
Modélisation de l'emboutissage des tissus de fibres de verre par la méthode des éléments finis

**A. Hakim Cherouat — Jean-Claude Gelin — Philippe Boisse —
Hamid Sabhi**

*Laboratoire de mécanique appliquée R. Chaléat
Université de Franche-Comté — URA CNRS 004
Route de Gray
25030 Besançon*

RÉSUMÉ. Le préformage ou emboutissage des tissus de fibres de verre avant injection sur renforts (RTM) constitue la première étape lors de la fabrication de pièces de structures en composites renforcés. On propose un modèle de simulation par la méthode des éléments finis, basé sur la prise en compte discrète du comportement mécanique de chaque mèche, reposant sur une approximation surfacique du milieu, et permettant la simulation des opérations d'emboutissage. Une formulation particulièrement efficace a été développée dans le cas où le maillage est structuré par la direction des mèches de tissus. Des comparaisons calculs-expériences montrent l'intérêt de l'approche proposée.

ABSTRACT. The glass fiber fabric shaping process before resin transfer moulding (RTM) is the first stage for manufacturing of reinforced composite structures. A finite element modelling of the process is proposed. The finite element simulation model is based on a discrete summation of the mechanical behaviour of each thread and on a surfacic model for the glass fabric deformation and is well suited for modelling preforming and deep drawing of glass fiber fabrics. A particularly efficient formulation is proposed in the case where the finite element mesh is structured by thread directions. Comparisons between simulations and experiments prove the efficiency of the proposed approach.

MOTS-CLÉS : tissu, fibres de verre, emboutissage, éléments finis.

KEY WORDS : fabric, glass fibers, shaping process, finite elements.

1. Introduction

Les propriétés mécaniques des composites à renforts de type fibres longues peuvent être très sensiblement améliorées par l'utilisation de renforts tissés bidirectionnels. Les pièces de structures obtenues peuvent se substituer aux pièces métalliques avec un certain nombre d'avantages (gain en masse, obtention de formes complexes en une seule opération,...), dans les industries automobiles ou aéronautiques. Il est cependant nécessaire d'être capable de produire de telles pièces, présentant une résistance suffisante associée à des coûts raisonnables, avec une cadence suffisante, et avec une qualité de fabrication constante.

Dans ce cadre, l'injection sur renforts par la technique RTM (Resin Transfer Moulding) est une mise en oeuvre de pièces composites à renforts tissés [GAY 87]. Ce procédé se déroule généralement en deux étapes: la première consistant à réaliser une préforme en tissu de fibres (verre, carbone,...) par emboutissage, la seconde consistant à injecter de la résine liquide dans un moule à l'intérieur duquel on a préalablement placé la préforme (figure 1).

La modélisation de l'emboutissage des tissus est très différente de celle de l'emboutissage des tôles métalliques du fait que le tissu présente des caractéristiques très particulières. L'absence de résine différencie également cette étude des études sur les composites tissés [LEN 90] où le matériau est considéré comme un milieu multicouche orthotrope [GEL 91].

L'intérêt d'une modélisation numérique de l'emboutissage des tissus de fibres de verre réside dans le fait de pouvoir évaluer la forme géométrique, les grandeurs mécaniques usuelles, ainsi que les défauts éventuels pouvant survenir lors de l'opération d'emboutissage, et par ailleurs néfastes lors de l'injection de résine.

Les défauts pouvant notamment survenir lors de l'emboutissage de tissus [AUB 89] sont les suivants:

- Ruptures des mèches dues à des tensions excessives résultant d'efforts serré-flan trop importants,
- Superposition des mèches dues à des cisaillements trop importants,
- "Bouclettes" dues à des déformations de compression dans les mèches.

Des études de mise en forme ou drappage d'un tissu sur une surface 3D ont déjà été réalisées. Elles s'appuient principalement sur des notions géométriques. Dans [BER 88] le problème est envisagé en ne considérant que les effets de déformation du tissu par le mécanisme de "treillis". Le problème résolu est un problème géométrique pur, où, à partir d'une discrétisation par grille plane de type différences finies, et connaissant la forme de la surface à obtenir, la position de chaque point est calculée de proche en proche de façon à conserver les longueurs des côtés de la grille, ce qui compte-tenu des grands déplacements possibles, conduit à un problème non-linéaire. Quelques algorithmes utilisables pour l'opération de drappage sont présentés dans [VAN 91], ces algorithmes sont basés sur une discrétisation par grille orientée selon la direction des renforts du tissu et considèrent que les mèches sont inextensibles. Une formulation énergétique est proposée par [VAN 91] consistant à résoudre le problème de la déformation inextensionnelle selon la direction des renforts du tissu par une méthode de moindres carrés.

L'approche que nous proposons repose sur une formulation mécanique de la déformation des tissus de fibres de verre, établie à partir du comportement mécanique de chaque mèche constituant le tissu et de l'énergie potentielle totale du tissu. Le

modèle de comportement de chaque mèche correspond à un comportement élastique non-linéaire avec endommagement progressif [BOI 92] [SAB 93]. Le comportement du tissu est obtenu par sommation discrète du comportement de chaque mèche et tient compte des orientations des mèches. Les effets d'entrelacement des mèches sont négligés, ainsi que les effets associés au frottement entre fibres et mèches. Bien que quelques modèles permettant de prendre les effets d'entrelacement des mèches aient été proposés [KAW 73 a], [KAW 73 b], la géométrie très plate des tissus étudiés ne justifie pas la prise en compte de ces effets. La modélisation de la déformation des tissus est associée à une description surfacique spatiale du milieu considéré comme continu, constitué par un nombre discret de mèches, ne présentant que des déformations extensionnelles. Les déformations associées à l'effet de treillis résultent naturellement de la formulation. Des éléments finis surfaciques spatiaux, à interpolation linéaire ou bilinéaire, composés d'un nombre discret de mèches, et permettant la simulation de la déformation des tissus sont proposés [BOI 94 a]. Parmi ces éléments un quadrangle à 4 noeuds Q4 et un triangle à 3 noeuds P1, orientés selon les directions des mèches sens chaîne et trame sont présentés.

Des cas d'emboutissage, réalisés expérimentalement, sont simulés numériquement pour démontrer la validité de l'approche proposée.

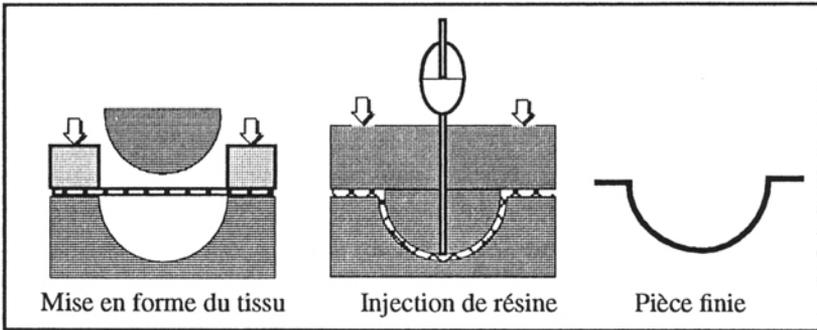


Figure 1. Les différentes étapes du procédé d'injection sur renfort

2. Modélisation de la déformation spatiale des tissus

2.1. Hypothèses

Un certain nombre d'observations peut être effectué à partir des préformes obtenues expérimentalement par un procédé d'emboutissage avec un poinçon hémisphérique. S'il est évident que le procédé d'emboutissage fait apparaître de grands déplacements, on peut également constater que les variations d'angles entre les deux réseaux de mèches sont très importantes dans certaines zones (figure 2) et notamment dans la partie inférieure du dôme hémisphérique. L'étude mécanique envisagée devra donc être réalisée dans le cadre des grandes transformations.

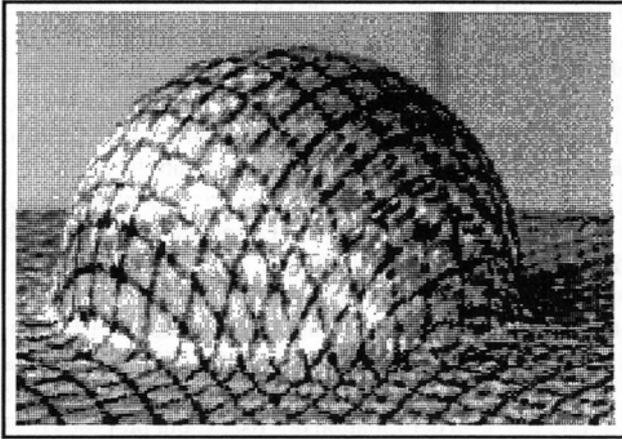


Figure 2. Emboutissage par poinçon et matrice hémisphériques.

Une autre observation importante peut être faite à partir d'un réseau de lignes droites continuellement tracées sur le tissu avant sa mise en forme. On constate que ces lignes deviennent fortement courbes mais qu'elles restent continues. Cette remarque est essentielle dans la modélisation utilisée car elle signifie que deux points appartenant à deux mèches initialement superposées par tissage le restent au cours de la mise en forme. Autrement dit, il n'y a pas de glissement entre les réseaux de mèches. On pourra en conséquence parler du déplacement d'un point de la surface moyenne définie par le tissu.

2.2. Caractérisation de la déformation spatiale des tissus

Compte tenu des remarques ci-dessus, la modélisation de la déformation spatiale des tissus repose principalement sur la description de la déformation dans un plan tangent au tissu au point considéré.

