

---

# MEF adaptée à l'évaluation des actions exercées par un matériau pulvérulent aux parois d'un silo

Eric Ragneau — Jean-Marie Aribert

INSA de Rennes — Laboratoire de structures  
20, avenue des Buttes de Coësmes, 35043 Rennes cedex

---

*RÉSUMÉ.* L'objectif de cet article consiste à présenter les grandes lignes de la démarche adoptée par les auteurs pour établir une modélisation précise des actions exercées par la matière ensilée sur les parois des silos, à l'aide d'une approche aux éléments finis. Le modèle de calcul développé permet de suivre fidèlement les différentes phases d'utilisation du silo : le remplissage est simulé en activant progressivement les couches d'éléments finis à l'intérieur de la cellule, et la modélisation de la vidange est basée sur une approche assez pragmatique des conditions aux limites à l'interface entre la zone en écoulement et la zone morte (ou la paroi). Les aspects essentiels de la modélisation portent principalement sur la prise en compte du comportement fortement non linéaire des matériaux ensilés, ainsi que sur le respect des conditions de frottement le long des parois. La deuxième partie de l'article est consacrée à l'illustration des possibilités du modèle ; après avoir comparé les solutions obtenues avec des résultats de mesure sur des silos en vraie grandeur, de façon à valider le modèle de calcul, l'accent est plus particulièrement mis sur l'utilisation du modèle en vue d'établir les bases de solutions analytiques permettant d'améliorer le calcul et la conception actuelles des silos.

*ABSTRACT.* The paper deals with the description of a suitable finite element method for an accurate simulation of grain action along the walls of silos. The model allows to compute the stress distribution inside the silo during the filling and the discharging stages. To simulate the filling, the finite element layers are set in action progressively, and at the discharging stage, the computation is based on efficient assumptions about the boundary conditions along the interface between the flow area and the dead zone. The main conditions to satisfy for a significant calculation of stresses along the silo wall are related to the very non linear constitutive law of the ensiled material, and with the friction law at the wall. In the second part of the paper, comparisons are made to show the good agreement between the computed solutions and stress measurements carried out during full scale tests. The FEM has also been used to establish the basic assumptions of simplified analytical solutions in order to improve the actual silo design.

*MOTS-CLÉS :* silo, trémie, action des grains, remplissage, vidange, comportement non linéaire, frottement aux parois.

*KEY WORDS :* silo, hopper, grain action, filling and emptying stages, non linear constitutive law, friction effect.

---

## 1. Introduction

Depuis la publication de la théorie de JANSSEN à la fin du siècle dernier (en 1895), la détermination analytique des actions exercées par la matière ensilée sur les parois d'un silo a fait l'objet de nombreuses études et publications tant en France qu'à l'étranger ; pourtant à l'heure actuelle, il n'existe pas dans la littérature scientifique, pas plus que dans les codes de dimensionnement, de consensus sur un modèle analytique, à la fois simple et reconnu par les différents partenaires (constructeurs de cellules, bureaux de contrôle technique, etc...) pour un calcul précis des sollicitations aux parois, même pour des silos de géométrie simple (axisymétrique). Ainsi, au plan européen, la comparaison entre les solutions adoptées dans les codes de dimensionnement, qu'ils soient français (Norme Française NF P22-630 [9]), allemand (DIN 1055 teil 6 [10]), ou émanant de la Communauté Européenne (EC1 ENV 1991-4 [11]), s'est traduite par la mise en évidence de divergences importantes entre les différentes solutions [3]. Il faut d'ailleurs souligner que l'incertitude quant à la validité de tel ou tel modèle, présente dès la phase de remplissage, est encore plus grande lors de l'écoulement de la matière, les deux phases d'utilisation du silo (remplissage et vidange) se caractérisant souvent par des efforts aux parois assez différents et toujours plus importants à la vidange.

En France plus particulièrement, la construction de silos métalliques destinés aux produits agricoles représente un enjeu économique important : constitués d'une infrastructure relativement légère, de telles enceintes de stockage permettent de répondre rapidement à la demande des coopératives agricoles dont les besoins s'expriment souvent tardivement en fonction de l'abondance des récoltes. Pour satisfaire aux contraintes économiques, ce type de silo doit impérativement faire l'objet d'un dimensionnement optimal des parois, qui ne peut reposer que sur une connaissance précise des actions dues à la matière ensilée. Aussi, ne disposant pas, jusqu'à ces dernières années, de réglementation française propre à l'évaluation des actions dans ce type de cellule, un vaste programme de recherche a été engagé par le Centre Technique et Industriel de la Construction Métallique pour combler cette lacune ; les travaux présentés dans cet article ont été réalisés en étroite collaboration avec ce programme de recherche qui comportait plus précisément trois grands axes d'investigation complémentaires :

- le premier a concerné l'expérimentation de cellules en grandeur réelle sur une base expérimentale conçue spécialement pour les besoins de la recherche, l'objectif étant d'établir ainsi une base de données aussi complète que possible pour la validation des modèles de calcul.
- le deuxième domaine d'investigation avait pour objectif d'étudier en laboratoire le comportement rhéologique des matériaux (principalement céréaliers) stockés en silo. A partir d'essais de laboratoire réalisés en particulier au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, des concepts de comportement caractéristiques du type de produit étudié ont pu être mis en évidence, et traduits en terme de lois de comportement pour être ensuite

utilisés dans un modèle de calcul numérique.

Enfin le troisième aspect de la recherche, en relation directe avec les études réalisées au Laboratoire de Structures de l'I.N.S.A. de Rennes, avait trait à la détermination des actions exercées par la matière ensilée sur les parois des cellules ; à ce titre, un modèle spécifique de calcul par Eléments Finis a été développé pour suivre le plus fidèlement possible l'évolution du champ des contraintes, notamment des contraintes normales et des contraintes de frottement à la paroi, lors du remplissage et lors de la vidange d'un silo de géométrie quelconque.

Par rapport à d'autres approches par Eléments Finis de la littérature [12,13,14,...], dans lesquelles l'étude cinématique de l'écoulement a été privilégiée (profils des vitesses à l'intérieur du silo, formation de voûtes) parfois sur la base d'une modélisation numérique sophistiquée en dynamique transitoire faisant intervenir des lois de comportement rhéologique complexes (loi d'écoulement plastique à plusieurs potentiels, prise en compte d'une composante visqueuse, etc...) , la MEF présentée dans cet article est orientée vers une approche plus pragmatique du problème : cherchant prioritairement à évaluer de manière précise les efforts aux parois, on s'est tout d'abord intéressé au développement d'un modèle de calcul adapté à la simulation de la phase de remplissage du silo. Puis dans un deuxième temps, on a abordé la phase de vidange, celle-ci étant considérée comme un état perturbé de la phase de remplissage. Cette démarche nous a permis de déboucher sur un modèle numérique plus facile à mettre en oeuvre, ne faisant intervenir dans la formulation que des concepts de comportement déterminants dans le calcul des actions aux parois, et parfaitement définis au plan de la caractérisation expérimentale.

L'objectif principal de cet article consiste donc à présenter les grandes lignes de la démarche adoptée dans la formulation numérique du problème, et à montrer les solutions obtenues en les comparant notamment à des mesures expérimentales de contraintes réalisées en vraie grandeur sur la base française de Chartres. Le plan de l'article sera le suivant :

Dans un premier temps, on précise les différentes hypothèses retenues dans la modélisation au niveau du comportement mécanique de la matière ensilée.

Dans un deuxième temps, on donne la formulation des deux types d'élément fini utilisés, l'un relativement classique en partie courante de la matière ensilée, l'autre, plus original, au contact de la paroi ; les algorithmes de calcul introduits pour simuler respectivement le remplissage et la vidange de la cellule sont également développés dans cette partie.

Enfin, la troisième partie est consacrée à l'illustration des possibilités de modélisation : les différents exemples traités permettent de mettre en évidence l'évolution des contraintes à la paroi entre la phase de remplissage et la phase de vidange ; l'accent est également mis sur l'exploitation des résultats numériques (distribution des contraintes à l'intérieur du silo) en vue d'établir les fondements de nouvelles théories analytiques pour un calcul simplifié des actions aux parois.

## 2. Non linéarités matérielles liées au comportement intrinsèque des matériaux pulvérulents ensilés

La mise en équation du comportement rhéologique des matériaux granulaires constitue un problème délicat à traiter ; il repose presque obligatoirement sur l'assimilation du domaine étudié à un milieu parfaitement continu, homogène et isotrope, hypothèse que l'on conçoit aisément être assez éloignée de la réalité physique. Pourtant, malgré les approximations inhérentes à une telle approche, l'étude expérimentale du comportement des matériaux en vrac stockés en silo a permis de dégager un certain nombre de concepts de comportement qui s'inscrivent dans ce contexte idéalisé de la Mécanique des Milieux Continus. En France, les études réalisées d'une part, au Laboratoire de Mécanique du Solide de l'Ecole Polytechnique sur du blé et du riz en paddy [1, 2], et d'autre part au Laboratoire G.T.Ma de l'I.N.S.A. de Rennes sur du sable de Fontainebleau [4], ont conduit à définir principalement quatre concepts fondamentaux à prendre en compte pour une modélisation réaliste du comportement d'un produit granulaire à l'intérieur d'un silo ; ces concepts sont les suivants :

- tout d'abord, il y a le caractère rigidifiant du comportement lorsque la pression moyenne augmente à l'intérieur de l'échantillon étudié ;
- en présence d'un niveau de sollicitation déviatorique suffisant, il peut se développer un effet de dilatance (gonflement) ;
- le passage du domaine de comportement contractant au domaine dilatant peut se définir en utilisant le concept d'état de "contrainte caractéristique" [2] qui correspond à un seuil de désenchevêtrement des grains à partir duquel la vitesse de déformation volumique de l'échantillon change de signe ;
- enfin, en ce qui concerne la nature de la déformation du matériau, le caractère non linéaire de la loi apparaît nettement, y compris dans le domaine élastique.

Il importe également de rappeler que l'objectif principal du modèle de calcul porte sur la détermination du champ des contraintes à la paroi d'un silo ; aussi, bien que les matériaux en présence soient proches de ceux couramment étudiés en Mécanique des Sols, la connaissance de l'état de déformation réel au sein du milieu ne prend pas ici un caractère impératif et ne présente un intérêt que dans la mesure où il conditionne, d'une certaine façon, la distribution des efforts à la paroi.

Par rapport aux concepts de comportement évoqués ci-dessus, il est apparu possible d'obtenir une représentation théorique satisfaisante des relations de comportement élastoplastique de la matière ensilée à partir des modèles suivants, formulés dans l'hypothèse de petits déplacements :

### 2.1 Partie élastique

On a adopté la loi non linéaire de Boyce [5] ; il s'agit d'une loi de comportement isotrope traduisant au plan physique la rigidification du matériau lorsque la pression moyenne  $p = \frac{I_1}{3}$  augmente ( $I_1$  désignant le premier invariant du tenseur des contraintes de Cauchy), avec un effet de dilatance dépendant du deuxième invariant du déviateur des contraintes  $J_2$ . Si l'on définit de

manière classique l'invariant  $q$  par  $\sqrt{3J_2}$ , les modules de compressibilité  $K$  et de cisaillement  $G$  s'expriment selon cette loi de la manière suivante :

$$K = K_1 \frac{p^{1-n}}{\left[1 - \beta \left(\frac{q}{p}\right)^2\right]} \quad G = G_1 p^{1-n} \quad (1)$$

où  $K_1$ ,  $G_1$ ,  $n$  sont des constantes caractéristiques du matériau. Lorsqu'on impose à  $\beta$  de respecter la relation suivante :

$$\beta = (1 - n) \frac{K_1}{6G_1} \quad , \quad (2)$$

la loi en question devient hyper-élastique ; elle dérive alors du potentiel complémentaire suivant :

$$U^c = \frac{p^{n-1}}{K_1} \left( \frac{1}{1+n} - \frac{\beta}{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^2 \right) \quad (3)$$

La figure 1 donne une représentation de la loi dans l'espace des invariants  $p - \frac{q}{p} - \varepsilon_v$  et  $p - \frac{q}{p} - \varepsilon_q$ , où  $\varepsilon_v$  et  $\varepsilon_q$  désignent les déformations énergétiquement conjuguées de  $p$  et  $q$  ; elle met en évidence le caractère fondamentalement non linéaire des relations contraintes-déformations données par ce modèle.

Cependant, on pourra remarquer que les relations (1) englobent le cas de l'élasticité linéaire que l'on peut retrouver en faisant  $n = 1$ , soit encore  $\beta = 0$ ,  $K = K_1$ ,  $G = G_1$ . Par ailleurs, au plan numérique, l'hyper-élasticité offre l'avantage de faire intervenir un opérateur de comportement tangent symétrique.

## 2.2 Comportement plastique

Deux modèles ont été retenus. Le premier est assez classique ; il s'agit du critère de Drücker-Prager qui délimite le domaine élastique dans le plan  $p - q$  par une droite d'équation :

$$q = M_0 p + N_0 \quad (4)$$

Les constantes  $M_0$  et  $N_0$ , caractéristiques du matériau considéré, se déduisent directement des mesures expérimentales de l'angle de frottement interne  $\varphi$  et éventuellement de la cohésion  $C$  du matériau ( $M_0 = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$  ;  $N_0 = \frac{6C \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}$ ).

Le défaut de ce modèle de plasticité parfaite est principalement lié au caractère exclusivement dilatant de la déformation plastique qu'il engendre lorsqu'il est utilisé en plasticité associée (matériau standard). Bien que la représentation précise de la déformation de la matière ensilée ne constitue pas ici un objectif prioritaire, on a quand même envisagé d'utiliser un modèle de comportement plus complexe, présentant une surface d'écoulement fermée

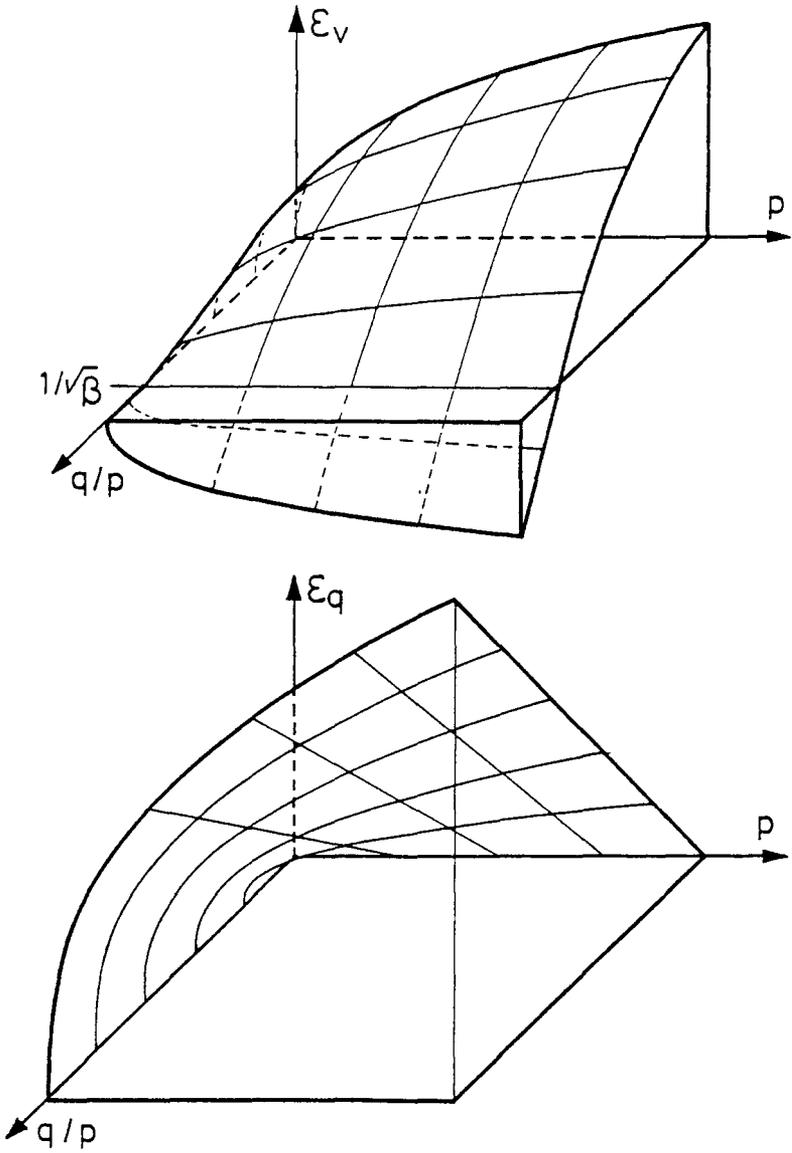


Figure 1. Loi élastique non linéaire de BOYCE

(déformation plastique contractante ou dilatante) de façon à pouvoir analyser l'incidence réelle de la loi d'écoulement plastique sur les distributions de contraintes dans la cellule. Le deuxième modèle utilisé dans cette optique est celui proposé par Wilde [6] ; il fait intervenir deux paramètres d'érouissage  $\varepsilon_v^p$ ,  $\varepsilon_q^p$  correspondant respectivement aux déformations plastiques volumiques et déviatoriques conjuguées de  $p$  et  $q$ . Le domaine élastique est défini dans le plan  $(p, q)$  par la relation suivante (voir figure 2) :

$$F(p, q) = q - (Mp + N) \left[ \text{Ln} \left( \frac{Mp^* + N}{Mp + N} \right) + \frac{K}{M} (\varepsilon_v^p + (M^* - M)\varepsilon_q^p) \right] < 0 \quad (5)$$

où :

.  $\text{Ln}$  représente la fonction Logarithme Népérien,

.  $K, M, M^*, p^*, N$  désignent 5 coefficients caractéristiques du matériau.

