

---

# Résolution numérique des équations de transport des tensions de Reynolds en écoulements turbulents confinés en rotation

Laurent Elena — Roland Schiestel

*Institut de Mécanique des Fluides, IM2  
Unité Mixte 34 CNRS  
1, rue Honnorat  
13003 Marseille*

---

*RÉSUMÉ. On présente une méthode pour résoudre les équations de transport des tensions de Reynolds dans les modèles de fermeture au second ordre utilisant un maillage semi-décalé. Les équations des tensions de Reynolds sont résolues en bloc afin de mieux maintenir les couplages importants pour la stabilité numérique. Cette méthode est ensuite appliquée à la détermination de l'écoulement turbulent engendré par un disque tournant dans une enceinte fermée grâce à deux modèles de turbulence différents. Les prévisions du champ moyen sont en bon accord avec l'expérience, certaines différences subsistant toutefois pour les fluctuations de vitesse.*

*ABSTRACT. A numerical procedure for Reynolds stress transport equations is presented using a semi staggered grid. The system formed by the stress equations is solved by point implicit method in order to preserve the so important couplings for numerical stability. The method is then applied for two different turbulence models to the prediction of the turbulent flow due to a rotating disk. The mean flow prediction are in good agreement with the experimental data, while for the turbulent field some discrepancies remain.*

*MOTS-CLÉS : volumes finis, modèle de turbulence, écoulements en rotation, stabilité numérique, maillage semi-décalé.*

*KEY WORDS : finite volumes, turbulence model, rotating flow, numerical stability, semi-staggered grid.*

---

## 1. Introduction

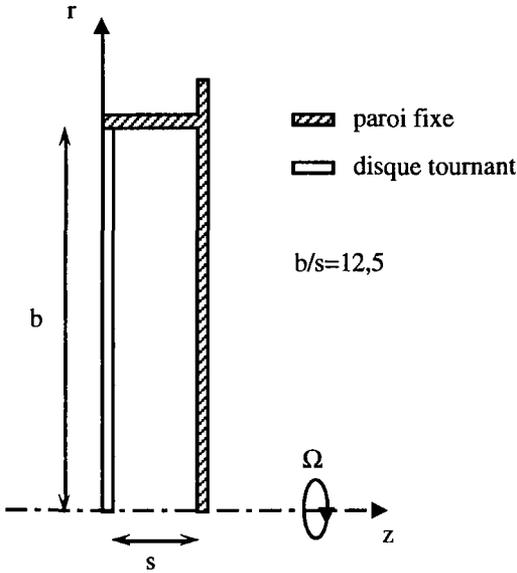
La recherche de meilleures performances pour les turbomachines a conduit les industriels à s'intéresser de façon approfondie à l'écoulement dans les compresseurs et entre les disques de turbine. Vu l'importance des débits et des taux de rotation, l'écoulement dans les turbomachines est le plus souvent turbulent. Du fait de la complexité des phénomènes en jeu, l'approche utilisant des fermetures en un point est la seule, à l'heure actuelle, qui puisse être retenue en vue d'applications industrielles pratiques. De nombreuses tentatives de prévisions de l'écoulement turbulent dans les cavités en rotation ou les systèmes rotor-stator ont été faites, mais aucune n'a été à la fois totalement satisfaisante et de portée générale. Les premiers résultats ont été obtenus en utilisant des modèles de type longueur de mélange [CHE 85], [CHE 88]. Ensuite, l'utilisation de modèles  $k-\epsilon$  à fort [MOR 87] ou à faible nombre de Reynolds [CHE 84], [SCH 93], n'ayant pas apporté les améliorations souhaitées, les recherches se sont portées sur des approches zonales. Ainsi, les associations d'un modelage algébrique des tensions de Reynolds dans le cœur de la cavité avec près des parois, soit à un modèle de longueur de mélange [IAC 91] soit à un modèle  $k-\epsilon$  à faible nombre de Reynolds de turbulence [SCH 93], [ELE 93] ont été réalisées. Ces modèles ont montré tout le bénéfice que l'on pouvait attendre d'une fermeture au niveau des équations de transport des tensions de Reynolds. Ces derniers, s'ils semblent posséder les potentialités pour décrire de façon satisfaisante le champ turbulent soumis à la rotation dans un milieu confiné, sont d'un traitement numérique plus complexe que les modèles de viscosité de la turbulence. En effet, les équations de Reynolds perdent leur forme diffusivité stabilisante puisque les tensions turbulentes y apparaissent comme des termes sources. La force de Coriolis a un effet déstabilisant sur les schémas numériques explicites ; pour résoudre ce problème, une forme d'implicitation a été introduite dans les équations du mouvement. Par ailleurs, nous avons été amené à mettre en œuvre un nombre important de techniques de stabilisation ainsi qu'une résolution en bloc des six équations de transport des tensions de Reynolds. Le but de cet article est de présenter la méthode numérique ainsi que les différentes techniques de stabilisation utilisées. La méthode est ensuite appliquée à l'étude d'une cavité rotor-stator fermée.

## 2. Modèles physique et mathématique

### 2.1. Géométrie

Itoh et co-auteurs [ITO 90] ont effectué une étude expérimentale détaillée de l'écoulement produit par un disque tournant dans une enceinte fermée. Dans leurs travaux, ils fournissent non seulement des profils de vitesses moyennes mais aussi des mesures de tensions de Reynolds fort utiles pour la validation des modèles de turbulence. La géométrie de cette cavité, ainsi que ses dimensions sont données sur la figure 1. En 1960, Daily et Nece [DAI 60] ont montré que la structure de l'écoulement dans les cavités rotor-stator fermées dépendait à la fois du nombre de Reynolds de rotation et du paramètre de forme  $G=s/b$ , mettant ainsi en évidence l'existence de quatre régimes : deux laminaires et deux turbulents. Ces régimes correspondent soit à des écoulements à couches limites mélangées soit à couches

limites séparées. Presque trente ans plus tard, Owen et Rogers [OWE 89] ont délimité les différents régimes en fonction du paramètre  $G$  et du nombre de Reynolds de rotation. La cavité étudiée ici a un rapport de forme suffisamment peu allongé pour que l'écoulement à l'intérieur de celle-ci soit à couches limites séparées. Le mouvement de base consiste alors en un écoulement radial, centrifuge le long du rotor et centripète près du stator.



**Figure 1.** Géométrie et dimensions de la cavité

## 2.2. Equations du champ moyen

Les équations du mouvement moyen sont déduites des équations de Navier-Stokes par moyenne statistique. Formulées en repère tournant, elles font apparaître les forces centrifuges et de Coriolis et peuvent s'écrire pour un écoulement incompressible stationnaire :

$$V_j V_{ij} = - \left( \frac{p}{\rho} \right)_{,i} + \left( \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)_{,i} - 2 \varepsilon_{ipq} \omega_p V_q + (v V_{ij} - R_{ij})_{,j}$$

$$V_{jj} = 0$$

Dans le cas des coordonnées cylindriques, on notera que  $V_{i,j} = \partial V_i / \partial x_j$  sauf pour  $V_{r,\theta} = \frac{1}{r} \partial V_r / \partial \theta - V_\theta / r$  et  $V_{\theta,r} = \frac{1}{r} \partial V_\theta / \partial r + V_r / r$ . De même  $P_{,i} = \partial P / \partial x_i$  sauf  $P_{,\theta} = \frac{1}{r} \partial P / \partial \theta$  et des relations analogues pour les tensions de Reynolds.

**2.3. Modélisation du champ turbulent**

Le présent travail s'appuie sur deux modélisations des équations de transport des tensions de Reynolds et porte essentiellement sur le développement d'une procédure numérique robuste et fiable pour la résolution de celles-ci. Il s'agit premièrement du modèle proposé par Hanjalic et Launder [HAN 76] qui est généralement considéré comme un modèle standard capable de traiter les écoulements à faibles nombres de Reynolds de la turbulence. Le second modèle utilisé, introduit par Launder et Tselepidakis [LAU 91], est beaucoup plus récent et fait partie de la nouvelle génération de modèles prenant mieux compte de l'anisotropie et des situations extrêmes de la turbulence (fortes anisotropies, bidimensionnalité). Les développements de ces deux modèles ne seront pas détaillés ici, leur formulation est simplement rappelée dans les tables 1 et 3. Toutefois, ces modèles ont été initialement testés pour la prévision de l'écoulement turbulent dans un canal plan, et ont donc nécessité des adaptations pour pouvoir traiter les écoulements tournants confinés. Ainsi les équations des tensions de Reynolds ont été transformées pour être formulées dans un repère tournant. Pour l'adaptation d'un modèle aux écoulements dans un système en rotation, nous avons retenu la méthode simple de Cousteix et Aupoix [COU 81]. L'invariance des modèles par rapport à la rotation est assurée par l'utilisation systématique de tenseurs objectifs dans les hypothèses de fermeture ce que l'on vérifie en remplaçant, dans le changement de référentiel, tous les gradients de vitesse  $U_{i,j}$  par  $V_{i,j} + \epsilon_{imj}\Omega_m$  [FU 87].