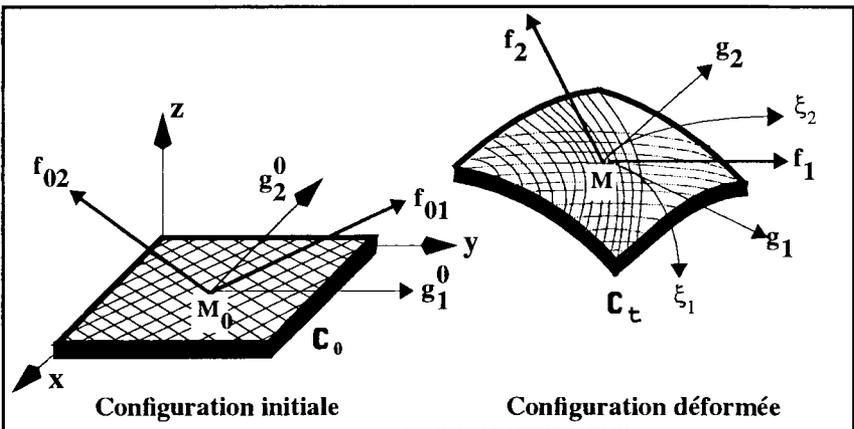


Figure 3. Repères matériels et repères des mèches.

La surface moyenne du tissu est décrite au moyen de deux coordonnées matérielles (ξ_1, ξ_2) , le vecteur position d'un point de la surface est repéré dans la configuration courante \mathbf{C}_t par:

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{x}^0(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) \quad (1)$$

où $\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2)$ représente le déplacement du point de la surface occupant la position initiale $\mathbf{x}^0(\xi_1, \xi_2)$.

On définit les deux vecteurs covariants tangents en chaque point de la surface moyenne du tissu, \mathbf{g}_i^0 dans la configuration initiale \mathbf{C}_0 , \mathbf{g}_i dans la configuration courante par:

$$\mathbf{g}_i^0 = \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \xi_i} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} \quad (2 \text{ a,b})$$

La formulation du problème est lagrangienne, le tenseur des déformations de Green-Lagrange noté \mathbf{E} dans la base matérielle contravariante est défini à partir des vecteurs covariants par:

$$\mathbf{E} = E_{ij}(\mathbf{g}^{0i} \otimes \mathbf{g}^{0j}) \quad \text{avec} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_i^0 \cdot \mathbf{g}_j^0) \quad (3)$$

où \mathbf{g}^{0i} sont les vecteurs contravariants associés aux vecteurs \mathbf{g}_i^0 par la relation:

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (4)$$

Afin d'exprimer la déformation dans la base de mèches, on définit un nouveau système de coordonnées matérielles lié à la direction tangente des mèches notée: \mathbf{f}_{0k} les composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange dans cette nouvelle base s'écrivent:

$$\mathbf{E}^f = E_{kl}^f(\mathbf{f}_{0k} \otimes \mathbf{f}_{0l}) \quad E_{kl}^f = E_{ij}(\mathbf{g}^{0i} \cdot \mathbf{f}_{0k})(\mathbf{g}^{0j} \cdot \mathbf{f}_{0l}) \quad (5)$$

3. Equilibre de la structure

Les relations introduites ci-dessus permettent de caractériser la position et la déformation des tissus de fibres de verre, elles ne permettent en aucun cas de trouver une position ou configuration d'équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures.

La particularité et l'originalité de notre approche consistent à utiliser l'énergie potentielle totale résultant de la déformation du tissu, calculée à partir de la somme discrète sur chaque mèche. Pour caractériser la position d'équilibre dans la configuration déformée, l'énergie potentielle totale du tissu est exprimée sous la forme d'une sommation discrète sur les mèches:

$$V(\mathbf{u}) = \sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} W(\mathbf{E}^f) dl_0 - J^e(\mathbf{u}) \quad (6)$$

où $W(\mathbf{E}^f)$ est la densité d'énergie de déformation par unité de longueur de la mèche,

l_0 la longueur de la mèche dans la configuration initiale et $J^e(u)$ le potentiel des efforts extérieurs.

Du fait que les interactions entre les mèches sont négligées, $W(E_f^f)$ est fonction uniquement de E_{11}^f . La minimisation de l'énergie potentielle conduit à la forme faible suivante:

$$G(u, \eta) = \sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} (T_f^{11} \cdot D_u [E_{11}^f] \eta) dl_0 - \int_{\Gamma_{l_0}} \bar{t} \eta dS_0 = 0 \quad (\forall \eta / \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_u) \quad (7)$$

où T_f^{11} est la tension dans les mèches dérivant du potentiel $W(E_{11}^f)$:

$$T_f = T_f^{11} (f_{01} \otimes f_{01}) \quad \text{avec} \quad T_f^{11} = \frac{\partial W(E_{11}^f)}{\partial E_{11}^f} \quad (T_f^{11} \geq 0) \quad (8)$$

La résolution de l'équation (7) nécessite la connaissance d'un modèle de comportement qui tient compte de la nature du matériau de tissu utilisé.

4. Modélisation du comportement mécanique des tissus

L'équilibre du tissu décrit ci-dessus est basé sur un modèle mécanique où le comportement global du tissu est construit à partir de l'état de tension des mèches. Dans le but de valider cette approche, un modèle de comportement en tension d'une mèche unique est proposé.

4.1. Modélisation du comportement d'une mèche de verre

Le comportement en tension d'une mèche de verre E constituée de plusieurs milliers de fibres et dont les caractéristiques physiques sont données dans le tableau 1, est identifié par un essai de traction unidirectionnel [SAB 93]. Le modèle de comportement élaboré est un modèle élastique linéaire avec mise en tension et endommagement progressif des fibres les plus tendues. Il résulte d'une description statistique du comportement, supposant une distribution gaussienne des fibres tendues ou non tendues lors de la mise en tension de la mèche, et non encore rompues et rompues lors de la phase de rupture progressive [SAB 93]. Le modèle résultant exprime une relation entre l'effort de tension sur la mèche et la déformation le long de la mèche sous la forme:

$$T_f(E) = \begin{cases} \zeta \left[\left(1 - \frac{T_f^*}{\zeta E_f^*} \right) E + \frac{2T_f^*}{\zeta} - E_f^* \right] \left(\frac{E}{E_f^*} \right) + T_f^1 & E \leq E_f^* \\ \zeta (E - E_f^*) + T_f^* & E_f^* \leq E \leq E_f^{**} \\ \zeta E \exp \left[-\alpha_f (E - E_f^{**})^{\beta_f} \right] + T_f^* - \zeta E_f^* & E \geq E_f^{**} \end{cases} \quad (9 \text{ a,b,c})$$

$$\alpha_f = - \left(\frac{1}{E_f^m - E_f^{**}} \right)^{\beta_f} \ln \left[\frac{T_f^m - T_f^* + \zeta E_f^*}{\zeta E_f^m} \right]; \quad \beta_f = \frac{E_f^{**} - E_f^m}{E_f^m \ln \left[\frac{T_f^m - T_f^* + \zeta E_f^*}{\zeta E_f^m} \right]}$$

où T_f et E sont respectivement la tension et la déformation uniaxiales dans la mèche et ζ le module d'élasticité de la zone de comportement élastique. La figure 4 illustre le modèle de comportement proposé. La figure 5 illustre l'identification d'un essai expérimental réalisé à partir des équations (9 a,b,c).

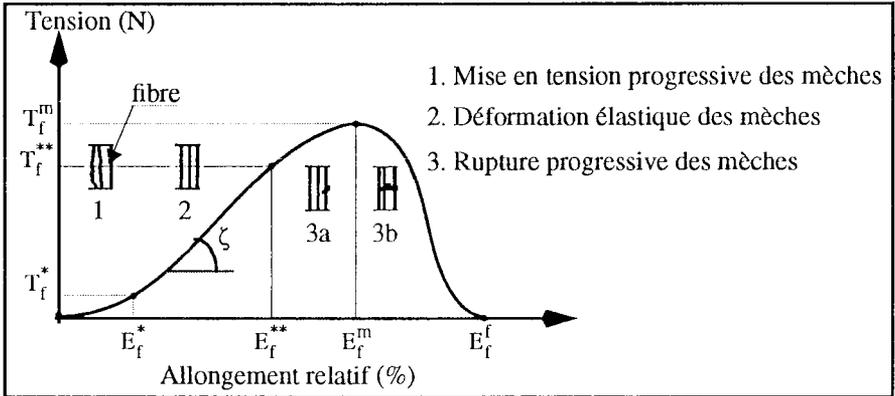


Figure 4. Modèle de comportement en tension de la mèche de verre E

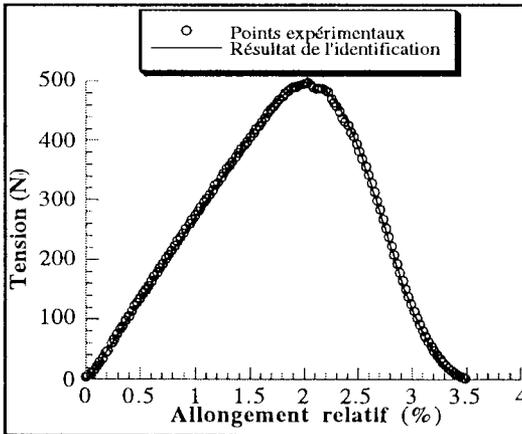


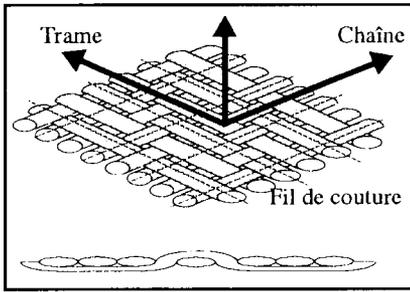
Figure 5. Courbe expérimentale et identification sur la mèche

Type de verre	E
Nombre de fibres	2000
Diamètre de fibre (μm)	17
Masse linéique (g/km)	1200

Tableau 1. Caractéristiques physiques de la mèche de verre

4.2. Modélisation du comportement du tissu

Dans le but de valider le comportement en tension du tissu à partir du comportement en tension de chacune des mèches et de leurs positions courantes, deux campagnes d'essais portant sur la traction unidirectionnelle et le cisaillement pur d'éprouvettes en tissu de mèches de verre ont été réalisées [SAB 93]. La comparaison entre résultats expérimentaux et résultats obtenus avec le modèle de comportement du tissu est présentée ci-après. La structure géométrique du tissu est donnée figure 6, tandis que les caractéristiques physiques de celui-ci sont mentionnées dans le Tableau 2.