Par rapport à des modèles de type "cap" [24], souvent utilisés en Mécanique des Sols, la loi d'écoulement plastique utilisée ici présente l'avantage d'être associée à un potentiel plastique unique confondu avec le critère limite (5), sans être pour autant restrictive quant au signe de la déformation volumique plastique ; en effet, l'application du principe de normalité de la déformation plastique par rapport à la fonction potentielle (5) permet de distinguer :

- des états de contrainte où  $q < Mp + N$ , avec une vitesse de déformation volumique plastique positive ( $\dot{\varepsilon}_v^p > 0$ ) ; on est dans le domaine de comportement contractant ;

- des états de contrainte où  $q > Mp + N$  ; la vitesse de déformation volumique plastique change alors de signe, et on passe dans le domaine des déformations dilatantes.

Ainsi, la droite d'équation  $q = Mp + N$  représente un état de contrainte proche de l'état caractéristique au sens de l'interprétation des essais triaxiaux proposée par M.P. Luong [2] ; le long de cette droite, la vitesse de déformation plastique s'annule. A noter également que la constante  $M^*$  définit, pour un état de sollicitation triaxiale, la pente d'une droite d'état limite de rupture au delà de laquelle le module d'érouissage du matériau devient négatif ; cette constante se déduit donc directement de l'angle de frottement interne du matériau.

Le tableau I précise les valeurs des différents paramètres de comportement correspondant à l'ajustement des modèles présentés ci-dessus sur des résultats d'essai triaxiaux :

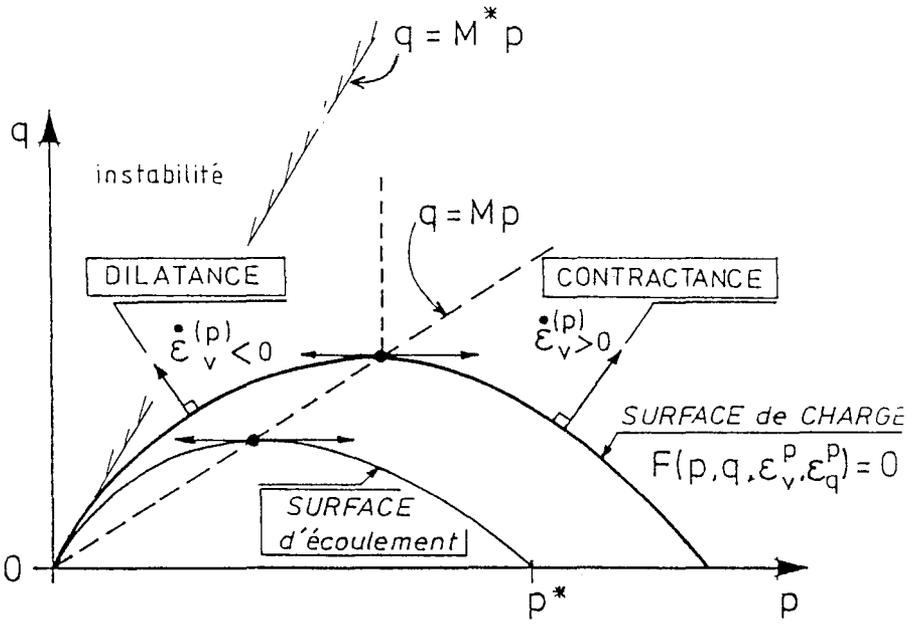


Figure 2. Critère plastique de WILDE

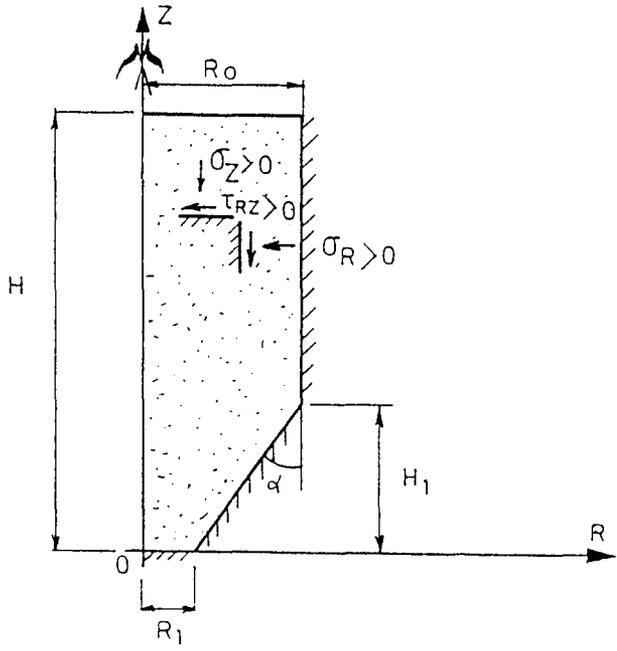


Figure 3. Notations et convention de signe

	$K_1$ (kPa) <sup>n</sup>	$G_1$ (kPa) <sup>n</sup>	$n$	$p^*$ (kPa)	$M^*$	$M$	$N$ (kPa)	$K$	$\varphi$ (°)
<i>blé</i>	100	50	0.3	60	1.36	0.65	1	200	28
<i>sable</i>	400	184	0.4	23	1.45	0.52	1	935	34

$$(1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ N/m}^2)$$

Tableau I

### 3. Modèle de calcul aux Eléments Finis

#### 3.1 Discrétisation géométrique de la matière ensilée

Dans un premier temps, le logiciel a été principalement développé pour étudier les silos présentant une symétrie cylindro-circulaire (silos cylindro-coniques) ; on se place alors dans le repère  $(R, Z)$  de la figure 3 et on s'intéresse au domaine délimité par les parois d'un silo d'axe vertical  $Z$ . La génération du maillage est réalisée à partir d'un découpage du plan de symétrie  $(R, Z)$  de la cellule en éléments finis triangulaires à 3 noeuds (élément à interpolation linéaire en déplacements), chaque triangle représentant en fait la section droite d'un élément torique dont toute la formulation reste indépendante de l'angle  $\theta$  dans le repère cylindrique  $(R, \theta, Z)$ .

Plus récemment [7], la bibliothèque du programme a été complétée par des éléments volumiques (élément de brique à 8 noeuds) de façon à pouvoir étendre le domaine d'application du logiciel au cas de cellules ne présentant plus d'axe de symétrie cylindro-circulaire ; la formulation de l'élément de type isoparamétrique permet de traiter pratiquement tous les types de section (carrée, rectangulaire, hexagonale, dissymétrique, etc...) ainsi que les silos équipés d'une trémie de vidange non conique.

#### 3.2 Conditions aux limites

Compte tenu de la nature des parois d'un silo métallique (tôle en acier) et de leur géométrie (forme ondulée ou de type palplanche, présence de montants verticaux et de ceintures horizontales), on est en droit de considérer que leur déformation est quasiment négligeable comparativement à celle du milieu granulaire ; les déplacements nodaux sont donc bloqués dans la direction donnée par la normale à la frontière du domaine lorsque le noeud en question est localisé sur celle-ci (dans le cas où la paroi n'est pas parallèle à un des axes du repère général, cette condition s'exprime dans un repère nodal). En ce qui concerne les déplacements tangents à la paroi, ils sont contrôlés par le respect d'une condition de frottement le long de la paroi (cf. paragraphe 3.3) ; cette condition de frottement peut toujours s'interpréter en terme de critère d'état limite, mais pour une facette d'orientation systématiquement imposée par la paroi, ce qui

ne permet pas d'assimiler cette condition à un comportement élastoplastique isotrope particulier sans en affaiblir l'exigence. C'est la raison pour laquelle des éléments spécifiques de contact ont été développés, permettant un respect plus rigoureux de la condition de frottement

### 3.3 Formulation de l'élément fini de contact

En fonction du type de silo étudié, l'élément en question s'apparente, soit à un élément de membrane à 4 noeuds en symétrie de révolution, soit à un élément de brique à 8 noeuds pour les études tri-dimensionnelles. Dans ce dernier cas qui constitue le cas le plus général, la loi de frottement à la paroi s'exprime par une condition de type Coulomb dans le repère local  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , lié à la paroi (voir figure 4) ; au contact du plan tangent  $(\vec{y}, \vec{z})$ , le frottement se traduit par un rapport constant  $\mu_t$  entre la contrainte normale  $\sigma_x$  et la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xt}$ ,  $\vec{t}$  désignant une direction arbitraire dans le plan  $(\vec{y}, \vec{z})$ . Lorsque le frottement est isotrope, le rapport  $\mu_t$  est le même dans toutes les directions ( $\mu_t = \mu$ ) ; dans le cas des silos métalliques avec des parois en tôle ondulée ou en palplanches (les ondulations étant disposées horizontalement), la loi de frottement prend un caractère orthotrope, et en toute rigueur deux coefficients de frottement peuvent être définis entre respectivement les contraintes tangentielles  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{xy}$  et la contrainte normale  $\sigma_x$ . Dans la pratique, il est clair que la condition de frottement la plus déterminante est celle qui est directement liée aux forces de gravité (dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ ) ; à noter d'ailleurs qu'en symétrie de révolution, la deuxième condition disparaît complètement par symétrie.

Pour la clarté de l'exposé, on va préciser ci-dessous la formulation adoptée lorsqu'une seule condition de frottement est à respecter, dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  ; lorsqu'une deuxième condition est à prendre en compte, celle-ci vient se cumuler avec la précédente dans l'élément, la formulation restant la même à des permutations d'indice près. Outre le cas du frottement horizontal (dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ ), le cumul de plusieurs conditions de contact se produit également dans les angles des silos à section rectangulaire (voir figure 5).

Dans la première version du logiciel qui était exclusivement dédiée à l'étude des silos cylindro-coniques [20], un algorithme de corrections itératives des contraintes exercées à la paroi a tout d'abord été utilisé pour satisfaire à la loi de frottement ; la méthode a donné des résultats satisfaisants tant qu'elle a été appliquée, soit à des parois verticales, soit à des trémies à forte inclinaison. En revanche, son utilisation pour l'étude de trémies peu inclinées a conduit à quelques difficultés d'ordre numérique pour satisfaire correctement la loi de frottement, notamment lors des étapes intermédiaires de calcul, lorsque la trémie est partiellement remplie. Sans rentrer dans les détails (pour plus d'informations à ce sujet, voir la référence [3]), on a pu vérifier que les difficultés d'ordre numérique étaient essentiellement liées au fait

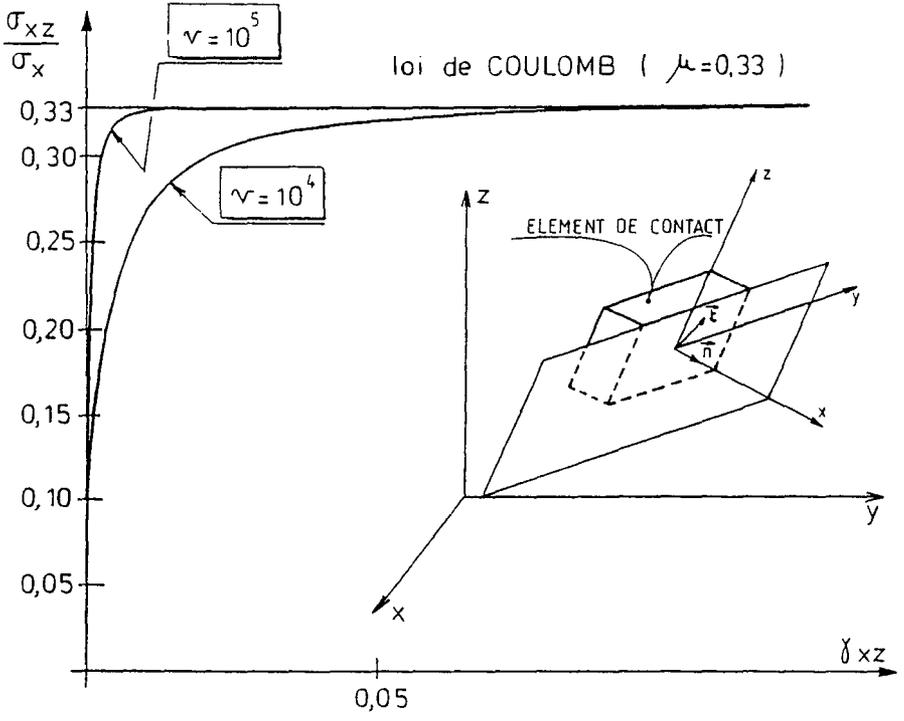


Figure 4. Loi de frottement de l'élément de contact

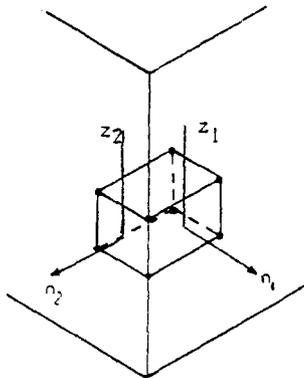


Figure 5. Élément de contact au raccordement de deux parois

que les corrections de contraintes s'opéraient ici indépendamment du sens de déplacement (ou glissement) de la matière par rapport à la paroi. Aussi, plutôt que de chercher à palier directement à cet inconvénient, est-il apparu plus opportun de développer un élément fini spécifique, dit "élément de contact" se comportant comme un "patin" à déformation contrôlée, intercalé entre la paroi et la matière ensilée. Du point de vue de la génération de l'élément, il s'agit d'un élément isoparamétrique, qui peut être un quadrilatère plan lorsqu'il est défini en symétrie de révolution, ou un élément de brique à 8 noeuds dans le cas plus général d'une modélisation tri-dimensionnelle. Dans le premier cas, l'élément quadrilatère a l'un de ses côtés (repéré par sa normale  $\vec{n}$ ) tangent à la paroi ; dans le second, c'est l'une de ses faces (repéré également par sa normale  $\vec{n}$ ).

Dans les deux cas, la condition de frottement à respecter dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_x} = -\mu \quad (6)$$

On précise que les conventions de signe adoptées ici sont telles que les contraintes de compression  $\sigma_x$  (orientées vers les  $x$  négatifs) sont positives et que, par voie de conséquence, les contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$  positives sont orientées vers les  $z$  négatifs.

En imposant une certaine loi de variation de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  au sein de l'élément en fonction du glissement angulaire  $\gamma_{xz}$  de la matière ensilée au contact de la paroi, il est possible de tendre rapidement vers le respect de la loi de Coulomb, même lorsque ce glissement reste fini ; par exemple, en pondérant la relation (6) par un terme exponentiel on peut adopter :

$$\sigma_{xz} = -\mu \sigma_x \left[ 1 - e^{-\sqrt{v|\gamma_{xz}|}} \right] \quad , \quad (7)$$

où  $v$  est un coefficient qui caractérise en quelque sorte la tendance plus ou moins marquée avec laquelle on rejoint la droite de Coulomb (voir figure 4) ; ce coefficient peut, dans une certaine mesure, refléter la nature plus ou moins rugueuse de la paroi. En toute rigueur, le terme exponentiel devrait s'écrire  $e^{-\sqrt{v|\gamma_{xz}|}}$  ; compte tenu de l'orientation de la paroi d'un silo par rapport à la direction des forces de pesanteur, il est clair que  $\gamma_{xz}$  est toujours négatif ; on peut donc s'affranchir de la valeur absolue. D'un point de vue mécanique, la prise en compte d'une loi telle que (7) ne peut se concevoir, même dans le simple cas d'un comportement élastique, que dans le cadre d'un élément de type orthotrope ; il est alors nécessaire d'introduire un module de cisaillement  $G_2$  indépendant des autres coefficients élastiques.

Si, dans un premier temps, on fait abstraction du comportement plastique de la matière ensilée, cette matière peut se caractériser par l'opérateur de comportement élastique non linéaire de Boyce  $E_{ijkl}$  reliant les composantes du tenseur des contraintes à celles du tenseur de déformation :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (8)$$

On se place ici dans le cas d'un calcul tridimensionnel ; le tenseur des contraintes a 6 composantes distinctes :  $\sigma_{xx}$  (noté  $\sigma_x$ ),  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xy}$ , et l'opérateur  $E_{ijkl}$  se déduit directement des relations (1). L'introduction dans cet opérateur d'un effet d'orthotropie dû au frottement (relation (7)) consiste à modifier le module de cisaillement sécant  $G_2^{(s)}$  relatif au plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  (il s'agit du coefficient  $E_{xzxz}$  de l'opérateur de comportement) en posant :

$$G_2^{(s)} = \frac{\sigma_{xz}}{\gamma_{xz}} = \frac{-\mu \sigma_x \left[ 1 - e^{-\sqrt{-v} \gamma_{xz}} \right]}{\gamma_{xz}} \quad (9)$$

Au plan numérique, on cumule alors sur un même élément deux non linéarités de comportement d'origine différente ; ce qui conduit inévitablement à des problèmes de convergence (il est en effet impossible de ré-équilibrer simultanément un même tenseur de contrainte par rapport à deux conditions distinctes et indépendantes). Pour pouvoir néanmoins respecter au mieux les deux aspects du comportement d'un tel élément, tout en privilégiant la prise en compte des actions de frottement pour lesquelles il a été défini, l'approximation que les auteurs ont convenu d'introduire dans le calcul consiste :

. à affecter à l'élément de contact un opérateur de comportement élastique identique à celui déterminé pour l'élément qui lui est juxtaposé, le tenseur de contrainte de l'élément de contact n'étant pas ré-équilibré par rapport à la loi de Boyce. Compte tenu de la taille réduite des deux éléments dans cette zone du maillage, la variation des contraintes est faible d'un élément à l'autre et l'approximation qui est ainsi faite reste très modérée ;

. à ré-équilibrer l'élément de contact par rapport à la loi de frottement tout en réactualisant le module de cisaillement dans le plan d'orthotropie (relation (9)) par rapport au niveau de contrainte considéré.

En se plaçant maintenant dans le cas du comportement élastoplastique, le processus de calcul incrémental impose de transcrire les relations (7) à (9) en termes d'accroissement de contrainte et de déformation, pour définir le comportement tangent de l'élément.

Comme certains auteurs [8], on pourrait définir préalablement un module de cisaillement tangent  $G_2^{(t)}$  donné par la relation suivante :

$$G_2^{(t)} = \frac{\delta \sigma_{xz}}{\delta \gamma_{xz}} = \frac{1}{2} \mu \sigma_x \sqrt{\frac{-v}{\gamma_{xz}}} e^{-\sqrt{-v} \gamma_{xz}} \quad (10)$$

En fait, ce concept n'est pas suffisant car il ne prend pas en compte le rôle de la contrainte normale  $\sigma_x$  qui intervient en tant que variable indépendante de  $\gamma_{xz}$  dans les expressions (7) et (9).

