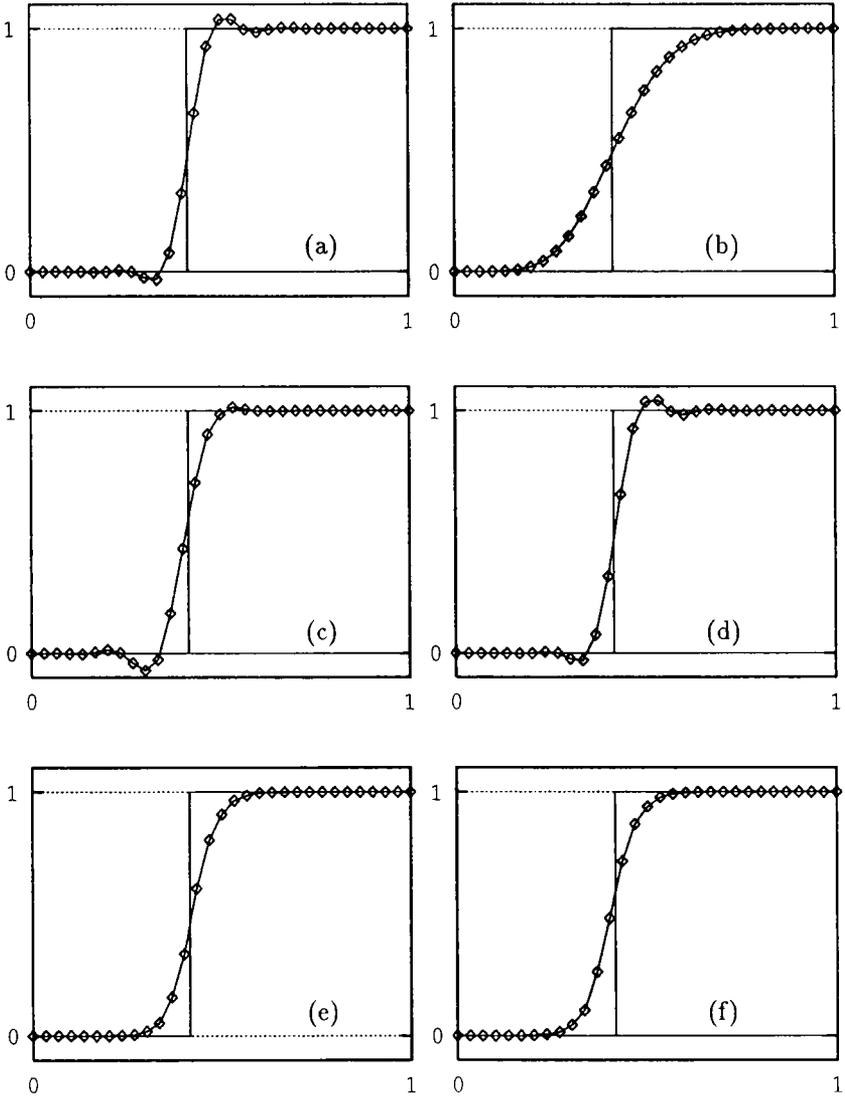


Figure 13 : Onde de cisaillement : (a) schéma LWR, (b) schéma N, (c) schéma LDA, (d) schéma Lax-Wendroff, (e) schéma NN, (f) schéma de Roe.