Armature		Sergé 4x3
Masse surfacique (g/m ²)		580
Epaisseur (mm)		0.57
Masse linéique (g/Km)	Chaîne	1200
	Trame	1200
Densité (mèches/cm)	Chaîne	2.2
	Trame	2.5

Figure 6. Structure géométrique du tissu **Tableau 2.** Caractéristiques physiques du tissu

4.2.1. Essai de traction unidirectionnel

Pour réaliser des essais de traction unidirectionnel sur des éprouvettes de tissu de mèches de verre, un montage a été construit afin d'imposer un état de déformation homogène dans la direction y du montage (figure 7).

Des calculs géométriques simples fournissent les longueurs et angles caractéristiques ainsi que les déformations sens chaîne (E_c) et trame (E_t) dans les mèches, puis la loi de comportement (9 a,b,c) permet de calculer les tensions correspondantes $T_f(E_c)$ et $T_f(E_t)$, et l'équilibre global du montage fournissent l'effort théorique vertical F_y appliqué sur l'éprouvette (tableau 3). La comparaison entre efforts théoriques et valeurs expérimentales mesurées sur la machine de traction est illustrée sur la figure 8, pour une orientation initiale de mèches de 0° (avec 64 et 50 mèches), sur la figure 9 a pour une orientation de 30° et sur la figure 9b pour une orientation de 45°. On constate une bonne cohérence entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux ce qui valide l'approche proposée.

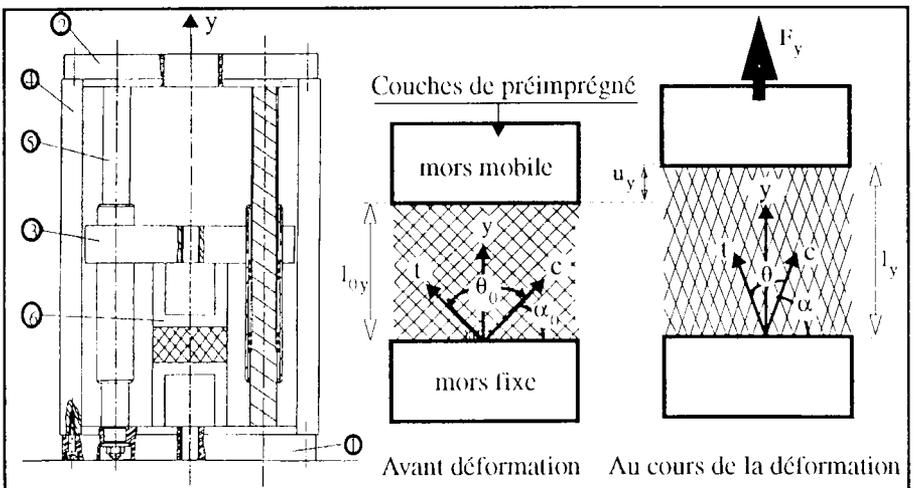


Figure 7. Epreuve et dispositif expérimental pour essai de traction unidirectionnel

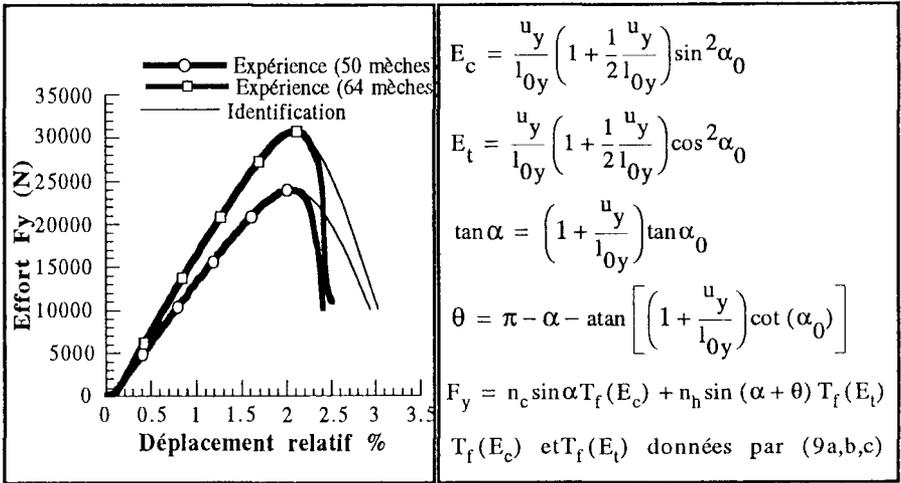


Figure 8. Comparaison expérience et identification de l'essai de traction (0°)

Tableau 3. Effort théorique F_y pour l'essai de traction

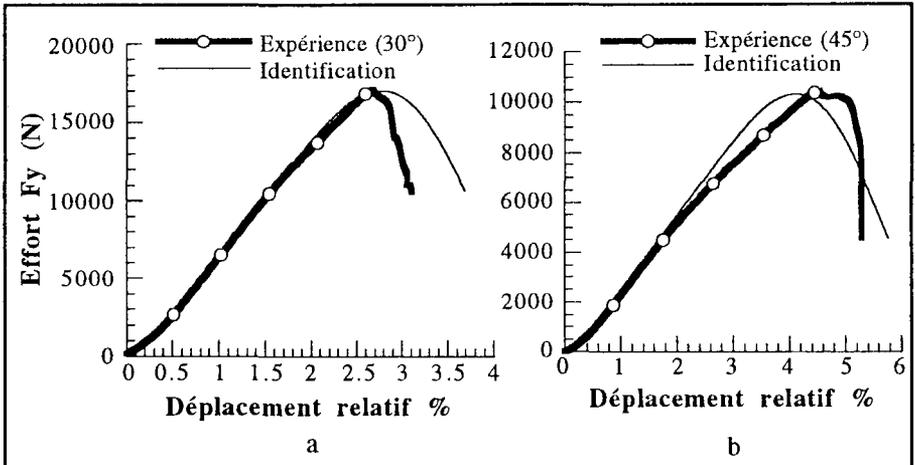


Figure 9. Comparaison courbe expérimentale-courbe identifiée en traction hors axe des mèches: (a) $\alpha_0 = 30^\circ$ et (b) $\alpha_0 = 45^\circ$

4.2.2. Essai de cisaillement

Afin de pouvoir tester le modèle dans des situations plus complexes et plus proches de l'emboutissage et des déformations par effet de treillis, des essais de cisaillement ont été réalisés. Un cadre articulé à ses 4 sommets (figure 10) et dont les barres sont indéformables est réalisé dans le but d'imposer une cinématique de type distorsion pure sur des éprouvettes de tissu de mèches de verre [SAB 93].

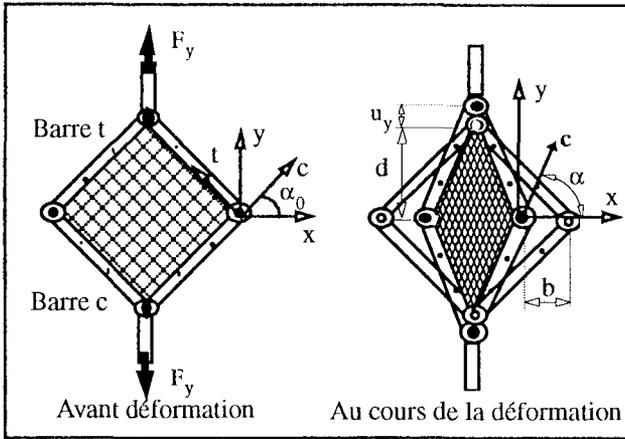


Figure 10. Dispositif expérimental pour l'essai de cisaillement pur

En tirant sur deux articulations opposées du cadre on produit une déformation de cisaillement pur. La démarche est la même que précédemment. L'état de déformation imposé fournit les tensions dans chaque mèche et l'équilibre du cadre conduit à l'effort théorique F_y appliqué sur le cadre (tableau 4).