Aussi, pour une mise en équation rigoureuse du comportement tangent de l'élément (vis à vis de la loi de frottement), il convient d'établir la différentielle totale de  $\sigma_{xz}$  :

$$\delta\sigma_{xz} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\gamma_{xz}} \left( G_2^{(s)}(\sigma_x, \gamma_{xz}) \gamma_{xz} \right)}_{G_2^{(t)} \text{ (cf. (10))}} \delta\gamma_{xz} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\sigma_x} \left( G_2^{(s)}(\sigma_x, \gamma_{xz}) \gamma_{xz} \right)}_{\substack{\text{terme supplémentaire relatif} \\ \text{à la variation de } G_2^{(s)} \\ \text{en fonction de } \sigma_x}} \delta\sigma_x \quad (11)$$

L'expression (11) conduit immédiatement à :

$$\delta\sigma_{xz} = G_2^{(t)} \delta\gamma_{xz} - \mu \left[ 1 - e^{-\sqrt{-v}\gamma_{xz}} \right] \delta\sigma_x \quad (12)$$

L'accroissement de contrainte  $\delta\sigma_x$  figurant dans (12) s'exprime à partir des accroissements de déformation en faisant intervenir l'opérateur élastique  $\nabla E$  (ou élastoplastique  $\nabla P$ ) tangent dont il est nécessaire de modifier la formulation pour tenir compte de (12) ; soit, en écriture tensorielle (l'opérateur modifié étant affecté d'un astérisque) :

$$\delta\sigma_{ij} = \nabla E_{ijkl}^* \delta\varepsilon_{kl} \quad (\text{cas élastique}) \quad (13)$$

$$\delta\sigma_{ij} = \nabla P_{ijkl}^* \delta\varepsilon_{kl} \quad (\text{cas plastique}) \quad (14)$$

Les modifications apportées à l'opérateur de comportement  $\nabla E_{ijkl}$  (respectivement  $\nabla P_{ijkl}$ ) ne concernent que les termes relatifs au cisaillement (soit pour  $i \neq j$  et  $k \neq l$ ) ; en introduisant (12) dans l'opérateur de comportement initial de l'élément ( $\nabla E_{ijkl}$  ou  $\nabla P_{ijkl}$ ), on peut établir les expressions suivantes qui définissent entièrement le nouvel opérateur tangent pour l'élément de contact :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\sigma_{xz} = \nabla E_{xzk l}^* \delta\varepsilon_{kl} \quad (\text{resp. } \nabla P^*) \\ \nabla E_{xzk l}^* = -\mu \left[ 1 - e^{-\sqrt{-v}\gamma_{xz}} \right] \nabla E_{xxkl} \\ \left[ 1 - \delta_{xk} \delta_{zl} \left( 1 + \mu \left[ 1 - e^{-\sqrt{-v}\gamma_{xz}} \right] \right) \right] + 2\delta_{xk} \delta_{zl} G_2^{(t)} \\ \gamma_{xz} = 2 \varepsilon_{xz} \end{array} \right. \quad (15)$$

En fait, compte tenu de l'approximation qui a été introduite dans la prise en compte du comportement, l'opérateur  $\nabla E_{ijkl}$  qui figure dans (15) correspond à l'opérateur élastoplastique de l'élément de matière ensilée juxtaposé à l'élément

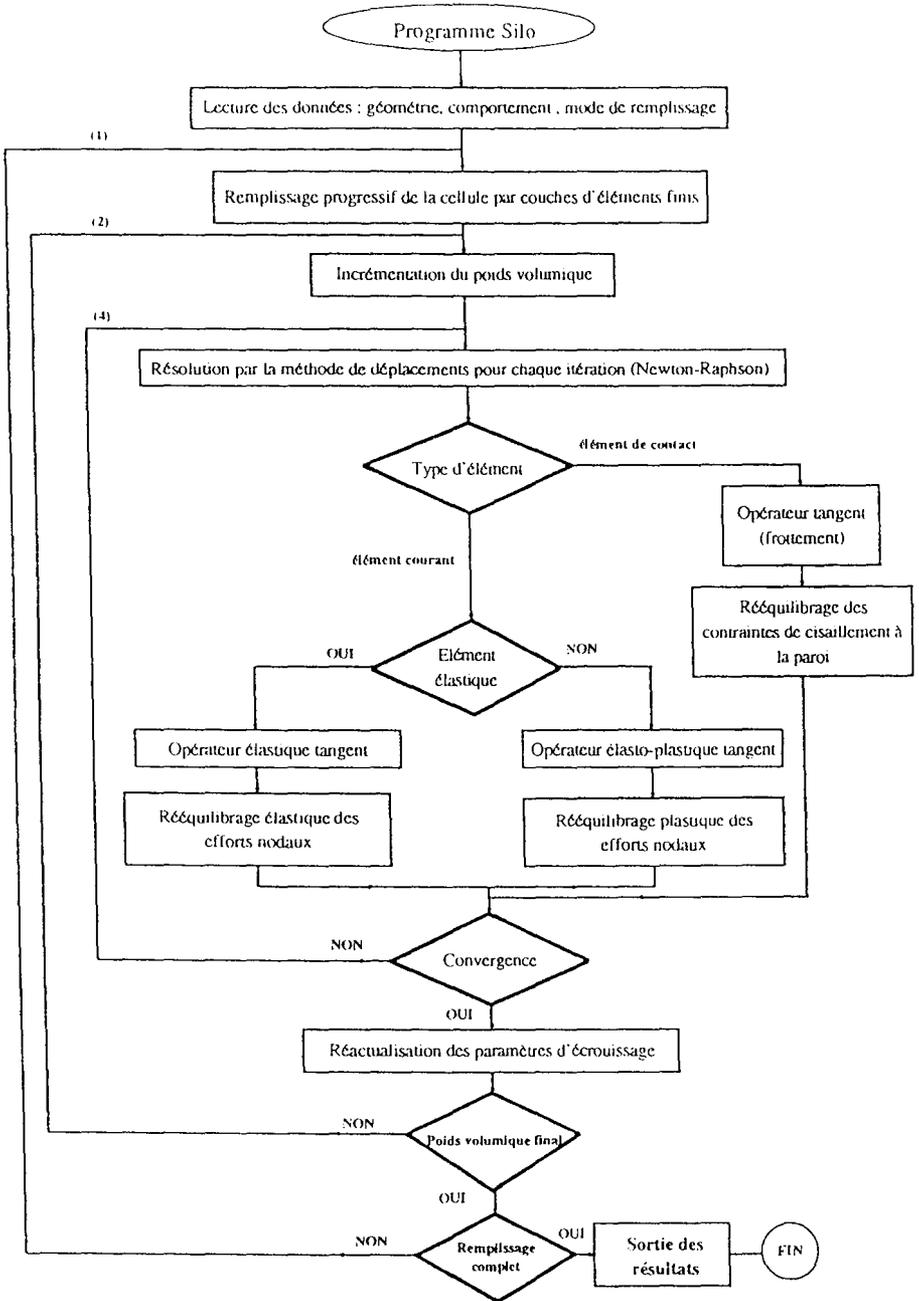


Figure 6. Organisation générale du programme

de contact en question. A noter également que l'orthotropie de l'opérateur  $\nabla E_{ijkl}^*$  nécessite de faire un changement d'axe pour calculer son expression dans le repère d'assemblage  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  avant de procéder au calcul de la matrice de rigidité de l'élément.

### 3.4 Organisation générale du programme

#### 3.4.1 Remplissage de la cellule

Le remplissage de la cellule est simulé progressivement, par superposition de couches horizontales d'éléments finis ; à chaque étape du remplissage, le poids volumique peut également être appliqué progressivement de façon à s'assurer d'une bonne convergence du calcul non linéaire. La résolution des non-linéarités du problème s'opère à l'aide d'un algorithme de type NEWTON-RAPHSON, les ré-équilibrages successivement opérés sur les efforts nodaux devant permettre de satisfaire à la fois la loi de comportement de type élastoplastique non linéaire de la matière ensilée, et la loi de frottement le long des parois. Au plan de l'organigramme général du programme (voir figure 6), cela se traduit par un système itératif comportant trois boucles imbriquées : les deux boucles extérieures correspondent à la mise en charge progressive du silo, et la troisième traite la partie non linéaire du problème avec trois options possibles, suivant qu'il s'agit d'un élément de contact, d'un élément de matière ensilée dans le domaine élastique ou d'un élément de matière ensilée dans le domaine plastique.

#### 3.4.2 Vidange de la cellule

Il convient tout d'abord de souligner encore une fois que la modélisation des actions à la paroi lors de la vidange a été envisagée de manière assez pragmatique, en adoptant d'emblée des hypothèses simplificatrices tant au niveau de la représentation des conditions d'écoulement qu'en ce qui concerne le comportement rhéologique de la matière en mouvement ; l'objectif est, en effet, de mettre en évidence l'évolution de la distribution des contraintes à la paroi entre le remplissage et la vidange en ne faisant intervenir dans la modélisation que des paramètres bien définis. Ces hypothèses, justifiées de manière plus détaillée dans la référence [3], sont résumées ci-dessous :

**(H1)** l'étude porte sur la phase d'écoulement de la matière ensilée en régime établi. Lors de la phase transitoire de l'écoulement, on a pu vérifier à l'aide d'une autre approche [3] que dans des conditions d'ouverture progressive de la trappe de vidange, le niveau des sollicitations à la paroi était proche de celui établi en régime permanent ; cela a d'ailleurs été confirmé par les mesures expérimentales réalisées sur la base de Chartres.

**(H2)** La zone de matière ensilée en écoulement présente un axe de symétrie cylindro-circulaire centré sur l'orifice de vidange ; pour un silo à section circulaire ou carrée, si l'on se place dans le cas d'une vidange centrée, la section de la zone d'écoulement vient s'inscrire dans la section complète de la cellule, comme le montre la figure 7-a. Dans le cas d'un silo rectangulaire, en présence

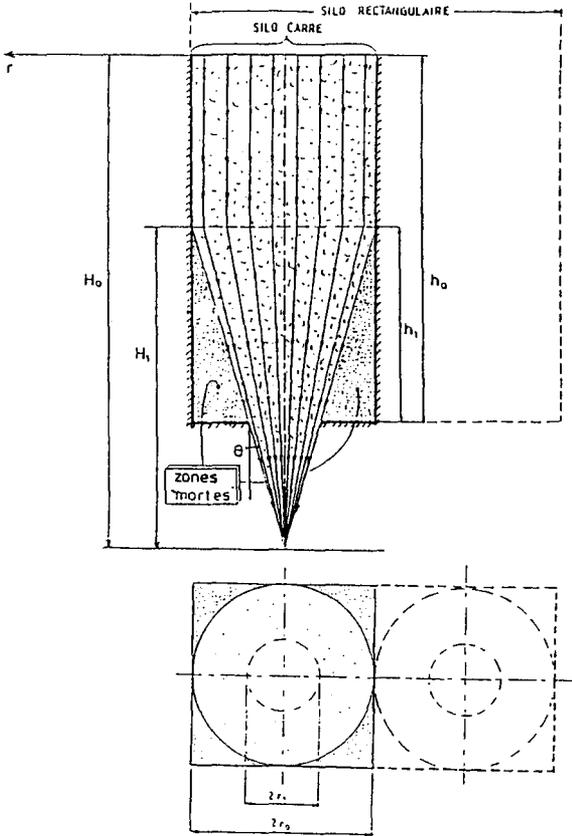


Figure 7.a Schématisation de l'écoulement à l'intérieur du silo

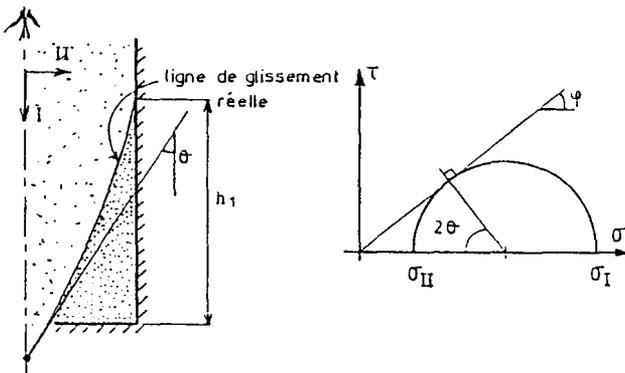


Figure 7.b Définition de la pente ( $\theta$ ) du cône d'écoulement

de plusieurs orifices de vidange, la modélisation consiste alors à juxtaposer la configuration d'écoulement définie pour un silo carré au droit de chacun des orifices de vidange (traits en pointillés sur la figure).

La pente du cône d'écoulement est déterminée en considérant qu'il se développe une ligne de glissement au sein de la matière ensilée depuis l'orifice de vidange jusqu'à la paroi. Cette ligne est assimilée ici à sa tangente pour la pente calculée sur l'axe du silo (voir figure 7-b) où les directions principales du tenseur des contraintes sont données par les axes du repère ; on peut alors exprimer directement l'angle d'inclinaison  $\theta$  en fonction de l'angle de frottement interne de la matière ensilée  $\varphi$ . Admettant que l'on puisse prolonger la limite de la zone morte jusque sur l'axe, la direction principale majeure (en  $r = 0$  sur la figure 7-b) est verticale et on a :

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (16)$$

En pratique, pour tenir compte de la variation de la pente de la ligne réelle de glissement, il est d'usage assez courant de corriger la relation (16) en considérant, en fait, une hauteur  $h_1$  majorée du cône d'écoulement, par exemple [9] :

$$h_1 = \frac{7}{6} \frac{r_0}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (17)$$

où  $r_0$  désigne le rayon du cercle inscrit dans la section droite du silo.

**(H3)** Au cours de la vidange, on considère que l'angle de frottement interne de la matière en mouvement tend à légèrement diminuer du fait d'une lubrification naturelle (produite par la libération d'huile ou d'eau) ; à ce titre, on a adopté un angle de frottement interne à la vidange  $\varphi_v$  réduit de 15% par rapport à sa valeur au remplissage, cette réduction étant celle préconisée par la Norme Française [9] ; soit :

$$\varphi_v = \mathcal{R}_v \varphi \quad (18)$$

avec ici  $\mathcal{R}_v = 0,85$ .

Cet effet de lubrification s'applique également à la valeur de l'angle de frottement à la paroi en dehors, bien sûr, des zones où la paroi est en contact avec la matière qui ne s'écoule pas (zones mortes).

**(H4)** En ce qui concerne les effets d'inertie liés à l'écoulement de la matière en mouvement, une étude critique développée dans [3], et rappelé en annexe à la fin de cet article, a montré que pour des dimensions usuelles de cellule, ces effets étaient tout à fait négligeables au niveau des contraintes transmises à la paroi, et cela pour l'ensemble des débits d'écoulement susceptibles de se produire dans les silos considérés dans cette étude.

Dans ces conditions, le calcul des actions exercées à la paroi lors de la vidange peut s'envisager dans le cadre d'une approche quasi-statique ; il se décompose en trois étapes :

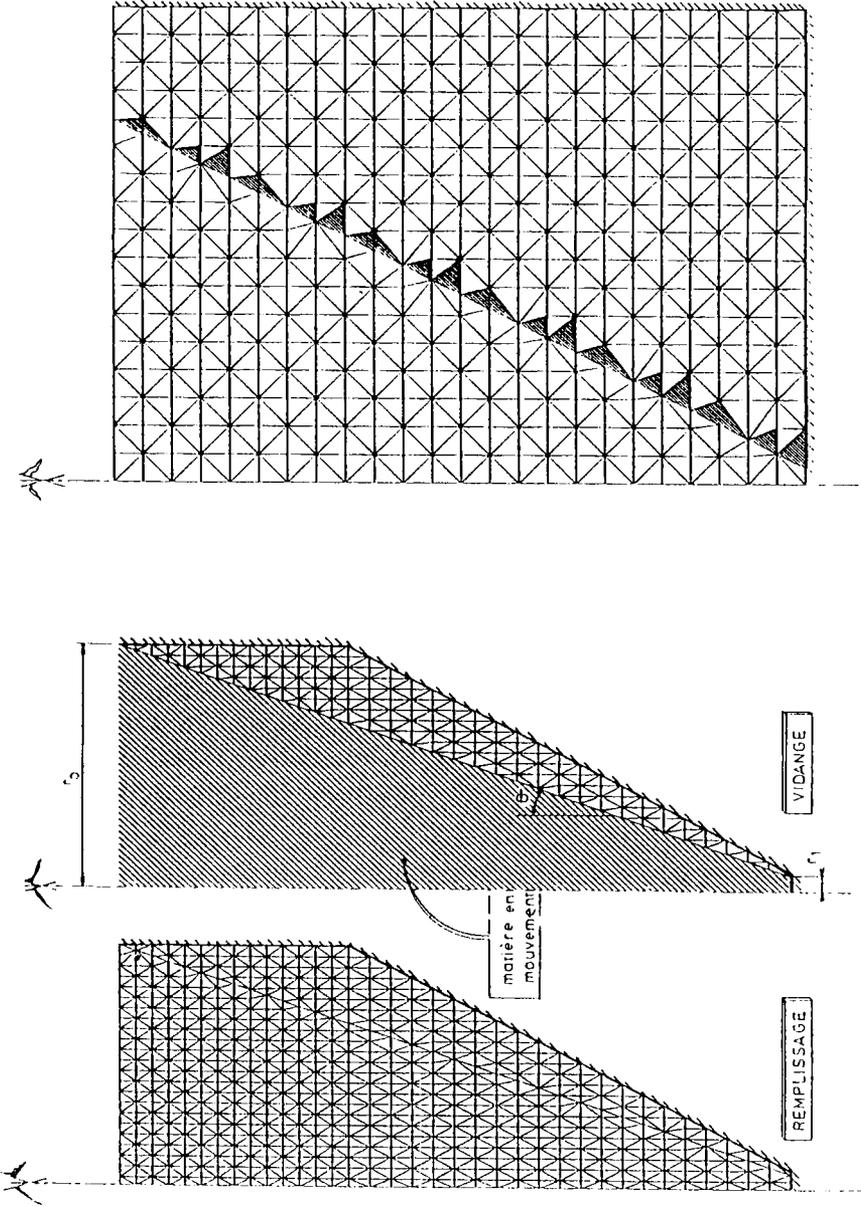


Figure 8. Adaptation du maillage pour la vidange

Figure 9. Eléments concernés par le ré-équilibrage nodal

- dans un premier temps, on détermine le champ des contraintes à l'intérieur du silo à la fin de la phase de remplissage, en ayant pris soin de réaliser un maillage de la cellule dans lequel la cheminée d'écoulement (dont les limites sont connues, cf. (H2)) correspond à un nombre entier d'éléments finis ; la figure 8 donne deux exemples de tels maillages pour des silos cylindro-coniques. En dehors de la détermination des actions aux parois lors du remplissage, le but de ce calcul est de déterminer les forces de surface le long de l'interface avec la future zone d'écoulement (donc sur chaque élément fini ( $e$ ) hachuré à la figure 9) ; ces forces seront désignées par  $\{f_s^{(e)}\}^{(r)}$ .

