

---

# L'approximation quadratique et l'approche Taylor-Galerkin pour la modélisation des problèmes transitoires d'advection-diffusion

Ali Khelifa — Jean-Loup Robert — Yvon Ouellet

Département de génie civil  
Université Laval  
Québec, Canada G1K 7P4

---

*RÉSUMÉ.* Ce papier présente une étude numérique du comportement d'un modèle basé sur l'approximation quadratique en éléments finis pour la modélisation de problèmes transitoires de transport par advection-diffusion. Ce modèle repose sur une technique classique de fractionnement (splitting) en temps de l'équation de transport. La partie d'advection est traitée avec une approche Taylor-Galerkin  $\theta$ -pondérée de deuxième et troisième ordre. Quant à l'équation de diffusion, elle est discrétisée par un schéma standard du type Galerkin  $\theta$ -pondéré. Pour ces deux phases et à l'aide d'une analyse de Fourier, une étude d'erreurs est proposée en considérant des éléments quadratiques. Les résultats de cette analyse révèlent des informations intéressantes sur le comportement de schémas numériques basés sur des approximations élevées. Ces informations sont validées par quelques tests numériques représentatifs à une et deux dimensions.

*ABSTRACT.* This paper presents a numerical study of the behaviour of a model based on quadratic finite element approximation for transient advection-diffusion problem modelling. This model is based on a classical splitting technique, the advection-diffusion equation being split in time. The advection part is computed by a  $\theta$ -weighting Taylor-Galerkin approach. As to the diffusion equation, it's discretized by a standard  $\theta$ -weighting Galerkin scheme. For these two phases and based on Fourier method, an error analysis is proposed using quadratics elements. Results of this analysis show interesting investigations on the behaviour of numerical schemes based on high approximations. These investigations are confirmed by some representative numerical examples in one and two dimensions.

*MOTS-CLÉS :* advection-diffusion, splitting, Taylor-Galerkin, analyse de Fourier, approximation quadratique.

*KEY WORDS :* advection-diffusion, splitting, Taylor-Galerkin, Fourier analysis, quadratic approximation.

## 1. Introduction

Il est à présent bien connu que les méthodes numériques standards produisent des oscillations parasites et non physiques lorsqu'elles sont appliquées aux problèmes advectifs de transport. C'est ainsi que durant les deux dernières décennies de nombreux chercheurs et praticiens des techniques numériques ont essayé d'apporter une interprétation et des remèdes aux déficiences en question.

Une des plus célèbres contributions réside dans les travaux de Donea qui remontent déjà au début des années quatre-vingts. En effet, à la lumière des observations soulignées par Morton et Parrott [MOR 80] concernant les fonctions de pondérations de Petrov-Galerkin, Donea [DON 84] introduisit l'approche Taylor-Galerkin (TG) en éléments finis pour modéliser les problèmes transitoires d'advection. La philosophie de la méthode consiste à faire précéder la discrétisation spatiale par la discrétisation temporelle en considérant un développement en série de Taylor du terme transitoire, ce qui est l'inverse de la démarche classique suivie par la méthode des éléments finis. Une analyse complète de la méthode est présentée dans la référence [DON 87].

En utilisant une technique de désintégration d'opérateurs différentiels proposée par Marchuk en [MAR 75] sous l'appellation "*Splitting method*" et par Yanenko (voir [YAN 79]) comme "*fractional-step method*", Donea et al. ont présenté [DON 84] une extension de la méthode TG aux problèmes transitoires d'advection-diffusion. L'application de cette démarche aux équations de Navier-Stokes a aussi fait l'objet des récents travaux de Laval [LAV 88, LAV 90]. Toutefois, le problème des conditions aux limites à prescrire lors de la modélisation de chacune des phases d'advection et de diffusion en utilisant ladite méthode de désintégration reste critique. C'est d'ailleurs là où réside la faiblesse de la stratégie en question.

La méthode Taylor-Galerkin est encore discutée dans un des plus récents articles de Donea [DON 92] en utilisant des éléments linéaires. Une présentation synthétique des méthodes adaptées à la résolution par éléments finis des problèmes de transport par advection-diffusion est aussi exposée.

Dans le présent travail, on se propose de tester et d'analyser l'algorithme Taylor-Galerkin/splitting en utilisant des fonctions d'approximation quadratiques en éléments finis. Pour ce faire, le problème transitoire d'advection-diffusion d'une variable scalaire est considéré. Pour chacune des équations d'advection et de diffusion et sur la base d'une analyse de Fourier, une étude détaillée des erreurs numériques est présentée dans un contexte unidimensionnel. Des tests numériques à une dimension sont prévus pour vérifier les résultats de cette étude. Quelques exemples en deux dimensions sont aussi traités avec des maillages en éléments quadratiques de forme triangulaire (T6) et quadrilatérale (Q9). Une discussion sur les résultats obtenus et leur comparaison avec les récents travaux de Donea et al. [DON 92] est enfin présentée.

Le contenu de l'article est ordonné comme suit: dans la section suivante le problème de transport par advection-diffusion est posé. La section 3 est réservée à un bref rappel de la technique de fractionnement. Les formulations par éléments finis choisies pour les deux problèmes d'advection et de diffusion sont détaillées à la section 4. Après une présentation de l'analyse d'erreur dans la cinquième partie, les tests numériques en une et deux dimensions sont considérés dans la section 6. Une conclusion est finalement présentée.

**2. Problème transitoire d'advection-diffusion**

Le problème classique de transport d'une quantité scalaire  $\phi$  par advection-diffusion en régime transitoire consiste à trouver  $\phi(x,t)$ ,  $x \in \Omega$  et  $t \in ]0,T[$ ,  $T>0$ , de sorte que:

$$\phi_{,t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot \nu \nabla \phi = f \quad , \text{ sur } \Omega, t \in ]0,T[ \quad [1]$$

$$\phi(x,t) = d(x,t) \quad , \text{ sur } \Gamma_d, t \in ]0,T[ \quad [2]$$

$$\mathbf{n}(x) \cdot \nu \nabla \phi(x,t) = g(x,t) \quad , \text{ sur } \Gamma_g, t \in ]0,T[ \quad [3]$$

$$\phi(x,0) = \phi_0(x) \quad , x \in \Omega \quad [4]$$

où:  $f, \phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d: \Gamma_d \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions préalablement spécifiées.  $\mathbf{u}$  représente le vecteur vitesse supposé solénoïdal, i.e,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , et  $\nu > 0$  dénote le coefficient de diffusion.  $t$  désigne la variable temps et  $T$  la période temporelle d'étude.  $\Omega$  est un borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma$  décomposée comme suit:

$$\Gamma = \overline{\Gamma_d \cup \Gamma_g} \quad \text{et} \quad \emptyset = \Gamma_d \cap \Gamma_g \quad [5]$$

Par  $\mathbf{n}$  on note le vecteur normal à  $\Gamma$ .

En réalité, l'usage de la technique de fractionnement pour la résolution d'un tel problème pose dans certaines circonstances de sérieuses difficultés, spécialement pour les conditions aux limites à prescrire à la sortie du domaine d'étude. Par exemple, dans le cas de l'équation d'advection, des conditions de type [2] ne peuvent être envisagées à la partie aval de l'écoulement.

Ceci étant souligné, le problème d'advection-diffusion traité dans la suite du présent travail est supposé dépourvu de ces particularités. Le second membre de l'équation [1] est aussi supposé absent.

**3. Stratégie de résolution: technique de fractionnement**

En un premier temps, nous utilisons une technique de fractionnement pour faire éclater en temps les deux opérateurs différentiels de l'équation [1]. En effet, si on considère l'équation [1] sans second membre, la philosophie de fractionnement consiste à réécrire cette équation sous la forme:

$$\phi_{,t} + O\phi = 0 \quad [6]$$

avec:

$$O = O_1 + O_2, \quad O_1 = \mathbf{u} \cdot \nabla \quad \text{et} \quad O_2 = -\nabla \cdot \nu \nabla \quad [7]$$

Sur l'intervalle temporel  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ , le problème [6] peut être représenté par:

$$\phi_{p,t} + O_p \phi_p = 0 \quad , p=1,2 \quad [8]$$

de sorte que pour  $p=1$ , le problème [8] décrit la phase d'advection, soit:

$$\phi_{1,t} + O_1 \phi_1 = 0 \tag{9}$$

et pour  $p=2$ , le problème [8] décrit la phase de diffusion, soit:

$$\phi_{2,t} + O_2 \phi_2 = 0 \tag{10}$$

avec la notation:

$$\phi_1^n = \phi^n, \phi_2^n = \phi_1^{n+1} \text{ et } \phi^{n+1} = \phi_2^{n+1} \tag{11}$$

#### 4. Formulation par éléments finis

Il s'agit de discrétiser les problèmes [9] et [10] sur une période temporelle égale à  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . Ces deux problèmes sont traités séparément avec des schémas convenables de discrétisation comme l'indiquent les points ci-dessous.

##### 4.1. Phase d'advection

La phase d'advection est donc représentée par l'équation [9] qui, rapportée au temps  $t^n = n\Delta t$ , s'écrit:

$$\phi_{1,t}^n + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_1^n = 0 \tag{12}$$

Par un développement en série de Taylor au quatrième ordre de  $\phi_1^{n+1} = \phi_1(\mathbf{x}, (n+1)\Delta t)$  autour de  $(\mathbf{x}, n\Delta t)$ , on déduit:

$$\frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} = \partial_t \phi_1^n + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} \phi_1^n + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} \phi_1^n + o((\Delta t)^3) \tag{13}$$

où  $\partial_t$ ,  $\partial_{tt}$  et  $\partial_{ttt}$  désignent les symboles de dérivation partielle temporelle première, seconde et tertiaire respectivement.

De même, si on effectue un développement similaire de  $\phi_1(\mathbf{x}, n\Delta t)$  autour de  $(\mathbf{x}, (n+1)\Delta t)$ , il découle:

$$\frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} = \partial_t \phi_1^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} \phi_1^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_{ttt} \phi_1^{n+1} + o((\Delta t)^3) \tag{14}$$

Le schéma  $\theta$ -pondéré s'obtient en effectuant l'opération  $(1-\theta_1)[13] + \theta_1[14]$ ,  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ , comme le précise la référence [PAR 90]. Ceci donne:

$$\frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} = \left( \partial_t + s \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} \right) \left( (1 - \theta_1) \phi_1^n + \theta_1 \phi_1^{n+1} \right) + \left( \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} \right) \left( (1 - \theta_1) \phi_1^n - \theta_1 \phi_1^{n+1} \right) + o((\Delta t)^3) \quad [15]$$

où  $s$  vaut 0 pour un développement d'ordre 2 et  $1/3$  pour un développement d'ordre 3.