$0 \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ ($E_c = 0$)	$\frac{\pi}{4} < \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$ ($E_t = 0$)
$E_t = \frac{1}{4d^2} [b^2 - u_y^2 - 2d(u_y + b)] \cos 2\alpha_0$	$E_c = \frac{1}{4d^2} [u_y^2 - b^2 + 2d(u_y + b)] \cos 2\alpha_0$
$\tan \alpha = \frac{d-b}{d+u_y} \tan \alpha_0$	$\tan \alpha = \frac{d+u_y}{b-d} \tan \alpha_0$
$F_y = n_t T_f(E_t) \left(\cos \alpha + \frac{d+u_y}{d-b} \sin \alpha \right)$	$F_y = n_c T_f(E_c) \left(\cos \alpha - \frac{d+u_y}{d-b} \sin \alpha \right)$
$T_f(E_t)$ donnée par (9a,b,c)	$T_f(E_c)$ donnée par (9a,b,c)

Tableau 4. Effort théorique F_y pour l'essai de cisaillement

Pour une orientation initiale des mèches de 0° , 10° et 45° (figure 11) l'effort théorique est en bon accord avec l'effort mesuré expérimentalement sur la machine. En ce qui concerne le cas à 45° où les mèches sont orientées dans la direction des côtés du cadre, on constate que l'effort sur la machine est négligeable (noter les différences d'échelles des deux courbes figure 11) ce qui par ailleurs confirme que les mèches ne présentent pas de cisaillement dans le plan du tissu.

Les essais de traction et de cisaillement amènent les deux constatations suivantes:

- Le modèle élaboré résultant de la superposition du comportement de chacune des mèches et de leurs positions au cours de la déformation est bien vérifié.
- Les mèches constituant le tissu ne présentent pas de déformation de cisaillement dans leur plan ce qui confirme que les effets de frottement entre fibres et entre mèches sont très faibles.

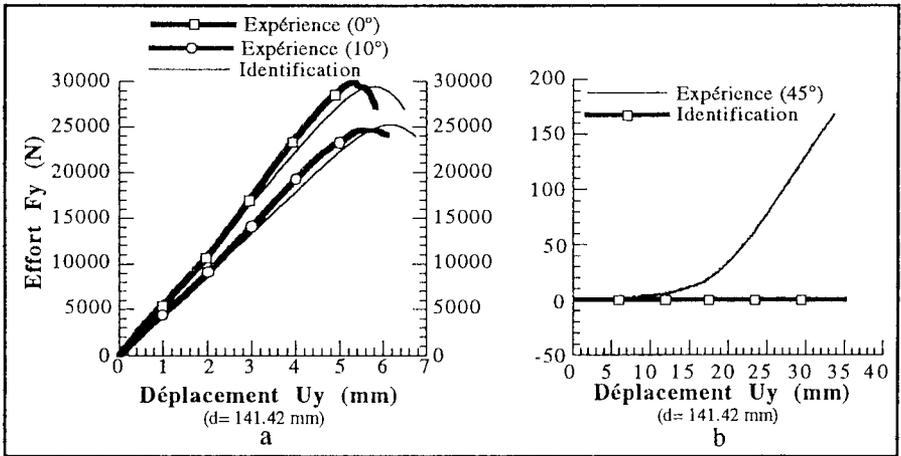


Figure 11. Comparaison expérience-identification pour l'essai de cisaillement avec orientation initiale des mèches de: (a) $\alpha_0 = 0^\circ$ et $\alpha_0 = 10^\circ$, (b) $\alpha_0 = 45^\circ$

5. Discrétisation par éléments finis

Deux éléments finis discrets isoparamétriques composés de mèches ont été construits à partir des hypothèses décrites ci-dessus.

5.1. Éléments finis discrets linéaire P1 et bilinéaire Q4

L'hypothèse de non-glissement entre les réseaux de mèches permet de construire des éléments finis surfaciques composés de mèches (figure 12). La rigidité en flexion des mèches étant nulle, ces éléments finis présentent un comportement membranaire pur.

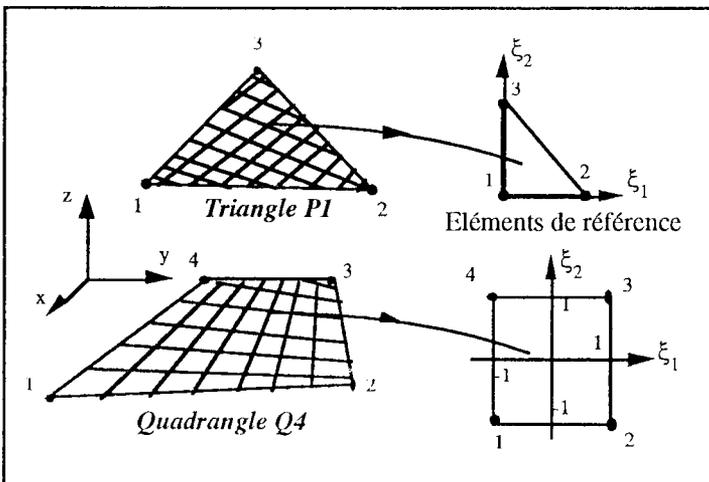


Figure 12. Éléments finis P1 et Q4 composés de mèches

Sur chaque sous-domaine 2D défini par un élément, une interpolation nodale de la géométrie et du déplacement est effectuée:

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^n N^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}^k \quad \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^n N^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}^k \quad (10)$$

où N^k sont les fonctions d'interpolation classiques, \mathbf{x}^k est le vecteur position nodale et \mathbf{u}^k le vecteur déplacement nodal du noeud k .

La variation de E_{ij} dans la direction du déplacement virtuel η est donnée par:

$$D_u(E_{ij}) \eta = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_i} (g_j^0)_m + \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_j} (g_i^0)_m + \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_m}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_m}{\partial \xi_j} \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_i} \right] \quad (11)$$

Soit le vecteur \mathbf{E} de composantes E_α ($\alpha \in [1, 3]$) tel que $\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{12}]^T$, l'opérateur d'interpolation des déformations \mathbf{B} est défini par l'expression:

$$D_u(E_\alpha) \eta = [{}^L\mathbf{B} + {}^{NL}\mathbf{B}(u)]_{\alpha s} \eta_s = [\mathbf{B}]_{\alpha s} \eta_s \quad (12)$$

avec:

$$[\mathbf{B}^k]_{\alpha m} = \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial N^k}{\partial \xi_i} (g_j^0)_m + \frac{\partial N^k}{\partial \xi_j} (g_i^0)_m \right]}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial N^k}{\partial \xi_i} \frac{\partial N^l}{\partial \xi_j} + \frac{\partial N^l}{\partial \xi_j} \frac{\partial N^k}{\partial \xi_i} \right]}_{\text{Partie non linéaire}} u_m^l \quad (13)$$

où

$$s \in [1, \text{nxddl}] \quad k = \text{ent}\left(\frac{s+2}{3}\right) \quad l = \text{ent}\left(\frac{s+2}{3}\right) \quad m = s - 3(k-1) \quad (14)$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow i = 1 \text{ et } j = 1 \\ \alpha = 2 \Rightarrow i = 2 \text{ et } j = 2 \\ \alpha = 3 \Rightarrow i = 1 \text{ et } j = 2 \end{cases}$$

L'équation d'équilibre (7) correspondant à $G(u, \eta) = 0$ est une équation non linéaire (compte tenu des non-linéarités géométriques et de comportement). Elle est résolue par une méthode incrémentale associée à un schéma de Newton. Pour un incrément donné, l'accroissement de déplacement à l'itération i , $\Delta u^i = u^{i+1} - u^i$ est obtenu par la résolution du système linéaire suivant:

$$D_u(G(u, \eta))^i \Delta u^i = -G(u^i, \eta) \quad (15)$$

et l'approximation par éléments finis permet d'écrire la forme discrète de (7):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A}_{\text{élt}} \left[\sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial T_f^{11}}{\partial E_{11}^f} \right)^i D_{\mathbf{u}} [E_{11}^f]^i \Delta \mathbf{u}^i D_{\mathbf{u}} [E_{11}^f]^i \eta dl_0 \right] + \\
 & \mathbf{A}_{\text{élt}} \left[\sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} D_{\mathbf{u}} [(D_{\mathbf{u}} [E_{11}^f]^i \eta)^f]^i \Delta \mathbf{u}^i [T_f^{11}]^i dl_0 \right] = \\
 & \mathbf{A}_{\text{élt}} \left[- \sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} D_{\mathbf{u}} [E_{11}^f]^i \eta [T_f^{11}]^i dl_0 + \eta_n^T F_{\text{ext}} \right]
 \end{aligned} \quad (16)$$

où \mathbf{A} est l'opérateur d'assemblage sur l'ensemble des éléments

Cette équation étant écrite pour tout champ de déplacement virtuel η nul sur Γ_u , elle conduit à chaque itération i au système linéaire

$$\mathbf{A}_{\text{élt}} (\mathbf{K}^e + \mathbf{K}_T^e)^i (\Delta u_n)^i = \mathbf{A}_{\text{élt}} (F_{\text{ext}}^e - (F_{\text{int}}^e)^i) \quad (17)$$

où $[\mathbf{K}^e]^i$, $[\mathbf{K}_T^e]^i$ sont respectivement les matrices de rigidité et de raideur géométrique élémentaires et $(F_{\text{int}}^e)^i$, (F_{ext}^e) les vecteurs des efforts nodaux intérieurs et extérieurs élémentaires dont les expressions explicites des composantes sont les suivantes:

$$[\mathbf{K}^e]_{rs} = \sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} \frac{\partial T_f^{11}}{\partial E_{11}^f} [\mathbf{B}_{ijr}] [\mathbf{B}_{kls}] (g^{0i} \cdot f_{01}) (g^{0j} \cdot f_{01}) (g^{0k} \cdot f_{01}) (g^{0l} \cdot f_{01}) dl_0 \quad (18)$$

$$[\mathbf{K}_T^e]_{rs} = \sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} T_f^{11} \cdot \left(\frac{\partial N^k}{\partial \xi_i} \frac{\partial N^l}{\partial \xi_j} \right) (g^{0i} \cdot f_{01}) (g^{0j} \cdot f_{01}) dl_0 \quad (19)$$

$$\{F_{\text{int}}^e\}_s = \sum_{\text{mèches}} \int_0^{l_0} T_f^{11} [\mathbf{B}_{ijs}] (g^{0i} \cdot f_{01}) (g^{0j} \cdot f_{01}) dl_0 \quad (20)$$

avec:

$$[\mathbf{K}_T^e]_{rs} = 0 \quad \text{si } (r - 3k \neq s - 3l) \quad (21)$$

5.2. *Éléments finis discrets orientés dans la direction des mèches*

Les éléments finis décrits ci-dessus sont construits dans le cas général pour un arrangement quelconque des mèches dans le tissu. Un cas particulier de ces éléments correspond au cas où les directions naturelles de l'élément sont confondues avec celles des deux réseaux de mèches chaîne et trame [BOI 94 b].