Pour le tenseur taux de dissipation des tensions de Reynolds dans le modèle RSM2, nous avons adopté une formulation qui, tout en gardant les mêmes caractéristiques que celui du modèle originel, permet de prendre en compte l'effet des différentes parois séparément. Il peut se formuler comme suit :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= (1 - f^{(r)})(1 - f^{(z)}) \left[ f_s \frac{R_{ij}}{k} + \frac{2}{3} (1 - f_s) \delta_{ij} \right] \epsilon \\ &+ \left( 1 - \frac{1}{2} f^{(z)} \right) f^{(r)} \epsilon_{ij}^{*(r)} + \left( 1 - \frac{1}{2} f^{(r)} \right) f^{(z)} \epsilon_{ij}^{*(z)} \\ \epsilon_{ij}^{*(p)} &= \frac{\epsilon}{k} \frac{\left( R_{ij} + R_{ij} n_j^{(p)} n_k^{(p)} + R_{jk} n_i^{(p)} n_k^{(p)} + R_{kl} n_k^{(p)} n_l^{(p)} n_i^{(p)} n_j^{(p)} \right)}{1 + \frac{3}{2} \frac{R_{pq}}{k} n_p^{(p)} n_q^{(p)}} \end{aligned}$$

avec  $p = r$  ou  $z$  et  $n_i^{(p)}$  composante suivant l'axe  $i$  de la normale à la paroi  $p$

$$\begin{aligned} f^{(p)} &= \exp \left( -10 \left( A^2 + \left( \frac{Re_t^{(p)}}{200} \right)^2 \right) \right) \quad \text{et} \quad Re_t^{(p)} = \frac{y_{(p)} \sqrt{k}}{\nu} \\ f_s &= \frac{1}{1 + \frac{Re_t}{10}} \end{aligned}$$

La formulation de ce modèle permet de respecter les comportements limites du tenseur de dissipation c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \text{— sur les parois latérales : } & \frac{\varepsilon_{11}}{4 R_{11}} = \frac{\varepsilon_{22}}{R_{22}} = \frac{\varepsilon_{33}}{R_{33}} = \frac{\varepsilon_{12}}{2 R_{12}} = \frac{\varepsilon_{23}}{R_{23}} = \frac{\varepsilon_{13}}{2 R_{13}} = \frac{\varepsilon}{k} \\
 \text{— sur l'enveloppe externe : } & \frac{\varepsilon_{11}}{R_{11}} = \frac{\varepsilon_{22}}{4 R_{22}} = \frac{\varepsilon_{33}}{R_{33}} = \frac{\varepsilon_{12}}{2 R_{12}} = \frac{\varepsilon_{23}}{2 R_{23}} = \frac{\varepsilon_{13}}{R_{13}} = \frac{\varepsilon}{k}
 \end{aligned}$$

— loin des parois, ce tenseur prend la valeur isotrope  $\varepsilon_{ij}=2\varepsilon/3\delta_{ij}$  pour les forts nombres de Reynolds de la turbulence et  $\varepsilon_{ij}=\varepsilon R_{ij}/k$  pour les faibles nombres de Reynolds.

$  \begin{aligned}  V_k R_{ij,k} = & -R_{ik} V_{j,k} - R_{jk} V_{i,k} \\  & -2(\varepsilon_{j pq} \omega_p R_{qi} + \varepsilon_{ipq} \omega_p R_{qj}) \\  & + \left( c_s \frac{k}{\varepsilon} R_{kl} R_{ij,l} \right)_{,k} \\  & + (v R_{ij,k})_{,k} \\  & - c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \\  & - c_2 \left( \tilde{P}_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \\  & + \sum_{l=r,z} \left[ c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( R_{km} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{kj} n_i n_k \right) \right. \\  & \left. + c_2 \left( \Phi_{km}^2 n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik}^2 n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{kj}^2 n_i n_k \right) \right] \frac{k^{3/2}}{c_z \varepsilon y_l} \\  & - \frac{2}{3} \varepsilon \left( (1 - f_s) \delta_{ij} + \frac{R_{ij}}{2k} f_s \right)  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & P_{ij} \\  & \Omega_{ij} \\  & D_{ij}^T \\  & D_{ij}^v \\  & \phi_{ij}^{(1)} \\  & \phi_{ij}^{(2)} \\  & \phi_{ij}^{(w)} \\  & \varepsilon_{ij}  \end{aligned}  $		
$  V_i \varepsilon_{,i} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ij} V_{ij} - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon}{k} + \left( C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} R_{ij} \varepsilon_{,j} + v \varepsilon_{,i} \right)_{,i} + C_{\varepsilon 3} v \frac{\varepsilon}{k} R_{jk} V_{ijl} V_{ijl}  $			
$  \tilde{P}_{ij} = P_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{ij}  $	$  P = \frac{1}{2} \tilde{P}_{ii} = \frac{1}{2} P_{ii}  $	$  f_s = \frac{1}{1 + \frac{Re_t}{10}}  $	$  f_\varepsilon = 1 - \frac{0.4}{1.8} \exp \left( - \left( \frac{Re_t}{6} \right)^2 \right)  $

**Table 1.** Modèle de turbulence de Hanjalic et Launder (RSM1)

$c_1$	$c_2$	$c_s$	$c'_1$	$c'_2$	$c_z$	$c_\epsilon$	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	$c_{\epsilon 3}$
1,8	0,6	0,22	0,5	0,3	2,5	0,15	1,275	1,8	2

**Table 2.** Constantes numériques de modélisation du modèle RSM1

$  \begin{aligned}  V_k R_{ij,k} = & - R_{ik} V_{j,k} - R_{jk} V_{i,k} & P_{ij} \\  & - 2 (\epsilon_{j p q} \omega_p R_{qi} + \epsilon_{i p q} \omega_p R_{qj}) & \Omega_{ij} \\  & + \left( c_s \frac{k}{\epsilon} R_{kl} R_{ij,l} \right)_{,k} & D_{ij}^T \\  & + (v R_{ij,k})_{,k} & D_{ij}^v \\  & + \frac{1}{3} (D_{ik}^v n_k n_j + D_{jk}^v n_k n_i) - \frac{1}{3} D_{kl}^v \delta_{ij} n_k n_l & D_{ij}^C \\  & - \tilde{c}_1 \left( a_{ij} + c'_1 \left( a_{ij} a_{ij} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right) \epsilon - a_{ij} \epsilon & \phi_{ij}^{(1)} \\  & - c_2 \left( \tilde{P}_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) + c_2 \epsilon a_{ij} \frac{P}{\epsilon} \\  & - 0,2 \left[ \frac{R_{kj} R_{li}}{k} (V_{k,l} + V_{l,k}) \right. \\  & \left. - \frac{R_{lk}}{k} \{ R_{ik} (V_{j,l} + \epsilon_{jml} \Omega_m) + R_{jk} (V_{i,l} + \epsilon_{iml} \Omega_m) \} \right] \\  & - r \left[ A_2 (\tilde{P}_{ij} + D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (\tilde{P}_{mn} + D_{mn}) \right] & \phi_{ij}^{(2)} \\  & + \sum_{l=r,z} c'_2 \left( \Phi_{km}^{(2)} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik}^{(2)} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{kj}^{(2)} n_i n_k \right) \frac{k \sqrt{R_{pq} n_p n_q}}{\epsilon y_l} & \phi_{ij}^{(w)} \\  & - \epsilon_{ij}  \end{aligned}  $		
$  \begin{aligned}  V_i \epsilon_{,i} = & - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} R_{ij} V_{i,j} - C_{\epsilon 2} f_\epsilon \frac{\tilde{\epsilon} \epsilon}{k} + \left( C_\epsilon \frac{k}{\epsilon} R_{ij} \epsilon_{,j} + v \epsilon_{,i} \right)_{,i} + C_{\epsilon 3} v \frac{\epsilon}{k} R_{jk} V_{i,jl} V_{i,jl} \\  & + \left( C_{\epsilon 4} v \frac{\tilde{\epsilon}}{k} k_{,i} \right)_{,i}  \end{aligned}  $		
$  \tilde{c}_1 = 3,1 \sqrt{A_2 A}  $	$  r = \min (0,6 ; A)  $	$  f_\epsilon = 1 / (1 + 0,63(A A_2)^{1/2})  $

**Table 3.** Modèle de turbulence de Launder et Tselepidakis (RSM2)

$c_2$	$c_s$	$c'1$	$c'2$	$c_\epsilon$	$c_{\epsilon1}$	$c_{\epsilon2}$	$c_{\epsilon3}$	$c_{\epsilon4}$
0,6	0,22	1,2	0,2	0,18	1,0	1,92	2,0	0,92

**Table 4.** Constantes numériques de modélisation du modèle RSM2.

### 3. Méthode et mise en œuvre numérique

#### 3.1. Notions générales sur les volumes finis

Nous situerons notre approche dans le cadre de la méthode des volumes finis et nous retiendrons le formalisme de Patankar [PAT 80]. Soit l'équation de transport de la variable  $\phi$  en régime stationnaire mise sous la forme suivante :

$$\text{Convection}(\phi) = \text{Diffusion}(\phi) + \text{Sources}(\phi)$$

En intégrant cette équation sur le volume de contrôle de la figure 2 et en appliquant un schéma d'approximation pour les termes de convection et de diffusion (schéma puissance dit « power-law »), on obtient alors le schéma à cinq points suivant :

$$a_P \phi^P = a_N \phi^N + a_S \phi^S + a_E \phi^E + a_W \phi^W + S_\phi = \sum_{v=N,S,E,W} a_v \phi^v + S_\phi \quad [1]$$

avec  $a_i \geq 0$  pour  $i=P,N,S,E,W$  et  $a_P = \sum_{v=N,S,E,W} a_v$

Dans cette équation, les coefficients  $a_i$  regroupent les termes de transport et  $S_\phi$  l'ensemble des termes sources.