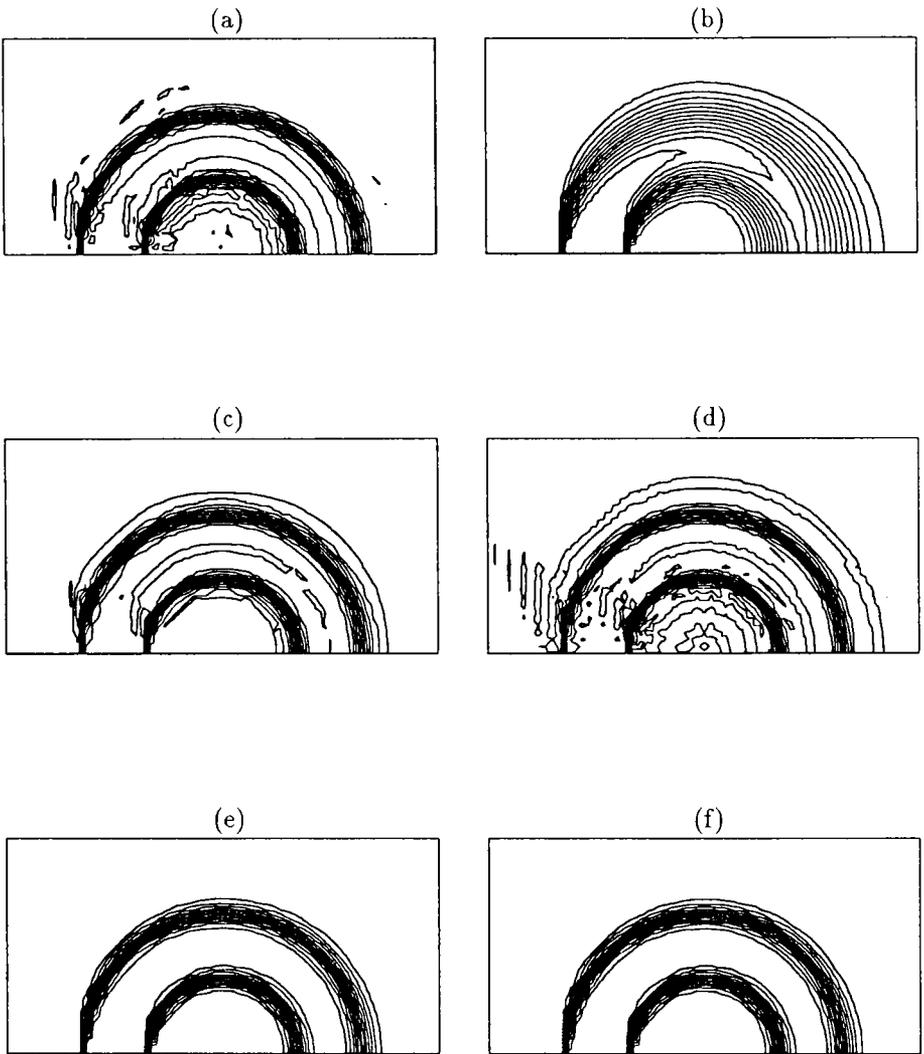


Figure 14 : Rotation d'un profil carré : (a) schéma LWR, (b) schéma N, (c) schéma LDA, (d) schéma Lax-Wendroff, (e) schéma NN, (f) schéma de Roe.