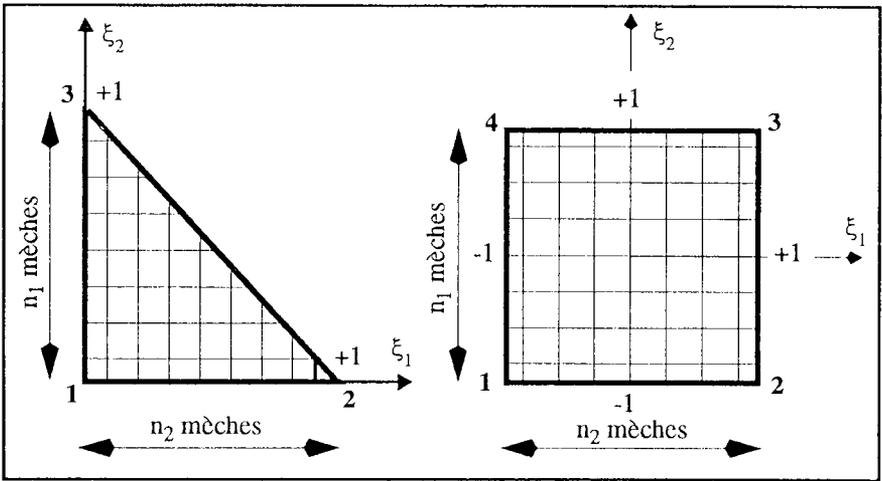


Figure 13. Eléments finis P1 et Q4 orientés dans la direction des mèches

5.2.1. Cas du quadrangle à 4 noeuds Q4 à interpolation bilinéaire

Une quadrature discrète est dans ce cas utilisée permettant de transformer la somme sur l'ensemble des mèches des matrices de rigidité et du second membre (fonction de ξ^k) en une somme sur deux mèches particulières dans chaque direction de l'élément (voir Annexe):

$$\sum_{k=1}^m f(\xi^k) = \frac{m}{2} \left[\sum_{i=1}^2 f(\xi^i) \right] \tag{22}$$

Les composantes de la matrice de rigidité, de raideur géométrique et du vecteur effort interne sont alors obtenues de façon explicite, compte tenu de la quadrature discrète (22):

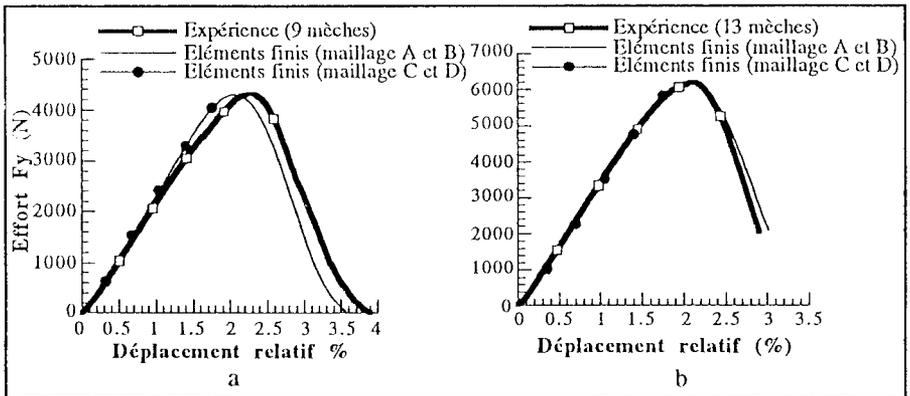
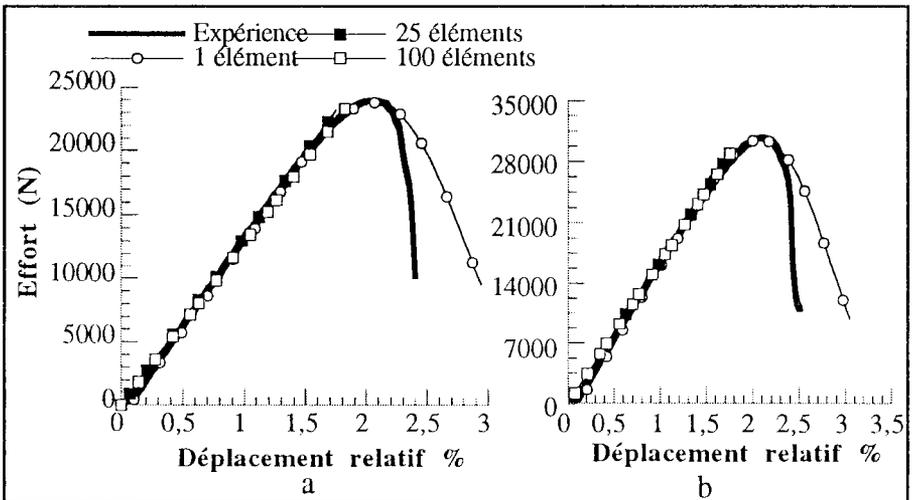
$$[K_{rs}^e] = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial T_f^{11}}{\partial E_{11}^f} B_{1s}(\xi_2^i) B_{1r}(\xi_2^i) \frac{n_1}{\|g_1^0\|^3} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial T_f^{11}}{\partial E_{11}^f} B_{2s}(\xi_1^i) B_{2r}(\xi_1^i) \frac{n_2}{\|g_2^0\|^3} \tag{23}$$

$$[K_{T(rs)}^e] = \sum_{i=1}^2 T_f^{11} \frac{\partial N^k(\xi_2^i)}{\partial \xi_1} \frac{\partial N^l(\xi_2^i)}{\partial \xi_1} \frac{n_1}{\|g_1^0\|} + \sum_{i=1}^2 T_f^{11} \frac{\partial N^k(\xi_1^i)}{\partial \xi_2} \frac{\partial N^l(\xi_1^i)}{\partial \xi_2} \frac{n_2}{\|g_2^0\|} \tag{24}$$

$$(F_{int}^e)_s = \sum_{i=1}^2 T_f^{11} B_{1s}(\xi_2^i) \frac{n_1}{\|g_1^0\|} + \sum_{i=1}^2 T_f^{11} B_{2s}(\xi_1^i) \frac{n_2}{\|g_2^0\|} \tag{25}$$

avec $\xi^i = \pm \sqrt{\frac{m^2 - 1}{3m^2}}$

α_0	n_1	n_2	l_{0x} (mm)	l_{0y} (mm)	U_y (mm)
0°	0	9	14	50	2
30°	9	39	110	50	2.5
45°	13	17	76	50	3.5

Tableau 5. Caractéristiques géométriques de l'essai de traction

Figure 15. Comparaison éléments finis-expérience dans les axes des mèches $\alpha_0 = 0^\circ$: (a) 9 mèches, (b) 13 mèches

Figure 16. Comparaison éléments finis-expérience avec un maillage plus fin: (a) 50 mèches, (b) 64 mèches

5.2.2. Cas du triangle à 3 noeuds P1 à interpolation linéaire

Pour le triangle à trois noeuds, chaque terme des matrices de rigidité et second membre est déterminé par la somme de deux scalaires (voir Annexe):

$$[K^e]_{rs} = \frac{1}{2} \frac{\partial T_f^{11}}{\partial E_{11}^f} B_{1s} B_{1r} \frac{n_1}{\|g_1^0\|^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial T_f^{11}}{\partial E_{11}^f} B_{2s} B_{2r} \frac{n_2}{\|g_2^0\|^3} \tag{26}$$

$$[K^e_{T}]_{rs} = \frac{T_f^{11}}{2} \left(\frac{\partial N^m}{\partial \xi_1} \frac{\partial N^l}{\partial \xi_1} \right) \frac{n_1}{\|g_1^0\|} + \frac{T_f^{11}}{2} \left(\frac{\partial N^m}{\partial \xi_2} \frac{\partial N^l}{\partial \xi_2} \right) \frac{n_2}{\|g_2^0\|} \tag{27}$$

$$\{F^e_{int}\}_s = \frac{T_f^{11}}{2} B_{1s} \frac{n_1}{\|g_1^0\|} + \frac{T_f^{11}}{2} B_{2s} \frac{n_2}{\|g_2^0\|} \tag{28}$$

5.3. Tests élémentaires

Les essais d'élongation pure et de cisaillement pur décrits au paragraphe 4 sont simulés en utilisant l'approche par éléments finis proposée. Les calculs sont effectués avec un ou plusieurs éléments finis, orientés ou non dans les directions des mèches sens chaîne et trame [CHE 94].