- Dans un deuxième temps, on évalue le champ des contraintes qui s'exercent lors de la vidange le long de l'interface avec la zone qui ne s'écoule pas ; en l'absence d'effets d'inertie significatifs, cela revient à calculer des actions de type remplissage (statiques) sur les parois d'un silo virtuel dont les dimensions coïncident avec celles de la zone d'écoulement (cellule cylindro-conique). Dans ce silo virtuel, la matière ensilée est caractérisée par l'angle de frottement interne  $\varphi_v$  réduit par rapport au remplissage (cf. (18)), et le coefficient de frottement le long de la paroi virtuelle doit être pris égal, soit à  $\tan(\varphi_v)$  lorsque le frottement se développe au contact de la zone morte, soit à  $\tan(\mathcal{R}_v \delta)$  ( $\delta$  désignant l'angle de frottement statique à la paroi) lorsque la paroi virtuelle est confondue avec la paroi réelle de la cellule. L'objectif de ce calcul consiste à évaluer, sur chacun des éléments finis ( $e$ ) en contact avec les éléments hachurés de la figure 9, les forces de surfaces  $\{f_s^{(e)}\}^{(v)}$  qui correspondent à la vidange du silo.

- Enfin, dans un dernier temps, le calcul aux éléments finis porte uniquement sur la zone de matière ensilée qui ne s'écoule pas : les actions à exercer sur tous les noeuds de l'interface avec la zone morte (de hauteur égale, en général, à  $h_1$ ), définie lors de la vidange, sont les forces nodales équivalentes à la différence entre les actions de remplissage et les actions de vidange, soit pour chacun des éléments hachurés de la figure 9 :

$$\{F_e\} = - \int_{v_e} [N_e]^T \left( \{f_s(r, z)\}^{(v)} - \{f_s(r, z)\}^{(r)} \right) dv \quad , \quad (19)$$

où  $[N_e]$  désigne, de manière classique, la matrice d'interpolation de l'élément  $e$ . En toute rigueur, la relation (19) serait à envisager sous la forme incrémentale suivante :

$$\{\delta F_e\}^{(i)} = - \int_{v_e} [N_e]^T \{\delta f_{v-r}(r, z)\}^{(i)} dv \quad , \quad (20)$$

en considérant  $n_v$  incréments successifs pour passer de l'état de remplissage à l'état de vidange, et avec :

$$\{\delta f_{v-r}(r, z)\}^{(i)} = \frac{1}{n_v} \left( \{f_s(r, z)\}^{(v)} - \{f_s(r, z)\}^{(r)} \right)$$

En pratique, compte tenu de l'ordre de grandeur de la correction totale exprimée en (19), on a pu envisager de traiter la plupart des cas en ne considérant qu'un seul incrément ( $n_v = 1$ ) ; seul le cas des silos à fond incliné, avec un angle de trémie  $\alpha$  distinct de l'angle d'écoulement  $\theta$ , a nécessité un traitement incrémental, pour obtenir une convergence satisfaisante du calcul non linéaire.

#### 4. Applications du modèle

##### 4.1 Comparaison avec des simulations expérimentales en vraie grandeur.

Les résultats donnés ici sont extraits d'une étude plus complète présentée dans la référence [3] ; ils concernent deux des cellules cylindriques de la base expérimentale française de Chartres [23] :

- la première (cellule C) se caractérise par des parois relativement rugueuses (tôle ondulée), avec un coefficient de frottement moyen mesuré in situ égal à 0,44 ; elle est haute de 15m et son diamètre est égal à 8m (élancement : 1,42).
- La seconde (cellule D) présente des parois en tôle lisse ; le coefficient de frottement est donc plus faible (valeur mesurée sur la base :  $\mu = 0,33$ ) ; elle est également moins élancée avec une hauteur égale à 8m et un diamètre de 6m (élancement : 1,33).

Sur les figures 10 et 11, on a représenté les distributions expérimentales et numériques de la contrainte normale exercée à la paroi lors du remplissage des deux cellules avec du blé (cf. paramètres rhéologiques du tableau I, le modèle plastique utilisé ici étant celui de Drücker-Prager), et également lors de la vidange : dans les deux cas, on peut constater qu'il y a une concordance assez satisfaisante entre l'approche numérique et les mesures expérimentales, ces dernières étant inévitablement affectées par une certaine incertitude liée à la mesure (et cela malgré les performances remarquables des capteurs spécialement conçus pour mesurer à la fois la contrainte normale et la contrainte tangentielle due au frottement). Lors de la vidange, il apparaît une augmentation assez sensible de la contrainte normale au niveau du raccordement de la zone d'écoulement avec la paroi ; cet effet est d'ailleurs confirmé par l'expérience, de manière plus précise pour la cellule C où il a été procédé à des mesures de contrainte plus nombreuses suivant la hauteur (9 capteurs contre seulement 5 sur la cellule D).

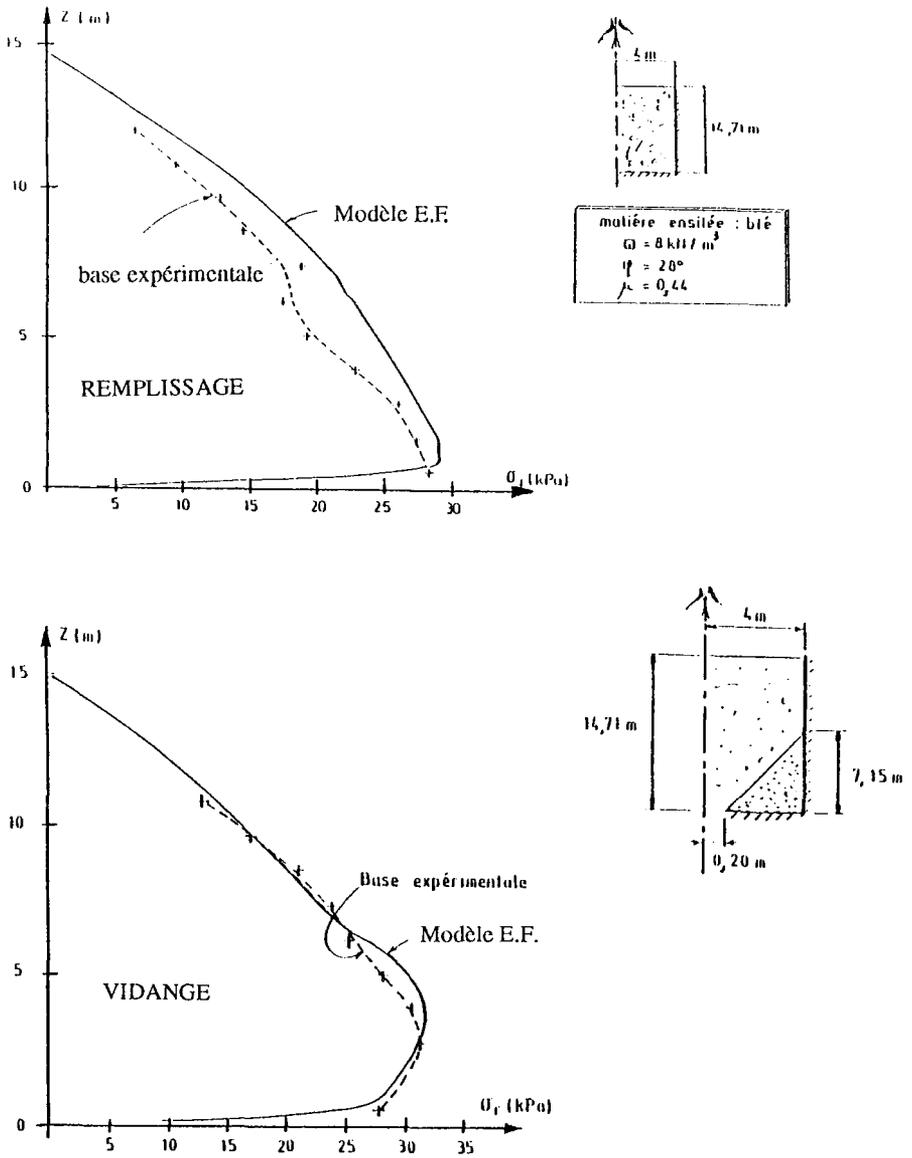


Figure 10. Courbes de contraintes normales aux parois de la cellule C

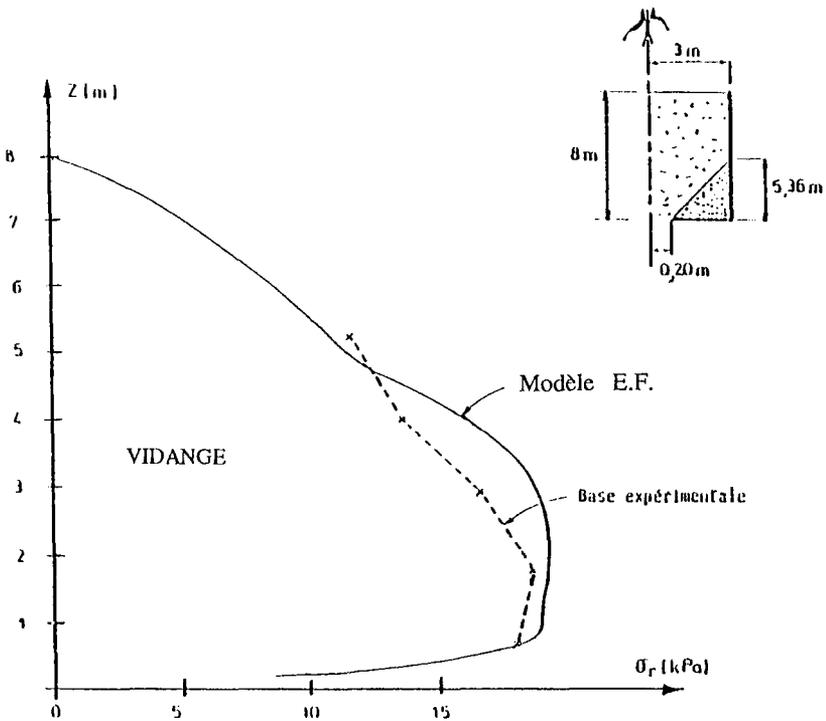
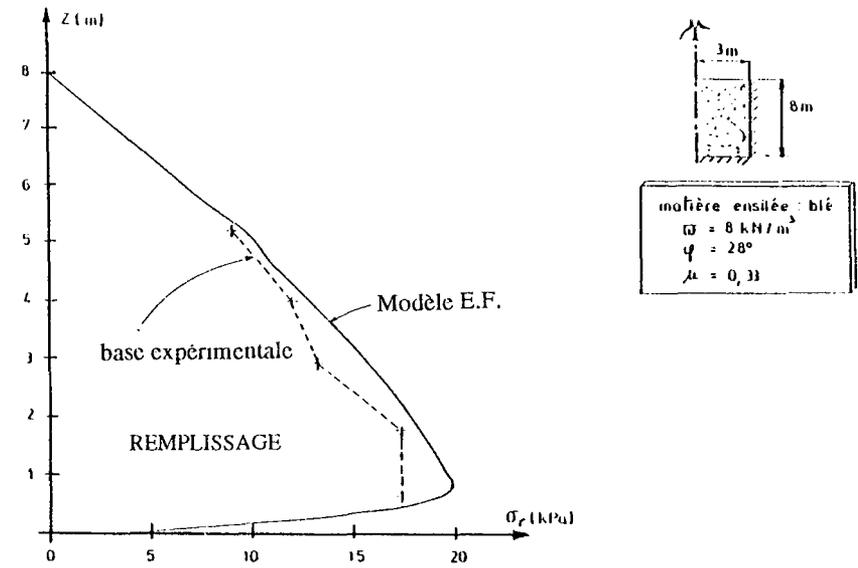


Figure 11. Courbes de contraintes normales aux parois de la cellule D

## 4.2 Mise en évidence de l'influence de la loi de comportement sur la répartition des contraintes dans la cellule

### 4.2.1 Influence de la non linéarité élastique

Les valeurs numériques du coefficient  $n$  de la loi de Boyce ( $n = 0,3$  pour le blé et  $n = 0,4$  pour le sable) traduisent en fait un comportement assez fortement non linéaire, sachant que ce coefficient (nécessairement positif pour un matériau hyper-élastique) prend la valeur 1 en élasticité linéaire. Pour estimer l'effet de cette non linéarité sur la distribution des efforts dans le silo (plus particulièrement lors du remplissage), une étude a été entreprise en faisant varier progressivement  $n$  depuis la valeur 0,3 du blé jusqu'à 1, et cela en corrigeant à chaque fois les valeurs de  $K_1$  et  $G_1$  de façon à conserver des modules élastiques sécants identiques pour un niveau de contrainte de référence proche de celui régnant dans la partie centrale du silo (voir schéma explicatif à la figure 12). Sur cette figure, on présente les résultats obtenus sur un silo de grandes dimensions (hauteur 24m, diamètre 4m, coefficient de frottement à la paroi  $\mu = 0,33$ ) : on constate qu'entre les deux cas extrêmes, la distribution des contraintes normales à la paroi a sensiblement la même allure. Par contre, à l'intérieur de la cellule, la figure 13 montre des différences plus sensibles :

- au niveau de la répartition des zones plastifiées (toujours dans l'hypothèse du critère de Drücker-Prager pour l'instant), on peut remarquer que la plus grande partie de la matière ensilée atteint l'état limite plastique dans le cas linéaire alors que dans le cas non linéaire, seule la zone située tout à fait à la base de la cellule atteint l'état limite plastique.

- De même, au niveau de la variation des contraintes suivant le rayon du silo, la courbe présentée à la figure 13 (il s'agit de la variation radiale de la composante verticale du tenseur des contraintes) se caractérise par une courbure plus importante en élasticité non linéaire, avec en particulier un maximum localisé près de l'axe de symétrie du silo. Ceci peut s'expliquer de par la nature de la loi de comportement qui confère une rigidité plus importante aux éléments finis pour lesquels la pression moyenne  $p$  est plus élevée ; dans le cas des silos, ces éléments sont essentiellement localisés vers le centre car près des parois, le frottement a tendance à diminuer  $p$ .

Ainsi, on a pu établir que le degré de non linéarité élastique affecte sensiblement l'état des contraintes à l'intérieur du silo ; par contre, une certaine capacité de redistribution des zones plastiques laisse quasiment inchangée la répartition des efforts le long de la paroi.