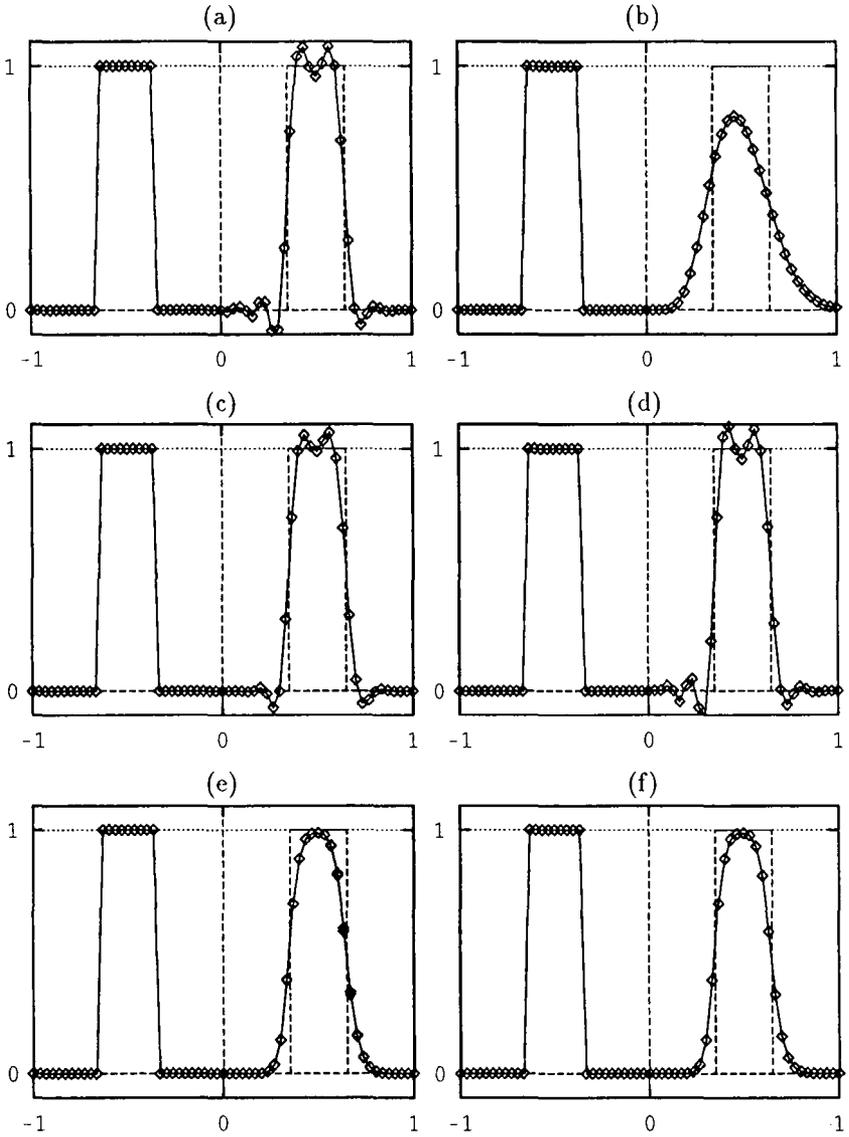


Figure 15 : Rotation d'un profil carré : (a) schéma LWR, (b) schéma N, (c) schéma LDA, (d) schéma Lax-Wendroff, (e) schéma NN, (f) schéma de Roe.