5.3.1. Test d'élongation pure

Le test d'élongation pure est simulé en utilisant les maillages A,B,C ou D (figure 14), correspondant à des orientations privilégiées ou quelconques par rapport aux directions des mèches du tissu (tableau 5). La figure 15 montre une comparaison entre résultats expérimentaux et valeurs calculées pour une orientation initiale de 0°, dans le cas d'un nombre de mèches égal à 9 (figure 15 a) ou 13 (figure 15 b). Dans les 2 cas les différents maillages donnent les mêmes résultats. La figure 16 illustre les effets associés au maillage pour la simulation du test d'élongation pure dans le cas d'un nombre de mèches égal à 50 (figure 16a) ou 64 (figure 16b), on peut noter qu'il n'y a pas de différence importante associée à la finesse du maillage. Les figures 17 a et 17 b donnent le même type de comparaison pour deux orientations distinctes des mèches, 30° (figure 17 a) et 45° (figure 17 b). Dans ces deux cas également, les différents maillages donnent sensiblement les mêmes résultats.

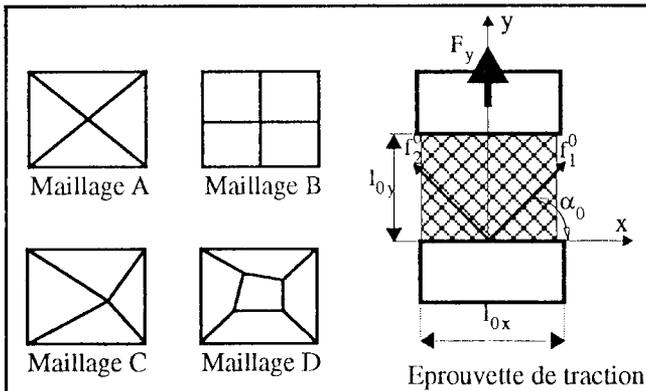


Figure 14. Test d'élongation pure et maillages utilisés pour la simulation

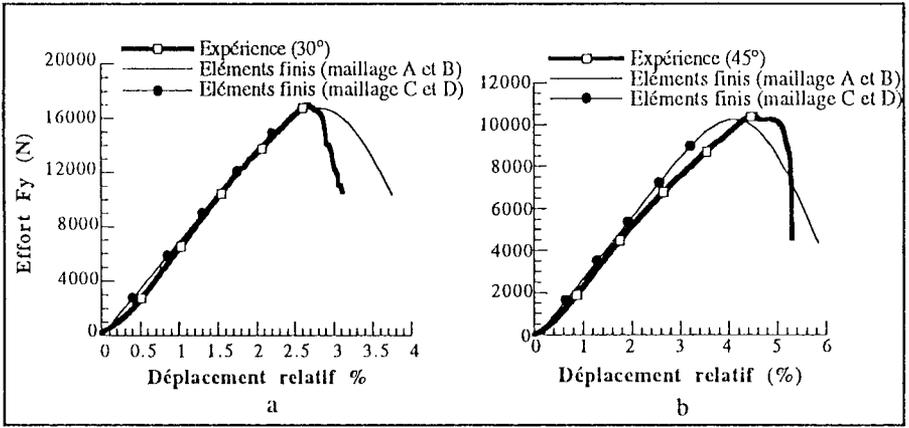


Figure 17. Comparaison éléments finis-expérience: (a) $\alpha_0 = 30^\circ$, (b) $\alpha_0 = 45^\circ$

5.3.2. Test de cisaillement pur

Le test de cisaillement (figure 18) est simulé en utilisant les maillages A, B, C ou D. Les conditions aux limites appliquées correspondent aux contraintes cinématiques imposées par le cadre déformable. Les résultats de calcul sont comparés aux résultats expérimentaux, et correspondent à des orientations de 0° (figure 19 a), 10° (figure 19 b), 20° (figure 20 a), 45° (figure 20 b). Dans tous les cas, les maillages A, B, C et D donnent sensiblement le même résultat, très proche des résultats expérimentaux.

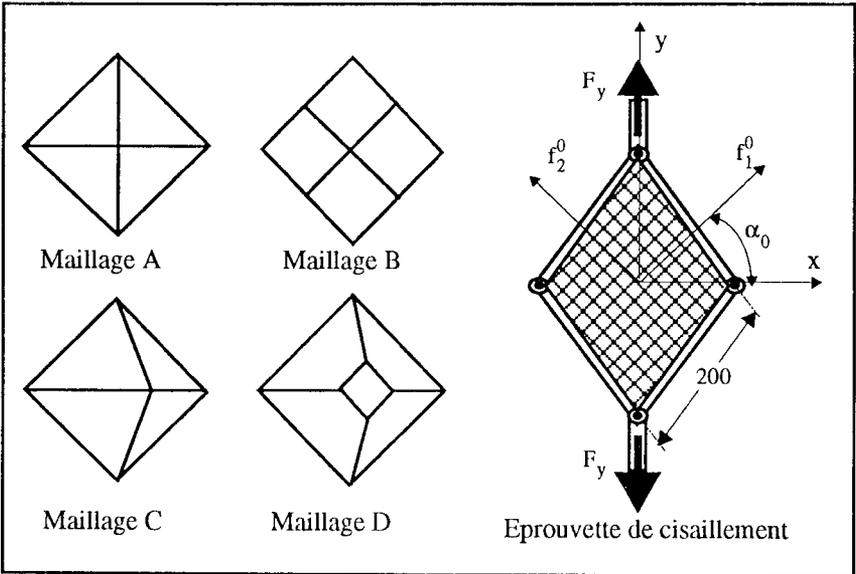


Figure 18. Test de cisaillement pur et maillages utilisés pour la simulation numérique

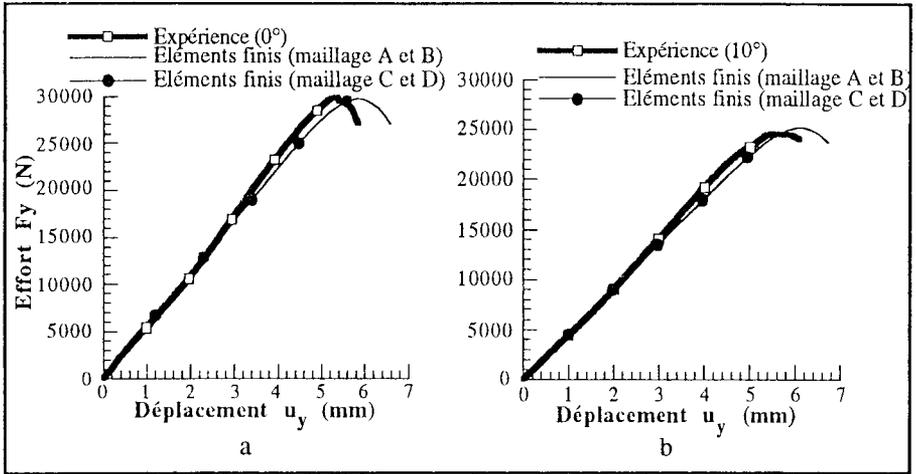


Figure 19. Comparaison éléments finis-expérience: (a) $\alpha_0 = 0^\circ$, (b) $\alpha_0 = 10^\circ$

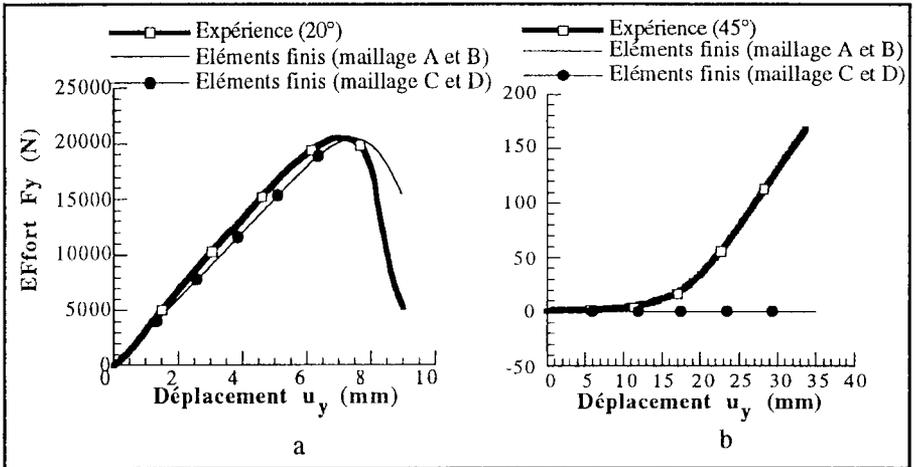


Figure 20. Comparaison éléments finis-expérience: (a) $\alpha_0 = 20^\circ$, (b) $\alpha_0 = 45^\circ$

6. Simulation d'opérations d'emboutissage

Afin de valider le modèle de calcul proposé ainsi que la discrétisation par éléments finis retenue, sur des situations réelles d'emboutissage, deux types d'essais d'emboutissage de tissu de fibres de verre sont réalisés expérimentalement et simulés numériquement. Ils correspondent à un emboutissage par poinçon hémisphérique, pour deux orientations initiales différentes des mèches (0° et 45°) par rapport aux médianes du flan [BOI 94 a].