D'une manière générale, les termes sources sont la plupart du temps non-linéaires et dépendent de la variable  $\phi$ . La méthode nécessite de linéariser les termes sources qui s'écrivent alors :

$$S_\phi = S_u + S_c \phi_p.$$

Une telle décomposition n'est bien entendu pas unique, mais pour des raisons de stabilité numérique, elle doit respecter certains critères [PAT 80] notamment  $S_c$  doit être négatif ou nul et une valeur fortement négative pour  $S_c$  joue le rôle d'une sous-relaxation. Pour notre part, nous avons utilisé la décomposition classique [PAT 80] suivante qui s'est avérée, dans la plupart des cas, satisfaisante. Elle a de plus l'avantage de forcer les variables telles que l'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation à rester positives.

$$S_\phi = \sum_i S_i \begin{cases} S_u = \sum_i \max(S_i, 0) \\ S_c = - \sum_i \frac{\max(-S_i, 0)}{\phi_p} \end{cases} \quad [2]$$

L'équation [1] peut alors s'écrire :  $(a_p - S_c) \phi^p = \sum_{V=N,S,E,W} a_V \phi^V + S_u$

La résolution des systèmes linéaires ainsi obtenus est effectuée grâce à un algorithme récursif de balayage ligne par ligne et colonne par colonne selon l'algorithme tridiagonal de Thomas. Habituellement, quelques itérations secondaires seulement sont nécessaires pour que l'algorithme général converge et les non-linéarités sont ainsi résolues par les itérations principales qui servent aussi à réaliser le couplage vitesse-pression.

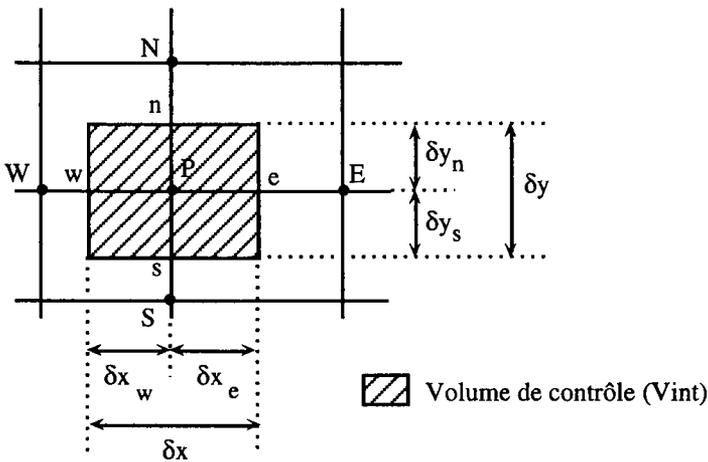


Figure 2. Volume d'intégration

### 3.2. Traitement des équations du champ moyen et de l'énergie du champ turbulent

Pour la discrétisation des vitesses, nous avons utilisé des maillages décalés. En effet, c'est une méthode qui permet d'éviter les aberrations numériques qui apparaissent lorsqu'au cours du processus itératif on se trouve en présence d'un champ de vitesse de type damier [PAT 80] et qui a été largement utilisé depuis l'introduction des méthodes de type MAC [HAR 65]. D'autres méthodes aussi sont apparues par la suite pour éliminer les modes parasites de pression sur des maillages non décalés [RHI 83], [THI 90]. La composante azimutale de la vitesse, la pression et le taux de dissipation de l'énergie cinétique sont discrétisés aux mêmes points

(figure 3). L'équation de l'énergie cinétique de la turbulence, quoique mathématiquement redondante est résolue à ce stade afin d'obtenir une valeur de  $k$  qui sera utilisée dans toutes les équations aux tensions de Reynolds.

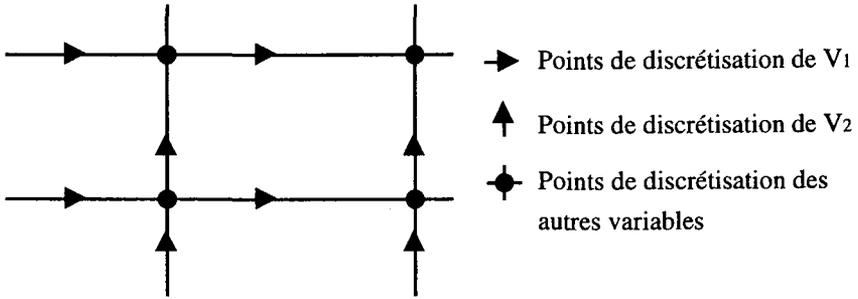


Figure 3. Points de discrétisation des variables (détail du maillage)

En variables primitives, la pression apparaît comme un paramètre qui s'ajuste de façon à satisfaire l'équation de continuité. Il est donc nécessaire d'utiliser un algorithme spécifique pour résoudre le couplage vitesse-pression. Nous avons utilisé ici l'algorithme itératif SIMPLER [PAT 80], qui s'est avéré plus robuste que le classique SIMPLE dans le cas de fortes rotations.

L'utilisation d'une fermeture au niveau des moments du second ordre fait perdre aux équations du mouvement moyen leur forme diffusives. En effet, les tensions ne sont pas modélisées sous la forme d'une diffusion turbulente par une formulation stabilisatrice, comme avec les modèles  $k-\epsilon$  ou de type longueur de mélange basés sur une hypothèse de viscosité de la turbulence, mais apparaissent comme des termes sources plus délicats à traiter. Dans le but de rétablir cette formulation diffusive, nous avons utilisé la technique introduite par Huang et Leschziner [HUA 76]. Elle consiste à faire apparaître un coefficient de pseudo-viscosité anisotrope dans les relations fournissant les tensions de Reynolds :

$$R_{ij} = -\Gamma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}$$

Cette relation est directement issue de la forme discrétisée des équations aux tensions de Reynolds. Cette décomposition une fois effectuée, il est alors possible de traiter les termes  $\Gamma_{ij} \partial V_i / \partial x_j$  comme des termes de diffusion et les  $\sigma_{ij}$  comme des sources complémentaires. Les termes contenus dans  $\Gamma_{ij}$  proviennent des termes de production et du terme linéaire des corrélations pression-déformation (et donc aussi du terme de paroi). A titre d'exemple, nous donnons la forme utilisée pour cette pseudo-viscosité dans le cas d'une tension de cisaillement :

— pour le modèle RSM1 :

$$\Gamma_{21}^P = \frac{[A R_{11}]_P \delta x \delta y}{\left[ \frac{c_s k}{r^2} \epsilon R_{33} - A \frac{V_2}{r} + \frac{v}{r^2} + B \frac{\epsilon}{k} \right]_P \delta x \delta y + \sum_{V=N,S,E,W} a_V}$$

— pour le modèle RSM2 :

$$\Gamma_{21}^P = \frac{[A R_{11}]_P \delta x \delta y}{\left[ \frac{c_s}{r^2} \frac{k}{\varepsilon} R_{33} - A \frac{V_2}{r} + D \frac{V}{r^2} + C \frac{\varepsilon}{k} + (A - 1) \frac{2}{k} \frac{1}{2} P_{ii} \right]_P \delta x \delta y + \sum_{v=N,S,E,W} a_v}$$

avec :

$$A = 1 - c_2 + \frac{3}{2} (f_x + f_y) c_2 c_2 \quad B = c_1 + \frac{3}{2} (f_x + f_y) c_1 + f_s$$

$$C = \tilde{c}_1 + 1 + (1 - f^{(r)}) (1 - f^{(z)}) f_s + \frac{2 \left( 1 - \frac{1}{2} f^{(z)} \right) f^{(r)}}{1 + \frac{3}{2} \frac{R_{22}}{k}} + \frac{2 \left( 1 - \frac{1}{2} f^{(r)} \right) f^{(z)}}{1 + \frac{3}{2} \frac{R_{11}}{k}}$$

$$D = 1 + \frac{1}{3} (f^{(r)} + f^{(z)})$$

ainsi que leur valeur maximale dans la cavité comparée à la viscosité moléculaire :

$$(\Gamma_{21} / \nu)_{max} = 5,43 \quad \text{pour le modèle RSM1}$$

$$(\Gamma_{21} / \nu)_{max} = 6,67 \quad \text{pour le modèle RSM2}$$

Dans les problèmes à forts taux de rotation, de sévères problèmes de stabilité peuvent apparaître. En effet, la discrétisation explicite des forces de Coriolis dans les équations du mouvement moyen mène à des schémas souvent instables. Ces problèmes ont été résolus grâce à un traitement semi-implicite des termes de Coriolis. Les équations du mouvement pour les vitesses radiales et azimutales peuvent être écrites schématiquement :

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = 2\Omega V_3 + f$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = -2\Omega V_2 + g$$

Cette écriture met en évidence les forces de Coriolis, les termes  $f$  et  $g$  représentant l'ensemble des termes restants. Ces deux équations peuvent être discrétisées de façon semi-implicite :

$$V_2^{n+1} - V_2^n = 2\Omega \delta t V_3^{n+1} + \delta t f(V_2^n, V_3^n)$$

$$V_3^{n+1} - V_3^n = -2\Omega \delta t V_2^{n+1} + \delta t g(V_2^n, V_3^n)$$

qui peuvent s'écrire en introduisant un pas fractionnaire, Schiestel et al. [SCH 93] :

$$\begin{aligned}\widehat{V}_2 - V_2^n &= 2\Omega\delta t V_3^n + \delta t f^n \\ \widehat{V}_3 - V_3^n &= -2\Omega\delta t \widehat{V}_2 + \delta t g^n \\ V_2^{n+1} - \widehat{V}_2 &= 2\Omega\delta t (V_3^{n+1} - V_3^n) \\ V_3^{n+1} - \widehat{V}_3 &= -2\Omega\delta t (V_2^{n+1} - \widehat{V}_2)\end{aligned}$$

Les deux dernières équations peuvent être résolues pour donner une correction de vitesse :

$$V_2^{n+1} = \widehat{V}_2 + \frac{A}{1+A} (\widehat{V}_3 - V_3^n) \quad [3]$$

$$V_3^{n+1} = \widehat{V}_3 - \frac{A}{1+A} (\widehat{V}_3 - V_3^n) \quad [4]$$

avec  $A = 2\Omega\delta t$ . Dans la pratique, les équations du mouvement sont résolues pour obtenir les composantes  $V_2$  et  $V_3$ . Elles sont ensuite modifiées grâce aux relations [3] et [4], le pas de temps  $\delta t$  étant remplacé, dans un problème stationnaire, par un coefficient de sous-relaxation équivalent. Ce procédé a permis d'obtenir la convergence de l'algorithme pour des taux de rotation élevés.