Comme  $\mathbf{u}$  est supposé solénoïdal, il est possible d'établir à partir de l'équation [12] les relations suivantes:

$$\partial_t = -\mathbf{u} \cdot \nabla, \quad \partial_{tt} = \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla) \quad \text{et} \quad \partial_{ttt} = (\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla)) \partial_t \quad [16]$$

Par une combinaison des équations [15] et [16], on déduit:

$$(cm) \Delta \phi_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 - 2\theta_1) (\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla (\phi_1))) = 0 \quad [17]$$

avec:

$$(cm)z = 1 + (\theta_1 \Delta t) \mathbf{u} \cdot \nabla z - \frac{\Delta t^2}{2} (s - \theta_1) (\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla z)), \quad \Delta \phi_1 = \frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \phi_1 = \phi_1^n \quad [18]$$

À ce stade, il est question de formuler, à l'aide de la méthode des résidus pondérés de Galerkin, le problème variationnel associé à [17]. Il consiste, en terme d'une approximation par éléments finis, à trouver  $\phi_1^h \in \mathcal{K}_r^h$ ,  $t \in [0, T]$  tel que, pour tout  $\omega_1^h \in \mathcal{V}^h$ , nous aurons:

$$0 = \int_{\Omega} \omega_1^h \left[ (cm) \Delta \phi_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 - 2\theta_1) (\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla (\phi_1))) \right] d\Omega \quad [19]$$

et

$$0 = \int_{\Omega} \omega_1^h (\phi_1^h|_{t=0} - (\phi_1)_0) d\Omega \quad [20]$$

où  $(\phi_1)_0$ , correspond à la solution du problème d'advection-diffusion à la période temporelle précédente d'analyse.  $\mathcal{K}_r^h$  désigne l'espace des fonctions test. Si on considère que  $\mathcal{K}_r^h$  consiste en l'ensemble des fonctions d'interpolation de classe  $C^0$  en éléments finis, de sorte que si  $\phi_1^h \in \mathcal{K}_r^h$ , alors l'équation [19] devient:

$$0 = \int_{\Omega} \omega_1^h \left[ (1 + (\theta_1 \Delta t) \mathbf{u} \cdot \nabla) \Delta \phi_1 + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_1 \right] d\Omega + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \omega_1^h \left[ -\frac{\Delta t^2}{2} (s - \theta_1) (\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla)) \Delta \phi_1 - \frac{\Delta t}{2} (1 - 2\theta_1) (\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_1)) \right] d\Omega \quad [21]$$

et la condition aux limites correspondante s'écrit:

$$\phi_1^h(x,t) = d(x,t), \forall x \in \Gamma_d \text{ et } t \in ]0,T[ \tag{22}$$

$\mathcal{V}^h$  représente l'espace des fonctions poids et  $N_{el}$  le nombre de domaines élémentaires  $\Omega^e$ . On admet aussi que  $\mathcal{V}^h$  regroupe des fonctions d'interpolation de classe  $C^0$  en éléments finis et donc si  $\omega_1^h \in \mathcal{V}^h$ , alors:

$$\omega_1^h(x,t) = 0, \forall x \in \Gamma_d \tag{23}$$

L'équation [19] constitue ce qui a été appelé la formulation "Taylor-Galerkin  $\theta$ -pondérée" appliquée au problème d'advection [9]. L'équation [21] constitue la forme intégrale adoptée en utilisant une approximation quadratique. Il est à noter que dans cette équation, on n'a pas appliqué l'intégration par parties des termes d'ordre supérieur afin d'éviter l'apparition des termes de contour difficilement quantifiables dans cette première étape de résolution (advection). Enfin, pour  $s=0$ , le modèle sera noté par TG2 $\theta$  correspondant à un schéma du second ordre de [15]. On le notera par TG3 $\theta$  lorsque  $s=1/3$ , ce qui correspond à un schéma de troisième ordre de l'équation [15].

### 4.2 Phase de diffusion

La phase de diffusion consiste en la résolution de l'équation [10] qui au temps  $t^n=n\Delta t$ , s'écrit:

$$\phi_{2,t} - \nabla \cdot v \nabla \phi_2 = 0 \tag{24}$$

avec  $\phi_2 = \phi_2^h$

La formulation intégrale qu'on se propose de considérer pour ce problème repose sur la méthode des résidus pondérés classique de Galerkin. En terme d'une approximation par éléments finis, il s'agit de trouver  $\phi_2^h \in \mathcal{K}_T^h, t \in [0,T]$  tel que, pour tout  $\omega_2^h \in \mathcal{V}^h$ , nous aurons après intégration par partie:

$$\int_{\Omega} \left( \omega_2^h \phi_{2,t}^h + \nabla \omega_2^h \cdot v \nabla \phi_2^h \right) d\Omega = \int_{\Gamma_g} \omega_2^h g d\Gamma \tag{25}$$

et

$$0 = \int_{\Omega} \omega_2^h \left( \phi_{2,t=0^-}^h - (\phi_2)_0 \right) d\Omega \tag{26}$$

où  $(\phi_2)_0$  correspond à la solution du problème d'advection à la période temporelle actuelle d'analyse.  $\phi_2^h$  et  $\omega_2^h$  représentent des fonctions d'interpolation de classe  $C^0$  vérifiant les mêmes conditions [22] et [23] que  $\phi_1^n$  et  $\omega_1^n$  respectivement.

En ce qui concerne la discrétisation temporelle, l'équation [25] est traité avec un schéma de type Euler en différences finies lequel est pondéré par le coefficient  $\theta_2$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ .

### 5. Analyse d'erreurs

Pour chacune des phases d'advection et de diffusion représentées par les problèmes [21] et [25], nous avons mené une étude d'erreurs en utilisant une analyse de Fourier dans un contexte unidimensionnel selon la démarche proposée récemment par Khelifa et Ouellet [KHE soumis].

En admettant que la vitesse d'advection  $u$  et le coefficient de diffusion  $\nu$  sont constants, la première étape de cette analyse consiste à établir la relation aux différences (le stencil) relative à chacun des deux problèmes en utilisant des éléments quadratiques de type  $L3$  (discrétisation uniforme). L'influence des conditions aux limites peut être négligée ou supprimée (cas d'un domaine infini ou de conditions aux limites périodiques dans un domaine fini d'étude respectivement, [HIR 88]).

En fait, l'approximation quadratique engendre deux équations aux différences distinctes correspondant à ce qu'on intitule par la suite le noeud extrémité et le noeud milieu. Pour une discrétisation temporelle à deux niveaux, ces relations aux différences peuvent être formulées en général sous la forme suivante selon la notation d'Einstein :

$$a_i \phi_i^{n+1} + b_i \phi_i^n = 0 \quad \text{noeud extrémité } i=j-2 \text{ à } j+2 \quad [27a]$$

$$\tilde{a}_k \phi_k^{n+1} + \tilde{b}_k \phi_k^n = 0 \quad \text{noeud milieu } k=j \text{ à } j+2 \quad [27b]$$

où  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $\tilde{a}_k$  et  $\tilde{b}_k$  désignent des coefficients reliés au schéma numérique et bien entendu aux paramètres définissant le problème physique.

Présenté dans un contexte d'analyse d'erreur de troncature par Cullen et Morton [CUL 80], sous forme d'analyse modale par Cullen [CUL 82] et Bates et Cathers [BAT 86] et sous une forme un peu plus générale d'analyse d'erreurs de dissipation et de dispersion récemment par Khelifa et Ouellet [KHE soumis], la méthodologie préconisée pour l'étude du schéma décrit par l'équation [27] repose sur l'analyse de Fourier et consiste, en substituant le mode  $\phi_0 e^{-i\omega t} e^{ikx}$  dans cette équation, à rechercher une solution ayant la forme :

$$\phi_j^n = \phi_0 e^{-i(\omega(n\Delta t))} e^{ik(jh)} \quad \text{noeud extrémité} \quad [28a]$$

$$\tilde{\phi}_{j+1}^n = \tilde{\phi}_0 e^{-i(\omega(n\Delta t))} e^{ik(j+1)h} \quad \text{noeud milieu} \quad [28b]$$

où  $\phi_0$  et  $\tilde{\phi}_0$  représentent les valeurs initiales de la solution numérique calculée aux noeuds extrémité et milieu respectivement,  $\omega$  la dispersion numérique (généralement complexe),  $k$  le nombre d'onde et  $h$  le pas d'espace.

En introduisant [28] dans [27], on aboutit à un système d'équations de forme :

$$\left(G \lambda_1 + \mu_1\right)\phi_0 + \left(G \lambda_2 + \mu_2\right)\tilde{\phi}_0 = 0 \quad \text{noeud extrémité} \quad [29a]$$

$$\left(G \tilde{\lambda}_1 + \mu_1\right)\phi_0 + \left(G \tilde{\lambda}_2 + \mu_2\right)\tilde{\phi}_0 = 0 \quad \text{noeud milieu} \quad [29b]$$

où  $G = e^{-i\omega\Delta t}$  et  $\lambda_i, \mu_i, \tilde{\lambda}_i$  et  $\mu_i$  désignent des coefficients généralement complexes et fonction de l'angle de phase  $\beta = kh$ , des paramètres reliés au problème physique et d'autres reliés au schéma numérique. En ce qui concerne les formulations données par [21] et [25], les valeurs de ces coefficients sont présentées en annexes.

Afin d'éviter la solution triviale, le déterminant de la matrice des coefficients associée au système [29] doit être égal à zéro, soit :

$$\left(G \lambda_1 + \mu_1\right)\left(G \tilde{\lambda}_2 + \mu_2\right) - \left(G \lambda_2 + \mu_2\right)\left(G \tilde{\lambda}_1 + \mu_1\right) = 0 \quad [30]$$

Les racines de cette équation peuvent être formulées simplement par :

$$G = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad [31]$$

où :

$$A = \lambda_1 \tilde{\lambda}_2 - \lambda_2 \tilde{\lambda}_1 \quad [32a]$$

$$B = \left(\lambda_1 \mu_2 - \tilde{\lambda}_2 \mu_1\right) - \left(\lambda_2 \mu_1 - \tilde{\lambda}_1 \mu_2\right) \quad [32b]$$

$$C = \mu_1 \mu_2 - \mu_2 \mu_1 \quad [32c]$$

L'équation [31] exprime la relation modale ou de dispersion numérique caractéristique du schéma numérique basé sur une approximation quadratique. On note la présence de deux valeurs possibles de  $G$  dans cette équation. La valeur correspondant au signe "+", notée  $GP$  dans la suite de l'article, est attribuée au mode physique et assure la propagation de la solution, alors que la valeur correspondant au signe "-", notée  $GM$  par la suite, correspond au mode de calcul et affecte la stabilité du schéma numérique selon Bates et Cathers [BAT 86]. En réalité, il a été prouvé que les deux modes  $GP$  et  $GM$  peuvent affecter simultanément la stabilité du schéma [KHE soumis].

Pour que la solution recherchée [28] soit numériquement stable, il est évident qu'il faut que les modules de  $GP$  ( $|GP|$ ) et de  $GM$  ( $|GM|$ ) soient inférieurs à l'unité sinon l'amplitude de l'onde sera amplifiée indéfiniment. Ceci exprime donc la condition de stabilité proprement dite du schéma numérique basé sur une approximation quadratique.

À propos du problème de diffusion [25], cette analyse a révélé, comme prévu, que  $GP$  et  $GM$  sont réels. Les modules ou les valeurs absolues de ces derniers sont présentés sur la figure 1 en fonction de l'angle de phase  $\beta$  et du nombre de diffusion  $D = \nu\Delta t/h^2$ . Cette illustration montre que le schéma explicite est inconditionnellement instable alors que les schémas correspondant à  $\theta_2$  égal  $1/2$  et  $1$  sont inconditionnellement stables comme il est bien connu. Il paraît aussi que, contrairement à ce qui a été établi pour l'équation d'advection [KHE soumis], la stabilité du problème parabolique est plutôt dictée par le mode de calcul  $GM$ .

Ayant obtenu les modes  $GP$  et  $GM$ , il est possible d'évaluer les erreurs numériques en tant que variables transitoires selon l'approche proposée par Khelifa et Ouellet [KHE soumis], elles s'expriment au temps  $t$  par :

$$E'_{ne} = |G'_{ne}| e^{-i(\Phi'_{ne} - \Phi'_{ex})} \quad \text{noeud extrémité} \quad [33a]$$

$$E'_{nm} = |G'_{nm}| e^{-i(\Phi'_{nm} - \Phi'_{ex})} \quad \text{noeud milieu} \quad [33b]$$

où  $E'_{ne}$  et  $E'_{nm}$  désignent les erreurs numériques associées aux noeuds extrémité et milieu respectivement au temps  $t=n\Delta t$ ,  $\Phi'_{ne}$  et  $\Phi'_{nm}$  les phases numériques correspondantes et  $\Phi'_{ex}$  la phase exacte. Les facteurs  $G'_{ne}$  et  $G'_{nm}$  sont donnés par :

$$G'_{ne} = CP.GP^n + CM.GM^n \quad [34a]$$

$$G'_{nm} = CP.RP.GP^n + CM.RM.GM^n \quad [34b]$$

où  $RP$  et  $RM$  désignent les rapports entre les amplitudes initiales de l'onde aux noeuds milieu et extrémité lorsque  $G$  prend les valeurs  $GP$  et  $GM$  respectivement et les coefficients  $CP$  et  $CM$  sont :

$$CP = \frac{(1 - RM)}{(RP - RM)}, \quad CM = \frac{(1 - RP)}{(RM - RP)} \quad [35]$$