6.1. Emboutissage par un poinçon hémisphérique avec orientation initiale de 0° des mèches

L'essai a été effectué sur un tissu de surface initiale plane et carrée et d'orientation initiale des mèches de 0° par rapport aux côtés du carré. Le tissu est embouti par un poinçon hémisphérique de rayon 75 mm et animé d'un mouvement de descente de 75 mm (figure 21 a), une pression de 0,6 MPa appliquée sur le serre-flan permet de retenir le tissu au cours de la mise en forme et d'éviter ainsi la formation de plis. Le coefficient de frottement entre le tissu et les outillages est estimé à 0,1, tandis que le modèle de frottement est de type Coulomb.

La simulation numérique est réalisée en se plaçant dans les mêmes conditions que celles utilisées expérimentalement, compte tenu des conditions de symétrie, seul un secteur de 90° est maillé. La préforme obtenue expérimentalement (figure 21 b) et le résultat de la simulation numérique avec un maillage composé de 400 éléments (figure 22 a) coïncident parfaitement, au moins au niveau du contour du flan après déformation. Un maillage plus fin composé de 900 éléments (figure 21 b) confirme le fait que la forme géométrique déformée est très bien simulée.

Un résultat important du calcul est le profil des distorsions angulaires résultant de la déformation par mécanisme de treillis (figure 23 a) où les distorsions sont exprimées en degrés. Notons que les médianes de la préforme correspondent approximativement à des distorsions nulles, tandis que les diagonales correspondent aux valeurs maximum (de l'ordre de 40°), ce qui est en conformité qualitative avec la figure 21b. Afin d'effectuer une comparaison qualitative sur les distorsions angulaires, celles-ci ont été relevées expérimentalement le long d'une diagonale et comparées avec les distorsions obtenues par calcul (figure 23 b). Il y a un très bon accord entre valeurs mesurées et valeurs calculées.

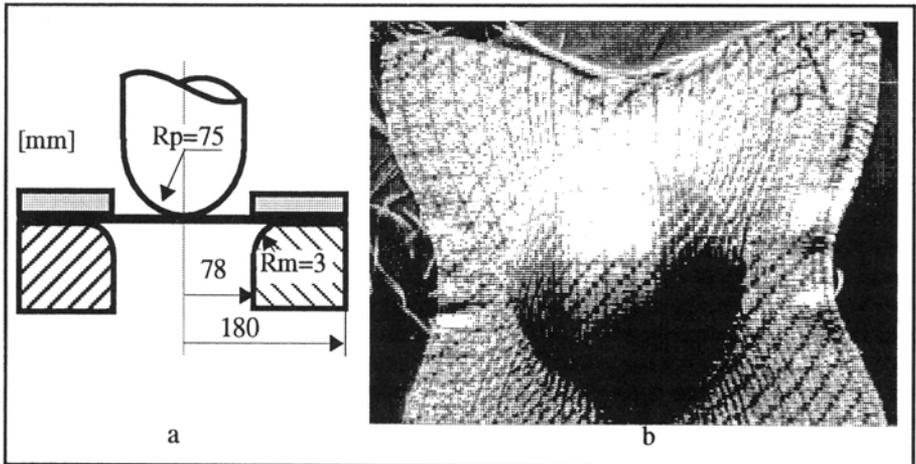


Figure 21. Géométrie initiale (a) et préforme expérimentale (b)

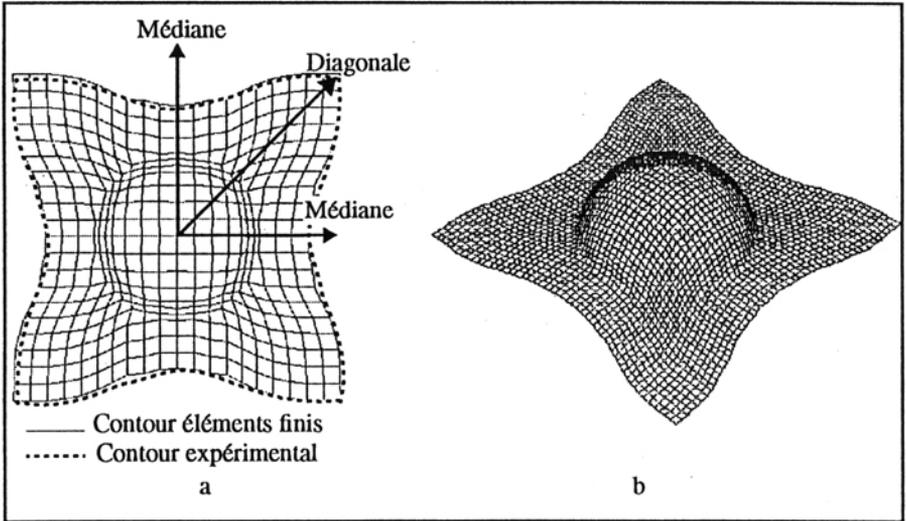


Figure 22. Comparaison Simulation-Expérience (a) et maillage déformé (b)

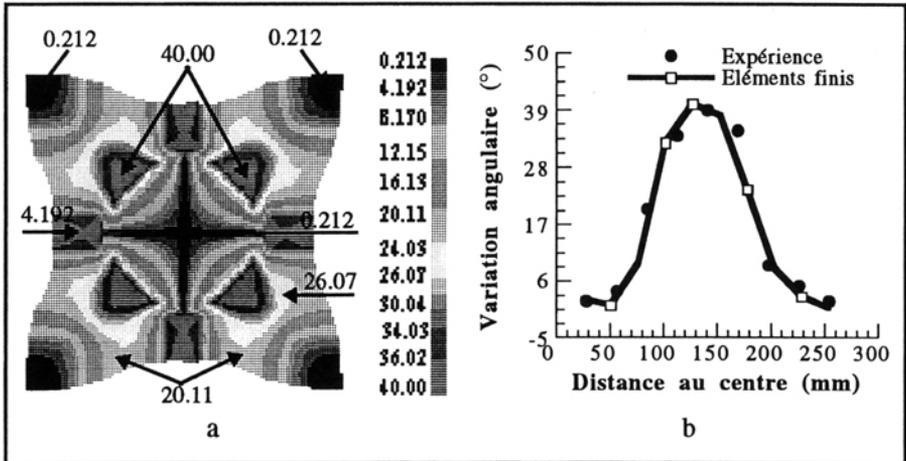


Figure 23. Iso-Distorsions angulaires (a) et variation de distorsions angulaires le long de la diagonale (b)

6.2. Emboutissage par un poinçon hémisphérique avec orientation initiale de 45° des mèches

Afin d'illustrer le caractère très anisotrope du comportement du tissu de fibres de verre, l'essai d'emboutissage par poinçon hémisphérique a été effectué avec les mêmes dimensions d'outillages, mais avec une orientation initiale de 45° des mèches par rapport aux médianes du flan initialement carré. La préforme obtenue expérimentalement (figure 24 a) présente un contour très différent de celui obtenu

avec une orientation de 0° (figure 21 b).

L'essai a été simulé numériquement en utilisant une discrétisation géométrique du flan de tissu et des outillages (figure 24 b). Deux vues distinctes du maillage déformé (figure 25 a et 25 b) permettent de vérifier que la simulation rend très bien compte de l'orientation car les profils des contours déformés (expérimental et simulé) sont en très bon accord.

Le même type d'informations concernant les distorsions angulaires est obtenu. Dans le cas présent les distorsions sont minimales (voisines 0°) le long des diagonales et maximales (voisines de 45°) le long des médianes (figure 26 a). Afin de vérifier qualitativement les valeurs des distorsions le long des médianes, celles-ci ont été mesurées expérimentalement et comparées avec les résultats du calcul (figure 26 b), là encore il y a un très bon accord.

D'autres résultats peuvent bien sûr être extraits du calcul par éléments finis, notamment les tensions dans les mèches indiquant les éventuelles ruptures de fibres, les densités surfaciques de mèches utiles pour une simulation ultérieure de l'injection de résine.

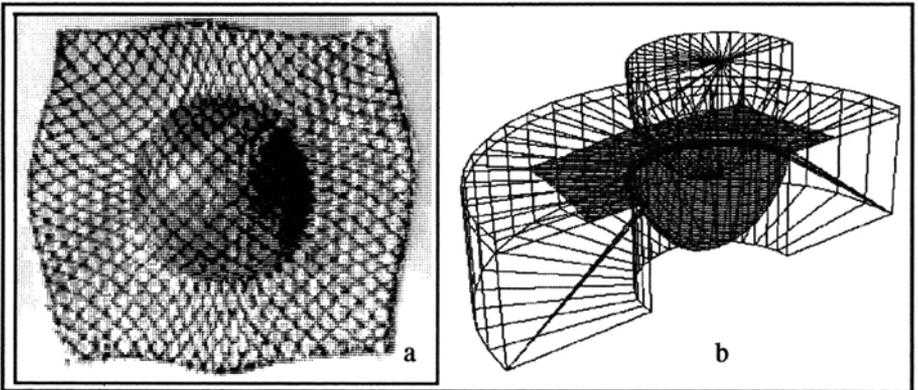


Figure 24. Préforme expérimentale (a) et outils et maillage déformé (b)