### 3.3. Traitement des composantes du tenseur de Reynolds

La discrétisation des équations de transport des tensions de Reynolds conduit en chaque point du maillage à six équations du même type que [1], où les termes sources linéarisés comprennent une combinaison de tensions de Reynolds. Si on reporte cette décomposition dans le premier membre des égalités, on peut alors écrire ces six équations sous la forme d'un système linéaire :

$$\begin{bmatrix} a_p - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & & & & \\ -\alpha_{21} & a_p - \alpha_{22} & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & & -\alpha_{56} & \\ & & & -\alpha_{65} & a_p - \alpha_{66} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}^P \\ R_{22}^P \\ \dots \\ R_{31}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{V=N,S,E,W} a_V R_{11}^V + \beta_1 \\ \sum_{V=N,S,E,W} a_V R_{22}^V + \beta_2 \\ \dots \\ \sum_{V=N,S,E,W} a_V R_{31}^V + \beta_6 \end{bmatrix}$$

Il suffit alors de résoudre en chaque point ce système pour obtenir les tensions de Reynolds. La discrétisation est réalisée sur un maillage non-décalé, toutes les composantes du tenseur de Reynolds étant évaluées aux points de pression. Cette méthode permet de maintenir les couplages existant entre ces équations et stabilise ainsi l'algorithme. La résolution de ces systèmes linéaires est effectuée par une méthode directe de type Gauss avec choix de pivot partiel.

Dans le but de stabiliser ce système linéaire, nous avons adopté, pour les équations régissant les tensions normales, une recombinaison des coefficients visant à renforcer la diagonale de cette matrice. Par exemple, considérons à présent l'équation de  $R_{22}$ . Les coefficients  $\alpha_{22}$  et  $\beta_2$  peuvent se décomposer en trois parties :

$$\alpha_{22} = \alpha_{22}^+ + \alpha_{22}^- + \alpha_{22}^* \quad \text{et} \quad \beta_2 = \beta_2^+ + \beta_2^- + \beta_2^*$$

où les indices supérieurs +, -, et \* se réfèrent aux parties positives, négatives et de signe a priori inconnu et variable. L'équation de transport discrétisée pour la tension  $R_{22}$  peut alors s'écrire avantageusement sous la forme suivante qui, associée à une sous-relaxation assure alors une diagonale dominante :

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_{21} R_{11}^P + \left( a_p - \alpha_{22}^- - \min(0, \alpha_{22}^*) - \frac{(\beta_2^- + \min(0, \beta_2^*))}{R_{22}^P} \right) R_{22}^P - \alpha_{23} R_{33}^P - \alpha_{24} R_{12}^P \\
 & - \alpha_{25} R_{23}^P - \alpha_{26} R_{31}^P = \sum_{V=N,S,E,W} \alpha_V R_{22}^V + (\alpha_{22}^+ + \max(0, \alpha_{22}^*)) R_{22}^P + \beta_2^+ + \max(0, \beta_2^*)
 \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, nous considérerons dans le paragraphe suivant l'équation de  $V_1$ . Lors de son intégration sur le volume d'intégration  $V_{int}$  de la figure 1 on obtient en isolant le terme en gradient de tension de cisaillement :

$$\begin{aligned}
 \iint_{V_{int}} V_j V_{1,j} dx dy &= \iint_{V_{int}} \left( \Sigma - \frac{\partial R_{12}}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_{V_{int}} \Sigma dx dy - [R_{12}^n - R_{12}^s] \delta x
 \end{aligned}$$

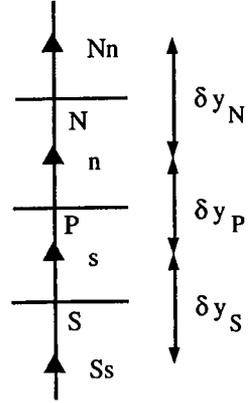
où  $\Sigma$  représente globalement tous les autres termes. Si on utilise une interpolation linéaire pour obtenir les valeurs de la tension  $R_{12}$  en n et s, on obtient alors dans le cas d'un maillage régulier une discrétisation qui ne prend pas en compte la valeur de cette tension en P, ce qui signifie qu'une variation de celle-ci en P n'affecte en rien l'équation de  $V_1$  ! Pour éviter cette aberration, Pope et Whitelaw [POP 76] ont introduit un quatrième maillage décalé pour la discrétisation des tensions de cisaillement. Cette technique permettait de préserver le lien qui existe entre les tensions de cisaillement et les gradients de vitesse moyenne. Mais, outre une plus grande complexité du code, cette technique avait pour inconvénient majeur lors d'une

résolution en bloc des équations des tensions de Reynolds de nécessiter un système linéaire en chacun des quatre points de discrétisation des tensions. Il s'ensuivait alors un coût important de calcul. Pour éviter cela, nous avons utilisé la technique récemment introduite par Obi et al. [OBI 89]. L'équation de  $R_{12}$  discrétisée en volume finis aux points P, N et S, peut se mettre sous la forme :

$$R_{12}^N = \left( \frac{\sum_V a_V R_{12}^V + S_A}{a_P + \alpha_{44}} \right)_N - \Gamma_N \left( \frac{V_1^{Nn} - V_1^n}{\delta y_N} \right)$$

$$R_{12}^P = \left( \frac{\sum_V a_V R_{12}^V + S_A}{a_P + \alpha_{44}} \right)_P - \Gamma_P \left( \frac{V_1^n - V_1^s}{\delta y_P} \right)$$

$$R_{12}^S = \left( \frac{\sum_V a_V R_{12}^V + S_A}{a_P + \alpha_{44}} \right)_S - \Gamma_S \left( \frac{V_1^s - V_1^{Ss}}{\delta y_S} \right)$$



**Figure 4.** *Détail du maillage*

$S_A$  regroupant l'ensemble des termes sources à l'exception de ceux qui contiennent  $\partial V_1 / \partial y$ . On peut alors obtenir les valeurs en n et s en effectuant une interpolation linéaire :

$$R_{12}^n = \left\langle \frac{\sum_V a_V R_{12}^V + S}{a_P + \alpha_{44}} \right\rangle_n - \langle \Gamma \rangle_n \frac{V_1^N - V_1^P}{\delta y_N}$$

$$R_{12}^s = \left\langle \frac{\sum_V a_V R_{12}^V + S}{a_P + \alpha_{44}} \right\rangle_s - \langle \Gamma \rangle_s \frac{V_1^P - V_1^S}{\delta y_S}$$

Pour des raisons de stabilité numérique, il est nécessaire que les coefficients  $\Gamma$  restent positif durant les itérations. Cette forme diffusive est alors réintroduite dans les équations du mouvement.

### 3.4. Autres techniques de stabilisation

Les équations étant non linéaires et couplées, la convergence de l'algorithme n'est pas assurée pour autant. En effet, les variations brusques des variables, qui se produisent souvent au cours des premières itérations sont très déstabilisantes. Dans le but de réduire les amplitudes des variations, des sous-relaxations régulières sont

utilisées à la fois pour les variables générales et pour certaines sources (en particulier pour les sources de rotation et des termes à faibles nombres de Reynolds de la turbulence).

### 3.5. Mise en œuvre numérique

Le code de calcul a été développé sur la base du TEAM (UMIST, Manchester) initialement conçu pour le calcul de jets pariétaux. Il a été généralisé pour l'étude des écoulements tournants et la formulation étendue permet de traiter les équations soit en repère fixe soit en repère tournant, les résultats étant bien entendu indépendants du choix effectué. Pour la géométrie considérée ici, les calculs ont été menés en repère fixe, ainsi la vitesse azimutale est fixée à  $\Omega r$  sur le disque tournant et à zéro sur les paroi fixes. Le taux de dissipation de l'énergie cinétique  $\epsilon$  à pour valeur imposée à la paroi  $2\nu(\sqrt{k})_{,i}^2$  tandis que toutes les autres variables sont nulles. Sur l'axe de symétrie, les tensions de cisaillement doivent s'annuler tandis que les autres variables sont symétriques.

L'utilisation de modèles à faible nombre de Reynolds de la turbulence nécessite l'utilisation de maillages très resserrés aux parois afin de bien prendre en compte les variations rapides des différentes variables. Pour le modèle RSM1, le choix s'est porté sur un maillage de  $80 \times 100$  points qui est généré par une série géométrique menant à une maille à la paroi de  $\Delta r/s = 310^{-4}$  (raison=0,76) pour l'enveloppe externe et de  $\Delta z/s = 310^{-4}$  (raison=0,85) sur les parois latérales, ce choix permet une solution indépendante du maillage. Du fait du nombre important de termes en gradient, le modèle RSM2 a nécessité un maillage plus fin, particulièrement dans le centre de la cavité, dans le but de rendre la solution indépendante de celui-ci. Les calculs ont été menés avec un maillage de  $80 \times 130$  points ayant une maille à l'enveloppe externe de  $\Delta r/s = 210^{-4}$  (raison=0,72) et de  $\Delta z/s = 310^{-4}$  (raison=0,85) pour les parois latérales.