Concernant les zones plastiques selon le critère de Drücker-Prager, la figure 14 montre leur évolution au cours du remplissage pour un silo cylindrique d'élançement 2, la matière ensilée (du blé) ayant repris ses paramètres de comportement habituels (cf. tableau I) : dès l'instant où le silo est rempli à 50%, on constate une plastification importante de la zone localisée au fond du silo près de l'axe de symétrie. A la fin du remplissage, on peut également remarquer que plus de la moitié de la matière ensilée n'a pas atteint l'état limite plastique : cette observation s'est avérée particulièrement intéressante

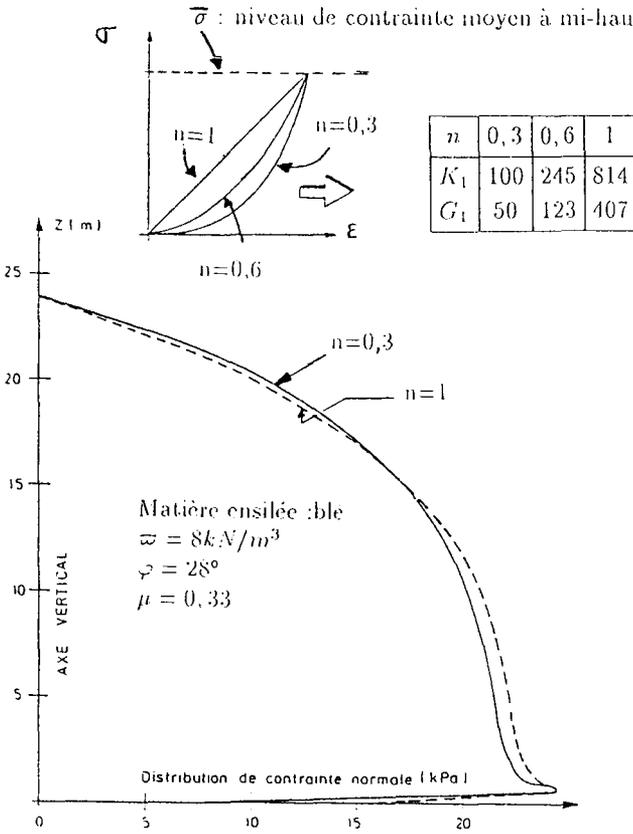


Figure 12. Effet de la non linéarité élastique à la paroi

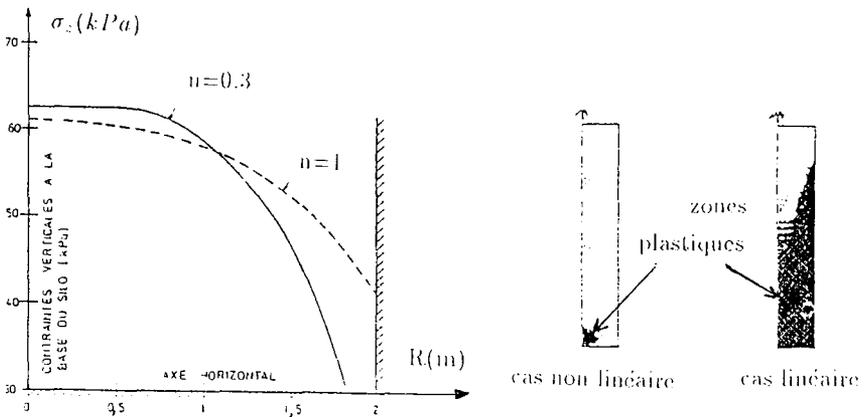


Figure 13. Effet de la non linéarité élastique à l'intérieur du silo

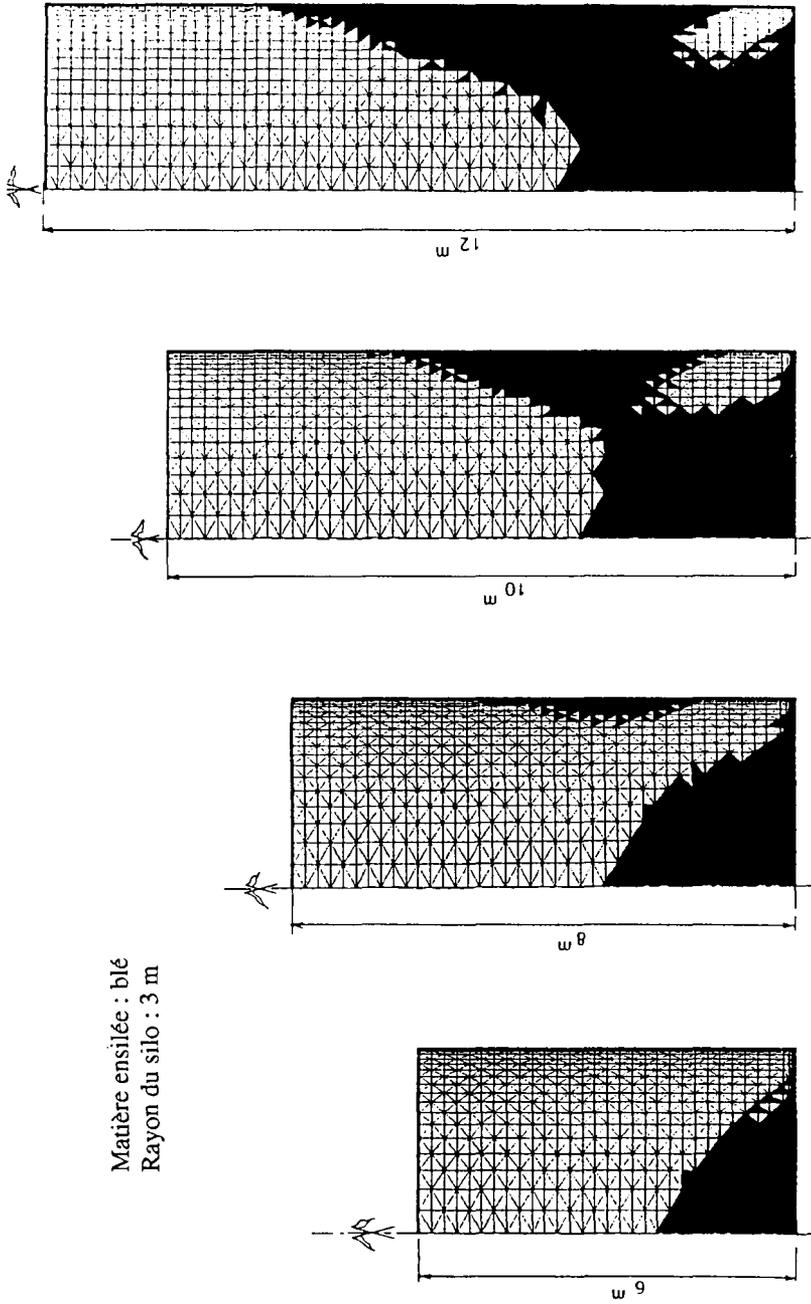


Figure 14. Evolution des zones plastiques au cours du remplissage

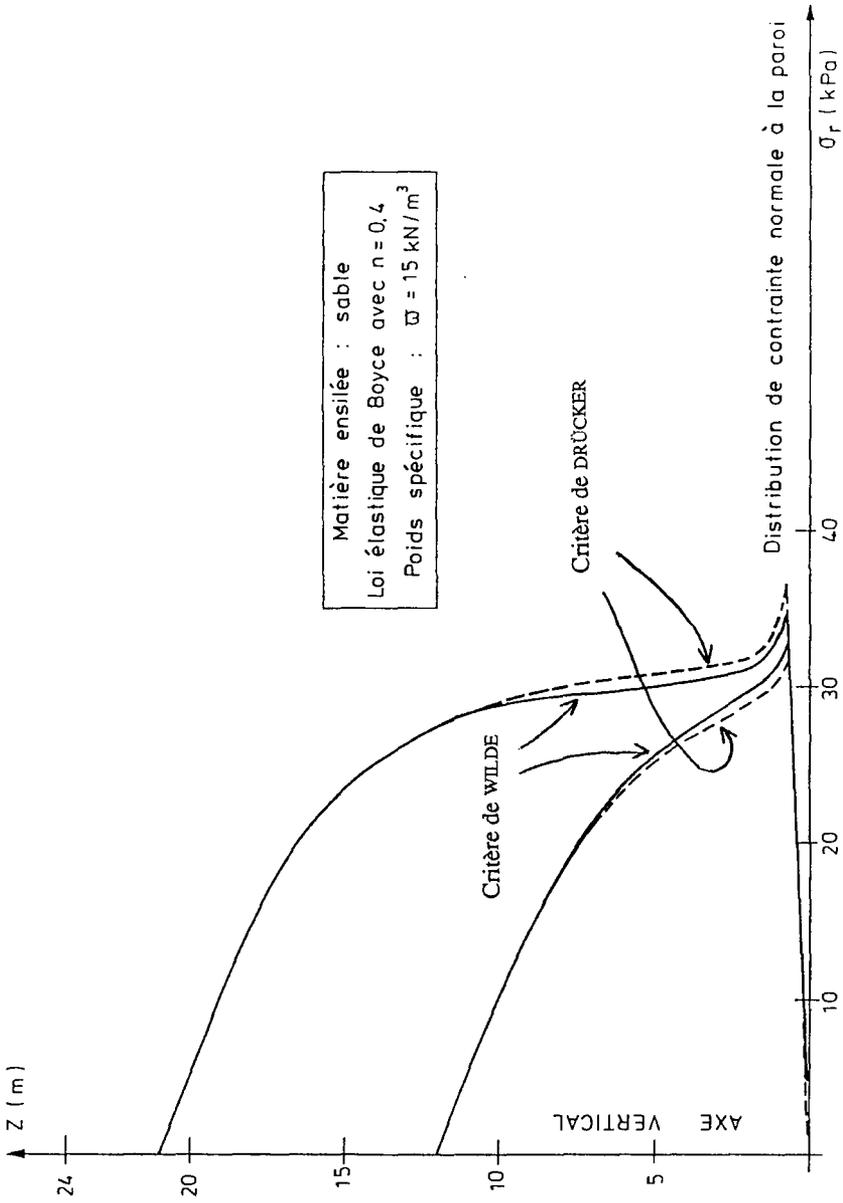


Figure 15. Comparaison des solutions obtenues avec le critère DRÜCKER et le critère de WILDE

pour l'élaboration des méthodes de calcul simplifiées qui seront évoquées au paragraphe suivant, la prise en compte d'un état limite plastique en tout point du silo, presque toujours à la base des modèles analytiques publiés dans la littérature, apparaissant ici tout à fait artificielle.

#### **4.2.2 Influence du modèle de comportement plastique**

Le logiciel offrant la possibilité d'utiliser un modèle de comportement plastique plus élaboré que le simple modèle de Drücker (en l'occurrence, il s'agit du modèle de Wilde évoqué au paragraphe 2.2), une étude comparative des distributions de contrainte normale obtenues à la paroi a été réalisée de façon à évaluer l'influence réelle de l'écroutissage de la matière ensilée ainsi que l'influence de la limitation du domaine élastique par une surface fermée. En fait, on a pu constater qu'il n'y avait pratiquement aucune différence entre les deux approches dès l'instant où l'on s'intéresse seulement à la répartition des contraintes à la paroi : à titre d'exemple, la figure 15 extraite de la référence [3] montre que l'écart entre les deux solutions est inférieur à 5% dans le cas d'un silo rempli avec du sable, et cela quelque soit la hauteur d'ensilage. De nombreux autres exemples ayant permis de confirmer cette tendance, le modèle de Wilde a finalement été assez peu utilisé dans le cadre d'études paramétriques dans la mesure où, pour un résultat relativement équivalent, il représente un coût de calcul bien plus élevé que le modèle de Drücker.

Par ailleurs, un calcul numérique précis des actions aux parois ayant pu être réalisé avec un modèle de comportement rhéologique relativement simple, la formulation d'une méthode analytique de calcul des contraintes à la paroi a pu être envisagée en exploitant au mieux les résultats de la base de données constituée avec ce modèle numérique. A partir des informations ainsi collectées sur la distribution des contraintes à l'intérieur du silo, certains des fondements des théories analytiques traditionnelles ont pu être remis en cause pour bâtir de nouvelles solutions d'équilibre de la matière ensilée : on se propose maintenant de mettre en évidence les grandes lignes de la démarche adoptée dans cette optique en présentant les principaux résultats acquis au cours d'une phase d'exploitation systématique du logiciel.

#### **4.3 Exploitation du modèle en vue d'établir les fondements de nouvelles théories pour un calcul précis des actions aux parois**

Tout d'abord, il peut être utile de rappeler qu'en théorie classique des silos, il est d'usage assez courant d'établir la répartition des contraintes à la paroi en écrivant l'équilibre des résultantes d'effort verticaux appliquées aux frontières d'une tranche horizontale de matière ensilée d'épaisseur infiniment petite soumise à son propre poids : c'est le fondement de la théorie de Janssen [19] qui, en outre, fait intervenir deux conditions aux limites, l'une exprimant la

Matière casilée : blé - hauteur d'ensilage : 15 m - section étudiée : Z = 1 m

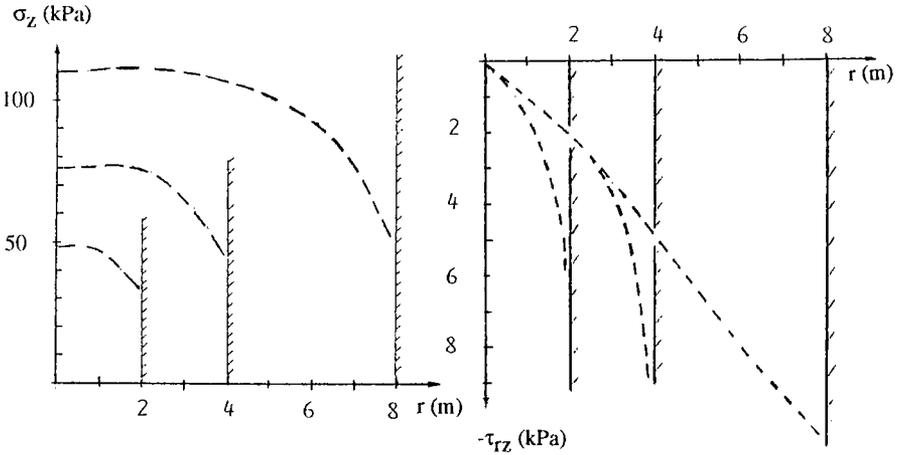


Figure 16. Evolution des contraintes suivant le rayon du silo

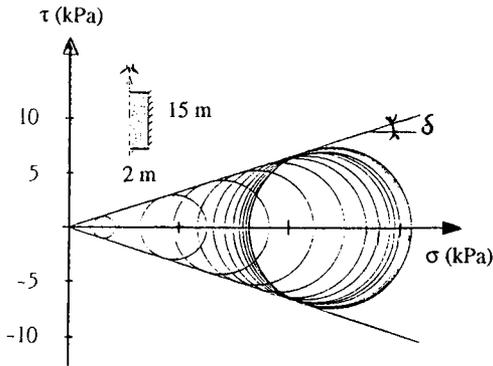


Figure 17. Etat des contraintes à la paroi

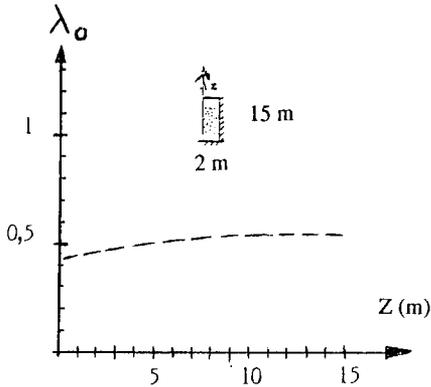


Figure 18. Variation de  $\lambda_0$  sur l'axe du silo

condition de frottement à la paroi, l'autre supposant l'existence d'un rapport constant sur toute la hauteur du silo entre la contrainte normale à la paroi et la contrainte verticale moyenne calculée dans la section. C'est en fait la caractérisation de ce rapport, souvent envisagée à l'état limite plastique, qui a fait l'objet de nombreuses publications.

Par rapport à ces travaux, le premier enseignement que l'on a pu tirer des résultats du modèle numérique, a été de constater que d'une manière générale, le rapport évoqué ci-dessus ne présentait pas un caractère constant ; puis, à partir d'une vaste étude paramétrique du champ des contraintes à l'intérieur de différents types de silos (plus ou moins élancés, à parois lisse ou rugueuse, avec plusieurs produits ensilés, etc...), trois hypothèses fondamentales ont pu être mises en évidence pour un calcul analytique précis des actions aux parois ; elles sont brièvement rappelées ci-dessous :

1- A l'intérieur du silo, l'effet du frottement est localisé dans une zone très limitée au voisinage de la paroi ; ceci se traduit par des variations non linéaires des contraintes en fonction du rayon comme le montre, à titre d'exemple, la figure 16 pour la contrainte verticale, la courbe de variation pouvant présenter un palier horizontal dans la zone centrale du silo non affectée par la paroi.

2- Le long de la paroi, il se développe un état de contrainte qui coïncide très précisément avec un état limite de frottement (cercles de Mohr tangents à la droite de pente  $\delta = \arctan(\mu)$ , voir figure 17). Cet état de contrainte, mis en évidence quelque soit la géométrie du silo, remet en cause l'hypothèse d'un état limite plastique (au moins lorsque l'angle de frottement à la paroi est inférieur à l'angle de frottement interne de la matière ensilée) et conduit à définir un rapport constant  $\lambda_p$  sur toute la hauteur de la paroi entre la contrainte normale (horizontale) et la contrainte verticale [3] :

$$\lambda_p = \frac{1}{2\tan^2\delta + 1} \quad (21)$$

3- Dans la zone centrale du silo, la matière ensilée n'atteint l'état limite plastique que vers le fond de la cellule (voir figure 14) ; sur l'axe, l'état des contraintes coïncide avec un état d'équilibre "au repos" d'un milieu granulaire, ce qui se traduit numériquement par l'existence d'un rapport  $\lambda_0$  constant entre les contraintes horizontale et verticale (voir les résultats numériques sur la figure 18).