Les erreurs de dissipation et de dispersion s'expriment alors au temps  $t$  par :

$$\text{Erreur de dissipation} = \begin{cases} |G'_{ne}| & \text{noeud extrémité} \\ |G'_{nm}| & \text{noeud milieu} \end{cases} \quad [36]$$

$$\text{Erreur de dispersion} = \begin{cases} \Phi'_{ne} - \Phi'_{ex} = tg^{-t} \left( \frac{-Im \operatorname{ag}(E'_{ne})}{\operatorname{Rée}(E'_{ne})} \right) & \text{noeud extrémité} \\ \Phi'_{nm} - \Phi'_{ex} = tg^{-t} \left( \frac{-Im \operatorname{ag}(E'_{nm})}{\operatorname{Rée}(E'_{nm})} \right) & \text{noeud milieu} \end{cases} \quad [37]$$

Les coefficients  $RP$ ,  $RM$ ,  $CP$  et  $CM$  correspondant au problème de diffusion [25] sont montrés sur la figure 2. Il sont apparus réels et identiques pour les trois valeurs considérées du coefficient de pondération  $\theta_2$  et celles du coefficient de diffusion  $D$ . Pour ce problème de diffusion, la figure 3 présente le comportement de l'erreur de dissipation (l'erreur de dispersion est nulle) pour les situations caractérisées par un angle de phase  $\beta$  de  $\pi/10$  et un nombre de diffusion  $D$  de 0.2 et  $\beta=\pi/5$  et  $D=1/2$ . Trois remarques importantes méritent d'être soulignées. Premièrement, le comportement du schéma aux noeuds extrémité et milieu ne présente pas de différences notables particulièrement lorsque  $\theta_2$  égal à  $1/2$  ou  $1$ . En second lieu, l'évolution de l'erreur est monotone et enfin, même s'il a été prouvé par l'étude des modes  $GP$  et  $GM$  que le schéma relatif à  $\theta_2$  égal à  $1$  est inconditionnellement stable (les modules de ces modes sont inférieurs à l'unité), ce schéma génère une erreur de dissipation qui a tendance à amplifier la solution numérique et non à l'amortir. Ces remarques seront vérifiées dans le traitement des exemples numériques présentés dans la prochaine section.

À propos du problème d'advection [21], la même démarche a été suivie pour mener l'analyse d'erreur. Il a été prouvé [KHE soumis] que pour un problème hyperbolique tel que [21], les modes  $GP$  et  $GM$  et l'ensemble des coefficients  $RP$ ,  $RM$ ,  $CP$  et  $CM$  sont complexes en général et varient en fonction de l'angle de phase, du nombre de Courant et du coefficient de pondération  $\theta_1$ . Ces coefficients participent donc non seulement à la perturbation de l'amplitude de l'onde mais aussi à sa phase, comme le montrent les équations [34] et [37]. Les résultats de l'étude des erreurs de dissipation et de dispersion présentés dans les figures 4 à 7 a été mené dans les cas où l'angle de phase  $\beta$  égal à  $\pi/10$  et le nombre de Courant  $Cr$  égal à 0.3 et  $\beta=\pi/10$  et  $Cr=0.9$ .

Plusieurs remarques ressortent des résultats de cette étude. Pour les schémas correspondant à  $\theta_1=0$  et  $\theta_1=1$ , les modèles TG20 et TG30 se distinguent principalement par l'erreur de dispersion. Le modèle TG30 paraît plus dispersif que TG20 lorsque  $\theta_1=1$ . Pour les deux modèles, la solution calculée au noeud extrémité est plus amplifiée que celle au noeud milieu lorsque  $\theta_1=0$ . Les résultats obtenus avec  $\theta_1=1/2$  montrent un comportement transitoire des erreurs de dissipation et de dispersion. Il s'avère que l'amplitude de l'onde est amplifiée au noeud extrémité et amortie au noeud milieu selon deux modes opposés tout en assurant la stabilité inconditionnelle du schéma comme il a été établi dans l'étude des modes  $GP$  et  $GM$  [KHE soumis]. En plus des deux modes opposés à hautes fréquences, le traitement de l'exemple illustré par les figures 6 et 7 révèle l'existence de deux autres modes parasites à basses fréquences mais toujours opposés. Ce même exemple met aussi en évidence les performances relatives des modèles TG20 et TG30 pour  $\theta_1=1/2$ . Le modèle TG30 paraît plus dissipatif au noeud extrémité par rapport au modèle TG20 et inversement pour le noeud milieu. Quant à l'erreur de dispersion, le modèle TG20 s'avère nettement plus dispersif que le modèle TG30. Cette erreur consiste en une avance de phase dans le cas de TG20 et en un retard de phase pour TG30. Pour les deux modèles, cette erreur de dispersion est légèrement plus importante au noeud extrémité qu'au noeud milieu. On tente de vérifier ces remarques par les exemples présentés dans la section suivante.

À titre de comparaison, dans les travaux publiés par Donea et al. [DON 87] et Donea et Quartapelle [DON 92], il a été établi que pour le problème d'advection, le schéma de Crank-Nicolson Taylor Galerkin produit une erreur de dissipation exacte en considérant une approximation linéaire. Les résultats de la présente étude révèle finalement que l'approximation quadratique engendre une violation de cette importante propriété. Cependant, ces résultats montrent que la perturbation de l'amplitude est faible et qu'en termes de modules des modes *GP* et *GM*, l'amplification est exacte.

### 6. Exemples numériques

Étant donné un problème unidimensionnel de propagation d'onde par un processus d'advection ou de diffusion, il doit exister une équivalence entre l'information obtenue à partir de l'analyse d'erreur proposée ci-dessus et les résultats de la modélisation proprement dite du phénomène. C'est dans l'optique de vérifier cette assertion que les exemples numériques à une dimension sont discutés dans la présente section pour en fin s'assurer de la validité des résultats ci-dessus présentés.

Considérons un domaine unidimensionnel de longueur 400 discrétisé en 200 éléments à trois noeuds (L3 avec  $h=1$ ). Il s'agit d'étudier séparément les problèmes de transport d'une harmonique d'angle de phase  $\beta=kh$  par les processus de diffusion [25] et d'advection [21]. L'état initial consiste en l'onde monochromatique  $\phi_0 e^{ikx} = \phi_0 e^{i(\beta j)}$  pour les deux problèmes. Quant aux conditions aux limites, elles sont laissées libres pour le problème de diffusion. La condition non stationnaire  $\phi_0 e^{-i\omega t} = \phi_0 e^{-i(km\Delta t)}$  est imposée à l'amont du domaine pour le problème d'advection avec une condition libre à l'aval. Le coefficient de diffusion  $\nu$  [25] et la vitesse d'advection  $u$  [21] sont considérés égaux à l'unité.

Afin d'éviter les perturbations parasites reliées aux conditions aux limites, on examine la solution numérique dans la zone centrale du domaine, soit les noeuds extrémité et milieu correspondant à  $x=200h$  et  $x=201h$  respectivement. Selon la méthodologie suivie dans l'analyse d'erreurs, la solution numérique en question peut être décrite par :

$$\phi_j^n = \phi_0 \left[ CP.GP^n + CM.GM^n \right] e^{i\beta j} \quad \text{noeud extrémité} \quad [38a]$$

$$\tilde{\phi}_j^n = \phi_0 \left[ CP.RP.GP^n + CM.RM.GM^n \right] e^{i\beta j} \quad \text{noeud milieu} \quad [38b]$$

Cette solution doit donc correspondre à la solution modélisée en considérant les mêmes paramètres.

La comparaison de la solution prédite à partir de l'équation [38] (notée "stab") et celle calculée par le modèle [25] (notée "num") pour une durée de 100 pas de temps est illustrée sur les figures 8 et 9 où les deux exemples correspondant à un angle de phase  $\beta$  de  $\pi/10$  et un nombre de diffusion  $D$  de 0.2 et  $\beta=\pi/5$  et  $D=1/2$  sont traités. La coïncidence des résultats est nette. Sur les figures 10 et 11, on présente une comparaison de la solution modélisée et de la solution exacte (notée "exa") qui s'écrit dans ce cas  $e^{-10n\beta^2} e^{i\beta j}$ . Cette illustration permet de justifier les constatations un peu

ambiguës soulignées dans la section précédente concernant le schéma correspondant à  $\theta_2 = 1$  (fig. 3C). Il apparaît alors (fig. 10B et 11B) que ce schéma surestime la valeur modélisée.

La même procédure a été menée pour l'analyse du problème d'advection. Les résultats sont présentés dans les figures 12 à 15 où on note par TG2T-S et TG3T-S respectivement les solutions numériques obtenues en utilisant les modèles TG2 $\theta$  et TG3 $\theta$  dans [38] respectivement et par TG2T-N et TG3T-N les solutions modélisées correspondantes [21]. Là encore la coïncidence des résultats est démontrée.

L'examen des figures 14C et 15C confirme clairement les résultats présentés sur les figures 5C et 7C. Le retard de phase produit par le modèle TG3 $\theta$ , plus accentué que celui induit par le modèle TG2 $\theta$ , est bien observé. Dans le même ordre d'idées, l'importante avance de phase et le faible retard de phase correspondant aux schémas TG2 $\theta$  et TG3 $\theta$  respectivement, montrés dans les figures 5B et 7B, sont bien confirmés sur les figures 14B et 15B.

À propos des tests en deux dimensions, on a modélisé dans un premier exemple le problème de "mélange transversal de deux courants à concentration uniforme" (voir [FIS 79] p50) comme l'illustre la figure 16.

La solution exacte associée à ce type de problème est formulée par:

$$\phi = \frac{\phi_s}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4Dx/ut}} \right) \right) \quad [39]$$

Nous avons traité cet exemple avec une grille de maillage de 20x20 éléments quadratiques (T6 et Q9) en résolution instationnaire avec un pas de temps  $\Delta t = 0.05s$ . Aussi, on a jugé opportun de considérer trois valeurs du coefficient de diffusion, soit  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ . Celles-ci correspondent aux valeurs du nombre de Péclet élémentaire de 2.5, 25 et 250 respectivement. Une valeur de  $\phi_s = 1.0$  est aussi choisie.

Pour chaque cas, on effectue le relevé des profils transversaux sur les sections S1, S2 et S3 à l'équilibre (fig. 16). Les figures 17 à 19 montrent une comparaison des profils en question (obtenus avec le schéma TG3 $\theta$ ,  $\theta_1 = 1/2$  et un maillage en Q9) et ceux correspondant à la solution exacte. Les résultats obtenus avec le schéma TG2 $\theta$ ,  $\theta_1 = 1/2$  et/ou un maillage en T6 sont très similaires aux résultats numériques présentés. Ces résultats montrent principalement que la diffusion numérique latérale (*crosswind numerical diffusion*) est traitée correctement par les deux modèles.

Dans un second exemple de transport en deux dimensions, on examine le problème de rotation du cône. Ce type de test se distingue par l'aspect advectif de transport dans un champ de vitesse bidimensionnel. La version traitée dans la présente étude a été considérée par Donea et al. [DON 87]. À titre de rappel, le problème consiste à modéliser l'advection d'une distribution bidimensionnelle en cosinus dans un champ de vitesse défini par une rotation rigide. La condition initiale du problème est donnée par:  $\phi(x,0) = (1/4)(1 + \cos\pi X)(1 + \cos\pi Y)$  si  $(X^2 + Y^2) \leq 1$  et nulle sinon.  $X = (x - x_c)/\sigma$ ,  $Y = (y - y_c)/\sigma$  avec  $x_c = y_c = 1/6$  et  $\sigma = 0.2$ .

Le domaine de simulation consiste en un carré unitaire  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$  avec la condition  $\phi = 0$  imposée sur toute la frontière. Le calcul est effectué avec une densité de maillage de 15x15 éléments quadratiques (correspondant à 30x30 éléments

linéaires dans [DON 87]) et un pas de temps  $\Delta t=2\pi/200$ . La solution numérique est examinée après une rotation complète du cône.

La solution obtenue dans [DON 87] en utilisant le schéma TGLW (Taylor-Galerkin Lax-Wendroff) correspond aux valeurs extrêmes  $\phi_{max}=0.988$  et  $\phi_{min}=-0.022$ . Les résultats de la présente étude sont montrés sur la figure 20. La solution obtenue avec un maillage en Q9 est meilleure. La simulation avec un maillage en élément T6 donne une solution numérique affectée d'oscillations parasites de faible amplitude. Il est possible que ce phénomène soit similaire à ce qui a été observé dans le problème à une dimension. L'analyse d'erreur a bien montré que la solution numérique calculée aux noeuds extrémité et milieu est perturbée par des modes parasites différents qui ont tendance à amplifier la solution au noeud extrémité et à l'amortir au noeud milieu lorsque  $\theta_l=1/2$ .