La convergence de l'algorithme est contrôlée par l'évolution des résidus (défaut de bilan de chaque équation résolue) au cours des itérations ainsi que par l'évolution des valeurs individuelles de chaque variable. La convergence est considérée comme atteinte lorsque, pour chaque variable, le résidu décroît de façon régulière et que la variation de chaque variable au cours de 100 itérations ne dépasse pas 0,1 %. Pour des raisons de stabilité numérique, l'équation de l'énergie cinétique, quoique redondante, est résolue conjointement aux équations des tensions turbulentes. A la convergence, la différence entre  $k$  et  $R_{ij}/2$  est inférieure à 0.05 % en chaque point du maillage.

Vu la complexité des équations, il n'existe pas de critère de stabilité de la méthode. Néanmoins un certain nombre d'indicateurs permettent de juger de la sévérité du problème : ce sont le nombre de Rossby local,  $(\partial V_1/\partial x_2 + \partial V_2/\partial x_1)/\Omega$ , et le nombre de Reynolds de rotation  $Re$ .

Pour les deux modèles de turbulence, les calculs ont été menés pour un nombre de Reynolds de rotation de  $10^6$ , correspondant au cas le plus extensivement traité par Itoh et al.. Ils ont été menés sur le CRAY YMP 2E de l'IMT (Marseille). Le nombre d'itérations ainsi que les temps de calcul sont donnés dans la table 5.

Un autre calcul a été mené avec le modèle RSM2 en utilisant un maillage plus fin ( $120 \times 150$ ). Le raffinement effectué par rapport au maillage initial ( $80 \times 130$ ) est régulièrement réparti sur l'ensemble du domaine. Les mailles ont pour dimensions

$\Delta r/s=1,210^{-4}$  (raison=0,75) près de l'enveloppe externe et  $\Delta z/s=1,710^{-4}$  (raison=0,9) sur les parois latérales. Les conditions initiales ont été choisies très différentes de la solution, à savoir des champs moyens nuls (trois composantes de la vitesse et pression) et une distribution constante (raccordée aux paroi par une parabole) pour  $k$  et  $\epsilon$ , faisant ainsi apparaître la stabilité et la robustesse de l'algorithme proposé. Le champ turbulent de départ étant considéré comme isotrope :  $R_{ij}=2k\delta_{ij}/3$ . Sur la figure 5, sont tracés l'évolution des résidus (adimensionnés par le résidu de départ) en fonction du nombre d'itérations. Il faut remarquer qu'après une phase initiale irrégulière, les résidus décroissent de façon monotone. Le nombre d'itérations est, dans ce cas, assez important du fait du grand nombre de points de maillage (18000) et du choix des conditions initiales.

	Champ de départ	nbre d'itérations	temps/itérations	temps/itérations /pts de maillage
RSM1	solution d'un modèle ASM (1)	4500	0,94	$1,175 \cdot 10^{-4}$
RSM2	solution de RSM1	6000	1,754	$1,35 \cdot 10^{-4}$

Table 5. Nombre d'itérations et temps de calcul.

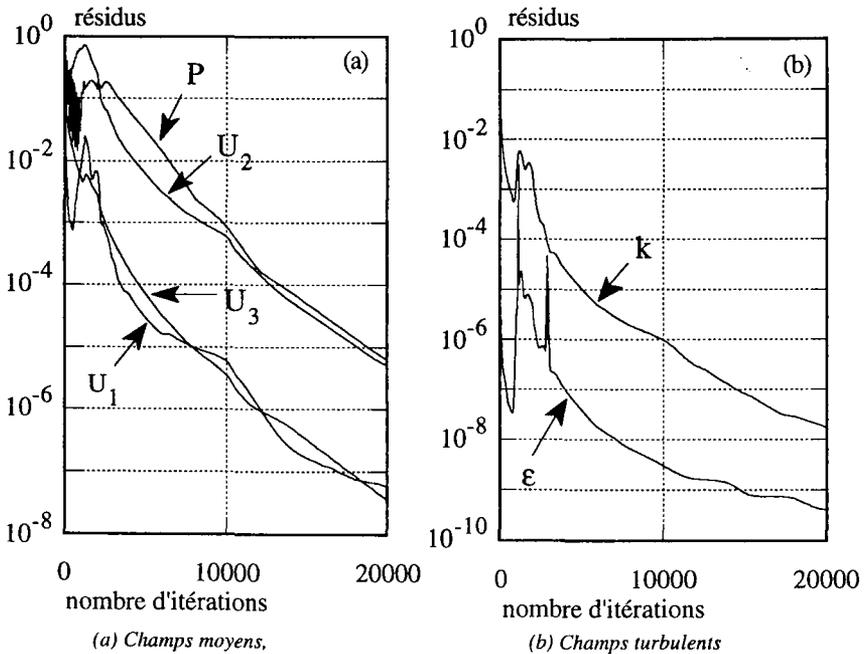


Figure 5. Evolution des résidus en fonction des itérations

<sup>1</sup> ASM : "Algebraic Stress Model". Les résultats obtenus avec ce modèle sont présentés dans [ELE 93].

#### 4. Application à l'étude d'un système rotor-stator

##### 4.1. Écoulement turbulent ?

Lors de leur étude expérimentale, Itoh et al. [ITO 90] ont observé une région relaminarisée de l'écoulement près de l'axe de rotation, là où les nombres de Reynolds locaux sont plus faibles. Une détermination précise de la répartition des zones relaminarisées et turbulentes est nécessaire, même pour la prévision des champ moyen, dans la mesure où l'épaisseur des couches d'Ekman et le taux de rotation de la partie centrale de l'écoulement dépendent directement du régime qui se développe. Sur la figure 6, nous avons représenté les iso-viscosités de la turbulence correspondant aux niveaux  $v_t = v$  et  $v_t = 10v$ . La première constatation est que le modèle RSM1 surestime de façon certaine la taille de la région relaminarisée puisque la couche limite d'Ekman qui se développe sur le rotor est totalement laminaire. Le modèle RSM2 corrige ce comportement erroné, plus de la moitié des deux couches d'Ekman étant turbulente. Pour ce modèle, la transition apparaît pour un rayon inférieur sur le stator, correspondant à un nombre de Reynolds local inférieur, ce qui est conforme aux observations de Itoh et al. [ITO 90]. La différence de comportement des deux couches d'Ekman peut être expliquée par le fait que l'écoulement le long du stator est décéléré et donc plus instable que l'écoulement près du rotor. D'autre part, pour un rayon donné, le fluide dans la couche d'Ekman du rotor arrive de la région proche de l'axe qui est naturellement laminaire alors que près du stator, il provient de la partie supérieure de la cavité où les forts gradients de vitesse rendent l'écoulement turbulent. La coexistence de ces deux régimes au sein d'un même écoulement nécessite donc un modèle de turbulence capable de traiter avec précision les régions à faible nombre de Reynolds de la turbulence non seulement près des parois mais aussi au cœur de l'écoulement.

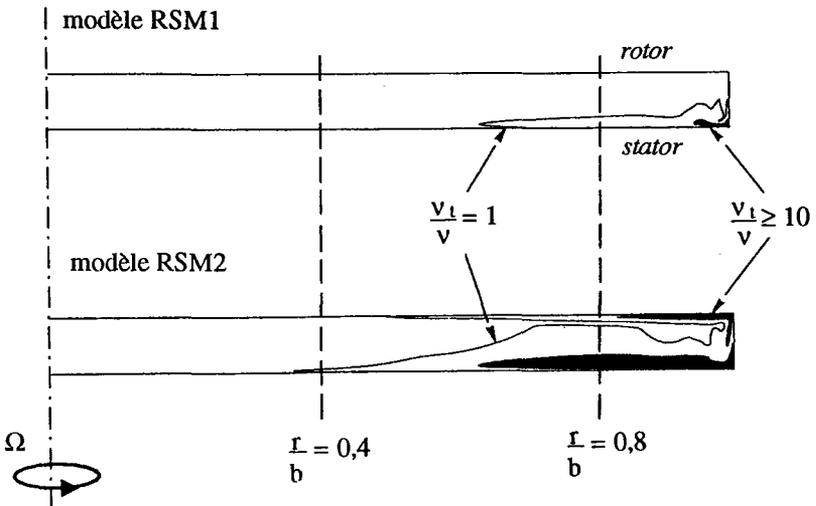


Figure 6. Iso-viscosités de la turbulence

#### 4.2. Résultats pour le champ de vitesse moyenne

Les profils de vitesse azimutale et radiale en différents rayons de la cavité sont donnés sur les figures 7 et 8. Les deux séries de profils montrent une large région centrale où les vitesses azimutale et radiales sont constantes, ce qui est conforme à l'expérience et au théorème de Taylor-Proudman. Le taux de rotation de cette région, obtenue avec le modèle RSM2 est en très bon accord avec l'expérience, les résultats des deux maillages étant très proches. Ce taux passe d'une valeur de 0,3 pour le plus petit rayon à une valeur de 0,4 pour les rayons plus importants. Cette variation s'explique par le fait que l'écoulement est laminaire près de l'axe de rotation et pleinement turbulent dans la partie supérieure de la cavité. Le modèle RSM1 qui, nous l'avons vu, donne un écoulement laminaire dans la plus grande partie de la cavité sous-estime (de l'ordre de 20 %) ce taux de rotation. Cette mauvaise prévision des zones laminaire et turbulente se retrouve sur les profils de vitesse radiale où ce modèle sous-estime nettement l'épaisseur des couches d'Ekman sur le rotor, tandis que dans la couche d'Ekman qui se développe sur le stator, les variations de la vitesse radiale restent acceptables. Ce même comportement avait déjà été trouvé en utilisant une modélisation zonale pour laquelle un modelage algébrique des tensions de Reynolds dans le centre de la cavité était couplé avec un modèle k- $\epsilon$  à faible nombre de Reynolds près des parois [ELE 93]. Le modèle RSM2 quant à lui, prévoit bien l'épaississement des couches d'Ekman et fournit par conséquent des profils en très bon accord avec l'expérience.