Pour introduire ces hypothèses dans un modèle analytique, le concept d'équilibre global par tranches horizontales de Janssen a donc été abandonné au profit de la recherche d'une solution rigoureuse d'équilibre interne de la matière ensilée : la présentation détaillée des solutions obtenues ne faisant pas l'objet du présent article, le lecteur pourra se reporter aux références [3, 15, 17, 18] pour plus de détails. Simplement, pour illustrer l'intérêt d'une telle démarche basée principalement sur l'exploitation du modèle Eléments Finis, la figure 19 met en évidence l'amélioration spectaculaire obtenue dans la prévision des actions aux parois lors du remplissage d'un silo relativement élancé : alors que la théorie

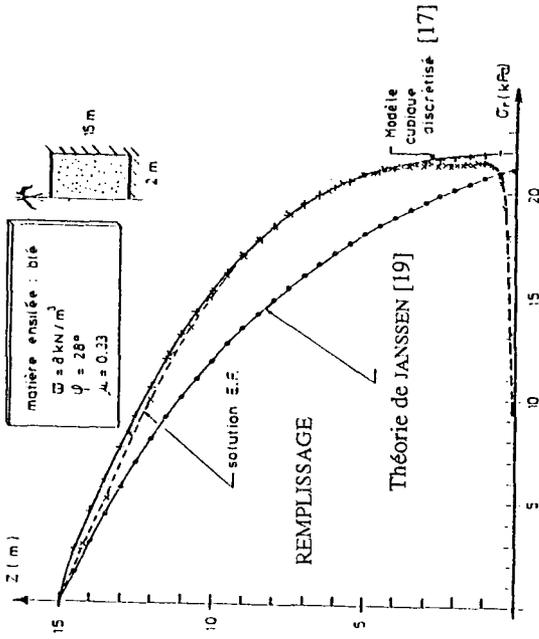
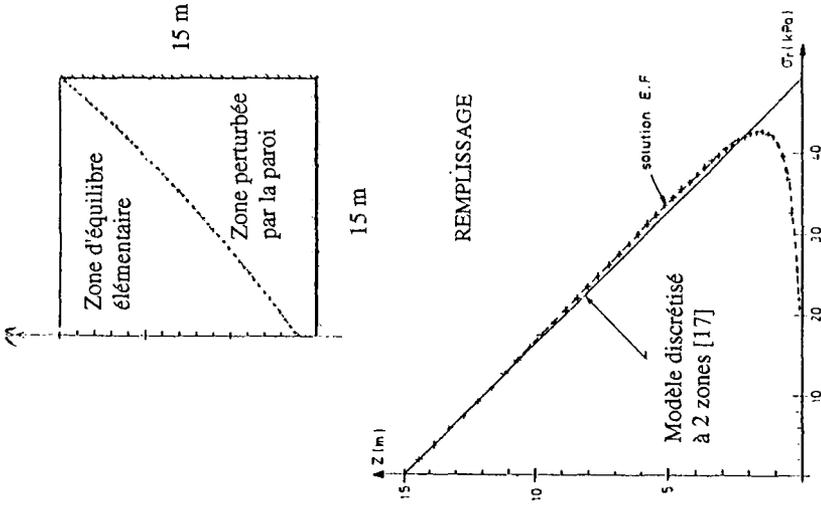


Figure 19. Comparaison du modèle E.F. avec des solutions analytiques (cas d'un silo élancé)

Figure 20. Remplissage d'un silo peu élancé avec du blé

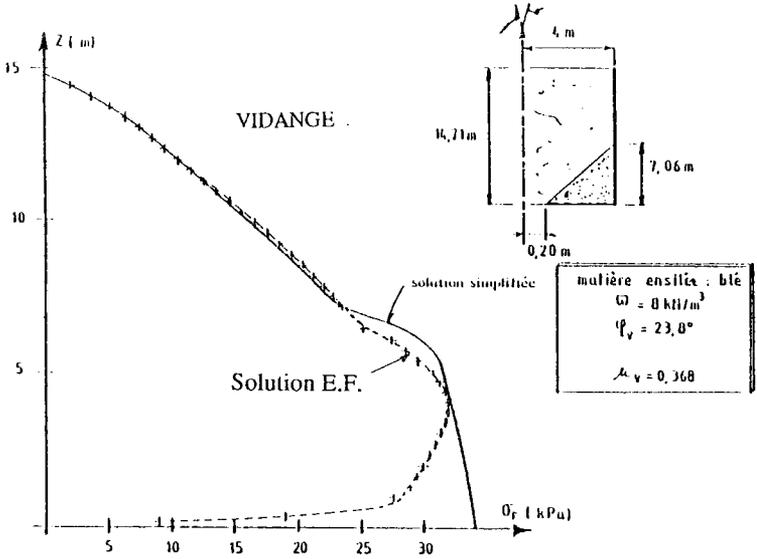


Figure 21. Comparaison avec la solution simplifiée proposée à la vidange

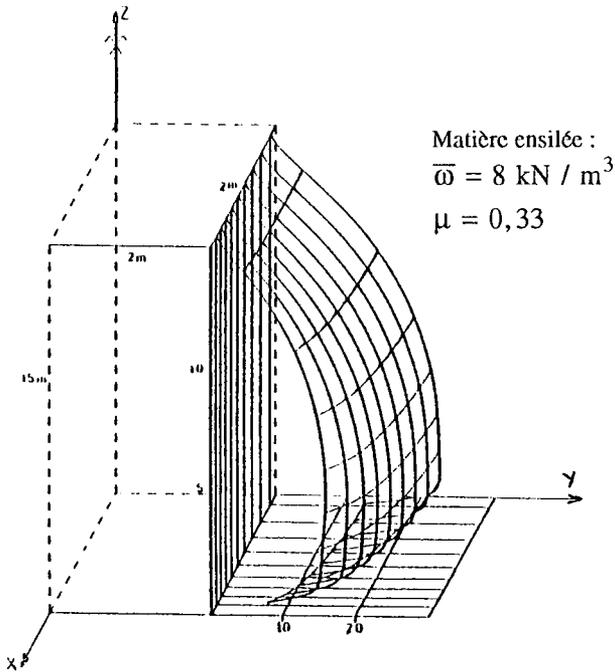


Figure 22. Cas d'un silo tri-dimensionnel

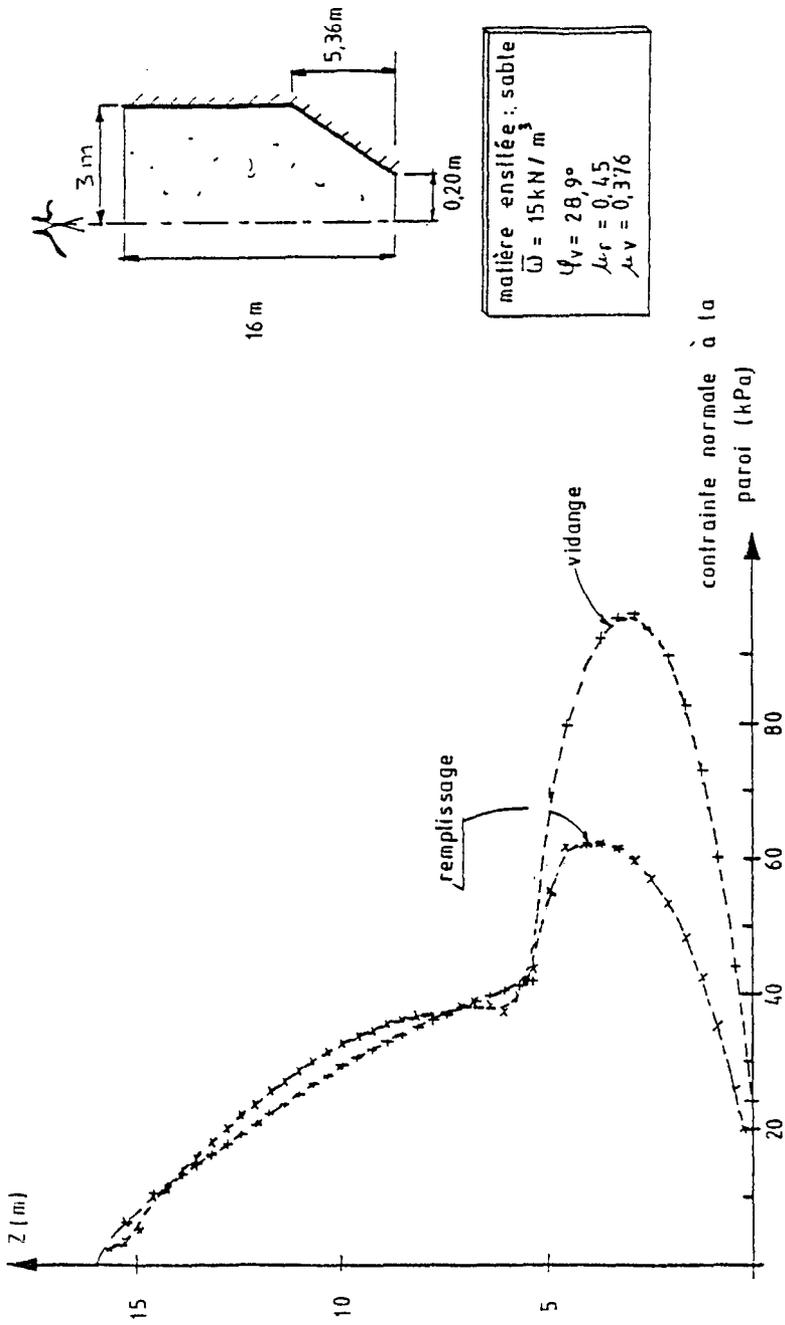


Figure 23. Cas d'un silo à fond incliné

classique de Janssen tend à sous-estimer les actions, on constate sur cette figure une concordance presque parfaite entre le modèle analytique proposé et le calcul aux Eléments Finis. De la même façon, les figures 20 et 21 illustrent les résultats obtenus d'une part lors du remplissage d'un silo peu élargi, d'autre part lors de la vidange d'une autre cellule : à chaque fois, la solution analytique proposée par les auteurs apporte une évaluation des actions aux parois conforme à la simulation numérique.

#### 4.4 Autres exemples

Pour terminer cet article, on présente aux figures 22 et 23 deux autres possibilités de la modélisation offertes par le programme :

- à la figure 22, il s'agit d'une cellule à géométrie tri-dimensionnelle ; la section droite est carrée ( $2m \times 2m$ ) avec une hauteur d'ensilage égale à  $15m$  (compte tenu des symétries du problème, seulement un quart du silo a été modélisé). Le graphique donne une représentation tri-dimensionnelle des contraintes normales exercées le long des parois lors du remplissage du silo avec du blé : ce type de représentation a notamment permis de mettre en évidence les variations horizontales de la contrainte normale, cette dernière étant toujours assez nettement plus importante au centre de la paroi que près des angles de raccordement. En analysant dans le détail la loi de variation horizontale de ladite contrainte, les auteurs ont également pu proposer [7] une équivalence simple permettant d'ajuster un modèle bi-dimensionnel optimal définissant une courbe enveloppe des contraintes sur toute la hauteur de la cellule.

- A la figure 23, on donne simplement une illustration portant sur le calcul d'un silo cylindrique à fond incliné (trémie) ; dans ce type de silo, il apparaît une augmentation importante des efforts normaux aux parois au voisinage de la zone de raccordement de la jupe du silo avec la trémie. La représentation donnée montre en outre qu'entre la phase de remplissage et la phase de vidange, il se produit une augmentation importante des sollicitations dans la trémie (accroissement de plus de 50% de la contrainte normale). De la même façon que pour les autres types de silo, le modèle E.F. a permis de réaliser une étude paramétrique approfondie de la distribution des contraintes dans les trémies, et d'aboutir à des propositions très concrètes d'amélioration des méthodes analytiques simplifiées [18].

#### 5. Conclusion

Le modèle de calcul aux Eléments Finis présenté dans cet article constitue désormais un outil d'investigation bien adapté à la simulation des actions dans les silos ; il a été développé avec le souci d'aboutir à une modélisation pas trop complexe au plan numérique, ce qui confère au modèle un caractère assez pragmatique par rapport à d'autres approches de la littérature. Le contexte dans lequel les auteurs ont opéré, a permis de disposer de toutes les informations utiles, d'une part à la caractérisation du comportement de la matière ensilée, d'autre part à la validation des résultats numériques par confrontation avec des mesures expérimentales réalisées en vraie grandeur.

Au plan de la contribution à la connaissance des phénomènes mécaniques mis en jeu lors du remplissage et lors de la vidange d'un silo, l'apport de la MEF a été particulièrement déterminant pour mener à bien les différentes études paramétriques présentées de manière très partielle dans le cadre de cet article. Les résultats obtenus ont notamment mis en évidence la nécessité de prévoir une localisation assez étroite des effets du frottement près de la paroi si l'on veut aboutir à un calcul précis des actions dans le cadre d'un modèle analytique simplifié. Dans le même ordre d'idée, les auteurs ont montré qu'il était préférable de prendre en compte un état limite de frottement le long de la paroi (contrairement aux théories plus classiques qui adoptent généralement l'hypothèse d'un état limite plastique en tout point du silo), et que, par ailleurs, le respect du comportement rhéologique de la matière ensilée dans la partie centrale du silo constituait un élément également déterminant dans la précision du calcul simplifié.

A l'heure actuelle, la phase d'exploitation du logiciel se poursuit plus spécifiquement dans le cadre des silos à géométrie tri-dimensionnelle ; un des objectifs de ce travail en cours consiste, entre autres, à analyser les effets de dissymétrie liés à un dispositif de remplissage ou de vidange excentré par rapport au plan de symétrie du silo.

En ce qui concerne le développement du modèle numérique, il est envisagé d'étudier également l'influence de la rigidité des parois sur la distribution des contraintes dans le silo. Enfin, de nouvelles lois de comportement de la matière ensilée pourraient être introduites dans le modèle pour simuler notamment les phénomènes de voûtes dans les silos destinés au stockage des produits cohésifs.

## 6. Bibliographie

- [1] HABIB P., LUONG M.P.  
Recherche "Silos" du CTICM. Comportement rhéologique des matériaux en vrac stockés en silo. *Rapport des essais de laboratoire*, L.M.S. - Ecole Polytechnique, France , août 1988.
- [2] LUONG M.P.  
Rhéologie des grains agro-alimentaires ensilés. *Revue de construction métallique* n°2.89, 1989.
- [3] E. RAGNEAU  
Modélisation numérique et nouvelles méthodes analytiques pour le calcul des actions dans les silos cylindro-coniques (remplissage et vidange). *Thèse de Doctorat*, I.N.S.A. de Rennes - janvier 1993.
- [4] HATTAB M.  
Application du modèle élastoplastique de WILDE. *Mémoire de DEA*. INSA de Rennes, Laboratoire GTMa, 1989.

[5] BOYCE H.R.

A non linear model for the elastic behaviour of granular material under repeated loading. *International Symposium on soils under cyclic and transient loading*. Swansea, 1980.

[6] WILDE P.

Principes mathématiques et physiques des modèles élastoplastiques des matériaux granulaires. *Compte rendu du colloque Franco-Polonais de Paris*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 1979.

[7] E. RAGNEAU, J.M. ARIBERT, A.M. SANAD

Modèle tri-dimensionnel aux Éléments Finis pour le calcul des actions sur les parois d'un silo (remplissage et vidange). *Revue de Construction Métallique*, n° 2-94.

[8] PURI V.M., MANBECK H.B., ZHANG Q.

Finite Element model for predicting static and thermally induced loads in bulk solids storage. *2ième Symposium Européen CHISA '90 "session contraintes dans les silos"* Prague (communication n°36), août 1990.

[9] N.F. P22-630.

Norme expérimentale Française, AFNOR 1992.

[10] D.I.N. 1055 TEIL 6

Lastannahmer für Bauten Lasten in Silo Zellen, mai 1986.

[11] EUROCODE 1

Basis of Design and Actions on Structures - Part 4 : Actions in Silos and Tanks ...DRAFT. *European Committee for Standardization (CEN), Subcommittee TC/250/SC1* - April 1993.

[12] HAUSSLER U., EIBL J.

Numerical investigations on discharging silos. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 110, n°6, juin 1984.

[13] RUNESSON K., NILLSON L.

Finite Element modelling of gravitational flow of a granular material. *Bulk Solid Handling*, vol.5 n°5, octobre 1986.

[14] BISHARA A.G., MAHMOUD M.H., CHANDRANGSU K.

Finite Element formulation for farm silo analysis. *Journal of the Structural Division*, USA, 1977.

[15] E. RAGNEAU, J.M. ARIBERT

Solutions analytiques à divers ordres d'approximation pour le calcul des actions dans les silos cylindriques en phase de remplissage. *Revue de Construction Métallique* n° 1-92, avril 1992.

[16] E. RAGNEAU, J.M. ARIBERT

New calculations methods for the determination of grain action during filling and emptying - comparison with full scale tests measurements. *Proceedings*

of the 2nd International Seminar on Silos and Storage Installations - Tehran, october 1992.

[17] E. RAGNEAU, J.M. ARIBERT

Formulation analytique récurrente pour un calcul précis des actions aux parois de silos cylindriques à fond plat en phase de remplissage. *Annales de l'I.T.B.T.P.*, n°522 - mars-avril 1994.

[18] E. RAGNEAU, J.M. ARIBERT

Solutions analytiques pour les trémies coniques à la base de cellules cylindriques en phase de remplissage. *Annales de l'I.T.B.T.P.* n°526 - septembre 1994.

[19] H.A. JANSSEN

Versuche über Getreidedruck in Silozellen. *VDI-Zeitschrift*, 1895.

[20] J.M. ARIBERT, E. RAGNEAU

Modèle numérique par Éléments Finis pour le calcul des actions de la matière ensilée sur les parois. *Revue de Construction Métallique*, n°2-89.

[21] J.M. ARIBERT E. RAGNEAU

Stress calculations in silos by Finite Element method using different behaviour laws for ensiled material. *2nd European Symposium "CHISA '90"*, paper n°1669. Praha, August 1990.

[22] J.L. SUTTERBY

Finite difference analysis of viscous laminar converging flow in conical tubes. *Applied Science Research*, section A, volume 15, pages 241-252. Avril 1965.

[23] J. BROZZETTI

Description de la base expérimentale d'essais de cellules métalliques de stockage. Présentation du programme d'essais. *Revue de Construction Métallique* n°2-89.

[24] P.V. LADE

Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 13, n°11. 1977.

[25] O.C. ZIENKIEWICZ, S. VALLAPIAN, I.P. KING

Elastoplastic solutions of engineering problems. "Initial Stress", Finite Element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 1 - 1969.

## 7. Annexe I : mise en évidence du caractère négligeable des termes d'inertie dans la modélisation de la vidange

On cherche à montrer ici que dans les équations d'équilibre interne de la matière ensilée (données ci-dessous en symétrie cylindro-circulaire), la contribution des composantes de l'accélération Eulérienne ( $v'_r, v'_z$ ) du mouvement suivant les axes du repère cylindrique ( $r, z$ ) sont négligeables :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\rho v'_r(r, z, t) \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \varpi = -\rho v'_z(r, z, t) \end{cases} \quad (22)$$

avec  $\rho$  : la masse volumique du produit ensilé.

Dans la partie supérieure du silo ( $z \leq h'_0$ ), Les trajectoires sont supposées verticales (cf. figure 7-a) ; la composante radiale de la vitesse ( $v_r$ ) est donc identiquement nulle. Si l'on considère en outre que le matériau est incompressible, l'équation de continuité :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (23)$$

conduit à un champ de vitesse verticale indépendant de  $z$ .

Les composantes de l'accélération Eulérienne du mouvement ( $v'_r, v'_z$ ), définies par :

$$\begin{cases} v'_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_r}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_r}{\partial t} \\ v'_z = \frac{\partial v_z}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases} \quad (24)$$

sont donc identiquement nulles en régime permanent.

Dans la partie inférieure ( $z \geq h'_0$ ), le champ de vitesse est supposé être radial ; pour obtenir une évaluation des composantes de l'accélération Eulérienne ( $v'_r, v'_z$ ) en chaque point de l'écoulement, on propose d'adopter a priori un champ radial de vitesse qui soit cinématiquement admissible (au sens de satisfaire l'équation de continuité (23)). Le champ retenu est celui proposé par J.L.SUTTERBY [22] ; projeté dans le repère ( $r, z$ ) de la figure (7-a), il s'écrit :

$$\begin{cases} v_r = \frac{-Q}{2\pi(1 - \cos\theta)} \frac{r}{[r^2 + (H_0 - z)^2]^{3/2}} \\ v_z = \frac{Q}{2\pi(1 - \cos\theta)} \frac{H_0 - z}{[r^2 + (H_0 - z)^2]^{3/2}} \end{cases} \quad (25)$$

où  $Q$  représente le débit de l'écoulement et  $\theta$  l'angle d'inclinaison du cône ( $tg\theta = \frac{r}{H_1}$ , cf. figure (7-a)).