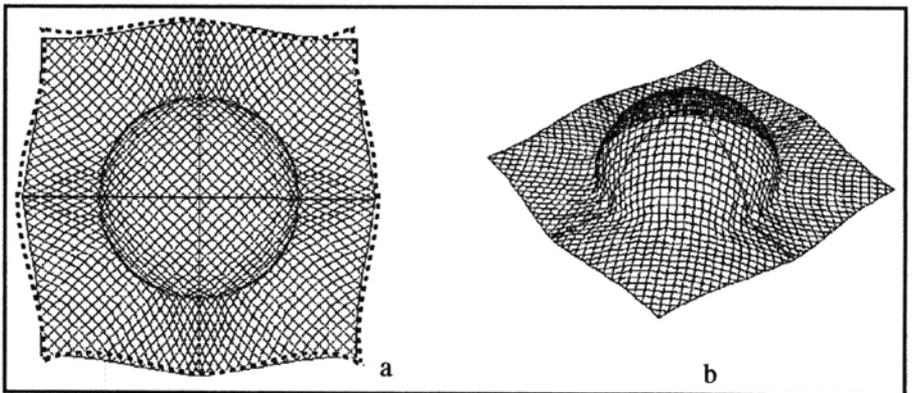


Figure 25. Comparaison simulation - expérience (a) et maillage déformé (b)

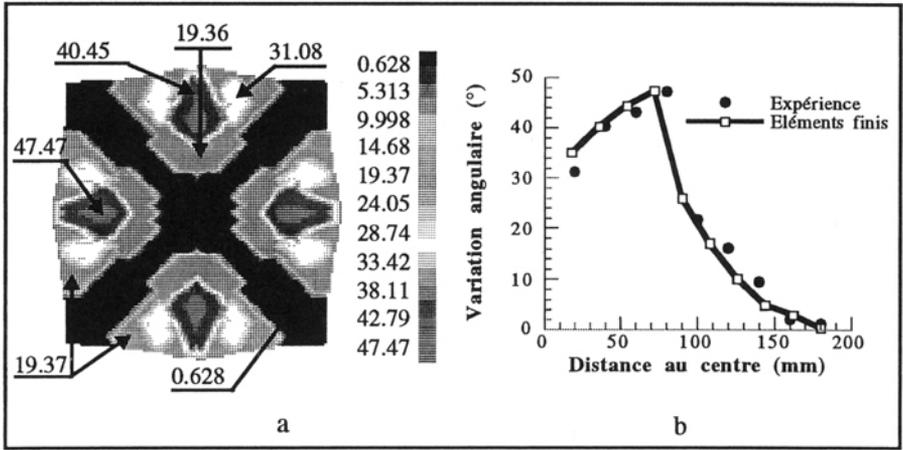


Figure 26. Iso-distorsion (a) et variation de distorsions angulaires le long de la médiane (b)

7. Conclusion

Une approche pour la simulation numérique du préformage et de l'emboutissage des tissus de fibres de verre a été proposée. Cette approche qui repose sur une base mécanique forte diffère très sensiblement des modèles purement géométriques utilisés pour le drappage des tissus sur des formes géométriques tridimensionnelles.

Les hypothèses émises associées au fait qu'il y a non glissement des mèches les unes par rapport aux autres ont été vérifiées expérimentalement pour le tissu concerné, tandis que celles associées au fait de négliger les effets dus à l'entrelacement des mèches sont correctes pour des tissus plats comme celui étudié. Le modèle de comportement du tissu établi à partir de la sommation du comportement de chaque mèche considérée comme élastique non linéaire permet une identification correcte d'essais expérimentaux, et permet la définition explicite de l'énergie potentielle du tissu.

A partir de la déformation surfacique du tissu, les éléments finis discrets proposés (P1 et Q4) permettent la simulation correcte de la déformation des tissus. Le cas particulier où les côtés de l'élément sont parallèles aux mèches sens chaîne et sens trame a été exploité et conduit à une formulation des matrices de rigidité, de raideur initiale et d'effort interne nodal particulièrement efficace.

Le logiciel réalisé, basé sur les éléments décrits ci-dessus, permet la simulation d'opérations d'emboutissage, avec des temps de calcul très courts (quelques dizaines de seconde sur une station de travail). Une comparaison avec des résultats expérimentaux, obtenus par emboutissage avec poinçon hémisphérique, a pu être effectuée. Les résultats numériques sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux prouvant ainsi que la démarche poursuivie, tant dans la modélisation, que dans les calculs, est satisfaisante pour les problèmes envisagés.

8. Références

- [AUB 89] N. AUBOURG, D. MION, Etude de la modélisation de l'emboutissage d'un tissu de mèches de verre, Rapport de stage PSA/ Ecole Polytechnique, Paris 1989.
- [BER 88] O K. BERGSMAN, J. HUISMAN, Deep drawing of fabric reinforced thermoplastics, *Proceedings of the 2nd Conf. on Computer Aided Design in Composite Material Technology.*, Ed. by CA Brebbia et al, Springer Verlag, 1988, 323-333.
- [BOI 92] P. BOISSE, J.C. GELIN, H. SABHI, Forming of glass fiber fabrics into complex shapes - Experimental and computational aspects, *Annals of the CIRP*, Vol 41-1, 1992, 327-330.
- [BOI 93] P. BOISSE, A. CHEROUAT, J.C. GELIN, H. SABHI, Experimental study and F.E. simulation of glass fiber fabric shaping process, *In use of Plastic and Plastic Composites: Material and Mechanics Issues*, Ed. Y.K.STOKES, ASME, 64, 1993, 587-60. To be published in *Polymer Composites* (1994).
- [BOI 94 a] P. BOISSE, A. CHEROUAT, J.C. GELIN, H. SABHI, Modélisation numérique du préformage des tissus de fibres de verre avant injection sur renforts, *Rapport de synthèse du Groupe d'Etude sur le RTM*, Rapport LMA/MMFM 02,1994.
- [BOI 94 b] P. BOISSE, Modèles mécaniques et numériques pour l'analyse non-linéaire des structures minces, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Franche-Comté, 1994.
- [CHÉ 94] A. CHEROUAT, Modélisation numérique par la méthode des éléments finis du préformage des tissus de fibres de verre, Thèse de Doctorat, Université de Franche Comté, en cours.
- [GAY 87] D.GAY, *Matériaux Composites*, Hermès, 1987.
- [GEL 91] J.C. GELIN, H. SABHI, Constitutive equations for glass fiber networks and consequences on resin flow during processes, *Seventh Annual Meeting of the Polymer Processing Society*, Hamilton-Canada, Ed. by G. VLACHAPOULOS, 1991, 119-121.
- [KAW 73 a] S. KAWABATA, M. NIWA, H. KAWAI, The Finite-Deformation Theory of Plain-Weave Fabrics, Part I: The Biaxial-Deformation Theory, *Journal of the Textile Institute*, Vol 64, 1973, 21-46.
- [KAW 73 b] S. KAWABATA, M. NIWA, H. KAWAI, The finite-Deformation Theory of Plain-Weave Fabrics, Part III: The Shear-Deformation Theory, *Journal of the Textile Institute*, Vol 63, 1973, 62-83.
- [LEN 90] F. LENE, Technique d'homogénéisation des composites à renforts tissés, *Mécanique Matériaux Electricité*, n°433, Février / Mars 1990, 24-28.
- [SAB 93] H. SABHI, Etude Expérimentale et Modélisation Mécanique et Numérique du Comportement des Tissus de mèches de Verre lors de leur Préformage, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Mai 1993.

[VAN 91] F. VAN DER WEEN, Algorithms for draping fabrics on doubly a curved surfaces, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol 31, 1991, 1415-1426.

ANNEXE : Quadrature discrète

On montre dans la cas du quadrangle que si m mèches de coordonnées naturelles ξ^k sont positionnées régulièrement dans l'élément, alors on peut écrire l'expression suivante:

$$\sum_{k=1}^m f(\xi^k) = g(m) \left[\sum_{i=1}^2 f(\xi^i) \right]$$

où $g(m)$ est une fonction de pondération (poids), ξ^i sont les positions particulières des mèches de Gauss et m le nombre de mèches dans chaque direction.

Pour l'élément quadrangulaire où l'opérateur d'interpolation B est linéaire, la fonction à transformer $f(\xi^i)$ est une fonction du second ordre.

Soit:

$$f(\xi^i) = a[\xi^i]^2 + b\xi^i + c$$

où a , b , et c sont des constantes.

La répartition régulière de mèches dans l'élément donne explicitement leurs positions ξ^k dans l'élément de référence:

$$\xi^k = \frac{2k-1}{m} - 1$$

et utilisant et les égalités:

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m}{6} (m+1) (2m+1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^m k = \frac{m}{2} (m+1)$$

on obtient finalement la relation de transformation suivante:

$$\sum_{k=1}^m f(\xi^k) = \frac{m}{2} \left[\sum_{i=1}^2 f(\xi^i) \right] \quad \text{avec} \quad \xi^i = \mp \sqrt{\frac{m^2-1}{3m^2}}$$

Remarque: On peut remarquer que si $m \rightarrow \infty$ on retrouve le cas d'intégration par Gauss d'une fonction continue du second ordre $(\pm 1/\sqrt{3})$.

Dans le cas du triangle, compte tenu que les composantes des déformations sont constantes, les sommations sur les mèches sens chaîne et sens trame s'expriment en fonction de la position naturelle ξ^k de chaque mèche k dans l'élément de référence donnée par:

$$\xi^k = \frac{2k-1}{2m}$$

il en résulte que:

$$\sum_{k=1}^m (1 - \xi^k) = \frac{m}{2}$$