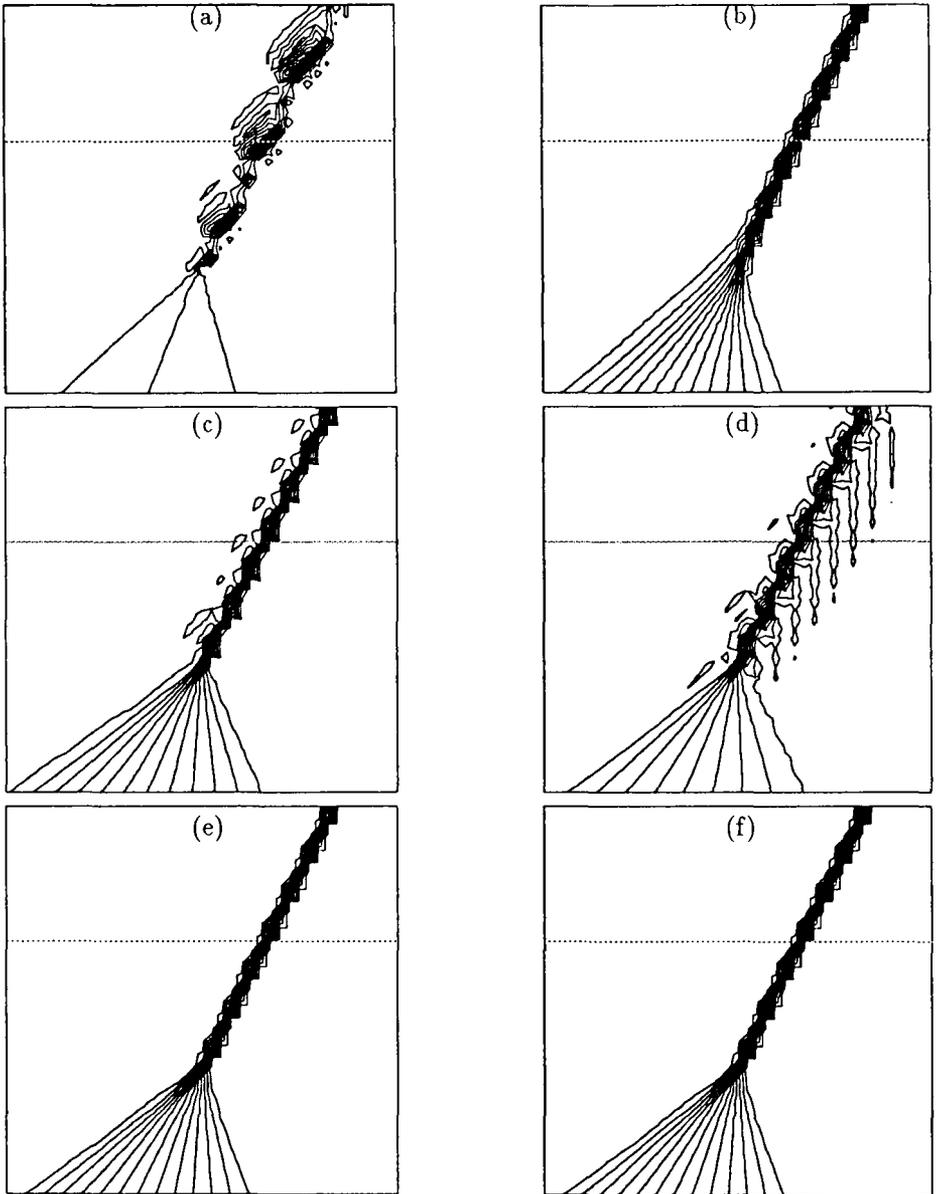


Figure 16 : Equation de Burgers : (a) schéma LWR, (b) schéma N, (c) schéma LDA, (d) schéma Lax-Wendroff, (e) schéma NN, (f) schéma de Roe.

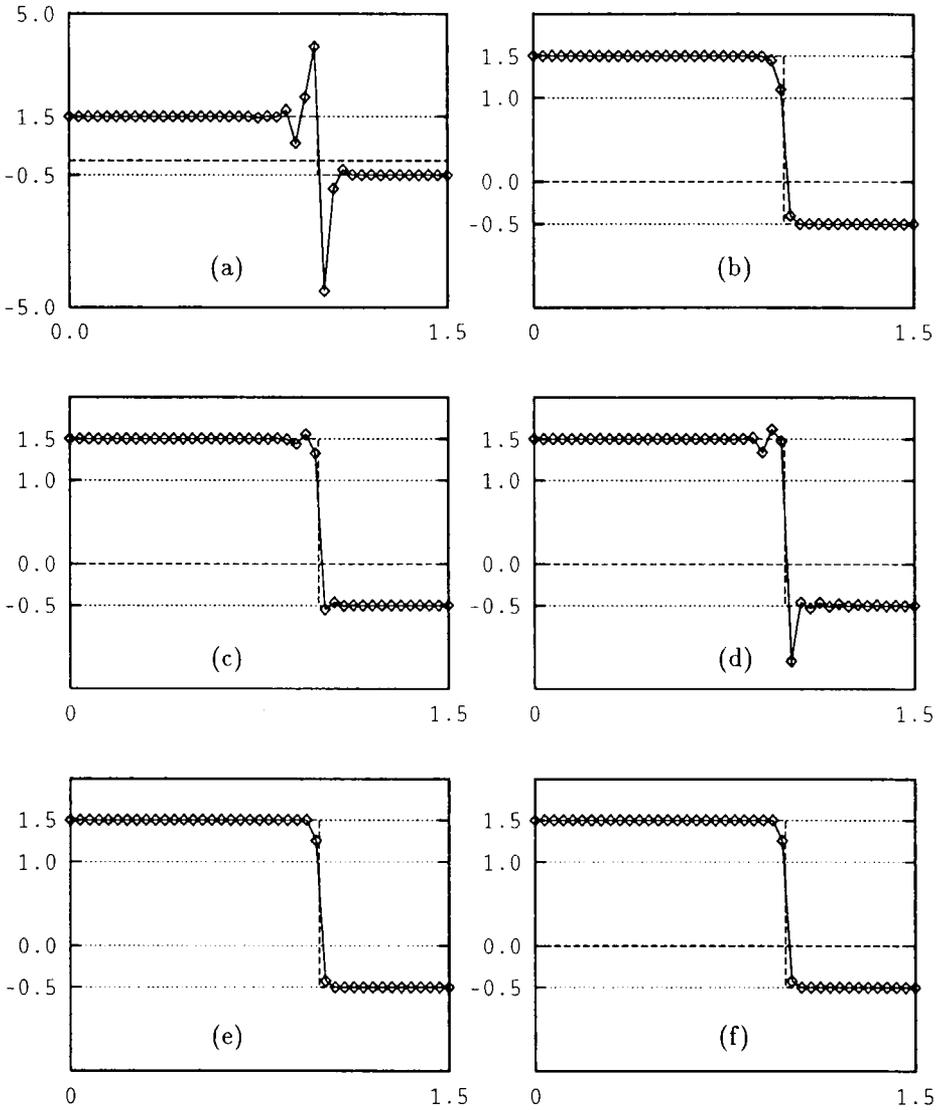


Figure 17 : Equation de Burgers : (a) schéma LWR, (b) schéma N, (c) schéma LDA, (d) schéma Lax-Wendroff, (e) schéma NN, (f) schéma de Roe.

Article reçu le 4 septembre 1994.
Version révisée le 25 février 1995.