Pour évaluer l'ordre de grandeur des termes d'inertie dus au débit de l'écoulement, on se propose d'adopter une formulation adimensionnelle des

équations d'équilibre, selon une démarche assez classique en Mécanique des Fluides. Pour exprimer les contraintes  $(\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz})$  et les coordonnées  $(r, z)$  en fonction respectivement d'une pression et d'une longueur de référence, on peut poser :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \bar{\sigma}_r(\varpi h_0) \ ; \ \sigma_z = \bar{\sigma}_z(\varpi h_0) \ ; \ \tau_{rz} = \bar{\tau}_{rz}(\varpi h_0) \ ; \\ r &= \bar{r}h_0 \ ; \ z = \bar{z}h_0 \end{aligned} \tag{26}$$

où  $\varpi$  désigne le poids spécifique de la matière ensilée et  $h_0$  la hauteur totale du silo.

Compte tenu du champ de vitesse adopté ici, on peut facilement écrire les équations d'équilibre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial \bar{z}} = \mathcal{D}_v \mathcal{S}_r(\bar{r}, \bar{z}) \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{\tau}_{rz}}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial \bar{z}} - 1 = -\mathcal{D}_v \mathcal{S}_z(\bar{r}, \bar{z}) \end{cases} \tag{27}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v = \frac{2q^2}{gh_0^5} \\ \mathcal{S}_r(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{\bar{r}}{\left[ \bar{r}^2 + \left( \frac{H_0}{h_0} - \bar{z} \right)^2 \right]^3} \\ \mathcal{S}_z(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{\frac{H_0}{h_0} - \bar{z}}{\left[ \bar{r}^2 + \left( \frac{H_0}{h_0} - \bar{z} \right)^2 \right]^3} \\ \left( \text{pour rappel } q = \frac{Q}{2\pi(1 - \cos \theta)} \right) \end{cases} \tag{28}$$

( $g$  désignant l'accélération de pesanteur).

Dans le système différentiel (27), le second membre représente exclusivement les termes d'inertie dus à l'accélération de pesanteur  $g$ , et l'on peut facilement vérifier que pour  $H_0 \neq h_0$  (ce qui est toujours vrai dans une configuration d'écoulement réel), on a :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v \mathcal{S}_r(\bar{r}, \bar{z}) \leq \mathcal{D}'_v \\ \mathcal{D}_v \mathcal{S}_z(\bar{r}, \bar{z}) \leq \mathcal{D}_v \end{cases} \tag{29}$$

où :

$$\mathcal{D}'_v = \frac{2q^2}{gr_0^5} \tag{30}$$

Dans la plupart des cas courants, il est clair que les deux majorants définis ci-dessus ont un ordre de grandeur très inférieur à 1 puisque le paramètre  $q$ , qui dépend directement du débit, est lui-même plus petit que 1. A titre d'exemple, pour un silo de hauteur  $15m$  de rayon  $2m$ , rempli de blé et avec un débit de  $300t/h$ , on trouve  $\mathcal{D}_v = 4,57 \cdot 10^{-9}$  et  $\mathcal{D}'_v = 1,09 \cdot 10^{-4}$  (l'angle  $\theta$  étant déduit de la relation (17)). En fait, c'est seulement dans le cas particulier de silos très élancés, et de plus, en considérant un écoulement radial sur pratiquement toute la hauteur de la cellule que les effets d'inertie pourraient être les plus significatifs ; car dans ces conditions  $q$  peut prendre des valeurs relativement élevées (l'angle  $\theta$  étant proche de zéro), et la relation de majoration n'est plus suffisante pour en déduire l'ordre de grandeur du second membre de (27).

En pratique, avec la délimitation du cône d'écoulement donnée en (17), les effets d'inertie seront toujours négligeables ( $\theta$  étant toujours nettement supérieur à 0). Cette aspect a d'ailleurs été confirmé pour différentes configurations d'écoulement dans [3].

## 8. Annexe II : Algorithme de résolution des non linéarités matérielles

Les inconnues du problème sont les déplacements aux noeuds des éléments finis regroupés dans le vecteur  $\{D\}$  ainsi que les contraintes dans chaque élément ( $e$ ) notées  $\{\sigma_e\}$  (vecteur à 4 composantes en symétrie de révolution :  $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ ).

On rappelle que la relation cinématique au niveau d'un élément s'écrit, à partir des fonctions d'interpolation, sous la forme matricielle :

$$\{\varepsilon_e\} = [b_e] \{d_e\} \quad (31)$$

où  $\{\varepsilon_e\}$  représente le vecteur déformation de l'élément ( $e$ ) (associé à  $\{\sigma_e\}$ ) et  $[b_e]$  la matrice cinématique élémentaire. Pour faciliter l'écriture des équations qui suivent, la relation matricielle (31) peut toujours être transcrite sous la forme :

$$\{\varepsilon_e\} = [B_e] \{D\} \quad (32)$$

**N.B.** : Pour être en accord avec les conventions de signe généralement adoptées dans les lois de comportement en Mécanique des Sols, on comptera positivement les contraintes et les déformations associées à un état de compression ; ceci conduit à modifier comme suit les relations cinématiques reliant les déformations aux déplacements :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad , \quad (33)$$

ce qui permet de conserver des valeurs positives pour les modules d'élasticité.

### 8.1 Cas du matériau élasto-plastique parfait (modèle de DRUCKER-PRAGER).

Pour la résolution numérique, deux types d'équations sont à considérer ;

- les équations d'équilibre global, données ici sous une forme discrétisée :

$$\sum_e \int_{v_e} [B_e]^t \{\sigma_e\} dv - \{S\} = \{0\} \quad (34)$$

Où  $v_e$  désigne le volume de l'élément considéré.

Elles relient les forces nodales équivalentes au chargement extérieur  $\{S\}$  (constitué ici par les forces de gravité et les actions de contact à la paroi) aux efforts internes appliqués dans chaque élément où sur sa frontière.

- les équations de comportement propres à chaque élément dans lesquelles figure l'aspect non linéaire du problème et dont la formulation peut être différente selon que l'on se place à l'intérieur du domaine élastique (limité par la courbe  $F(\{\sigma_e\}) = 0$  dans l'espace des contraintes) ou au contraire à l'état limite plastique. Précisons la formulation dans les deux cas :

a) si  $F(\{\sigma_e\}) < 0$  (cas élastique), on peut envisager

. soit une formulation globale du type :

$$[E^{-1}(\{\sigma_e\})] \{\sigma_e\} - [B_e] \{D\} = \{0\} \quad (35)$$

L'opérateur  $E$  représente les relations non linéaires de BOYCE.

. soit une formulation incrémentale du type :

$$[\nabla E(\sigma_e)]^{-1} \{\delta\sigma_e\} - [B_e] \{\delta D\} = \{0\} \quad (36)$$

$\{\delta\sigma_e\}$  et  $\{\delta D\}$  représentent les accroissements respectifs des vecteurs contrainte et déplacement au cours de l'incrément de charge ;  $[\nabla E(\sigma_e)]$  désigne l'opérateur de comportement élastique tangent. A noter que dans le cadre de la loi de BOYCE, qui est une loi hyper-élastique isotrope dont le caractère non linéaire s'exprime à partir des deux premiers invariants du tenseur des contraintes, la matrice  $[\nabla E(\sigma_e)]$  représentant l'opérateur  $\nabla E_{ijkl}$  peut être directement déterminé à partir du potentiel complémentaire  $\mathcal{U}^c$  défini en (3), sachant que, par définition :

$$\nabla E_{ijkl}^{-1} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}^c}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \quad (37)$$

b) si  $F(\{\sigma_e\}) = 0$  (cas plastique), la relation est obligatoirement de type incrémental :

$$[\nabla P(\sigma_e)]^{-1} \{\delta\sigma_e\} - [B_e] \{\delta D\} = \{0\}$$

$[\nabla P(\sigma_e)]$  désigne l'opérateur élasto-plastique tangent classiquement défini à partir d'une loi d'écoulement normal au potentiel plastique par la relation suivante :

$$[\nabla P(\sigma_e)] = [\nabla E(\sigma_e)] - \frac{[\nabla E(\sigma_e)] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^t [\nabla E(\sigma_e)]}{A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^t [\nabla E(\sigma_e)] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\}} \quad (38)$$

Avec :

$A$  : module d'écrouissage.

$G$  : potentiel plastique (en fait  $F = G$  avec les modèles considérés ici).

### 8.1.1 Résolution à l'itération $j$ .

La figure 24 représente symboliquement la procédure de résolution itérative à partir de la méthode de NEWTON-RAPHSON lorsque l'état de chargement du silo passe de  $\{S\}_{i-1}$  à  $\{S\}_i$  (boucle itérative indiquée  $j$ ).

En fait, on opère par une succession de calculs avec rigidité tangente en ré-injectant à chaque étape le déséquilibre en efforts nodaux constaté à l'étape antérieure :  $\{\delta \bar{S}\}_i^{j-1}$ . La correction des déplacements nodaux  $\{\delta D\}_i^j$  correspondante est basée sur l'utilisation de la matrice de rigidité tangente de la structure :

$$[K_i]_i^{j-1} = \sum_e \int_{v_e} [B_e]^t [\nabla P(\sigma_e)]_i^{j-1} [B_e] dv \quad (\text{pour l'itération } j) \quad (39)$$

avec pour  $j = 1$   $[\nabla P(\sigma_e)]_i^0 \equiv [\nabla P(\sigma_e)]_{i-1}$

En fait, à chaque itération  $j$ , on a les relations suivantes :

$$\{\delta D\}_i^j = \left( [K_i]_i^{j-1} \right)^{-1} \left\{ \delta \bar{S} \right\}_i^{j-1} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \{D\}_i^j = \{D\}_i^{j-1} + \{\delta D\}_i^j \\ \forall e \quad \{\varepsilon_e\}_i^j = \{\varepsilon_e\}_i^{j-1} + \{\delta \varepsilon_e\}_i^j \\ \forall e \quad \{\sigma_e\}_i^j = \{\sigma_e\}_i^{j-1} + \{\delta \sigma_e\}_i^j \end{cases} \quad (41)$$

avec bien sûr,  $[\nabla P(\sigma_e)]_i^{j-1} \equiv [\nabla E(\sigma_e)]_i^{j-1}$  lorsque  $F(\{\sigma_e\}_i^{j-1}) < 0$  (cas élastique).

Quant aux efforts nodaux de ré-équilibre correspondant à l'itération  $j$ , ils s'obtiennent à partir des déséquilibres calculés sur les contraintes élémentaires

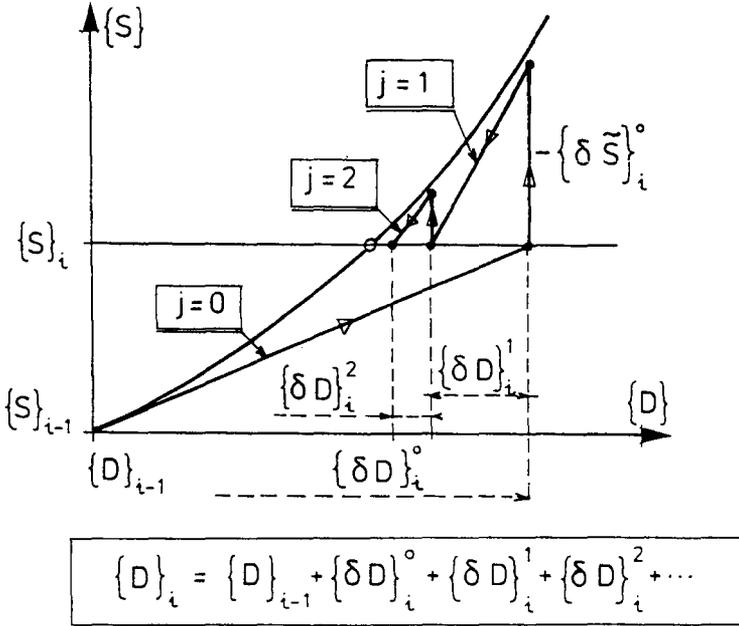


Figure 24

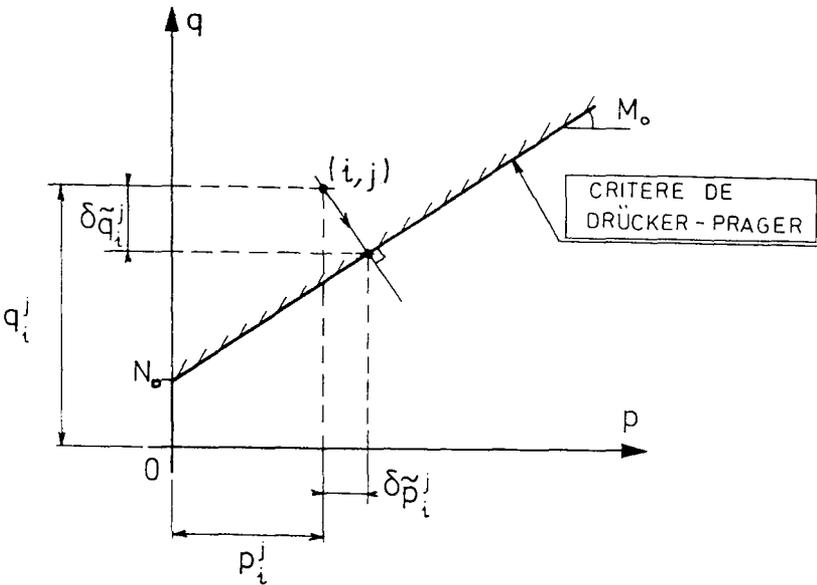


Figure 25

$\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j$ , eux memes déterminés avec un algorithme différent selon le type de comportement ; plus précisément on a :

. dans le cas élastique  $F(\{\sigma_e\}_i^j) < 0$  :

$$\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j = \{E([B_e]\{D\}_i^j)\} - \{\sigma_e\}_i^j \tag{42}$$

. dans le cas plastique  $F(\{\sigma_e\}_i^j) = 0$ ,  $\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j$  est tel que :

$$F(\{\sigma_e\}_i^j) - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\{\sigma_e\}_i^j) \right\}^t \{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j = 0 \tag{43}$$

En toute rigueur, on effectue en (43) une projection orthogonale sur le critère plastique défini dans le plan  $(p, q)$  (cf. remarque ultérieure 8.1.3).

Le déséquilibre des efforts nodaux se calcule ensuite par la relation :

$$\{\delta\tilde{S}\}_i^j = - \sum_e \int_{v_e} [B_e]^t \{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j dv \tag{44}$$

Une fois les calculs terminés à l'itération  $j$ , il reste à réactualiser les inconnues avant de passer à l'itération suivante :

$$\{\sigma_e\}_i^j \longrightarrow \{\sigma_e\}_i^j + \{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j \tag{45}$$

### 8.1.2 Critères de convergence

La vérification de la convergence peut s'opérer à différents niveaux :

- globalement en testant l'amplitude des corrections effectuées sur les déplacements (norme du vecteur  $\{\delta D\}_i^j$ ) ; le calcul s'arrête dès que l'erreur relative  $\frac{\|\{\delta D\}_i^j\|}{\|\{D\}_i^j\|}$  est inférieure à la précision demandée.

- localement, en testant sur chaque élément, le respect de la loi de comportement ; le calcul s'arrête dès lors que tous les éléments satisfont au critère suivant :

$$\forall e \quad \frac{\|\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j\|}{\|\{\delta\sigma_e\}_i^j\|} < \varepsilon_0 \tag{46}$$

avec  $\varepsilon_0$  qui désigne la précision relative demandée.

Pratiquement, c'est le critère (46) qui a été retenu de manière à garantir un état de contrainte conforme en tout point du silo à la loi de comportement donnée pour la matière ensilée. A noter que ce critère est bien plus strict que le premier cité.

### 8.1.3 Remarque

Lorsque l'élément considéré a atteint l'état limite plastique, l'algorithme de ré-équilibrage donné de manière indicative en (43) n'est applicable que si l'on adopte une hypothèse supplémentaire permettant de faire la liaison entre les valeurs de ré-équilibrage exprimées en terme d'invariants des contraintes ( $\delta\tilde{p}_i^j$ ,  $\delta\tilde{q}_i^j$ ) et le vecteur  $\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j$  (voir figure 25).

Pour cela, on peut introduire une loi de HOOKE virtuelle entre le vecteur des déformations  $\{\varepsilon_e\}_i^j$  et le vecteur des contraintes  $\left(\{\sigma_e\}_i^j + \{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j\right)$  en définissant des modules élastiques sécants  $\tilde{K}_i^j$  et  $\tilde{G}_i^j$  tels que :

$$\tilde{K}_i^j = \frac{p_i^j + \delta\tilde{p}_i^j}{(\varepsilon_v)_i^j} \quad ; \quad \tilde{G}_i^j = \frac{q_i^j + \delta\tilde{q}_i^j}{3(\varepsilon_q)_i^j} \quad (47)$$

$(\varepsilon_v)_i^j$  et  $(\varepsilon_q)_i^j$  représentent respectivement les déformations volumiques et déviatoriques conjuguées de  $p_i^j$  et  $q_i^j$ .

Il suffit alors de calculer l'opérateur élastique correspondant  $[\tilde{E}]_i^j$  et on obtient :

$$\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j = [\tilde{E}]_i^j \{\varepsilon_e\}_i^j - \{\sigma_e\}_i^j \quad (48)$$

Cette technique numérique donne des résultats satisfaisants tant que la loi virtuelle représentée par  $[\tilde{E}]_i^j$  reste définie positive, ce qui peut ne pas être le cas, notamment lorsque l'élément atteint un état de déformation élastoplastique dilatant ( $\tilde{K}_i^j$  devient négatif) : lorsque ce cas se présente, le programme détecte le problème en testant la valeur de  $\tilde{K}_i^j$  et le calcul de  $\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j$  est effectué selon la deuxième méthode définie ci-après pour le modèle de WILDE. Cette deuxième technique de ré-équilibrage présente l'avantage d'être applicable quelque soit l'état de déformation de l'élément, mais en contre-partie, la convergence vers la solution équilibrée par rapport au critère plastique, est moins rapide qu'avec la méthode basée sur (47) et (48).