## 7. Conclusion

Dans le cadre de la résolution numérique du phénomène transitoire d'advection-diffusion, nous avons analysé, dans la présente étude, un algorithme basé sur l'approximation quadratique en éléments finis.

En un premier temps, il était question de revoir les principales étapes menant à la formulation paramétrique Taylor-Galerkin  $\theta$ -pondéré pour la résolution du problème d'advection multidimensionnel.

En parallèle, nous avons retenu la méthode classique de Galerkin pour traiter le problème de diffusion. La fusion des deux opérateurs est alors réalisée conformément à la technique de fractionnement. Ceci définit la structure du modèle analysé.

Dans une seconde étape, nous avons mené une étude paramétrique des erreurs de dissipation et de dispersion engendrées par le modèle dans un contexte unidimensionnel. Basée sur une analyse de Fourier, cette étude a révélé que l'approximation quadratique engendre deux modes affectant la solution numérique par le biais de coefficients de pondération. Ces modes et ces coefficients sont réels pour le problème de diffusion et fournissent une meilleure précision dans le cas du schéma de Crank-Nicolson Galerkin. Par contre, ils se sont révélés complexes dans le cas du problème d'advection. Les qualités de précision du schéma de Crank-Nicolson Taylor-Galerkin sont un peu perturbées par un phénomène d'amplification et d'amortissement de la solution aux noeuds extrémité et milieu respectivement. Cette étude a montré aussi que le modèle TG3 $\theta$ , avec ses termes de second ordre, possède un comportement meilleur à l'égard des erreurs de dispersion.

Les résultats de l'étude d'erreurs ont été confirmées par quelques tests numériques à une dimension. Deux exemples numériques en deux dimensions ont été enfin traités pour mettre en évidence les qualités du modèle TG3 $\theta$  ( $\theta=1/2$ ) dans le traitement du problème de diffusion numérique latérale.

Rappelons que le présent algorithme a été utilisé pour la simulation de quelques problèmes de propagation de polluant suite à des rejets variés [KHE 92].

### *Remarque:*

Sur la figure 20, des éléments linéaires (T3 et Q4) sont employés seulement pour obtenir une bonne présentation tridimensionnelle.

## Annexe I

Valeurs des coefficients  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\tilde{\lambda}_i$  et  $\tilde{\mu}_i$  correspondant à l'équation de diffusion [25] en fonction du coefficient de pondération  $\theta_2$ , de l'angle de phase  $\beta=kh$  et du nombre de diffusion  $D$ .

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left[ -\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\theta_2 D \right] \cos(2\beta) + \left[ \frac{4}{5} + \frac{7}{2}\theta_2 D \right] \\ \lambda_2 &= \left[ \frac{2}{5} - 4\theta_2 D \right] \cos(\beta) \\ \tilde{\lambda}_1 &= \left[ \frac{1}{5} - 2\theta_2 D \right] \cos(\beta) \\ \tilde{\lambda}_2 &= \left[ \frac{4}{5} + 2\theta_2 D \right] \\ \mu_1 &= \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{2}(1-\theta_2)D \right] \cos(2\beta) + \left[ -\frac{4}{5} + \frac{7}{2}(1-\theta_2)D \right] \\ \mu_2 &= \left[ -\frac{2}{5} - 4(1-\theta_2)D \right] \cos(\beta) \\ \tilde{\mu}_1 &= \left[ -\frac{1}{5} - 2(1-\theta_2)D \right] \cos(\beta) \\ \tilde{\mu}_2 &= \left[ -\frac{4}{5} + 2(1-\theta_2)D \right]\end{aligned}$$

## Annexe II

Valeurs des coefficients  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\tilde{\lambda}_i$  et  $\tilde{\mu}_i$  correspondant à l'équation d'advection [21] en fonction du coefficient de pondération  $\theta_i$ , de l'angle de phase  $\beta=kh$ , du paramètre  $s$  et du nombre de Courant  $Cr$  où  $i=\sqrt{-1}$ .

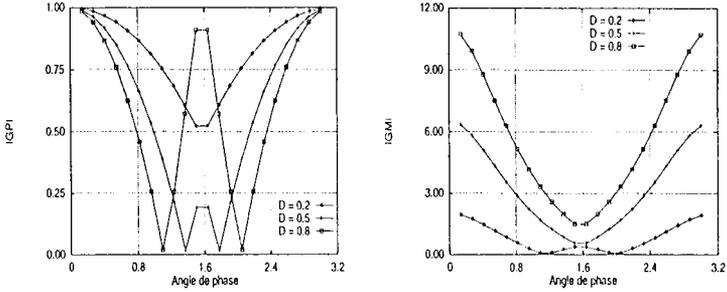
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left[ -\frac{2}{5} + Cr^2(\theta_i - s) \right] \cos(2\beta) + \left[ \frac{8}{5} + Cr^2(\theta_i - s) \right] + i[(-\theta_i Cr) \sin(2\beta)] \\ \lambda_2 &= \left[ \frac{4}{5} - 2Cr^2(\theta_i - s) \right] \cos(\beta) + i[(4\theta_i Cr) \sin(\beta)] \\ \tilde{\lambda}_1 &= \left[ \frac{1}{5} + Cr^2(\theta_i - s) \right] \cos(\beta) + i[(\theta_i Cr) \sin(\beta)] \\ \tilde{\lambda}_2 &= \left[ \frac{4}{5} - Cr^2(\theta_i - s) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \left[ \frac{2}{5} + Cr^2((\theta_l - l) + s) \right] \cos(2\beta) + \left[ -\frac{8}{5} + Cr^2((\theta_l - l) + s) \right] + i \left[ Cr(\theta_l - l) \sin(2\beta) \right] \\ \mu_2 &= \left[ -\frac{4}{5} - 2Cr^2((\theta_l - l) + s) \right] \cos(\beta) + i \left[ 4Cr(l - \theta_l) \sin(\beta) \right] \\ \tilde{\mu}_1 &= \left[ -\frac{l}{5} + Cr^2((\theta_l - l) + s) \right] \cos(\beta) + i \left[ Cr(l - \theta_l) \sin(\beta) \right] \\ \tilde{\mu}_2 &= \left[ -\frac{4}{5} - Cr^2((\theta_l - l) + s) \right]\end{aligned}$$

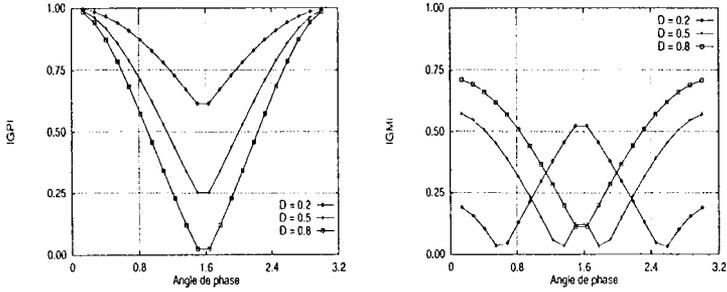
## 8. Bibliographie

- [BAT 86] BATES S., CATHERS B., « Analysis of spurious eigenmodes in finite element equations », *Int. J. Num. Methods Eng.*, 23, p. 1131-1143, 1986.
- [CUL 80] CULLEN M.J.P., MORTON K.W., « Analysis of evolutionary error in finite element and other methods », *J. Comp. Phys.*, 34, p. 245-267, 1980.
- [CUL 82] CULLEN M.J.P., « The use of quadratic finite element methods and irregular grids in the solution of hyperbolic problems », *J. Comp. Phys.*, 45, p. 221-245, 1982.
- [DON 84] DONEA J., « A Taylor-Galerkin method for convective transport problems », *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol. 20, p. 101-119, 1984.
- [DON 84] DONEA J., GIULIANI S., LAVAL H., QUARTAPELLE L., « Time-accurate solution of advection-diffusion problems », *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 45, p. 123-146, 1984.
- [DON 87] DONEA J., QUARTAPELLE L., SELMIN V., « An analysis of time discretization in finite element solution of hyperbolic problems », *J. Comp. Phys.*, 70, p. 463-499, 1987.
- [DON 92] DONEA J., QUARTAPELLE L., « An introduction to finite element methods for transient advection problems », *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 95, p. 169-203, 1992.
- [FIS 79] FISCHER H.B., IMBERGER J., LIST E.J., KOH R.C.Y., BROOKS N.H., *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, California, 1979.
- [HIR 88] HIRSCH C., *Numerical computation of internal and external flows*, V1, ed., Wiley, 1988.
- [KHE 92] KHELIFA A., Nouvelle approche en éléments finis pour la modélisation du phénomène de transport permanent et non permanent, thèse de maîtrise, université Laval, Québec, Canada, 127 p., 1992.
- [KHE 92] KHELIFA A., ROBERT J.-L., OUELLET Y., « Modélisation numérique de l'advection-diffusion d'un polluant: modèles TG2q et TG3q », 8<sup>e</sup> Congrès régional de l'Est du Canada, ACRPEM, Québec, Canada, 1992.
- [KHE -] KHELIFA A., OUELLET Y., « Analysis of evolutionary errors in quadratic finite element approximation of hyperbolic problems », *Int. J. Num. Methods Eng.*, (soumis).
- [LAV 88] Laval H., « Taylor-Galerkin solution of the time-dependent Navier-Stokes equations », *Computational Methods in Flow Analysis*, Eds. NIKI H., KAWAHARA M., Okayama, University of Science, p. 414-421, 1988.
- [LAV 90] LAVAL H., QUARTAPELLE L., « A fractional-step Taylor-Galerkin method for unsteady incompressible flows », *Int. J. Num. Methods Fluid.*, 11, p. 501-513, 1990.
- [MAR 75] MARCHUK G.J., *Methods of numerical mathematics*, Springer, Berlin, 1975.
- [MOR 80] MORTON K.W., PARROTT A.K., « Generalized Galerkin methods for first-order hyperbolic equations », *J. Comp. Phys.*, 36, p. 249-270, 1980.
- [PAR 90] PARK N.S., LIGGETT J.A., « Taylor-least-squares finite element for two dimensional advection-diffusion problems », *Int. J. Num. Methods Fluid.*, vol. 11, p. 21-38, 1990.

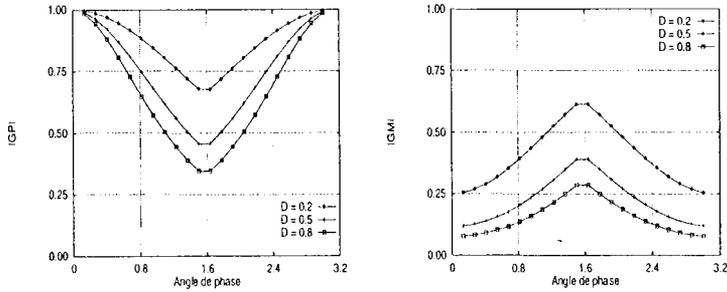
[YAN 79] YANENKO N.N., *The methods of fractional steps*, New York, Springer Verlag, 1979.



A. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.0$ .

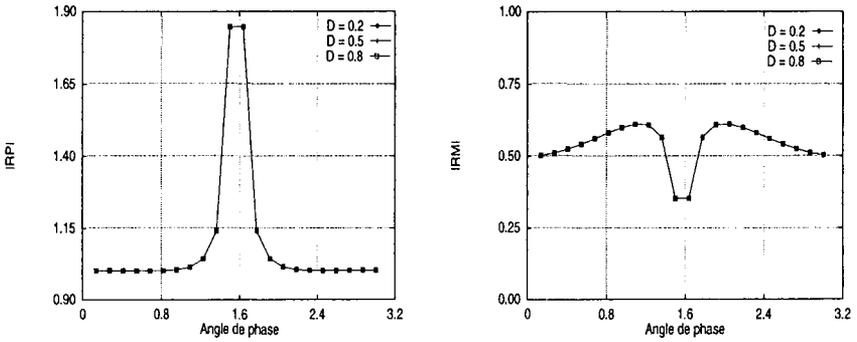


B. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.5$ .