#### 4.3. Profils des tensions de Reynolds

Itoh et co-auteurs fournissent dans leur travaux un ensemble complet de mesure des tensions normales (figure 9) et de cisaillement (figure 10), ce qui a permis de les comparer avec celles obtenues avec les deux modèles de turbulence.

Dans la couche limite du rotor, seules les tensions obtenues avec le modèle RSM2 sont présentées pour les deux maillages, le modèle RSM1 fournissant des quantités turbulentes pratiquement nulles. Le comportement des tensions normales est assez différent de celui des tensions expérimentales. En effet, même si la position et la valeur du maximum sont corrects, la décroissance axiale des tensions calculées est beaucoup plus rapide que la décroissance expérimentale. Il est noté que Iacovides et Toumpanakis [IAC 93] ont trouvé les mêmes variations en utilisant un modèle aux tensions de Reynolds assez différent de ceux utilisés ici (figure 11).

Dans la couche d'Ekman qui se développe sur le stator, les tensions normales calculées avec le modèle RSM1 sont assez différentes des tensions expérimentales, avec une surestimation du maximum et décroissance trop rapide lorsque l'on s'éloigne de la paroi. Les résultats obtenus avec le modèle RSM2 sont en bien meilleur accord avec l'expérience, notamment en ce qui concerne les variations. La surestimation de  $R_{11}$  et la sous-estimation de  $R_{33}$  tendent à montrer que le transfert d'énergie entre ces deux composantes n'est pas parfaitement pris en compte par le modèle. Le terme de corrélation pression-déformation, correspondant à la redistribution de l'énergie suivant les différentes composantes du tenseur de Reynolds, est en effet le plus délicat à modéliser et est particulièrement sensible à la rotation. D'autres effets plus subtils de la rotation sur le champ turbulent couplés au cisaillement moyen peuvent aussi influencer sur la dynamique de l'écoulement (cf. § 5).

En ce qui concerne les tensions de cisaillement, l'allure générale est correcte, spécialement pour le modèle RSM2, traduisant le fait que les vitesses moyennes ont des variations satisfaisantes. Elles sont toutefois légèrement surestimées, en particulier celles faisant intervenir les fluctuations normales à la paroi, renforçant l'idée que la modélisation des termes de corrélation pression-déformation devra dans l'avenir prendre en compte des effets de la rotation sur la turbulence.

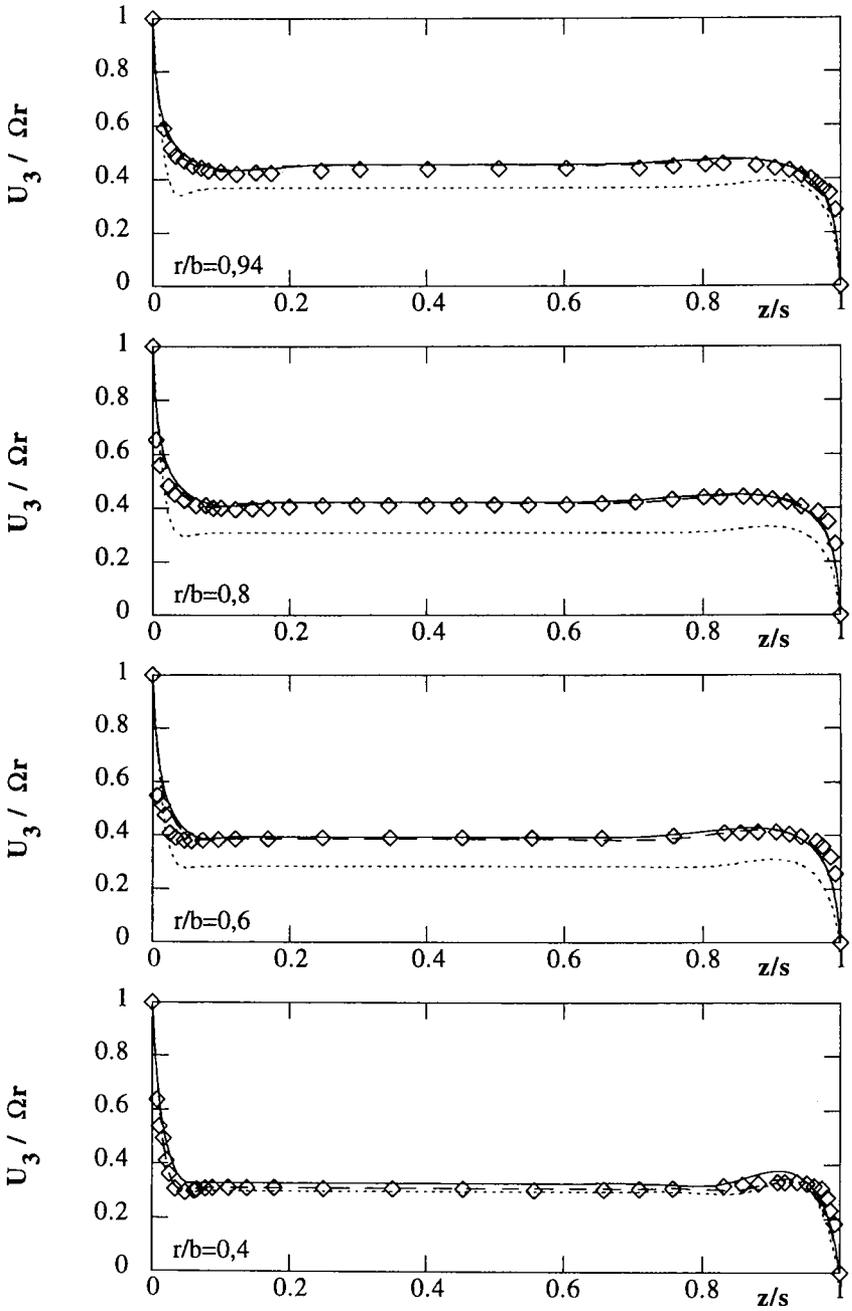
## 5. Conclusion et perspectives

Les techniques utilisées, sous-relaxation, linéarisation des termes sources, implication des termes de Coriolis dans les équations du mouvement, résolution en bloc des tensions de Reynolds, utilisation de viscosités apparentes déduites des équations discrétisées elles-mêmes, maillages semi-décalsés, ont permis d'obtenir des calculs convergents sur l'ensemble des cas traités. La méthode développée paraît donc parfaitement adaptée au calcul des écoulements turbulents complexes confinés en rotation rapide, cela à l'aide des modèles de transport des seconds moments.

Nous avons vu tout l'intérêt que pouvait apporter l'utilisation d'un modèle de transport au second ordre tel que ceux de la nouvelle génération tant au niveau des champs moyens que des quantités turbulentes. Toutefois, le modèle utilisé fournit un comportement des tensions de Reynolds près du stator souvent très différent du comportement expérimental, qui, en l'attente de simulation directe ou de grandes structures turbulentes dans cette géométrie reste pour l'instant notre seule référence. Au vu des travaux de Iacovides et Toumpanakis [IAC 93], il semblerait que ce comportement soit un trait de caractère propre aux modèles actuels. Ils ont en effet, pour la plupart, été mis au point à partir de bases de données d'écoulements de couches limites ou de canal plan. Ces modèles ne prennent donc pas en compte les effets implicites de la rotation sur la turbulence elle-même (tendance à la bidimensionalisation de la turbulence, blocage de la cascade d'énergie) même si ils sont mieux adaptés que les modèles à viscosité isotrope. Ces phénomènes sont complexes et encore incomplètement compris, ils font depuis quelques années l'objet de nombreux travaux tant sur le plan expérimental que théorique [SPE 87], [SHA 91], [CAM 92]. Le développement et l'utilisation de modèles de turbulence prenant en compte, au moins de manière simplifiée, les résultats de ces travaux est semble-t-il nécessaire afin de bien modéliser les différents phénomènes présents dans les écoulements dans les cavités en rotation. Néanmoins, les modèles de fermeture au second ordre sont intrinsèquement mieux adaptés que les modèles à viscosité isotrope. Par contre, les phénomènes de transition ou de relaminarisation dépendent du développement d'instabilités dont certains aspects ne peuvent être représentés à l'aide de modèles mathématiques stationnaires.