## 8.2 Cas du matériau élastoplastique écrouissable (Modèle de WILDE).

Par rapport au modèle élastoplastique parfait, il convient d'inclure dans les équations régissant le problème, le fait que la surface de charge  $F\left(\{\sigma_{ij}\}_i^j\right) = 0$  dépend désormais de deux paramètres d'écrouissage  $(\varepsilon_v^p, \varepsilon_q^p)$  (cf. paragraphe 2.2).

Dans le cadre de la formulation incrémentale du paragraphe précédent, le critère de plasticité s'écrit :

$$F\left(\{\sigma_e\}_i^j, (\varepsilon_v^p)_{i-1}, (\varepsilon_q^p)_{i-1}\right) = 0 \quad (49)$$

Dans la relation (49), il est important de noter qu'à l'incrément de charge  $(i)$ , on ne peut tenir compte que de l'écrouissage apporté par l'incrément

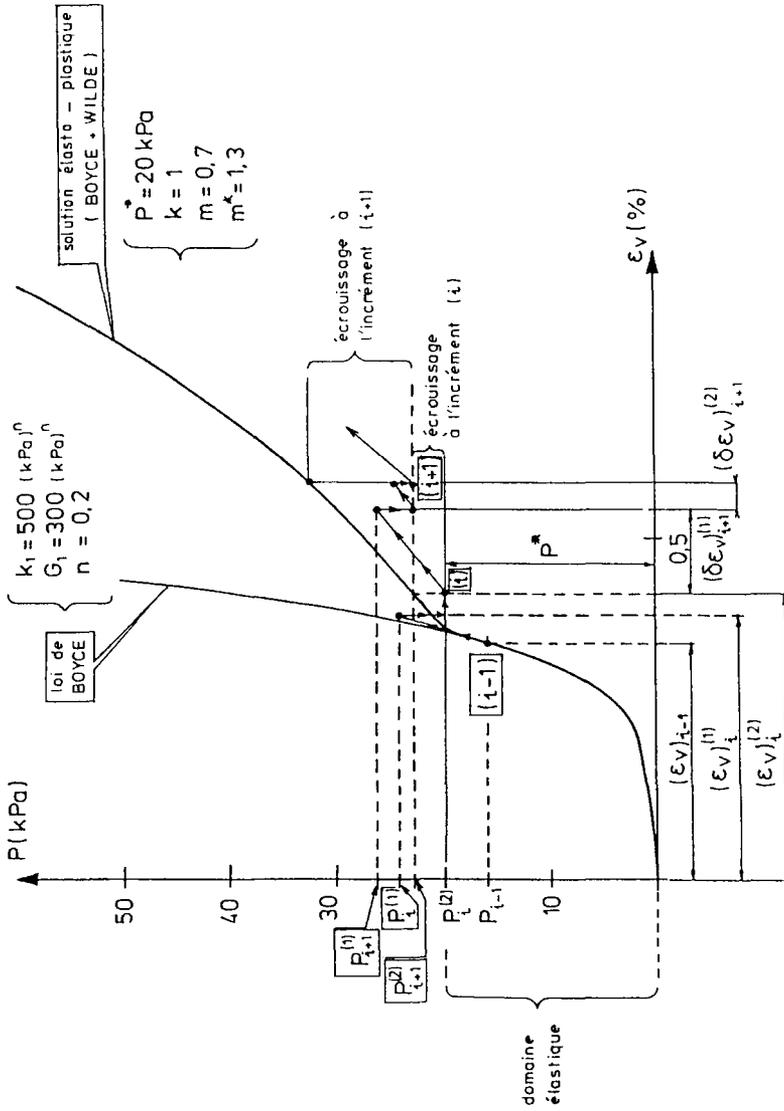


Figure 26

précédent  $(i-1)$  : en effet, il ne paraît pas possible de considérer les paramètres d'écroutissement  $(\varepsilon_v^p)_i$  et  $(\varepsilon_q^p)_i$  comme des inconnues dans la résolution des équations pour l'incrément  $(i)$  sans prendre le risque de produire un écroutissement d'origine purement numérique. Par conséquent,  $(\varepsilon_v^p)_i$  et  $(\varepsilon_q^p)_i$  ne peuvent être réactualisés qu'à la fin du pas de chargement  $(i)$  pour être ensuite utilisés à l'incrément suivant.

La figure (26) illustre cet aspect du calcul dans le plan particulier  $(p, \varepsilon_v)$  pour un trajet de contrainte isotrope  $(q = 0)$ , avec une loi de déformation élastique de type BOYCE (cf. relation (1)) jusqu'en  $p^*$  (niveau de contrainte correspondant à l'écoulement plastique, voir figure 2) ; au delà de  $p^*$ , la courbe représente l'évolution de la déformation volumique totale selon la loi de déformation élastoplastique déduite des modèles de BOYCE et WILDE. Cette figure permet de mettre en évidence un aspect assez paradoxal dans l'évolution numérique de la surface d'écoulement par rapport à l'évolution numérique des contraintes ; en effet à la fin de chaque incrément  $i$ , la réactualisation des paramètres d'écroutissement provoque un déplacement de cette surface d'écoulement, plaçant temporairement l'élément en question à l'intérieur du domaine élastique réactualisé. Pour le cas qui est illustré, on a considéré qu'à l'incrément  $i$ , la convergence était atteinte après deux itérations de ré-équilibrage ; le calcul de l'incrément suivant devrait normalement s'opérer en prenant en compte la direction donnée par la tangente à la loi d'écoulement réactualisée. Or, il apparaît assez clairement sur le graphique que l'utilisation de cet opérateur tangent peut conduire, après plusieurs pas de chargement, à un état de contraintes qui tend à s'éloigner de la surface de charge, avec même la possibilité d'un retour à un état élastique, dont la cause serait essentiellement numérique (il se produit une sorte de "dérive" progressive du calcul).

Pour remédier à ce problème, il suffit en général de modifier l'opérateur tangent utilisé pour la première itération de chaque pas de chargement, de manière à compenser partiellement le décalage avec la surface de charge provoqué par la réactualisation des paramètres d'écroutissement. La technique que nous proposons d'adopter ici consiste à faire systématiquement le premier calcul de chaque incrément avec la direction donnée par l'opérateur élastique tangent pour le niveau de contraintes considéré ; ceci conduit à modifier l'équation (39), lorsque  $j = 1$ , de la manière suivante :

$$[K_t]_i^{(0)} = \sum_e \int_{v_e} [B_e]^t [\nabla E(\sigma_e)]_i^{(0)} [B_e] dv \quad (50)$$

### Calcul des contraintes de déséquilibre plastique $\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j$

Avec le modèle de WILDE, la détermination de  $\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j$  à partir d'une projection orthogonale sur la surface d'écoulement n'est possible que moyennant la résolution nécessairement numérique de l'équation (43) ; en effet, en se plaçant dans le plan  $(p, q)$ , on a :

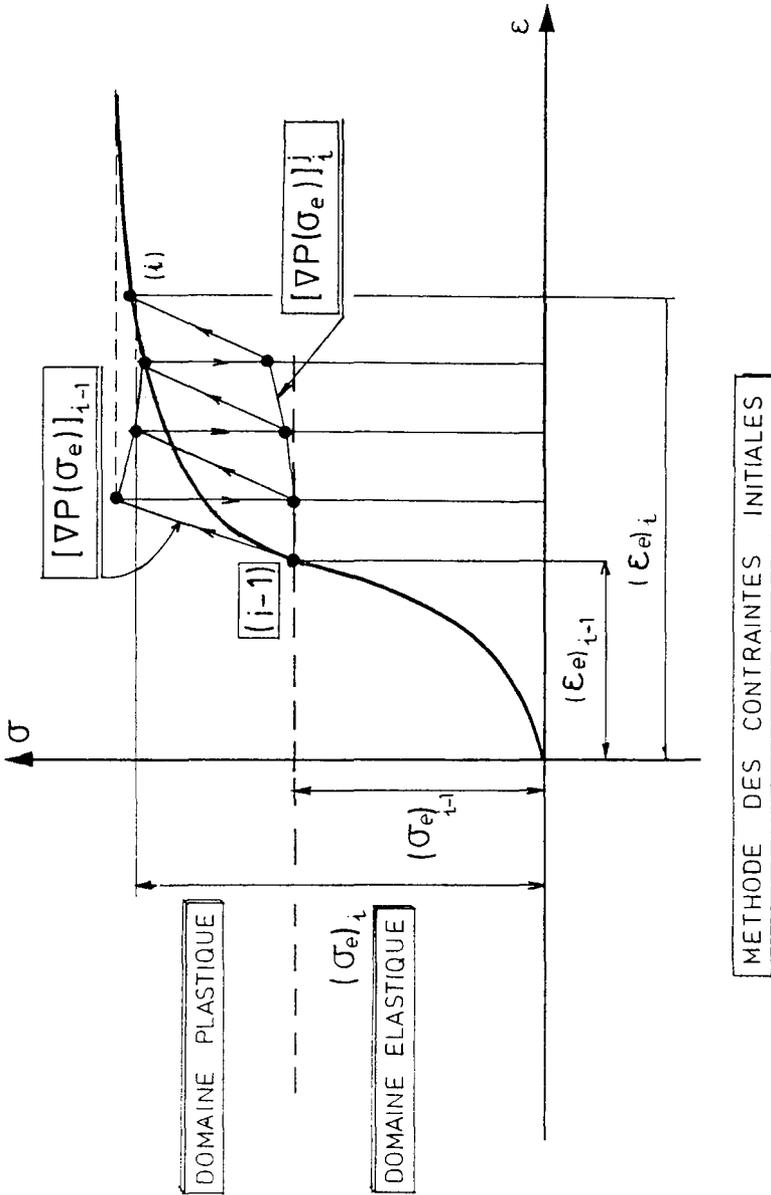


Figure 27

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}} F\right)_i^j = \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_i^j = -M \left( \text{Ln} \frac{p^*}{(p)_i^j} + \frac{K}{M} \left[ (\varepsilon_v^p)_{i-1} + (M^* - M) (\varepsilon_q^p)_{i-1} \right] - 1 \right) \\ \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_i^j = 1 \end{cases} \quad (51)$$

(on rappelle que  $\text{Ln}$  désigne ici le logarithme népérien).

Pour effectuer la projection orthogonale, il convient alors de résoudre le système d'équations non linéaires suivant, où  $(\delta \tilde{p})_i^j, (\delta \tilde{q})_i^j$  sont les inconnues :

$$\begin{cases} M (\delta \tilde{q})_i^j \left[ \text{Ln} \left[ \frac{p^*}{(p)_i^j - (\delta \tilde{p})_i^j} \right] + \frac{K}{M} \left[ (\varepsilon_v^p)_{i-1} + (M^* - M) (\varepsilon_q^p)_{i-1} \right] - 1 \right] \\ + (\delta \tilde{p})_i^j = 0 \\ -M \left[ p + (\delta \tilde{p})_i^j \right] \left[ \text{Ln} \left[ \frac{p^*}{(p)_i^j - (\delta \tilde{p})_i^j} \right] + \frac{K}{M} \left[ (\varepsilon_v^p)_{i-1} + (M^* - M) (\varepsilon_q^p)_{i-1} \right] \right] \\ + (q)_i^j + (\delta \tilde{q})_i^j = 0 \end{cases} \quad (52)$$

La résolution de (52) à partir d'une méthode itérative (encore par exemple de type NEWTON-RAPHSON) vient alourdir de manière conséquente, la résolution du problème d'autant plus que l'expérience a montré que la convergence pouvait être parfois localement lente, voir même incertaine pour des éléments présentant un état de contrainte proche de l'état caractéristique avec  $\frac{q}{p}$  voisin de  $m$ .

Il s'est donc avéré utile d'introduire un deuxième algorithme de ré-équilibrage, utilisé systématiquement avec le modèle de WILDE, en remplacement de la technique de projection orthogonale (52) évoquée ci-dessus. L'approche est basée sur la méthode des "contraintes initiales" décrite par Zienkiewicz, Vallapian et King [25] ; elle consiste à évaluer  $\{\delta \tilde{\sigma}_e\}_i^j$  à partir d'un opérateur de comportement tangent localement réactualisé (sur chaque élément), cette réactualisation n'étant pas prise en compte au niveau global de la structure. Ainsi, dans le calcul de la matrice de rigidité globale  $[K_t]_i^j$ , on prend toujours en compte (pour les éléments plastifiés)  $[\nabla P(\sigma_e)]_{i-1}$  (voir figure 27). Ce qui donne à chaque itération  $j$  :

$$\begin{aligned} [K_t]_i^j &= \sum_{\mathbf{P}} \int_{v_e} [B_e]^t [\nabla P(\sigma_e)]_{i-1} [B_e] dv \\ &+ \sum_{\mathbf{E}} \int_{v_e} [B_e]^t [\nabla E(\sigma_e)]_i^{j-1} [B_e] dv \end{aligned} \quad (53)$$

avec :

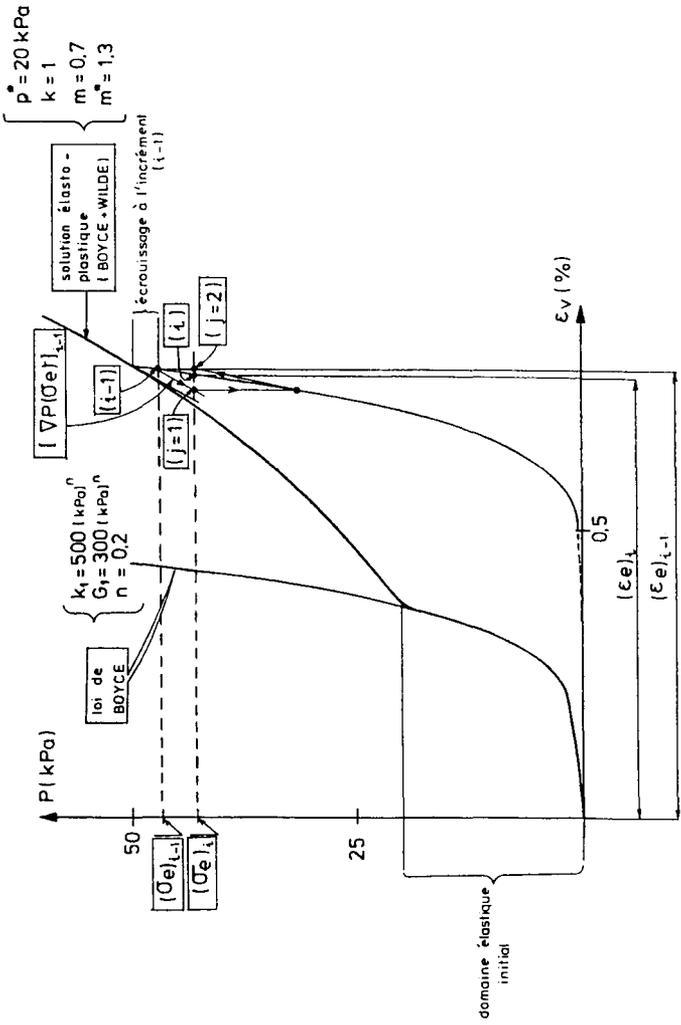


Figure 28

$\mathbb{I}P$  : l'ensemble des éléments à l'état plastique

$\mathbb{I}E$  : l'ensemble des éléments à l'état élastique.

L'algorithme de résolution est identique à celui donné au paragraphe 8.1.1 jusqu'à l'expression (43) ; Ensuite, on doit simplement calculer pour chaque élément plastifié  $[\nabla P(\sigma_e)_i^j]$  ; on trouve alors :

$$\{\delta\tilde{\sigma}_e\}_i^j = \left( [\nabla P(\sigma_e)_i^j] - [\nabla P(\sigma_e)_{i-1}] \right) \{\delta\varepsilon_e\}_i^j \quad (54)$$

En fait la relation (54) ne conduit pas pour chaque itération  $j$ , à un ré-équilibrage exact de la solution sur la loi de comportement, mais elle permet de converger vers la solution équilibrée dans pratiquement tous les cas, moyennant un nombre d'itérations qui peut être plus élevé qu'avec la première méthode proposée (projection orthogonale).

En effet, son caractère purement incrémental lui confère une plus grande sensibilité à l'ordre de grandeur des accroissements de charge successivement appliqués (pour une convergence rapide, il faut nécessairement des pas de charges très petits).

A l'inverse, la méthode basée sur une projection orthogonale fait référence (pour chaque incrément) au niveau global de contrainte atteint ; dans la mesure où la plastification reste contenue dans des zones élastiques plus rigides, il est alors possible d'appliquer des incréments plus importants, sans perturber pour autant de manière significative la vitesse de convergence ; le calcul peut donc progresser plus rapidement dans ce dernier cas.

Pratiquement, la méthode basée sur les "contraintes initiales" a été utilisée systématiquement avec le modèle de WILDE, et occasionnellement avec le modèle de DRUCKER-PRAGER lorsque la technique de projection orthogonale posait des problèmes d'ordre numérique (au niveau de la loi virtuelle associée, cf. paragraphe 8.1.3, relation (48)). En tout état de cause, il a été vérifié que les deux méthodes conduisaient à la même solution finale en contraintes.

### 8.3 Cas d'un élément déchargé.

Au cours des itérations de ré-équilibrage, une diminution du niveau des contraintes peut se produire pour certains éléments ; ce cas particulier ne pose pas de problème d'ordre numérique : l'état des contraintes est alors ré-équilibré par rapport à la courbe de décharge élastique, qui est ici non linéaire. Sur la figure (28), on a illustré le cas d'un élément qui, à l'incrément  $(i - 1)$  était dans l'état élastoplastique (la représentation graphique reprend les mêmes hypothèses qu'à la figure (26)), et qui redevient élastique à l'issue de 2 itérations pour l'incrément  $(i)$ .