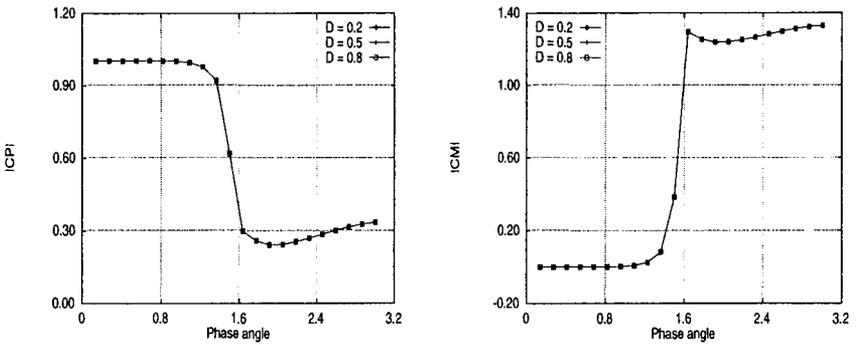


C. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 1.0$ .

Figure 1. Équation de diffusion : modules de GP et de GM en fonction de l'angle de phase, du nombre de diffusion et du coefficient de pondération  $\theta_2$ .

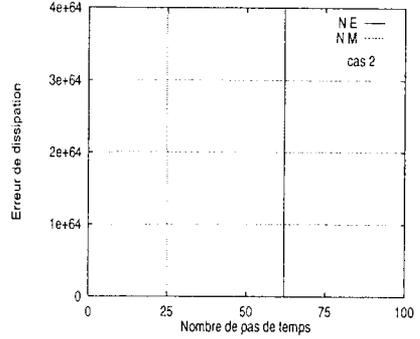
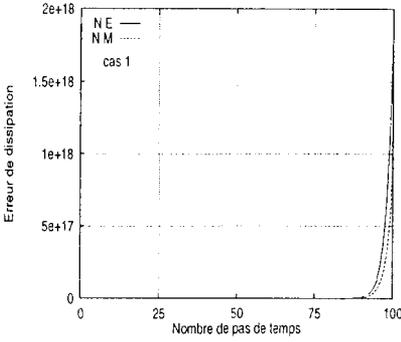


A. Modules des coefficients  $RP$  et  $RM$ .

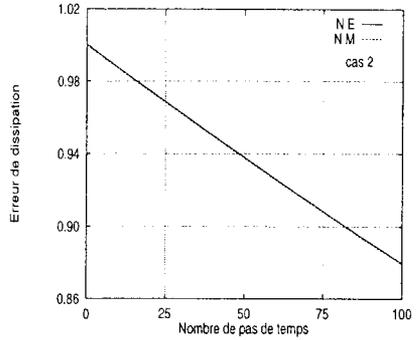
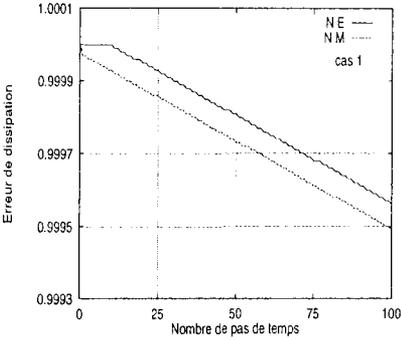


B. Modules des coefficients  $CP$  et  $CM$ .

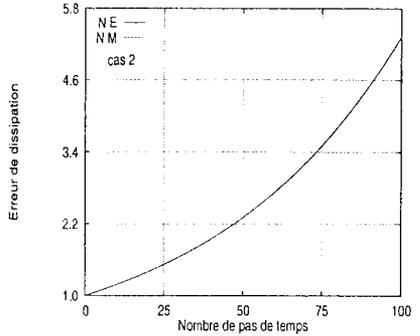
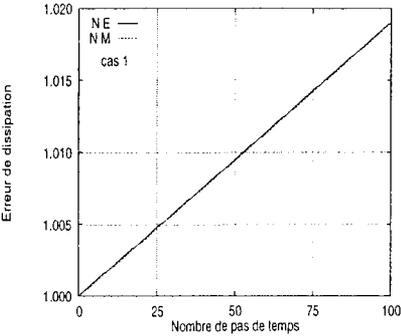
Figure 2. Équation de diffusion : modules des coefficients  $RP$ ,  $RM$ ,  $CP$  et  $CM$  en fonction de l'angle de phase et du nombre de diffusion ( mêmes résultats pour les trois valeurs du coefficient de pondération  $\theta_2$  ).



A. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.0$ .

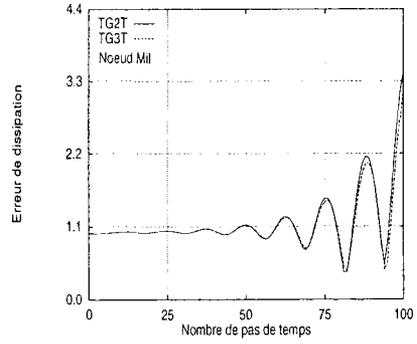
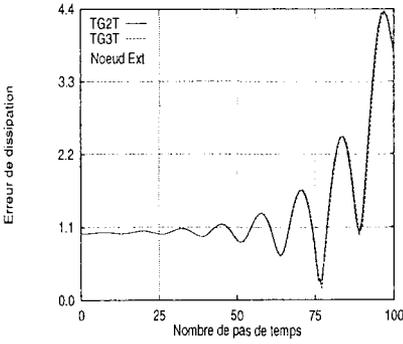


B. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.5$ .

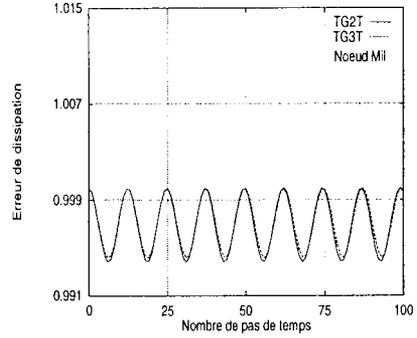
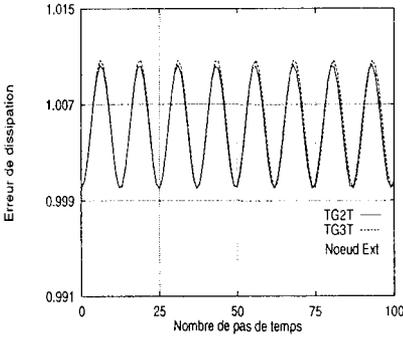


C. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 1.0$ .

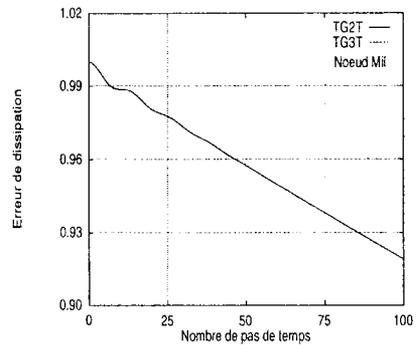
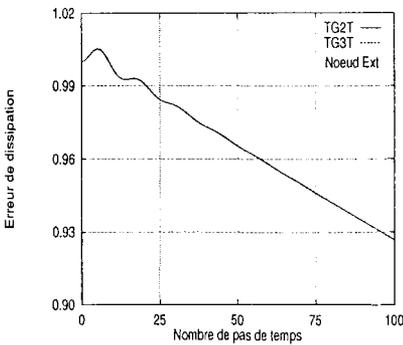
Figure 3. Équation de diffusion : évolution de l'erreur de dissipation correspondant aux cas où  $\beta = \frac{\pi}{10}$  et  $D=0.2$  (cas 1) et  $\beta = \frac{\pi}{5}$  et  $D=0.5$  (cas 2). NE et NM désignent les noeuds extrémité et milieu respectivement.



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .

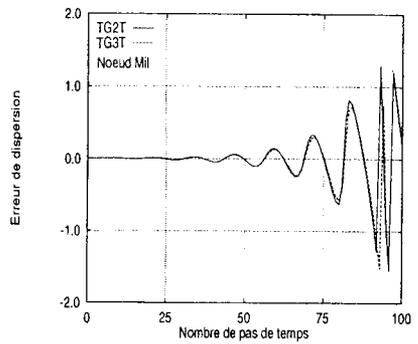
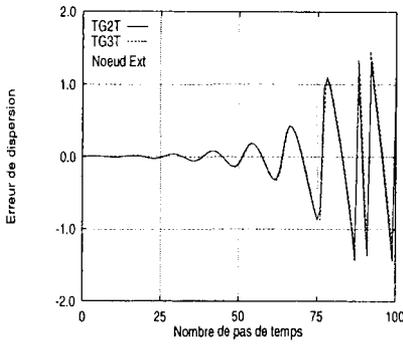


B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .

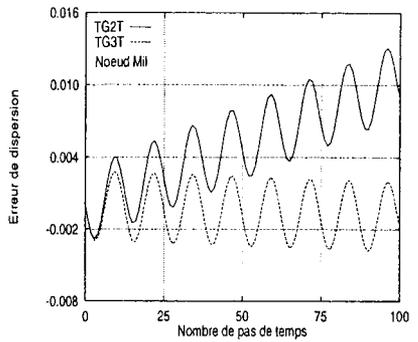
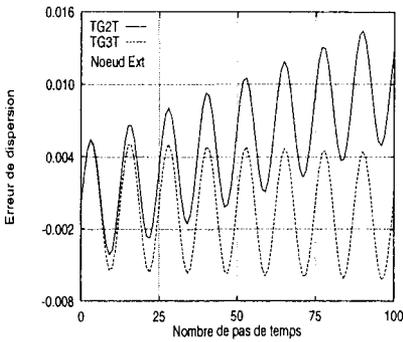


C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

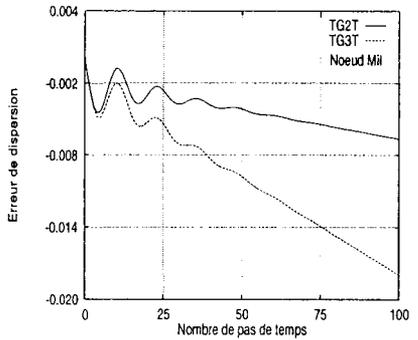
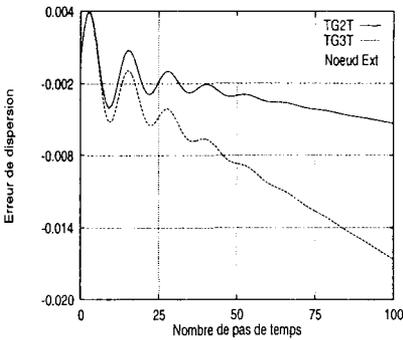
Figure 4. Équation d'advection : évolution de l'erreur de dissipation lorsque  $\beta = \frac{\pi}{10}$  et  $Cr=0.3$ .



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .

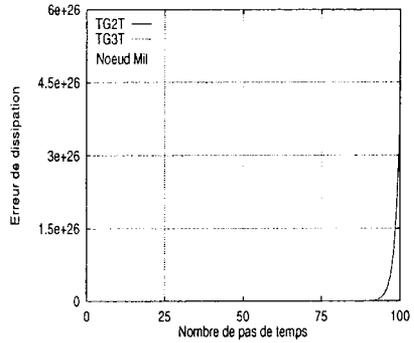
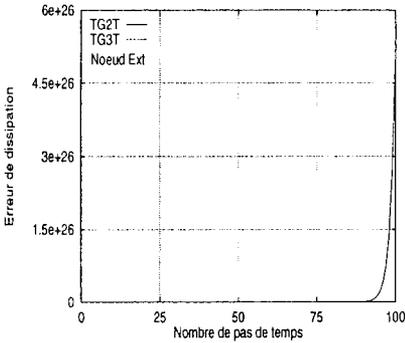


B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .

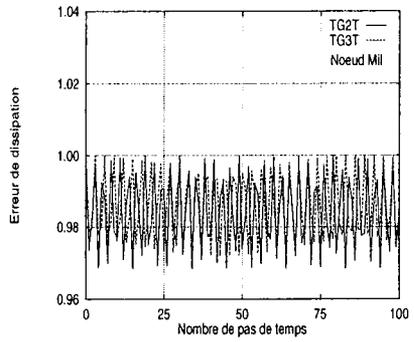
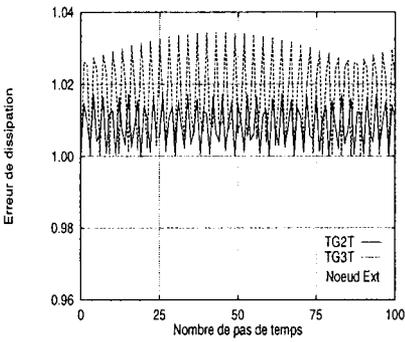


C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

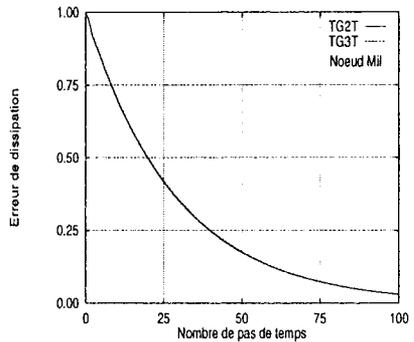
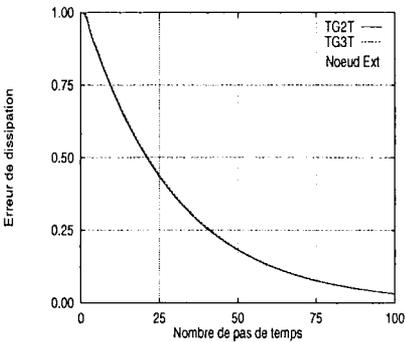
Figure 5. Équation d'advection : évolution de l'erreur de dispersion lorsque  $\beta = \frac{\pi}{10}$  et  $Cr=0.3$ .



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .

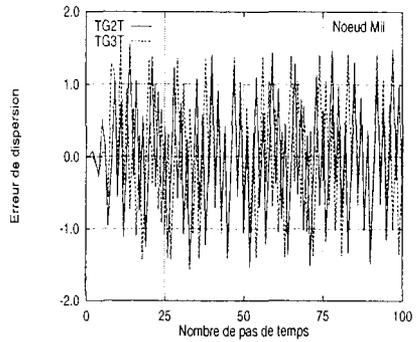
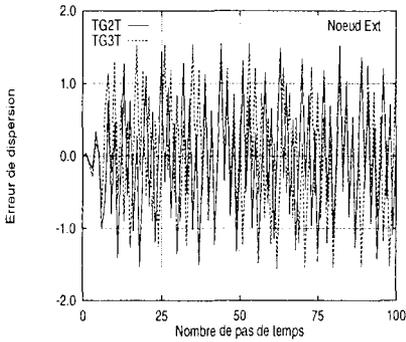


B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .

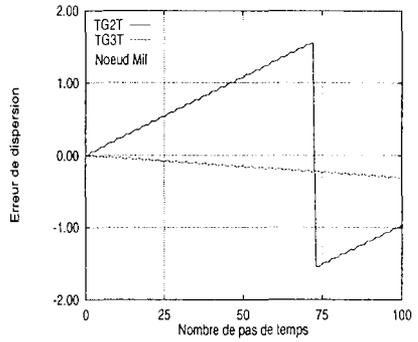
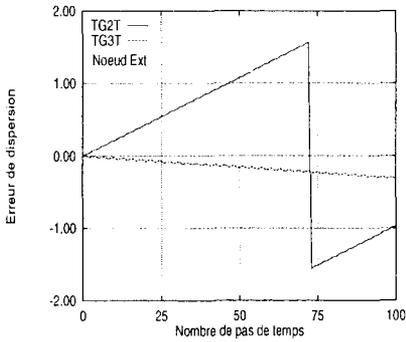


C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

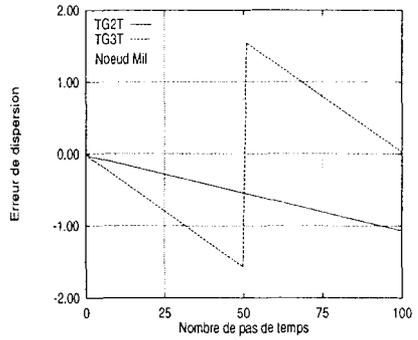
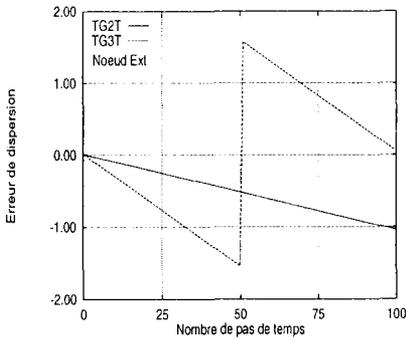
Figure 6. Équation d'advection : évolution de l'erreur de dissipation lorsque  $\beta = \frac{\pi}{5}$  et  $Cr=0.9$ .



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .

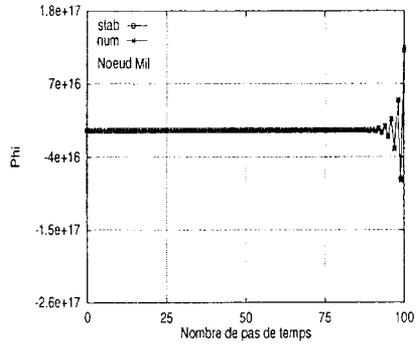
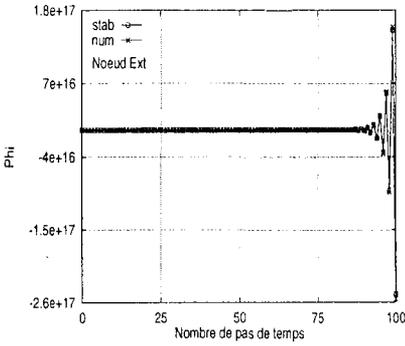


B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .

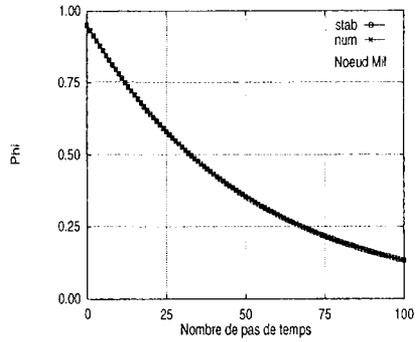
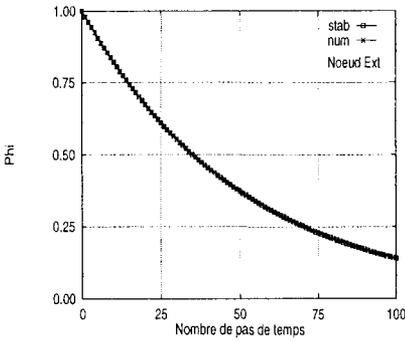


C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

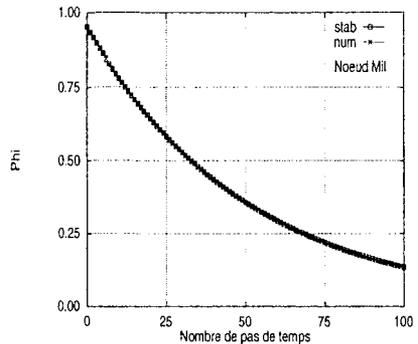
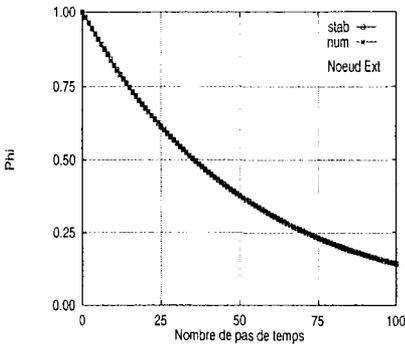
Figure 7. Équation d'advection : évolution de l'erreur de dispersion lorsque  $\beta = \frac{\pi}{5}$  et  $Cr=0.9$ .



A. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.0$ .

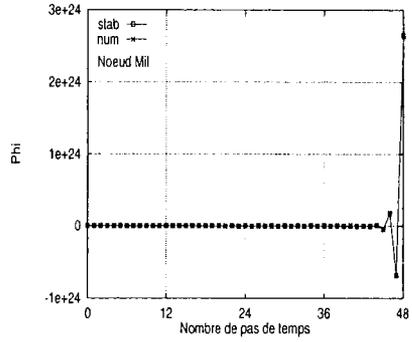
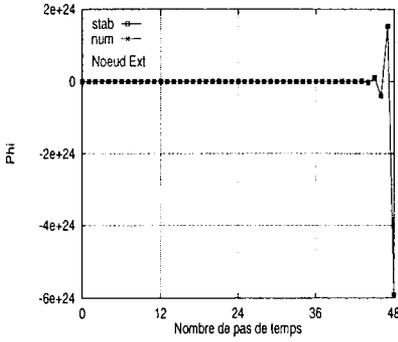


B. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.5$ .

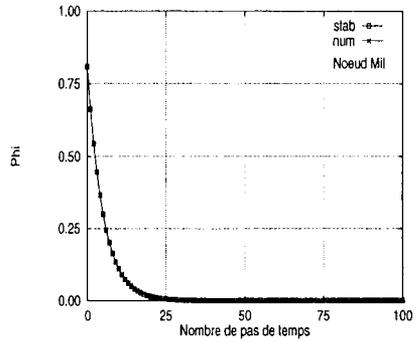
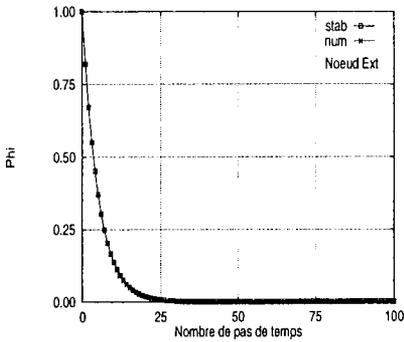


C. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 1.0$ .

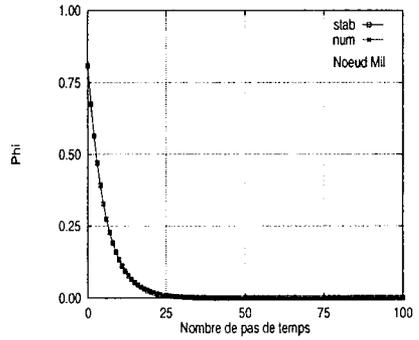
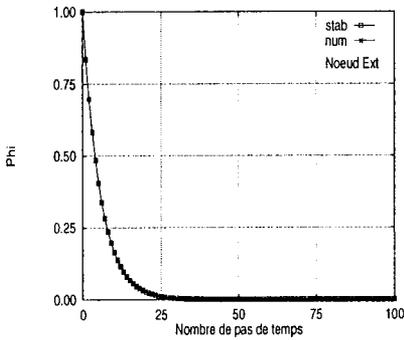
Figure 8. Équation de diffusion : comparaison des résultats, cas où  $\beta = \frac{\pi}{10}$  et  $D=0.2$ . Les abréviations "stab" et "num" désignent les solutions numériques obtenues par les équations [38] et [25] respectivement.



A. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.0$ .

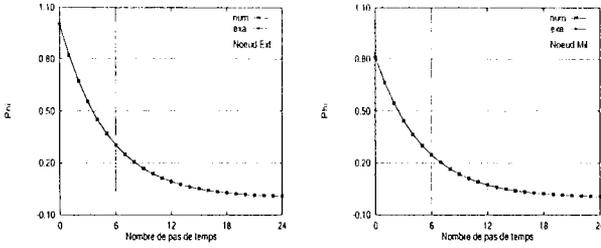


B. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.5$ .

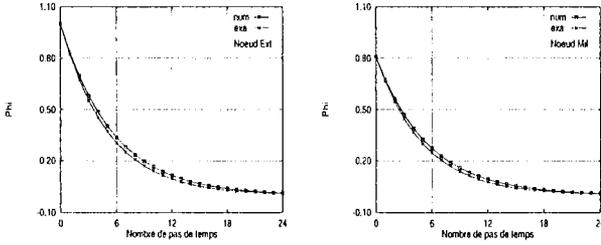


C. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 1.0$ .

Figure 9. Équation de diffusion : comparaison des résultats, cas où  $\beta = \frac{\pi}{5}$  et  $D=0.5$  (même notation que dans la figure 8).