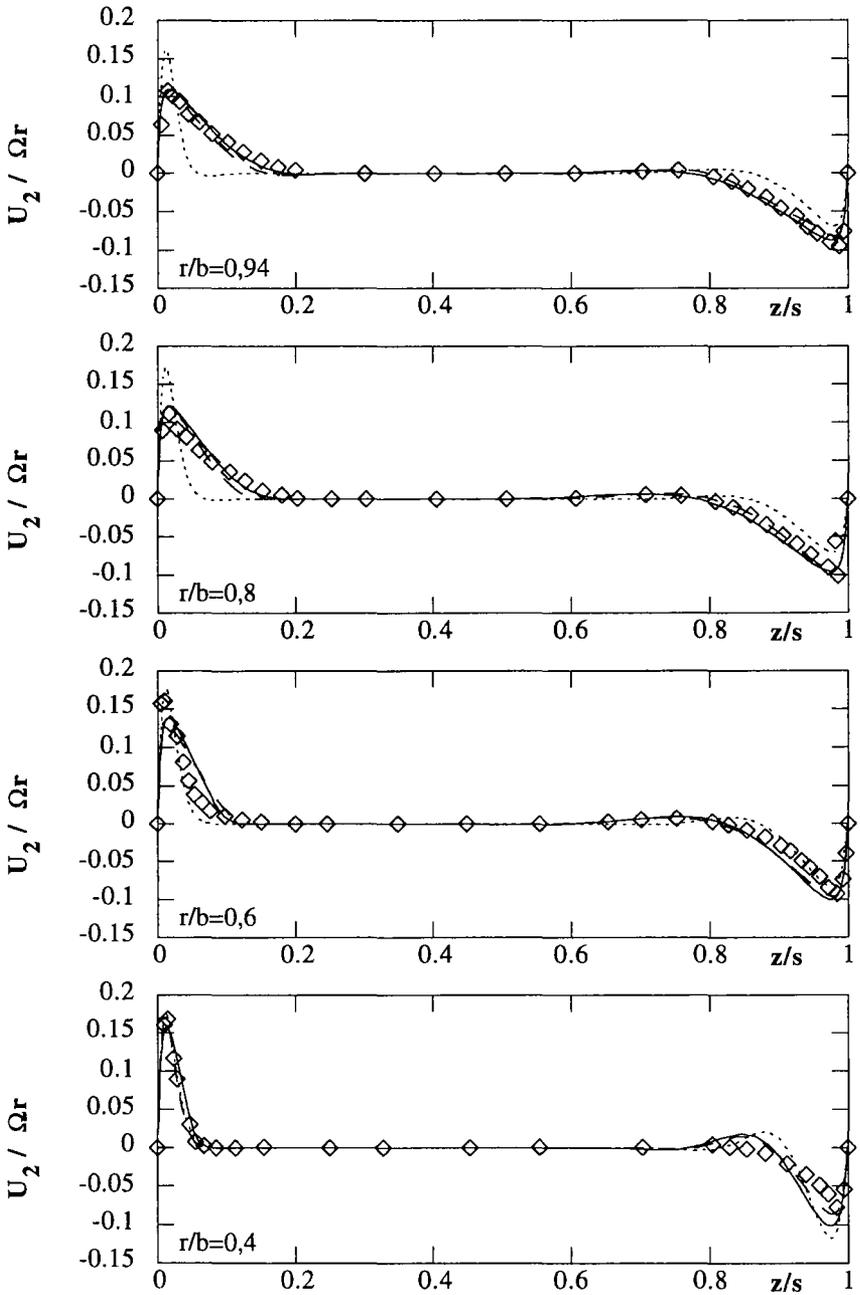
## Remerciements

Les calculs ont été menés sur le Cray YMP 2E de l'Institut Méditerranéen de Technologie (IMT, Marseille) avec le support de la DRET (groupe 6) et de la SNECMA (groupe YKL), auxquels les auteurs expriment leurs remerciements.



**Figure 7.** Vitesses azimutales en différents rayons

◇ expérience de Itoh et al (1990), ..... modèle RSM1 (80\*100 points),  
 ——— modèle RSM2 (80\*130 points), - - - modèle RSM2 (120\*150 points)



**Figure 8.** Vitesses radiales en différents rayons  
 ◇ expérience de Itoh et al (1990), ..... modèle RSM1 (80\*100 points),  
 ——— modèle RSM2 (80\*130 points), - - - modèle RSM2 (120\*150 points)

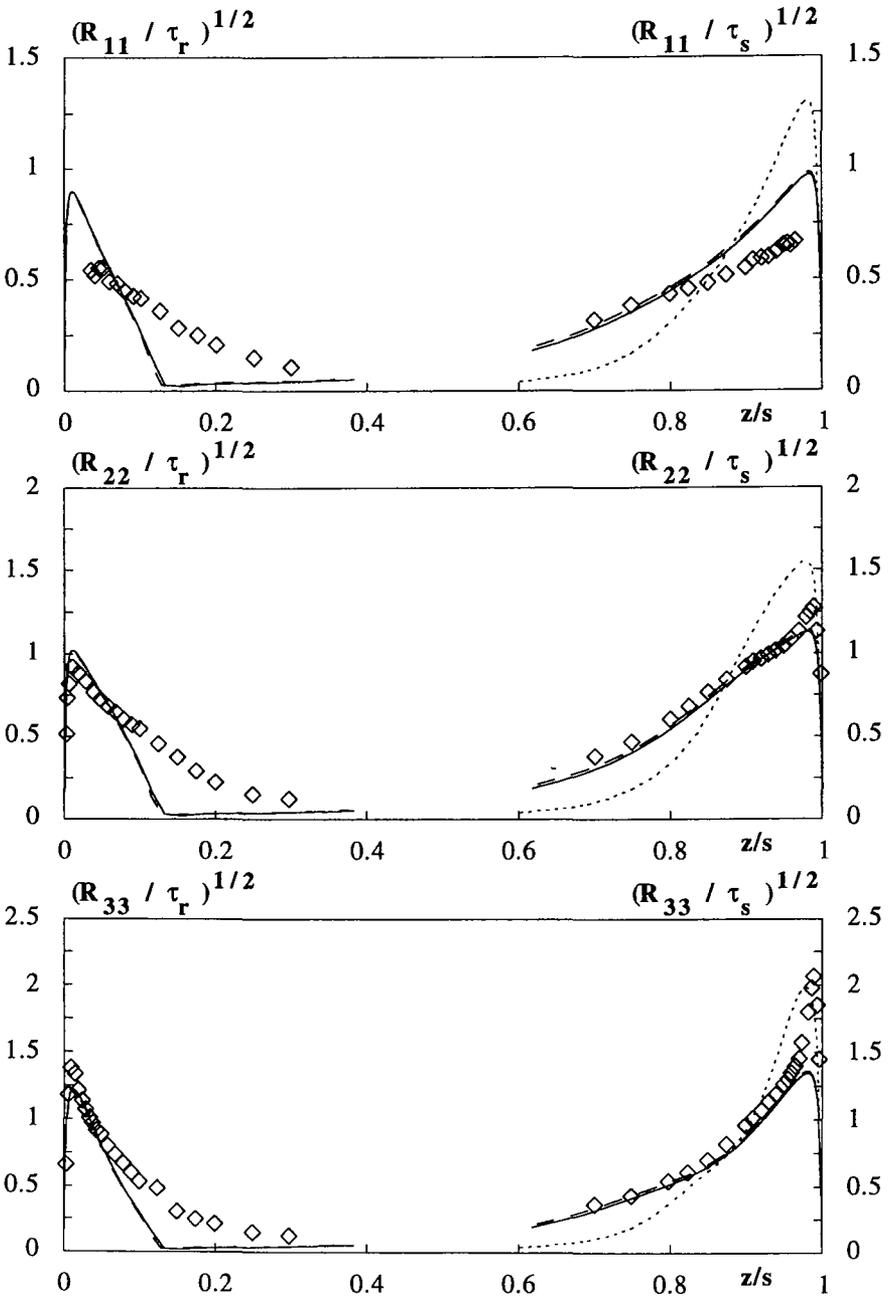
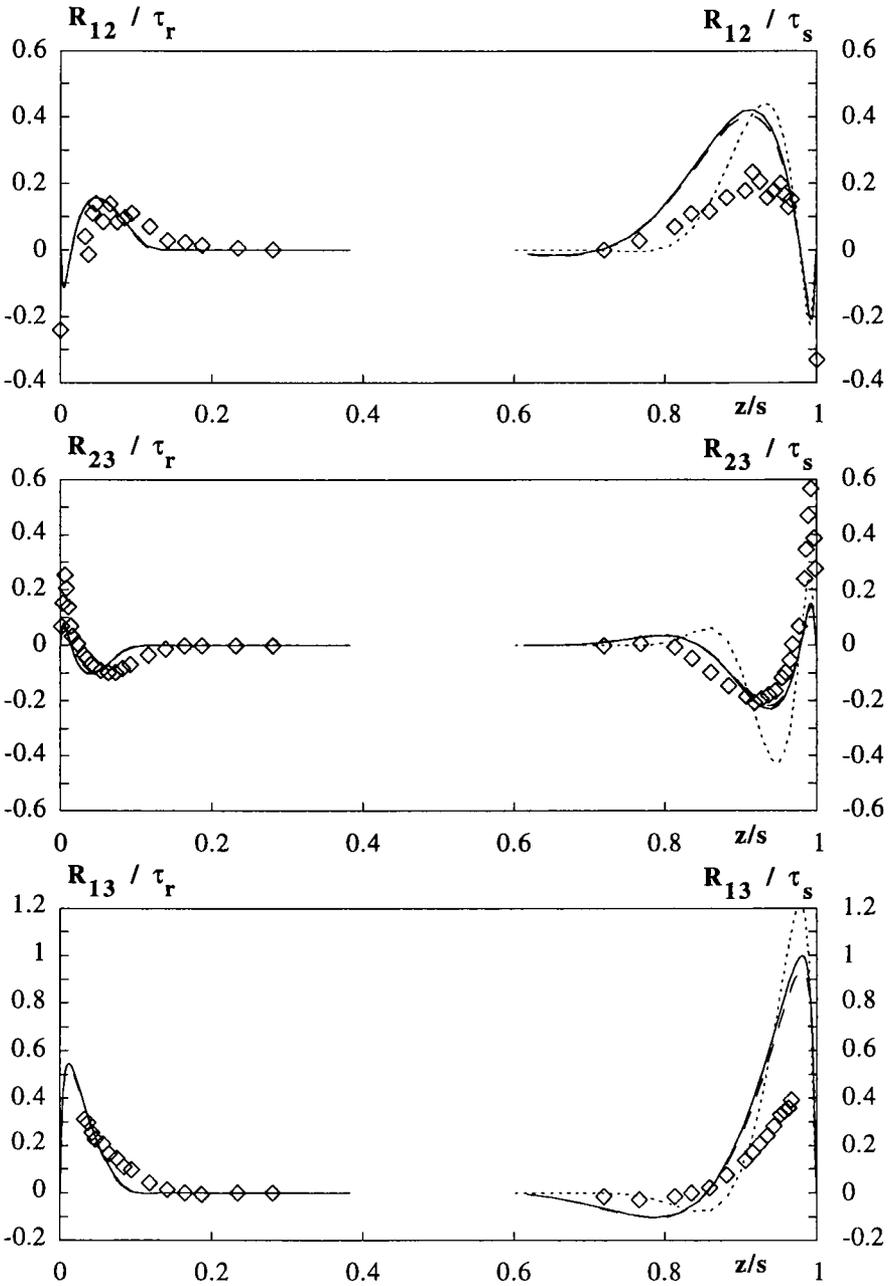