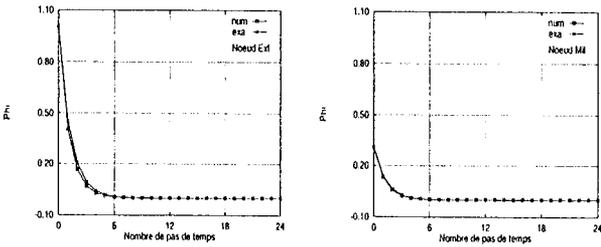


A. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.5$ .

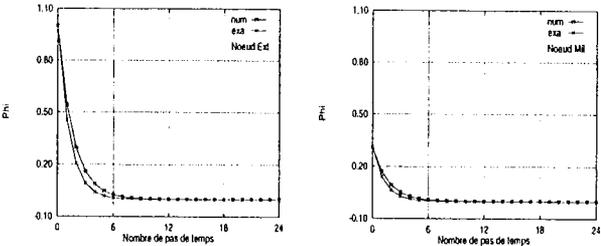


B. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 1.0$ .

Figure 10. Équation de diffusion : comparaison entre la solution numérique et la solution exacte, cas où  $\beta = \frac{\pi}{5}$  et  $D=0.5$  (même notation que dans les figures 8 et 9).

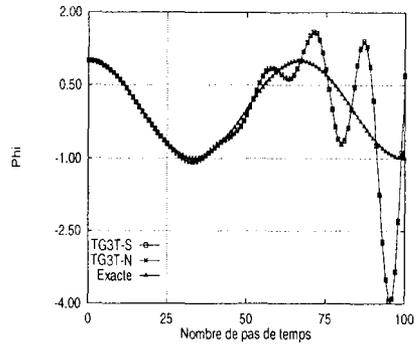
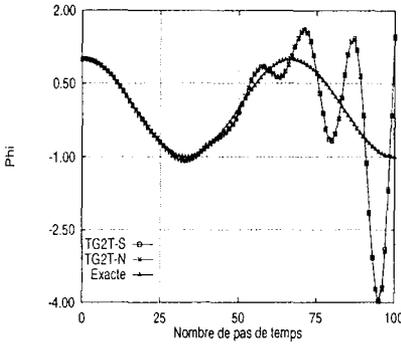


A. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 0.5$ .

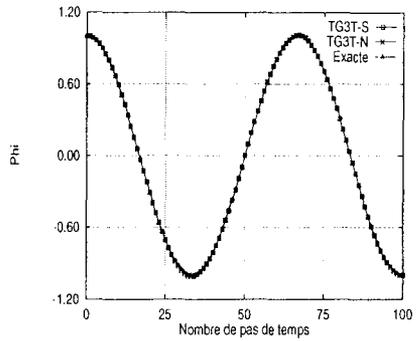
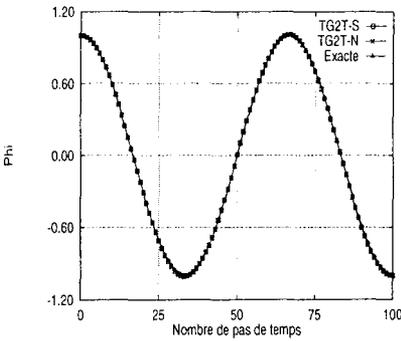


B. Schéma correspondant à  $\theta_2 = 1.0$ .

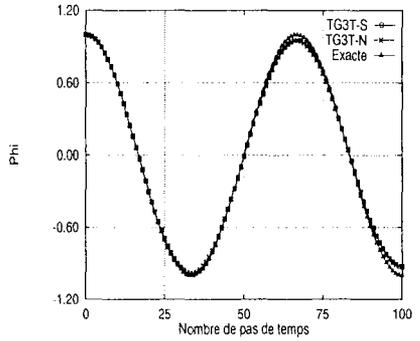
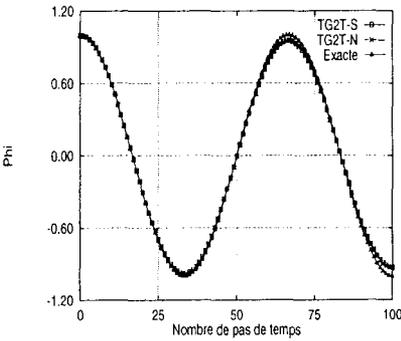
Figure 11. Équation de diffusion : comparaison entre la solution numérique et la solution exacte, cas où  $\beta = \frac{\pi}{2.5}$  et  $D=0.5$  (même notation que dans les figures 8-10).



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .

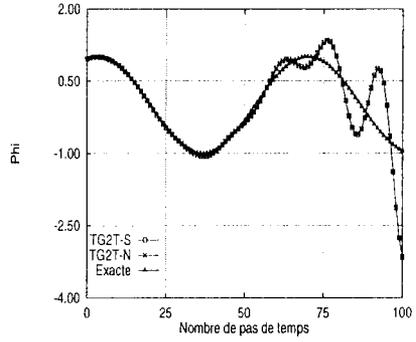
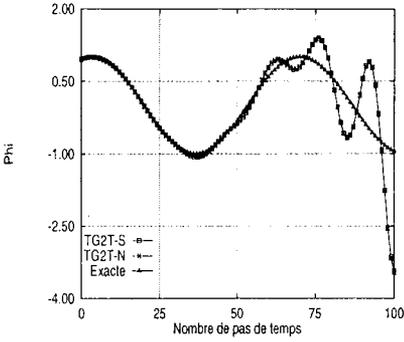


B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .

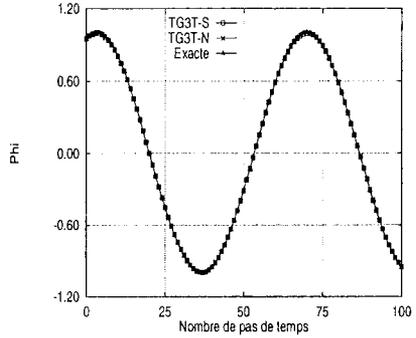
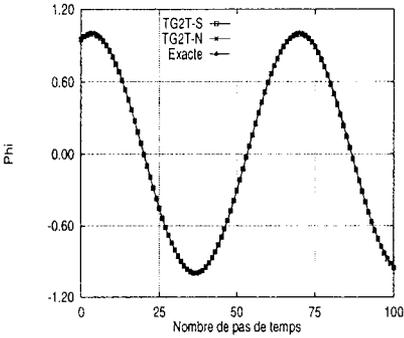


C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

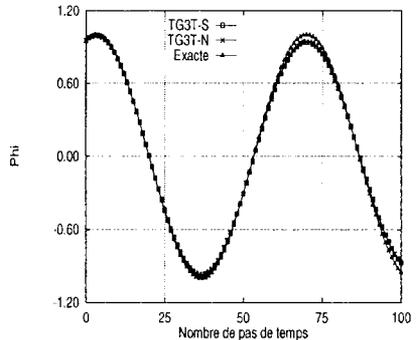
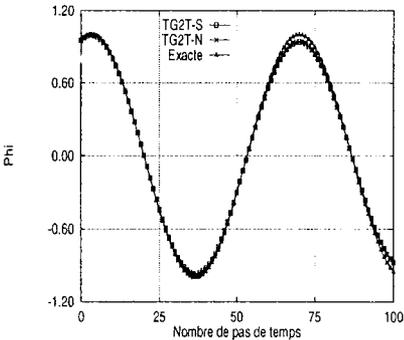
Figure 12. Équation d'advection : comparaison des résultats, exemple de propagation d'une onde dans les conditions  $\beta = \frac{\pi}{10}$  et  $Cr=0.3$  (observation au noeud extrémité).



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .

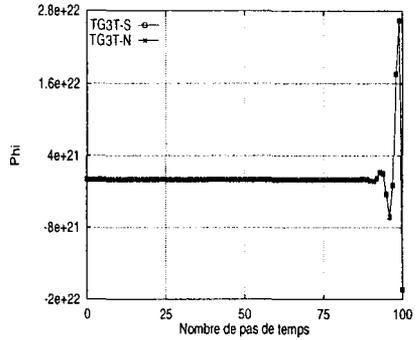
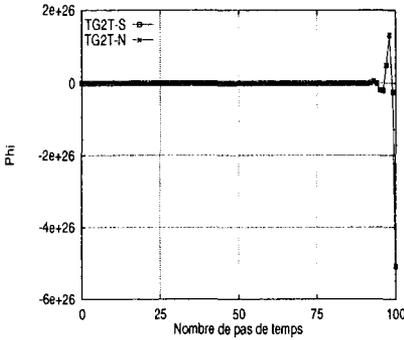


B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .

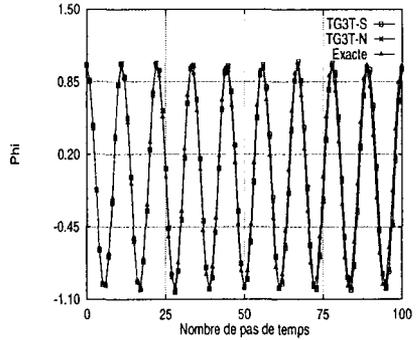
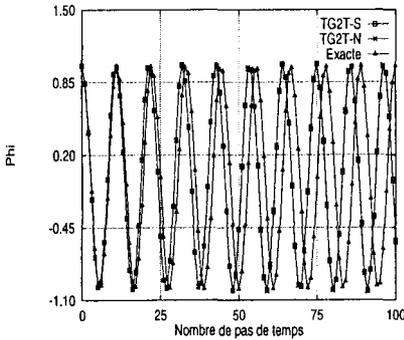


C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

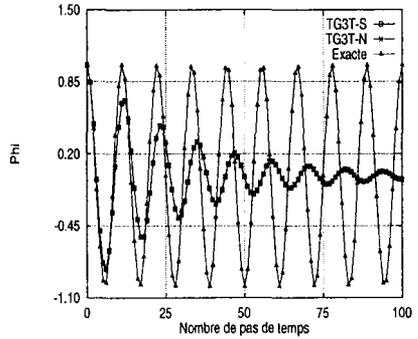
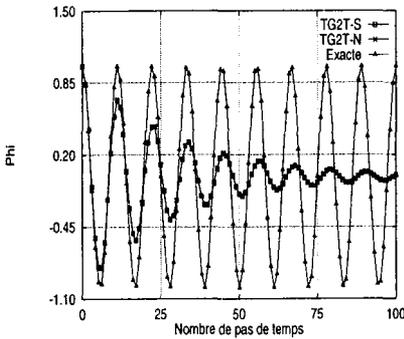
Figure 13. Équation d'advection : comparaison des résultats, exemple de propagation d'une onde dans les conditions  $\beta = \frac{\pi}{10}$  et  $Cr=0.3$  (observation au noeud milieu).



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .

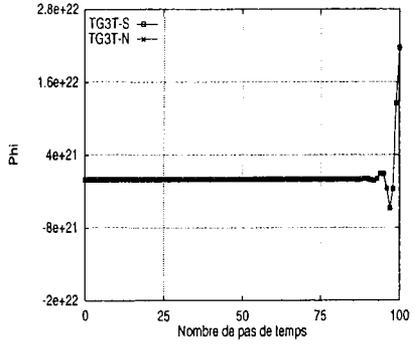
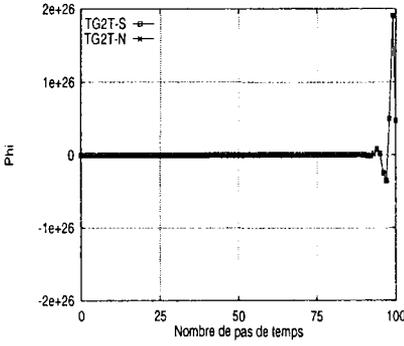


B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .

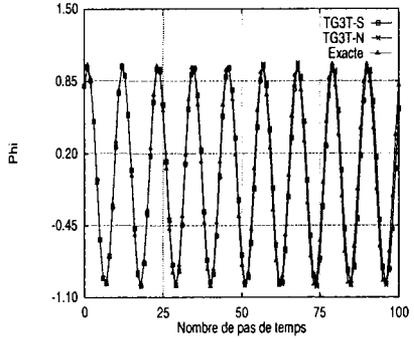
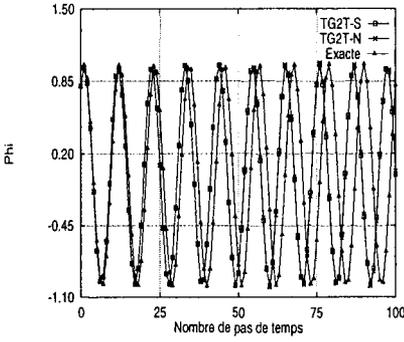


C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

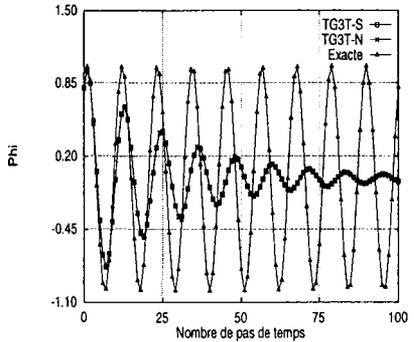
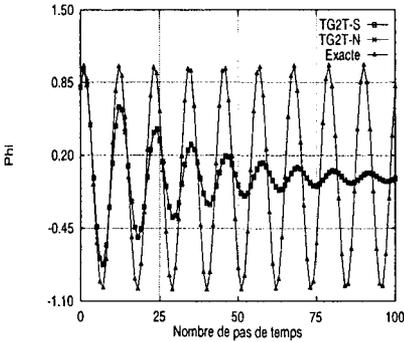
Figure 14. Équation d'advection : comparaison des résultats, exemple de propagation d'une onde dans les conditions  $\beta = \frac{\pi}{5}$  et  $Cr=0.9$  (observation au noeud extrémité).



A. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.0$ .



B. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 0.5$ .



C. Schéma correspondant à  $\theta_1 = 1.0$ .

Figure 15. Équation d'advection : comparaison des résultats, exemple de propagation d'une onde dans les conditions  $\beta = \frac{\pi}{5}$  et  $Cr=0.9$  (observation au noeud milieu).

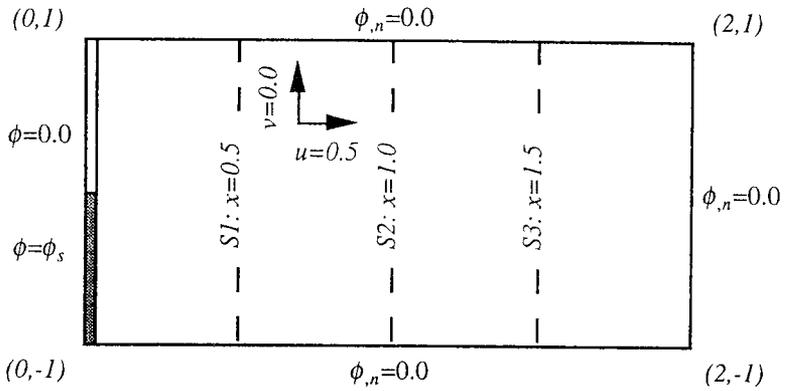


Figure 16. *Problème de mélange transversal de deux courants à concentration uniforme : données du problème.*

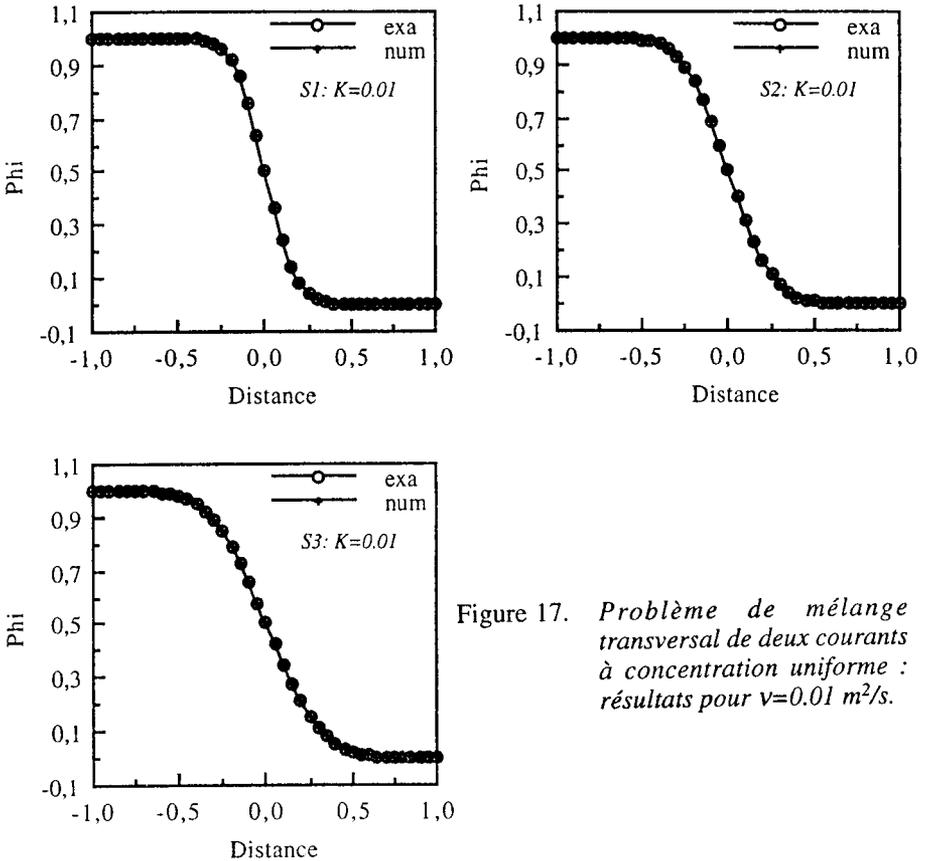


Figure 17. *Problème de mélange transversal de deux courants à concentration uniforme : résultats pour  $v=0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ .*

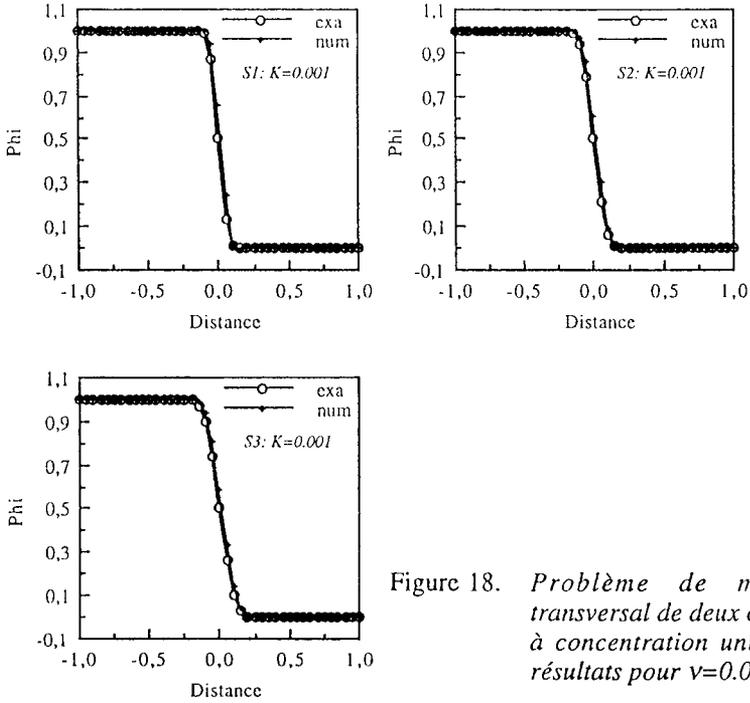


Figure 18. *Problème de mélange transversal de deux courants à concentration uniforme : résultats pour  $v=0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ .*

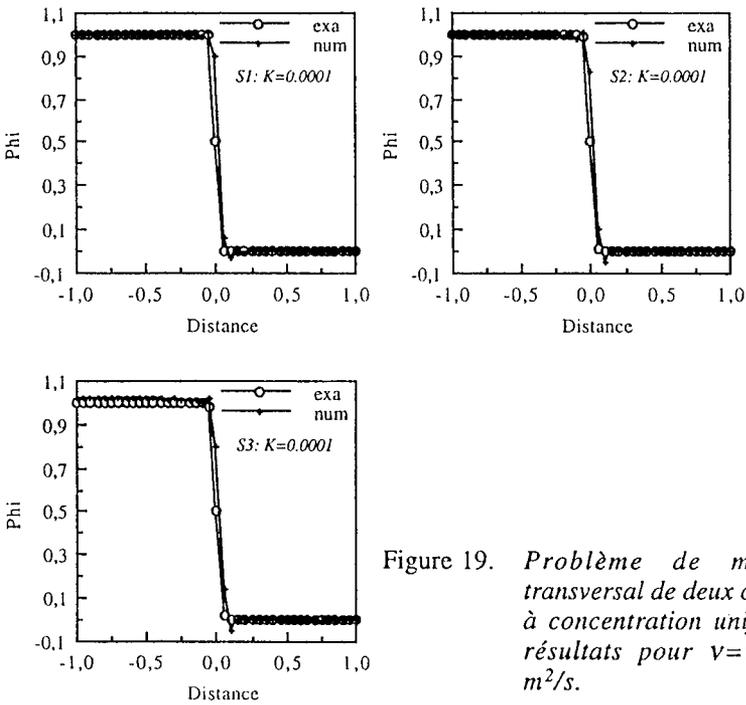


Figure 19. *Problème de mélange transversal de deux courants à concentration uniforme : résultats pour  $v=0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$ .*

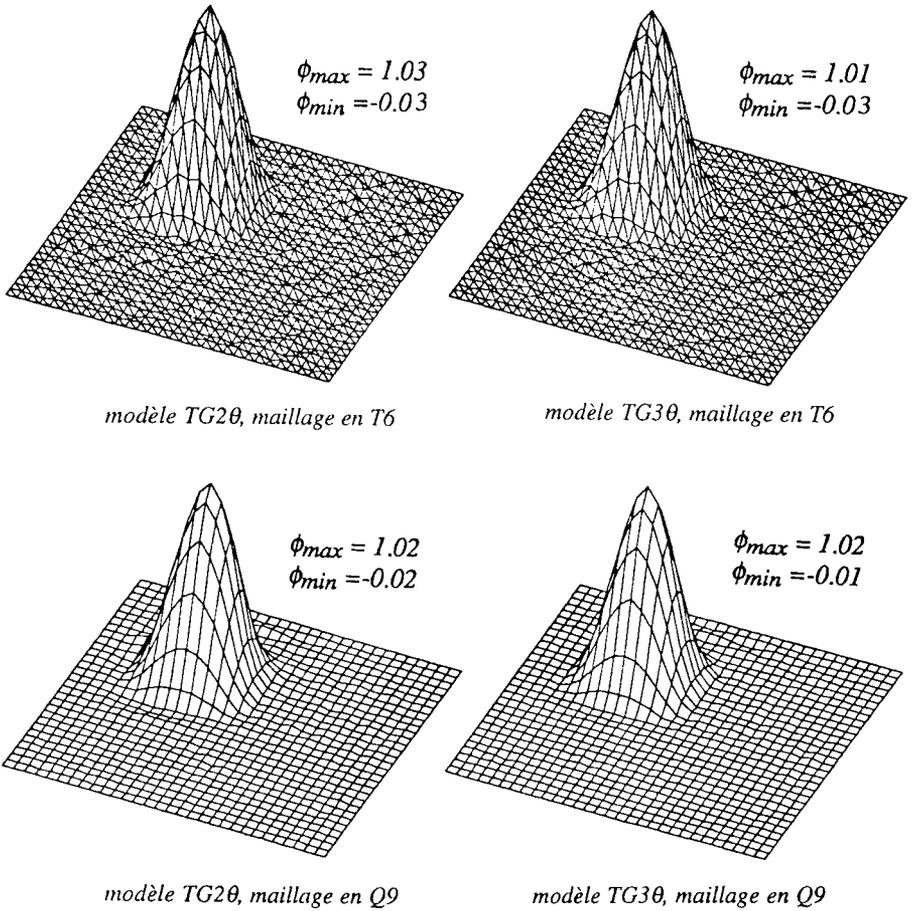


Figure 20. *Problème de rotation du cône : résultats obtenus*

Article reçu le 15 octobre 1993.  
Version révisée le 15 octobre 1994.