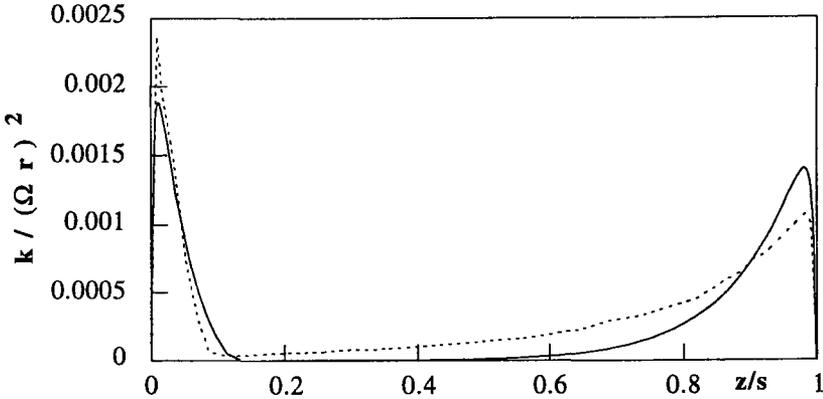
Figure 9. Tensions normales pour  $r/b = 0,8$

◇ expérience de Itoh et al (1990), ..... modèle RSM1 (80\*100 points),

— — — modèle RSM2 (80\*130 points), — — — modèle RSM2 (120\*150 points)



**Figure 10.** Tensions de cisaillement pour  $r/b = 0,8$   
 $\diamond$  expérience de Itoh et al (1990), ..... modèle RSM1 (80\*100 points),  
 ——— modèle RSM2 (80\*130 points), - - - modèle RSM2 (120\*150 points)



**Figure 11.** Energie cinétique de la turbulence pour  $r/b=0.8$   
 ----- modèle RSM [IAC 93], ——— modèle RSM2

## Bibliographie

- [CAM 92] CAMBON C., JACQUIN L. & LUBRANO J.L., «Towards a new Reynolds stress model for rotating turbulent flow», *Phys. Fluids*, Part A, 4, p. 812-824, 1992.
- [CHE 84] CHEW J.W., «Prediction of flow in rotating disc systems using the k-ε turbulence model», ASME 84-GT-229, Gas Turbine Conference, Amsterdam, 1984.
- [CHE 85] CHEW J.W., «Prediction of flow in rotating cavity with radial outflow using a mixing length turbulence model», *Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Pineridge Press, p. 318, 1985.
- [CHE 88] CHEW J.W., VAUGHAN C.M., «Numerical predictions of flow induced by an enclosed rotating disc», ASME 88-GT-127, Gas Turbine and Aeroengine Congress, Amsterdam, 1988.
- [COU 81] COUSTEIX J., AUPOIX B., « Modélisation des équations aux tensions de Reynolds dans un repère en rotation » *La Recherche Aérospatiale*, n° 4, p. 275-285, 1981.
- [ELE 93] ELENA L., SCHIESTEL R., «Numerical prediction of the turbulent flow in rotor-stator systems», *Engineering Turbulence Modelling and Measurements 2*, Ed. W. Rodi et F. Martelli, Elsevier Science Publishers, p. 765-774, 1993.
- [FU 87] FU S., LAUNDER B.E., LESCHZINER M.A., «Modelling strongly swirling recirculating jet flow with Reynolds stress transport closures», *Vth Int. Symp. on Turbulent Shear Flow*, Toulouse, Sept 7-9, 1987.
- [HAN 76] HANJALIC K., LAUNDER B.E., «Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence», *J. Fluid Mech.*, vol. 74, part 4, p. 593-610, 1976.
- [HAR 65] HARLOW F.H., WELCH J.E., «Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow», *Phys. Fluids*, 8, p. 2182, 1965.
- [HUA 85] HUANG P.G., LESCHZINER M.A., «Stabilization of recirculating flow computations performed with second moments closures and third order discretization», *Vth Int. Symp. on Turbulent Shear Flow*, Cornell University, August 7-9, 1985.

- [IAC 91] IACOVIDES H., THEOPHANOPOULOS I.P., «Turbulence modeling of axisymmetric flow inside rotating cavities», *Int. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 12, n° 1, p. 2-11, 1991.
- [IAC 93] IACOVIDES H., TOUMPANAKIS P., «Turbulence modelling of flow in axisymmetric rotor-stator systems», *Vth Int. Symp.on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Paris, France, 7-10 sept. 1993.
- [ITO 90] ITOH M., YAMADA Y., IMAO S., GONDA M., «Experiments on turbulent flow due to an enclosed rotating disk», *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, Elsevier Science Publishing Co, Inc - 1990.
- [LAU 91] LAUNDER B.E., TSELEPIDAKIS D.P., «Direction in second-moment modelling of near-wall turbulence», *29th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, USA, January 7-10 1991.
- [MOR 87] MORSE A.P., «Numerical prediction of turbulent flow in rotating cavities», ASME 87-GT-74, Gas Turbine conference and Exhibition, Anaheim, California, USA, 1987.
- [OBI 89] OBI S., PERIC M., SCHEUERER G., «A finite-volume calculation procedure for turbulent flows with second-order closure and colocated variable arrangement», *Proc. VIIth Int. Symp. on Turbulent Shear Flow*, Stanford University, p. 17.4.1-17.4.6, 1989.
- [PAT 80] PATANKAR S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, Mac Graw Hill, 1980.
- [POP 76] POPE S.B., WHITELAW J.H., «The calculation of near-wall wake flows», *J. Fluid Mech.*, vol. 73, part 1, p. 9-32, 1976.
- [RHI 83] RHIE C.M., CHOW W.L., «A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation», *AIAA J.*, vol. 21, p. 1525-1532, 1983.
- [SCH 93] SCHIESTEL R., ELENA L., REZOUQ T., «Numerical modelling of turbulent flow and heat transfer in rotating cavities», *Numerical Heat Transfer*, Part. A, vol. 24, pp. 45-65, 1993.
- [SHA 91] SHAO L., MICHARD M., BERTOGLIO J.P., «Effects of solid body rotation on the transport of turbulence», *VIIIth Int. Symp. on Turbulent Shear Flow*, Munich, Germany, 1991.
- [SPE 87] SPEZIALE C.G., «Second-order closure models for rotating turbulent flows», *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XLV, n° 4, p. 721-733, 1987.
- [THI 90] THIART G.D., «Finite difference scheme for the numerical solution of fluid flow and heat transfer problems on nonstaggered grids», *Numerical Heat Transfer*, Part. B, vol. 17, p. 43-62, 1990.

## Annexes. Notations

$a_{ij}$	Tenseur d'anisotropie $a_{ij}=(R_{ij}/k-2/3\delta_{ij})$
$A_2$	Second invariant du tenseur d'anisotropie $A_2=a_{ij}a_{ji}$
$A_3$	Troisième invariant du tenseur d'anisotropie $A_3=a_{ij}a_{jk}a_{ki}$
$A$	« Flatness factor » $A=1-9(A_2-A_3)/8$
$b$	Rayon extérieur de la cavité
$\left. \begin{array}{l} c_1, c_2, c'_1, \\ c'_2, c_3, c_2, \\ c_{\epsilon 1}, c_{\epsilon 2}, c_{\epsilon 3}, \\ c_{\epsilon 4}, c_1, c_\mu \end{array} \right\}$	Constantes de modélisation

$G$	Rapport de forme ( $s/b$ )
$k$	Energie cinétique de la turbulence
$n_i$	Normale à la paroi
$P$	Pression moyenne
$p$	Fluctuation de pression
$r$	Rayon
$R_{ij}$	Tenseur des tensions de Reynolds
$Re$	Nombre de Reynolds de rotation, $Re = \Omega b^2 / \nu$
$Re_t$	Nombre de Reynolds de la turbulence, $Re_t = k^2 / \nu \epsilon$
$s$	Largeur de la cavité
$U_i$	Vitesse moyenne dans le repère absolu
$U_1, U_2, U_3$	Composantes axiale, radiale et azimutale de la vitesse moyenne dans le repère absolu
$V_i$	Vitesse moyenne dans le repère tournant
$V_1, V_2, V_3$	Composantes axiale, radiale et azimutale de la vitesse moyenne dans le repère tournant
$v_i$	Fluctuation de vitesse
$z$	Coordonnée axiale
$\epsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence
$\tilde{\epsilon}$	$\tilde{\epsilon} = \epsilon - 2\nu(\sqrt{k})_{,i}^2$
$\epsilon_{ij}$	Taux de dissipation des tensions de Reynolds
$\epsilon_{ijk}$	Tenseur d'orientation
$\nu$	Viscosité cinématique
$\nu_t$	Viscosité turbulente $\nu_t = 0,09k^2/\epsilon$
$\theta$	Coordonnée azimutale
$\rho$	Densité
$\tau_s$	Tension à la paroi fixe
$\tau_r$	Tension au disque tournant
$\Omega$	Vitesse angulaire
$\omega_i$	Composantes du vecteur rotation $(\Omega, 0, 0)$

Indices des tenseurs (1,2,3)=(z,r, $\theta$ )

Article reçu le 21 mars 1994.  
Version révisée le 30 juin 1994.